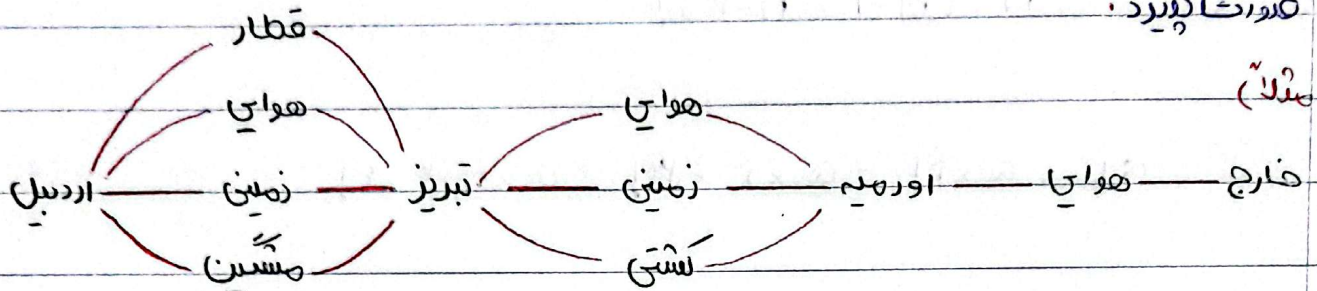


فصل ۱

روش‌های ترکیباتی

■ **قضیه ۱:** اگر عملی شامل ۲ مرحله باشد که مرحله اول بتواند به n_1 راه انجام شود و مرحله دوم برای هر یک از این روش‌ها به n_2 راه صورت گیرد آنگاه عمل مذکور می‌تواند به $n_1 \times n_2$ راه صورت پذیرد.



$$n_1 \cdot n_2 = 4 \times 3 = 12$$

(مثال) وقتی یک تاس قرمز و یک تاس سبز ریخته شود چند برابر ممکن وجود دارد؟

$$n_1 \cdot n_2 = 4 \times 4 = 16$$

■ **قضیه ۲:** اگر عملی به n_1 راه انجام شود و برای هر یک از این راه‌ها به n_2 راه صورت پذیرد و این به مرحله k ام به n_k راه انجام شود آنگاه صورت کلی مرحله به $n_1 \times n_2 \times n_k$ طریق صورت می‌پذیرد.

■ **جایبشت:** اگر اشیای مختلف کنار هم قرار گرفتن اشیاء را جایبشت می‌نامند.

a, b, c (مثلاً)	abc	bca
	acb	cab
	bac	cba

❑ قضیه: تعداد جایگشت‌های ممکن n شیء مختلف برابر است با « $n!$ »

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times (n-2) \times n$$

$$= n \cdot (n-1)!$$

$$= n \cdot (n-1)(n-2)!$$

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$$

$$1! = 1 \quad 0! = 1$$

مثال) با هر دو خانه صاف چه می‌توان ساخت؟
 $4! = 24 \quad 1 \times 2 \times 3 \times 4$

مثال) با هر دو خانه ابتدا چه می‌توان ساخت؟
 $n=7$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

❑ تعداد جایگشت‌های n شیء که n_1 تایی آنها از نوع اول و n_2 تایی آنها از نوع دوم و n_k تایی آنها از نوع k ام است که $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

❑ قضیه: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز که r به r اختیار می‌شوند برابر است با:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = nPr$$

مثال) با حروفی که صدق چند کلمه ۱۳ حرفی می توان ساخت؟

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 40 \quad \text{یا} \quad 5 \times 4 \times 3 = 40$$

مثال) از فهرست نام ۲۴ عضو یک باشگاه برای انتخاب رئیس و نائب رئیس و خزانه دار و منشی

چهار نفر استغیراج می شود به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

$$\frac{24!}{(24-4)!} = \frac{24!}{20!} = \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20!}{20!} = \dots$$

مثال) به چند طریق چهار نفر می توانند در کنار هم قرار گیرند به شرطی که دو نفر هموار در کنار هم باشند؟

$a \quad \underbrace{b \quad c} \quad d \quad 3! \times 2! = 12$
 یک نفر حساب داریم

■ قضیه: تعداد جایگشت های n شیء متمایز که در دور میزی گرد مرتب شده اند عبارتند از $(n-1)!$.

