



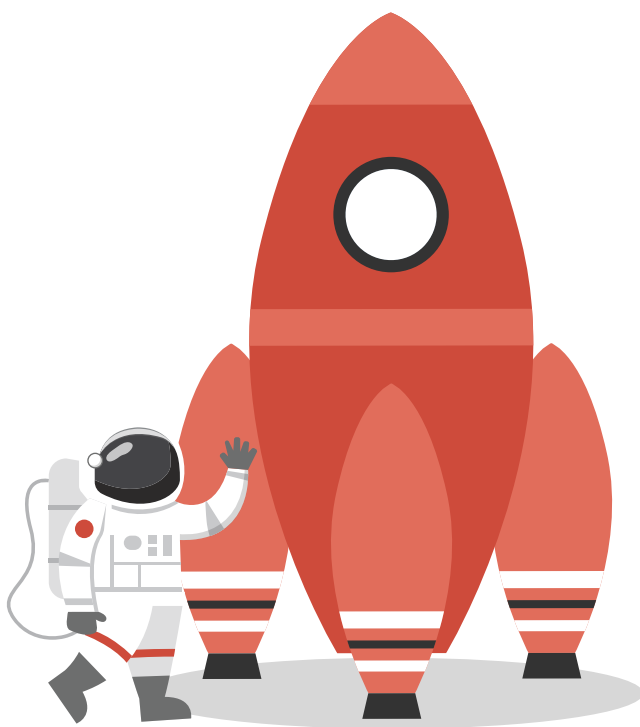
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

حسابان ۱



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

حسابان ۱ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان حسابان : محمدرضا اصغریان

فصل اول : جبر و معادله

درس اول : مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

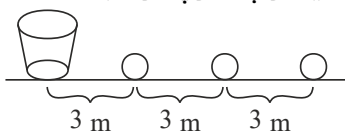
۱ در یک دنباله ی حسابی جملات اول، ششم و پنجاه و یکم جملات متوالی از یک دنباله ی هندسی هستند، قدر نسبت دنباله ی هندسی را بیابید.

۲ در دنباله ی حسابی $a_1, a_2, \dots$ حاصل $\frac{a_{20} - a_6}{a_{12} - a_8}$ را به دست آورید. ($d \neq 0$)

۳ جمله ی هفدهم یک دنباله ی حسابی برابر ۶۰ و جمله ی بیست و سوم آن ۸۴ است. در این دنباله حاصل $a_{22} - a_{40}$ را به دست آورید.

۴ بین دو عدد که تفاضل آن ها ۸۴۰ است، پنج واسطه ی حسابی درج شده است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۵ در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله ی توپ اول تا سبد ۳ متر است (شکل زیر). دونده ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



۶ در یک دنباله ی حسابی $a_{15} = 34$ و $a_8 = 20$ است، حاصل S_{50} را بیابید.

۷ اعداد طبیعی مضرب n را به ترتیب کنار هم می نویسیم. اگر مجموع ۱۱ جمله ی اول آن ۴۶۲ شود، n را بیابید.

۸ مجموع چند جمله از دنباله ی حسابی $2, 7, 12, \dots$ برابر ۸۷ می باشد؟

۹ مجموع اعداد طبیعی مضرب ۶ در فاصله ی $[21, 182]$ را بیابید.



۱۰) مجموع آن دسته از اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۱ را بیابید که بر ۵ بخش‌پذیر باشند.

۱۱) بین دو عدد ۴ و ۶ حداقل چند عدد قرار دهیم تا اعداد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند و مجموع همه‌ی اعداد حاصل بزرگتر از ۵۰ گردد؟

۱۲) ثابت کنید اگر تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی (n) عددی فرد باشد، مجموع جملات این دنباله n برابر جمله‌ی وسط است.

۱۳) مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی مقابل برابر ۱۶۸ است؟

$$2a - 1, 7a - 9, a + 5, \dots$$

۱۴) اگر به قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد اضافه شود، به مجموع ۳۰ جمله‌ی اول آن چند واحد اضافه می‌شود؟

۱۵) مجموع همه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۱۶) در دنباله‌ی حسابی ۵, ۸, ۱۱, ... حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۱۷) جواب معادله‌ی $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{5}{9}n^2$ را به دست آورید.

