

نیست / $\neq$

جمله ششم

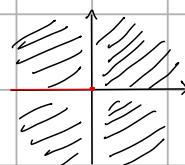
مثال: $f(z) = \sqrt{z}$ یعنی ریشه دوم از z

$$z = r e^{i\theta} \quad 0 < r, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

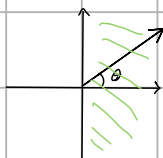
$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2})} \quad (k=0 \text{ یعنی اولی})$$

$$\Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

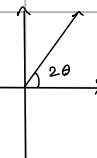
$$z^c = e^{c \ln z}$$



$$g(z) = z^2 = (r e^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta}$$



θ



f

$(f \circ g)(z)$ ترکیب متوالی

z در نیم صفحه راست قرار دارد

$$-\pi < 2\theta < \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

اما برای $(f \circ g)(z)$ کافی است z در دامنه f باشد یعنی $-\pi < \theta < \pi$

تبدیلات کسری خطی (یا خطی کسری)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

a, b, c, d در مختصات ثابت هستند

اگر $ad-bc = 0$ در همه جا ثابت است $\Leftrightarrow$ در ادامه همیشه فرض می‌کنیم $ad-bc \neq 0$

حالت خاص $c=0$:

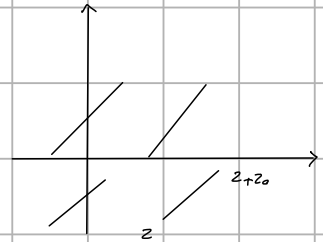
$$f(z) = \frac{az+b}{d} = \left(\frac{a}{d}\right)z + \left(\frac{b}{d}\right) \Rightarrow \text{خطی معکوس}$$

$$ad-bc \neq 0 \xrightarrow{c=0} ad \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, d \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{d} \neq 0$$

$$\begin{cases} z \rightarrow z + z_0 \\ z \rightarrow z \cdot z_1 \end{cases}$$
 ترکیب این دو
 نگاشت است

$$z \rightarrow z + z_0$$



خطوط راست و دایره به خطوط راست

و دایره فرستاده می شوند

$$z \rightarrow z_1 \cdot z \Rightarrow z \rightarrow e^{i\theta} \cdot z$$

$$z_1 = re^{i\theta}$$

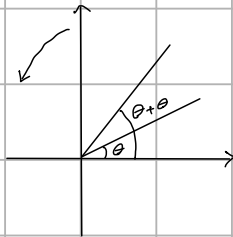
$$z \rightarrow r \cdot z$$

$$e^{i\theta} (re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\theta_0)}$$

دوران حول مبدأ در جهت عقربه

عکس ساعت (جهت مثبت است)

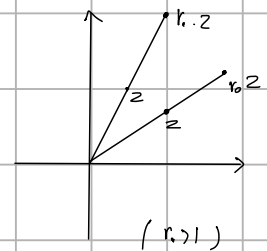
با اندازه زاویه عقربه



خطوط راست و دایره به خطوط راست

و دایره فرستاده می شوند

$$z \rightarrow r_0 \cdot z \quad (تجانس) \quad r_0 > 0$$



مجدداً خطوط راست و دایره به خطوط راست

و دایره فرستاده می شوند

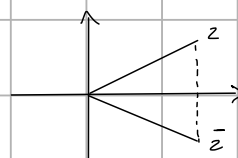
پس وقتی $C \neq 0$ ترکیب یک انتقال است و یک تجانس و دوران

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{acz+bc}{cz+d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{acz+ad-(ad-bc)}{cz+d} \quad \text{حالت } C \neq 0$$

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{ad-bc}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

پس در این حالت f شامل ترکیب است از چند انتقال، دوران و تجانس به همراه نگاشت زیر

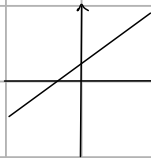
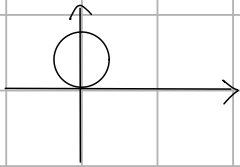
$$z \rightarrow \frac{1}{z}$$



مجدداً خطوط راست و دایره به خطوط راست

و دایره فرستاده می شوند

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$$



حالت $C \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ مجوعه خطه راست، دوايره مجوعه خطه راست و دوايره فرستاده می شوند.

$\frac{az+b}{cz+d}$ ترکیبی است حرکت از نگاشت های زیر: انتقال، دورانی، تقیاسی و $\frac{1}{2}$

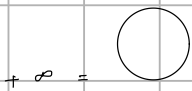
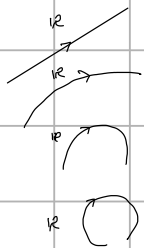
$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

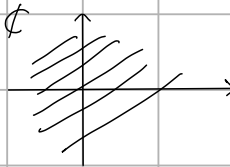
$$f(\infty) = \frac{a}{c}$$

$\Rightarrow$ قرار داد

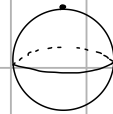
$$\Rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$



$+\infty =$



$+\infty =$



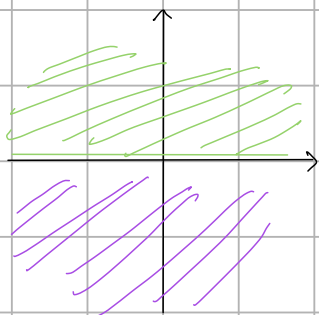
کره

دایره $+\infty =$ خط

کره = نیمه کره + صفحه

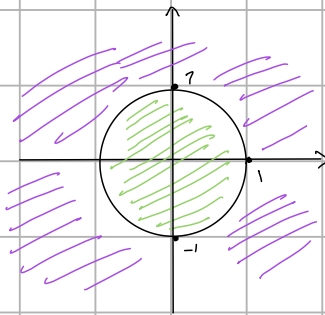
کره $\rightarrow$ کره : f خط کره

مثال:

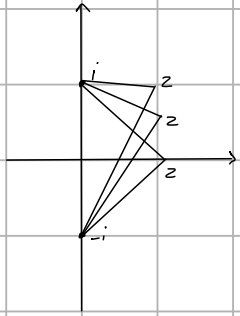
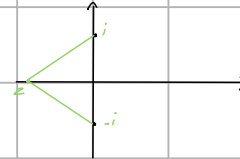


$y > 0$

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$



$$|f(z)| = \frac{|z-i|}{|z+i|} = \frac{\text{فاصله } z \text{ تا نقطه } i}{\text{فاصله } z \text{ تا نقطه } -i} = 1$$



$$|z-i| \leq |z+i| \Rightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq 1$$