■ ترکیب: در واقع ترکیب همان معنای زیرمجموعه را دارد وقتی از تعداد ترکیب های r شیء

منتخب از مجموعه n شیء متمایز را می خواهند از صافاً دورا کل زیرمجموعه های r شیء را که

می توان از مجموعه n شیء متمایز انتخاب کرد می خواهند. تعداد زیرمجموعه های r تایی از n تایی.

■ قضیه: تعداد ترکیب های r شیء منتخب از مجموعه ای با n شیء متمایز عبارت است از:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

مثال) در ۴ پر تاب یک سکه به چرخه دو سکه یا چهار ضلعی می شود؟

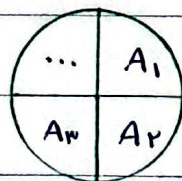
$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 15$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \binom{4}{2} = \binom{4}{4-2}$$

مثال) از ۴ شیء ۳ نفر را می توان چقدر به ۲ گروه از ۲ شیء ۱ نفر و یک نفر را می توان تشکیل داد؟

$$n_1 = \binom{4}{2} = 6 \quad n_1 \times n_2 = 6 \times 3 = 18$$

$$n_2 = \binom{3}{1} = 3$$



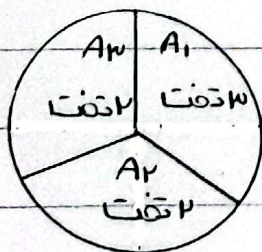
■ افزایش مثلاً افزایش A

■ قضیه: تعداد راه های افزایش مجموعه ای از n شیء به k زیر مجموعه با n1 شیء در اولین و n2 شیء در دومین و ... و nk شیء در k امین زیر مجموعه برابر است با:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

مثال) به چند طریق می توان هفت بازگشت را که برای شرکت در جلسه ای شرکت کرده اند در یک

اتاق ۳ نفره و ۲ اتاق ۲ نفره هفتی جای داد؟



$$\frac{7!}{3! 2! 2!} = 210$$

sam

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

مثبت اخیام « پاسال یا نیوتن » :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} 1 & & \\ & & & & & \binom{1}{1} 1 & \\ & & & \binom{1}{0} 1 & & & \\ & & \binom{2}{0} 1 & & \binom{2}{1} 2 & & \binom{2}{2} 1 \\ & \binom{3}{0} 1 & & \binom{3}{1} 3 & & \binom{3}{2} 3 & & \binom{3}{3} 1 \\ & & \binom{4}{0} 1 & & \binom{4}{1} 4 & & \binom{4}{2} 6 & & \binom{4}{3} 4 & & \binom{4}{4} 1 \\ \binom{5}{0} 1 & & \binom{5}{1} 5 & & \binom{5}{2} 10 & & \binom{5}{3} 10 & & \binom{5}{4} 5 & & \binom{5}{5} 1 \end{array}$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= \sum_{r=0}^5 \binom{5}{r} a^{5-r} b^r$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

sam

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)}{p}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

$$\sum_{r=0}^k \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

$$1) \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} \cdot 1^r = (1+1)^n = 2^n \quad \text{هرین:}$$

$$2) \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} \cdot (-1)^r = (1+(-1))^n = 0$$

$$3) \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (a-1)^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} (a-1)^r = a^n$$

$$4) \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n} \leftarrow \left\langle \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{n}{n-r} = \binom{n+n}{n} \right\rangle$$

$$5) \sum_{r=0}^F \binom{F}{r}^2 = \binom{2F}{F}$$

ضریب چندجمله‌ای $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ در بسط $x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_k^{r_k}$

با $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ می‌باشد برابر است با $\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$

سوال ۱) درجه $(a_1 + a_2 + a_3)^4$ ضریب $a_1^3 a_2 a_3^2$ را بیابید؟

$$\frac{4!}{3! 1! 1!} = 40$$

جمع اینها برابر صورت باشد

$$\frac{5!}{1! 3!} = 10$$

سوال ۲) $(a+b)^5$ ضریب $a^2 b^3$ را بیابید؟

سوال ۳) درجه $(3a_1 + 2a_2 - a_3)^4$ ضریب $a_1^3 a_2 a_3^2$ را بیابید؟

$$\frac{4!}{3! 1! 1!} \times (3)^3 \cdot (2)^1 \cdot (-1)^2 = 40 \times 27 \times 2 = 3240$$

فصل ۲

تعریف فضای نمونه ای: به مجموعه تمام برآمدهای ممکن در یک پیمایش در فضای نمونه ای می‌نویسند و آن را با S بزرگ نشان می‌دهند.

$$S = \{ \text{خط و شیر}^H \}$$

مثال) در پرتاب یک سکه

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$$

در پرتاب دو سکه

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

در پرتاب یک تاس

$$|S| = 2^n$$

در پرتاب همزمان n سکه

$$|S| = 4^n$$

در پرتاب همزمان n تاس

پیمایش: هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای را یک پیمایش می‌نامند و پیمایش‌ها را با A و B بزرگ نشان می‌دهند.