۱۸) بین دو عدد ۷ و ۲۹ تعداد n واسطه عددی درج کرده‌ایم، اگر قدر نسبت ۲ باشد، مجموع تمام جملات را به دست آورید.

۱۹) در یک دنباله‌ی عددی به جمله‌ی اول ۴ واحد و به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می‌کنیم. به جمع ۱۰ جمله‌ی اول چه قدر اضافه خواهد شد؟

۲۰) اگر مجموع n جمله‌ی اول از دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n^2 - 3n}{3}$ باشد، جمله‌ی دهم را به دست آورید.

۲۱) واسطه‌ی هندسی مثبت بین دو عدد $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ را به دست آورید.

۲۲) سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی بیابید که مجموعشان ۳۱ و حاصل ضربشان ۱۲۵ باشد.

۲۳) اگر جمله‌ی سوم و پانزدهم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۳ و ۴۸ باشند، جمله‌ی نهم این دنباله را بیابید.

۲۴) در یک دنباله‌ی هندسی مجموع جملات اول و چهارم برابر ۱۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ است. قدر نسبت این دنباله چه عددی است؟



۲۵ در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله اول ۱۲۶ است. جمله نهم چند برابر جمله هفتم است؟

۲۶ مجموع چند جمله از دنباله هندسی ۱۲, ۲۴, ۰۰۰-، ۶ برابر ۱۰۲۶ است.

۲۷ برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌ی محافظی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

درس دوم : معادلات درجه دوم

۲۸ اگر $x = -1$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $0 = x^2 - mx - 7$ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

۲۹ در معادله‌ی $0 = x^2 - 8x + m$ اگر یکی از جواب‌ها ۲ واحد کمتر از جواب دیگر باشد، m را بدست آورید و هر دو جواب را پیدا کنید.

۳۰ به ازای کدام مقدار k در معادله‌ی درجه‌ی دوم $0 = x^2 - x + k$ بین ریشه‌های معادله رابطه‌ی $x_1 + 2x_2 = 3$ برقرار است؟

۳۱ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $0 = x^2 - 5x + 1$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ را به دست آورید.

۳۲ به ازای چه مقدار k یکی از ریشه‌های معادله‌ی $0 = x^2 + kx + 8$ مربع ریشه‌ی دیگر است.

۳۳ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $0 = x^2 - x - 1$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{2}{\alpha} - 1$ ، $\frac{2}{\beta} - 1$ باشد.

۳۴ جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.

الف) ریشه‌های معادله اعداد ۵- و ۲ است.

ب) تابعی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

پ) اگر $(1 + x, 3x)$ یک همسایگی عدد ۳ باشد، حدود x ، بازه است.

ت) دامنه تابع $y = \log_2(x + 1)$ ، بازه است.

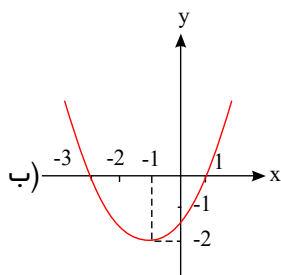
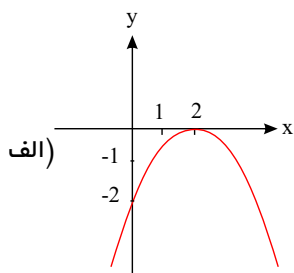
۳۵ معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)



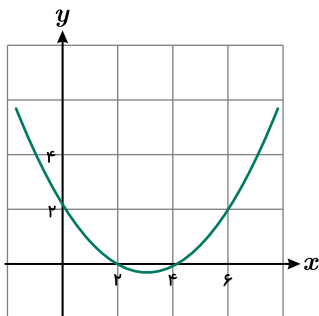
۳۶ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت منفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



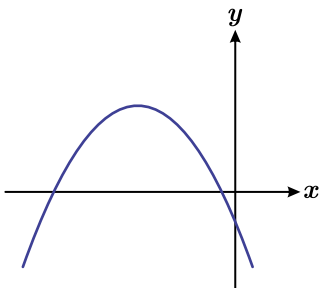
۳۷ اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x + m = 0$ دو واحد از معکوس دیگری بیشتر باشد، m را بیابید.