نشان می‌دهند احتمال پیمایش A را با $P(A)$ نشان می‌دهند و برابر است با تعداد

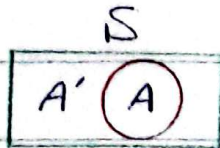
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \rightarrow \text{تعداد } A$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(S) = 1$$

مثال) احتمال کشیدن یک کارت باشماره یک از یک دسته کارت ۵۲ تایی ... ؟

دسته‌های ۴ تایی در کارت وجود دارد.

$$\text{احتمال} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$



$$A' = S - A$$

← $A \cap A' = \emptyset$

$$A \cup A' = S$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

• دو پیشامد A و B را ناسازگار، توپیک هرگاه $A \cap B = \emptyset$

■ اصول موضوع احتمال :

(۱) برای هر پیشامد A داریم $0 \leq P(A) \leq 1$

$$P(S) = 1 \quad (۲)$$

(۳) اگر A_1 و A_2 و A_3 و ... پیشامدهای زوج و ناسازگار باشند آنگاه

$$P(S) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

• جمع احتمال‌ها یک است.

$$\blacksquare P(A') = 1 - P(A)$$

$$\blacksquare \text{احتمال منفی نداریم، مثلاً} \quad -0.3 + 0.7 + 0.4 = 1$$

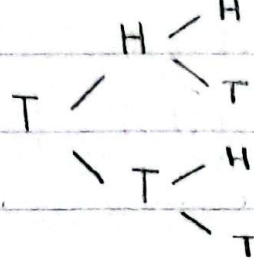
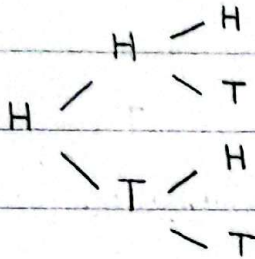
■ قضیه: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای نسبت به Ω باشد آنگاه $P(A)$ برابر است با

$$A = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \dots$$

• مجموع احتمال‌های برآیندهای فردی تشکیل دهنده آن

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots$$

مثال) اگر سه تپه‌ای را ۳ بار پرتاب کنیم احتمال به دست آوردن حداقل ۲ خطه چقدر است؟



$$\text{احتمال حداقل ۲ خطه} = \frac{6}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{3}}{2^3} = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(n) = \frac{\binom{n}{n}}{2^n}$$

■ تعداد مسیرها n پرتاب یک تپه

★ مثال) تاسی که گونه‌ای ساده شده است که احتمال وقوع هر یک در دو برابر احتمال وقوع هر یک زوج است، اگر یک بار ریختن این تاس G پیشامد وقوع عددی بزرگ‌تر از ۳ باشد $P(G)$ را بیابید.

حل: فرض کنید احتمال وقوع عدد زوج باشد y پس احتمال وقوع عدد فرد $2y$ می‌باشد، طبق اصل موضوع داریم:

$$2y + y + 2y + y + 2y + y = 1 \rightarrow 9y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{9}$$

$$G = \left\{ \overset{y}{\uparrow} 4, \overset{2y}{\uparrow} 5, \overset{y}{\uparrow} 6 \right\} \quad P(G) = 4y = \frac{4}{9}$$

مثال) اگر O_1 و O_2 و O_3 و ... دنباله‌ای نامتناهی از برآیندهای آزمایش مفروض باشد، تعیین کنید که $P(O_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ ، $i = 1, 2, 3, \dots$ واقعاً یک اندازه احتمال است؟

$$P(O_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad \text{برای هر } i \geq 1$$

$$P = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(O_1) + P(O_2) + P(O_3) + \dots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \frac{\text{جمله اول}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

sam

مثال ۱) در یک بازی با دسته کارت ۵۲ تایی ۵ کارت به تصادف اختیار می کنیم اگر ۳ کارت دارای یک شماره و دو کارت دیگر هم دارای یک شماره باشند، احتمال برنده شدن در این بازی چقدر است؟