۳۸ بدون حل معادله و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت جواب‌های معادله‌ی $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

۳۹ اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید.



۴۰ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. علامت ضرایب a , b , c را تعیین کنید.





۴۱) صف‌های توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف

$$f(x) = x^3 - 4x$$

ب

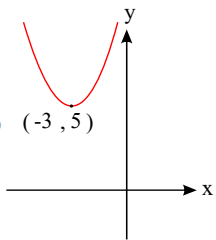
$$g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$$

پ

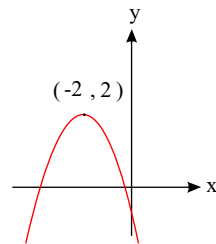
$$h(x) = x^4 + 3x^2 + 5$$

۴۲) هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطهٔ راس سهمی نیز داده شده است. صف‌های تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

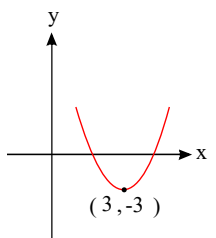
الف

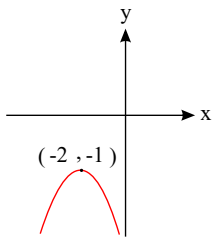


ب



پ





ت

۴۳) صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف

$$f(x) = x^3 - 4x$$

ب

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

۴۴) تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x - 1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

۴۵) معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$x^6 - 3x^2 + 2 = 0$$

ب

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$$

پ

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

۴۶) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر -2 باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

۴۷) معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$2x^3 + x^2 + 3x = 0$$



ب

$$\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10$$

معادله‌ی مقابل را به روش هندسی حل کنید. (۴۸)

$$(x + 1)^2 = x + 2$$

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

(۴۹) معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$ را حل کنید.

(۵۰) برای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-[x]}$ به سؤال‌های زیر جواب دهید.

الف) دامنه‌ی تابع f را به دست آورید.

ب) این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است به طوری که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟

پ) این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است و در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟

ت) این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است و در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟

(۵۱) معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$$

(۵۲) ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

(۵۳) معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$$

(۵۴) معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$2x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$$

(۵۵) بدون حل معادله‌ی $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 = 0$ توضیح دهید که چرا مجموعه‌ی جواب تهی است؟



درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

۵۶ عبارت $y = |x - 1| + |x - 2|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

۵۷ اگر $x \leq 1$ باشد، ضابطه‌ی تابع $y = |x - 3| + |x - 1|$ را بدون قدر مطلق بنویسید.

۵۸ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه‌ی هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف

$$f(x) = x|x|$$

ب

$$g(x) = |x^2 - 1|$$

پ

$$h(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

۵۹ به کمک تعیین علامت عبارت های داخل قدر مطلق، ضابطه‌ی توابع زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

الف

$$f(x) = x|x|$$

ب

$$f(x) = |x + 1| - 2$$

پ

$$y = |x - 1| + |x + 2|$$

۶۰ تابع $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۶۱ نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

$$f(x) = |x - 2| - |x + 2| + x - 1$$



۶۲ نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{x|x+1|}{x+1}$$

۶۳ نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

$$f(x) = -|2x - 4| + 2$$

۶۴ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = ||x| - 2|$$

۶۵ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = |x^2 - 2x|$$

۶۶ برد تابع زیر را بیابید.

$$y = |x - 3| - 5$$

۶۷ معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{6x - 12}{|x - 2|} = x$$

۶۸ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $|a| + |b| \geq a + b \geq |a| - |b|$ و نتیجه بگیرید:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می‌نامند.)