حل: تعداد راه هایی که می توان ۳ کارت با یک شماره و ۲ کارت با یک شماره دیگر انتخاب کرد، برابر است با $n_1 \cdot n_2 = \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} = 24$ چون ۱۳ شماره از هر رنگ داریم ۱۳ راه انتخاب ۳ کارت با یک شماره و سپس ۱۲ راه انتخاب ۲ کارت با یک شماره دیگر وجود دارد پس راه های ممکن چنین می باشد که $12 \times 13 \times 24 = 3744$ برابر است با ۳۷۴۴ راه های ممکن انتخاب ۵ کارت از ۵۲ کارت برابر است با $\binom{52}{5}$ پس احتمال برد برابر است با $P(A) = \frac{3744}{\binom{52}{5}} = 0,0014$

مثال ۲) در پرتاب ۲ تاس احتمال آنکه مجموع اعداد به دست آمده بزرگ تر از ۳ باشد چقدر است؟

$$P(A) = \frac{34}{4^2} = \frac{34}{16}$$

$$A = \text{مجموع بزرگتر از ۳} \rightarrow \text{کوچکترین مساوی صفر} \rightarrow A' = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$P(A') = \frac{3}{34} \quad P(A) = 1 - \frac{3}{34} = \frac{31}{34} = \frac{11}{12}$$

■ احتمال شرطی: احتمال وقوع A به شرطی که B قبلاً اتفاق افتاده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(با فرضی شود چون اتفاق افتاده است)

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

■ حاکم ضرب:

مثال ۱) یک سازنده قطعات یکی هواپیما از تجربه های گذشته اش می داند که احتمال اینکه سفارشی به موقع برای بارگیری آماده شود برابر ۸۰ درصد است و احتمال اینکه سفارشی به موقع برای بارگیری آماده شود و همچنین به موقع تحویل شود برابر ۷۲٪ است. احتمال اینکه چنین سفارشی به موقع تحویل شود به شرط آنکه به موقع برای بارگیری آماده شده باشد چقدر است؟

$$P(A) = 80\% \quad \text{به موقع بارگیری } A$$

$$P(A \cap B) = 72\% \quad \text{به موقع تحویل } B$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{72\%}{80\%}$$

مثال ۲) اگر از مجموع ۲۴۰ لایپ تلویزیون که ۱۵ تای آن معیوب است به تصادف و به توانی ۲ لایپ برداریم احتمال اینکه هر دو معیوب باشند چقدر است؟

$$A \quad \text{اولی معیوب} \quad P(A) = \frac{15}{240}$$

$$B \quad \text{دومی معیوب} \quad P(B|A) = \frac{14}{239}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{15}{240} \times \frac{14}{239} = 0.003441$$

■ پیشامدهای مستقل: ۲ پیشامد A و B را مستقل گوئیم هرگاه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ و وقوع یا عدم وقوع یکی به وقوع یا عدم وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد.

■ قضیه: ۲ پیشامد A و B مستقل اند اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ باشد.

■ اگر A و B و P بیشمار مستقل باشند در آن صورت :

(الف) A و B' نیز مستقل اند

(ب) A' و B نیز مستقل اند

(ج) A' و B' نیز مستقل اند

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$

$$= P(A') \cdot P(B')$$

■ بیشماردهای A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_k مستقل اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر $2, 3, \dots, k$ تا از این بیشماردها مساوی حاصل ضرب احتمال های مربوط به هر بیشمار باشد.

$k=2$	$k=3 \quad A, B, C$	$k=4$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	۲ تا دو تایی
بیشمار	$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$	۳ تا سه تایی
	$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$	۱ تا چهار تایی
	$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$	۱۱
	چهار شرط	

« ۳۰ تا ۴۱ تا ۳۰ »

$2^3 - 1 = 7$

$k=5$ (۱۱ تا ۲۰ تا ۱۱)

■ برای k پیشامد مستقل لازم است تا مستقل گردند $\gg P^k - k - 1$.

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p} + \binom{k}{p} + \dots + \binom{k}{k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} - \binom{k}{0} - \binom{k}{1} = P^k - 1 - k$$

۴۵ مثال ۲۲) مطلوب است احتمال به دست آوردن (الف) ۳ شیر، ۳ پرتاب تصادفی یک سکه هگزن (ب) ۴ تا ۷ میس و ۲ بار دریافت یک تاس هگزن.