۶۹ در رابطه‌ی $|x + 3| + |y - 3| = 5$ ، حدود x را بیابید.

۷۰ در رابطه‌ی $|x - 1| + |2y - 4| = 2$ حدود y را بیابید.

۷۱ حدود x را از رابطه‌ی مقابل بیابید.

$$|x - 1| > x - 1$$

۷۲ نامعادله‌ی قدر مطلق $|2x - 1| < 1$ را حل کنید.

۷۳ برد تابع زیر را بیابید.

$$y = \sqrt{x - |x|}$$

۷۴ برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید $|y| - |x| \leq |y - x|$



۷۵) بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱۵ و ۲۵ روی محور برابر باشد؟

۷۶) نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۷۷) نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید. سپس به روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.

۷۸) نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = |x^2 - 6x|$

۷۹) نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x^2 - 9| \leq 7$$

۸۰) نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x^2 - 1| \leq |x + 1|$$

۸۱) نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x^2 - 9| + 9 > x^2$$

۸۲) نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$x^2 - 2x + |x - 1| < 1$$

۸۳) نامعادله‌ی مقابل را به روش جبری حل کنید.

$$|x - 2| \leq x$$

۸۴) معادله‌ی $||x| - 2| = 3$ را حل کنید.

۸۵) خط $y = 4$ و نمودار تابع $y = ||x - 1| - 4|$ در چند نقطه اشتراک دارند؟

۸۶) معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = |x|$$



ب

$$|x + 1| = 4 + 2x$$

پ

$$\left| \frac{1}{3x-1} \right| = \frac{1}{2}$$

۸۷) جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.

الف) در نامعادله $|x - 1| < 3$ ، مجموعه جواب بازه است.

ب) دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{1 - [x]}$ برابر است با ([نماد جزء صحیح است])

پ) اگر $0 < y < x$ ، آنگاه عدد 2^x از عدد 2^y است. (بیشتر - کمتر)

ت) یک چندضلعی منتظم درون دایره‌ای به شعاع ۳ سانتیمتر محاط شده است. اگر تعداد اضلاع چندضلعی را افزایش دهیم مساحت آن به عدد نزدیک می‌شود.

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

۸۸) نشان دهید ۳ نقطه‌ی $A(6, 3)$ ، $B(3, 1)$ و $C(-3, -3)$ بر یک خط راست قرار دارند.

۸۹) نقاط $A(-2, 5)$ و $B(4, -6)$ دو رأس مثلث ABC هستند که نقطه‌ی $G(3, -2)$ محل تلاقی میانه‌های آن است، مختصات رأس سوم مثلث را بیابید.

۹۰) مقدار m را چنان بیابید که سه خط $d_1: 3x - y - 1 = 0$ ، $d_2: 2x + 3y = 8$ و $d_3: (m - 2)x + 2y - 2m = 0$ در یک نقطه همدیگر را قطع کنند.

۹۱) معادله‌ی خطی را بیابید که از نقطه‌ی $A(3, -2)$ بگذرد و طول از مبدأ آن سه برابر عرض از مبدأ آن باشد.

۹۲) نقاط $A(2, m)$ ، $B(1, 2)$ ، $C(-2, -1)$ رئوس مثلث ABC هستند، m را چنان بیابید که مثلث در رأس A متساوی الساقین باشد.

۹۳) نقطه‌ای روی نیمساز ربع دوم و چهارم بیابید که فاصله‌اش از نقطه‌ی $B(1, 1)$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد.

۹۴) به ازای چه مقدار از m دو خط $5x - my = 3$ و $mx - 2y = m - 4$ بر هم منطبق هستند؟



۹۵) معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی تقاطع خط $2x - 3y + 1 = 0$ با محور عرض‌ها بگذرد و بر این خط عمود باشد.

۹۶) مقدار k را طوری تعیین کنید که خط گذرنده از $A(4, -1)$ و $B(k, 2)$:

الف) با خط $3y + 2x = 6$ موازی باشد.

ب) بر خط $2y - 5x = 1$ عمود باشد.

۹۷) a را چنان بیابید که دو خط زیر بر هم عمود باشند.

$$d: 3ax - (3a + 1)y - 4 = 0$$

$$d': ax + (a - 1)y - 2a + 1 = 0$$

۹۸) مقدار a را چنان بیابید که دو خط زیر موازی متمایز باشد.

$$d: (2 - a)x + y = -1$$

$$d': ax - 3y = 5$$

۹۹) مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط $4y - 3x = -1$ و $(2a - 1)x + (a + 2)y = 2$ بر روی نیمساز ربع اول و سوم متقاطع باشند.

۱۰۰) مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط $3x - 2y = 4$ و $2x + 3y = 7$ را بیابید.

۱۰۱) ثابت کنید فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ می‌باشد.

۱۰۲) معادله‌ی خطوطی را بنویسید که موازی خط $3x - 4y = 7$ بوده و به فاصله‌ی ۳ واحد از آن قرار داشته باشند.

۱۰۳) فاصله‌ی دو خط موازی $3x + 4y + 1 = 0$ و $6x + 8y - 8 = 0$ را d_1 و d_2 بیابید.

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

۱۰۴) همه‌ی تابع‌های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید. (از نمودار پیکانی کمک بگیرید).



۱۰۵) تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$, $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۱۰۶) ماشین تابع f هر عدد حقیقی بزرگتر مساوی ۶- و کوچکتر از ۹ را به‌عنوان ورودی قبول می‌کند و از قرینه‌ی مربع آن یک واحد کم می‌کند.

الف) ضابطه تابع f را بنویسید.

ب) اگر ورودی تابع عدد ۳- باشد، خروجی تابع را بیابید.

پ) اگر خروجی تابع عدد ۶۵- باشد، ورودی تابع چقدر بوده است؟

۱۰۷) مجموعه‌های $A = \{2, 5, 6, 7, 8\}$ و $B = \{1, 4, 10, 6\}$ مفروض‌اند.

الف) چند تابع مانند f از A به B می‌توان نوشت؟

ب) چند تابع f از A به B می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب $(6, 10)$ باشد؟

ج) چند تابع f از A به B می‌توان نوشت که فاقد زوج مرتب‌های $(2, 1)$ و $(7, 4)$ باشد؟

د) چند تابع f از A به B می‌توان نوشت که $f(5) = 10$, $f(8) = 1$, $f(6) \neq 1$ باشد؟

۱۰۸) در تابع $f : (-3, +\infty) \rightarrow B$ برای مجموعه هم‌دامنه (B) سه مجموعه متفاوت مثال بزنید.
 $f(x) = -2x + 4$

۱۰۹) در تابع $f : (-3, 4] \rightarrow B$ برای مجموعه B (هم‌دامنه) چهار مجموعه متفاوت مثال بزنید.
 $f(x) = -x^2 + 7$

۱۱۰) در تابع $f(x) = mx^2 - 3$ ، اگر $f(-2) = 17$ باشد، حاصل $f(3)$ را بیابید.

۱۱۱) کدام یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$, $g(x) = x + 3$

ج) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

۱۱۲) اگر $B = \{p, q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ $A = \{a, b, c, d\}$



۱۱۳ اگر دو تابع $f(x) = x + 4$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & x \neq 4 \\ k - 1 & x = 4 \end{cases}$ مساوی باشند k را به دست آورید.

۱۱۴ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} & |x| \neq 1 \\ \frac{a}{x + 1} & x = 1 \\ \frac{b}{x - 1} & x = -1 \end{cases}$ با تابع $g(x) = x^2 + 1$ برابر باشد، مقدار $a + b$ را محاسبه کنید.