(الف) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(ب) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 0.00046875$

مثال) سکه ای ۳ بار پرتاب می شود اگر A پیشامد رخ دادن شیر، هر یک از دو پرتاب اول و B پیشامد رخ دادن خط در پرتاب سوم و C پیشامد رخ دادن دقیقاً ۲ خط در ۳ پرتاب باشد نشان دهید.

(الف) پیشامدهای A و B مستقل اند

(ب) پیشامدهای B و C وابسته اند

(الف) $A = \{HHH, HHT\}$ $n(A \cap B) = 1$

$B = \{HHT, HTH, THT, TTT\}$ $n(B \cap C) = 2$

$C = \{TTH, THT, HTT\}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$ پس A و B مستقل اند

(ب) $P(B \cap C) = \frac{2}{8} \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{64}$

B و C مستقل نیستند پس وابسته اند.

■ **قانون احتمالات با قاعده حذف:** اگر پیشامدهای $B_1, B_2, \dots, B_k$ افرازی از

فضای نمونه ای که باشند آنگاه برای هر پیشامد A داریم:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k) = 1$$

که توجه داشته باشید که %

■ **B و B' افرازی از Ω هستند:**

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B') \cdot P(A|B')$$

★ **مثال:** کار تکمیل برای بزرگ ران میهن است به علت ایستادگی به تأخیر پیوسته فرض کنید احتمال

اینکه اعتصابی رخ دهد ۴۰٪ احتمال اینکه اعتصابی نباشد و کار به موقع انجام شود ۶۰٪

و احتمال اینکه اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود ۲۵٪ است احتمال اینکه کار به موقع

انجام شود چقدر است؟ A کار به موقع انجام شود B' نبود اعتصاب B رخداد اعتصاب

$$(0.40)(0.25) + (0.60)(0.60) = 0.56$$

★ **مثال:** اعضای یک شرکت مشاوران سه آژانس اتومبیل کرایه می کنند از آژانس یک به میزان ۴۰٪

از آژانس ۲ به میزان ۳۵٪ و از آژانس ۳ به میزان ۲۵٪ اگر ۹٪ از اتومبیل های آژانس یک،

۲٪ از اتومبیل های آژانس ۲ و ۶٪ از اتومبیل های آژانس ۳ به تنظیم موتور نیاز داشته

باشد احتمال اینکه یک اتومبیل کرایه ای که به شرکت مشاور تبدیل شده است به تنظیم موتور نیاز

داشته باشد چقدر است؟ A تنظیم موتور B_1 آژانس ۱

$$P(B_1) = 0.4 \quad P(B_2) = 0.35 \quad P(B_3) = 0.25$$

$$P(A|B_1) = 0.09 \quad P(A|B_2) = 0.02 \quad P(A|B_3) = 0.06$$

$$P(A) = (0.4)(0.09) + (0.35)(0.02) + (0.25)(0.06) = 0.12$$

قضیه بیز: اگر پیشامدهای $B_1, B_2, \dots, B_k$ افزایی از فضای نمونه ای که باشند آنگاه برای هر پیشامد A در S که $P(A) \neq 0$ باشد داریم:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A | B_i)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$$

مثال) بهدراجه به مثال قبل (آژانس) اگر اتوبوس کرایه ای که به شدت مشغول و تعویلی خسته به تقسیم صورت نیاز داشته باشد احتمال اینکه متعلق به آژانس ۲ باشد چقدر است؟

$$P(B_2 | A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A | B_2)}{P(A)} = \frac{(0.13)(0.12)}{0.112} = \frac{0.0156}{0.112} = 0.139$$

مثال) در استان صغینی دودزایی ۲۵٪ تمام اتوبوس ها بیش از حد کادی است اگر در آنصورت دودزایی و سایر نقش استان اتوبوسی که بیش از حد دود تولید می کند با احتمال ۹۹٪ برود و شود و اگر اتوبوسی که دودزایی آن بیش از حد کادی نیست با احتمال ۱۷٪ در این آنصورت دودزایی احتمال اینکه اتوبوسی که در آنصورت دودزایی اتوبوسی باشد که دودزایی آن بیش از حد کادی است چقدر است؟

$$P(B) = 0.25 \rightarrow P(B') = 0.75 \quad B = \text{دودزایی بیش از حد}$$

$$P(A | B) = 0.99 \quad P(A | B') = 0.17$$

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) \cdot P(B)}{P(A | B) \cdot P(B) + P(A | B') \cdot P(B')}$$

$$= \frac{(0.99)(0.25)}{(0.99)(0.25) + (0.17)(0.75)} = 0.74$$