۱۱۵ آیا در معادله $x^2 - y^2 = 1$ ، تابعی از x است؟ چرا؟

درس دوم : انواع توابع

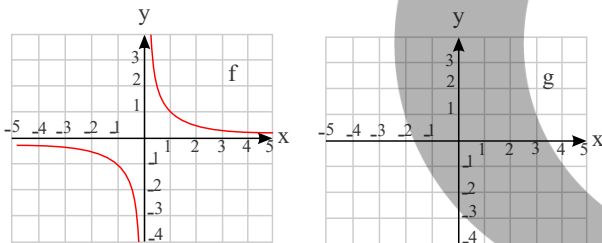
۱۱۶ اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند، با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4 + t}$ به

دست آید که در آن $t > 0$ زمان برحسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

۱۱۷ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.



۱۱۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{|x|-5}$$

۱۱۹ تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \quad g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

۱۲۰ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هریک را معلوم کنید.



الف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

ب

$$f(x) = \sqrt{x - 2} + 5$$

پ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & x > 0 \\ \sqrt{x + 2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ت

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۲۱ دامنه تابع‌های زیر را بیابید.

الف

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}}$$

ب

$$f(x) = \sqrt{||x + 1| - 3| - 2}$$

۱۲۲ به ازای کدام مقدار k ، $f(x) = \begin{cases} kx + 2 & x \geq 2 \\ x^3 & x \leq 2 \end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع است؟۱۲۳ تابع بودن رابطه‌ی $(y + 1)^2 + (x - 2)^2 = 0$ را بررسی کنید.۱۲۴ ضابطه‌ی $|y| + |x| = 2$ آیا نشان‌دهنده‌ی یک تابع است؟۱۲۵ تابع بودن $f(x) = \sqrt{x + 2}$ را بررسی کنید.

۱۲۶ تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.



الف

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$$

ب

$$y = \sqrt{2x-3} \pm \sqrt{3-2x}$$

۱۲۷ کدامیک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف

$$3x + 2y = 12$$

ب

$$x = 1$$

پ

$$y = -2$$

ت

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

ث

$$y^x = x^y$$

ج

$$y = |x|$$

۱۲۸ الف) معادله $x + [x] = 2020.6$ را حل کنید.

ب) به ازای چه مقادیری از a معادله زیر ریشه حقیقی دارد؟

$$x + [x] = a$$

۱۲۹ اگر $f(x) = [x+3]$ باشد، در این صورت $f(2 - \sqrt{2})$ را بیابید.

۱۳۰ تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = 0 \quad g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right]$$



۱۳۱ نمودار زیر را رسم کنید.

$$y = x[x] \quad -2 < x < 2$$

۱۳۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$ را در بازه $[-2, 4)$ با ارائه راه حل رسم کنید. (نماد جزء صحیح است)

۱۳۳ یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی تا کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می‌کند. اگر $f(x)$ هزینه ارسال یک بسته پستی x کیلوگرمی باشد، ضابطه‌ای آن را رسم کنید و معادله‌ای برای آن بنویسید.

۱۳۴ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $f(x) = [x]$ رسم کنید.

الف) $y = [x] - \frac{1}{2}$

ب) $y = 2[x] + 1$

۱۳۵ نمودار تابع $y = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید.

۱۳۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف

$$f(x) = [x] + 1, \quad -2 \leq x < 3$$

ب

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right], \quad -4 \leq x < 4$$



۱۳۷ در تابع $f: [-4, 5] \rightarrow B$ برای مجموعه هم‌دامنه (B) سه مجموعه متفاوت مثال بزنید.

درس سوم : وارون تابع

۱۳۸ یک به یک بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 3 \\ 3x + 5 & x \geq 3 \end{cases}$$

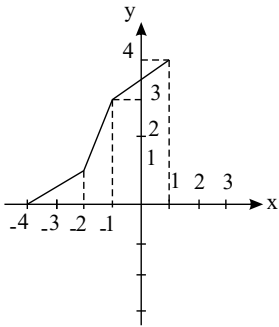
۱۳۹ اگر رابطه‌ی زیر یک تابع یک به یک باشد $\alpha + \beta$ را بنویسید.

$$f = \{(1, \alpha^2 - \beta^2), (1, 1), (2, 3), (\alpha - \beta, 3)\}$$



۱۴۰ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{2}$ است؟

۱۴۱ نمودار تابع f به صورت مقابل است. در صورت وارون پذیر بودن، نمودار تابع وارون آن را رسم کنید.



۱۴۲ وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۱۴۳ اگر $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 4}}$ باشد $f(\sqrt{6})$ کدام است؟

درس چهارم : اعمال روی توابع

۱۴۴ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

۱۴۵ اگر $f = \{(4, 5), (6, 3), (7, 1)\}$ و $g = \{(3, 4), (6, 0), (4, 6)\}$ مفروض باشند، به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) مقدار $(2f + g)(4)$ را بیابید.

۱۴۶ توابع $f(x) = \sqrt{x + 3}$ و $g(x) = \frac{2}{x}$ مفروضند. در صورت امکان توابع $f + g$ و $f \times f$ و $\frac{g}{f}$ را به دست آورید.

۱۴۷ توابع $f(x) = \frac{4}{x - 2}$ و $g(x) = \frac{1}{6 - x}$ مفروضند، در صورت امکان توابع $f - g$ و $\frac{g}{f}$ را به دست آورید.

۱۴۸ فرض کنیم:

$$f = \left\{ (-4, 13), (-1, 7), (0, 5), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (3, -5) \right\}$$

$$g = \{ (-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6) \}$$

توابع زیر را حساب کنید.

$$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$$



۱۴۹) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{-1}{x^2 + 2x}}$ باشد دامنه‌ی $f + g$ را به دست آورید.

۱۵۰) توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروض هستند. اولاً دامنه‌ی توابع $f, g, f \circ g$ را تعیین کنید سپس ضابطه‌ی $f \circ g$ را بنویسید.

۱۵۱) فرض کنیم $\begin{cases} g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ g(n) = 2n \end{cases}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ که در آن: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، توابع $f + g$ و $f \circ g$ را به دست آورید.

۱۵۲) توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروضند.

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید.

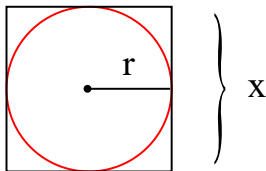
ج) مقدار $(g - f)(2)$ را حساب کنید.

۱۵۳) یک پی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه ای برای یک مخزن گازوئیل استوانه ای استفاده می شود. (شکل مقابل)

الف) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

ب) مساحت A پایه دایره ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

ج) $(A \circ r)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.



۱۵۴) اگر $f(x) = 2x + a$ و $f \circ f(x) = bx + 6$ باشد حاصل $a + b$ را به دست آورید.

۱۵۵) اگر $f(x) = x + 1$ و $f \circ g(x) = 3x + 5$ باشد آنگاه $g(x)$ را به دست آورید.

۱۵۶) اگر $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ و $g(x) = \sqrt{5 - x}$ باشد آنگاه دامنه‌ی $f \circ g$ را بیابید.

۱۵۷) اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$ باشد.

۱۵۸) توابع f و g با ضابطه‌های زیر مفروض هستند:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \sqrt{-x} - 2$$

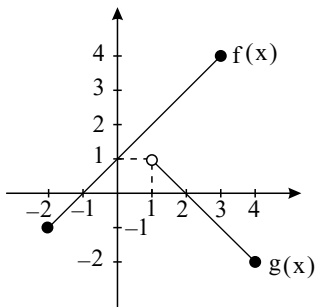
الف) دامنه‌ی $f \circ g$

ب) در صورت وجود ضابطه‌ی $f \circ g$ را بنویسید.



۱۵۹ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-|x-1|}}$, $g(x) = |x-1|$ مطلوب است دامنه‌ی توابع $f+g$ و fog و ضابطه‌ی gof .

۱۶۰ نمودار f و g به صورت مقابل داده شده است.



الف دامنه و برد f و g را بیابید.

ب مقدارهای $(f+g)(1)$, $(f \cdot g)(2)$, $\frac{g}{f}(3)$ و $(fog)(3)$ را بیابید.

پ دامنه‌ی توابع $f-g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ را بیابید.

ت ضابطه‌ای برای f و g بنویسید.

ث ضابطه‌ای برای fg و $\frac{f}{g}$ بنویسید.

ج نمودار $f-g$ را رسم کنید.

۱۶۱ در هر یک از موارد روبه‌رو دامنه‌ی توابع و ضابطه‌ی آن‌ها را باتوجه به حالت‌های زیر به‌دست آورید.

الف

$$g(x) = \frac{x}{6-x}, \quad f(x) = \frac{4}{x-2}$$

ب

$$g(x) = x+2, \quad f(x) = \sqrt{x-2}$$

پ

$$g(x) = \frac{2}{x-2}, \quad f(x) = \sqrt{x+3}$$



ت

$$f = \{(0, -2), (1, 0), (-2, 5)\}, g = \{(1, -1), (2, 3), (0, 4)\}$$

فصل سوم: تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی

۱۶۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و برد تابع را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 2^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

۱۶۳ نامعادله زیر را حل کنید:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3^{x-1}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3^{x^2+2}}$$

۱۶۴ اعداد $\frac{1}{9}$ ، $3\sqrt{5}$ ، $3\sqrt[3]{2}$ ، $3^{\frac{5}{2}}$ را مقایسه کنید.

۱۶۵ برد توابع زیر را بیابید.

الف

$$f(x) = 5^x - 4$$

ب

$$f(x) = -(0.2)^x + 3$$

۱۶۶ معادلات توانی زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{2^x + 2^x + 2^x}{(0.125)^{x-1}} = 6$$

ب

$$\frac{27^x \times 9^{x-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \times 6^x} = 2^{-x}$$



۱۶۷ معادله $2^{|x|} - 1 = 3^x$ را به روش هندسی حل کنید.

۱۶۸ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\underbrace{3^x + 3^x + \dots + 3^x}_{\text{تا } 15} = \underbrace{27^x + 27^x + \dots + 27^x}_{\text{تا } 45}$$

۱۶۹ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2 \times 16^x = 4^x$ ب) $\frac{1}{y} \times 49^{2x} = \sqrt[3]{7}$

۱۷۰ خط $y = \frac{3}{\sqrt[5]{27}}$ تابع نمایی $f(x) = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^{-x}$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱۷۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف

$$y = -2^x + 1$$

ب

$$y = 2^{|x|} - 1$$

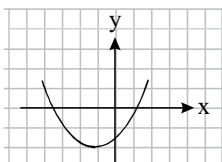
۱۷۲ اخیراً داروی مسکن جدیدی به بازار عرضه شده است که هر قرص آن شامل ۳۰۰ میلی‌گرم از ترکیبات دارویی فعالی است که با گذشت هر یک ساعت از زمان مصرف، مقدار آن در خون بیمار نصف می‌شود.

الف جدول زیر را کامل کنید.

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار داروی باقی‌مانده (میلی‌گرم)	۳۰۰	۱۵۰	...	...	...	...	...

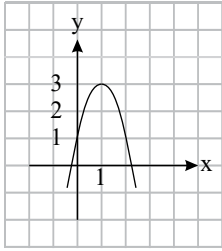
ب فرمولی بنویسید که مقدار دارو را در خون بیمار پس از گذشت t ساعت نشان دهد.

۱۷۳ نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت a ، b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت آن‌ها را تعیین کنید.





۱۷۴ اگر نمودار سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد طوری که $|a| = 1$ ، ضابطه f و صفهای تابع را در صورت وجود مشخص کنید.



درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

۱۷۵ دامنه تابع $f(x) = \log_{1-x}(\frac{x+1}{x})$ را بیابید.

۱۷۶ تابع وارون تابع $f(x) = 1 + 2^{3^x}$ را بیابید.

۱۷۷ معادلهی مقابل را به روش هندسی حل کنید.

$$3 + \log|x| = x$$

۱۷۸ حاصل لگاریتمهای زیر را با استفاده از تعریف لگاریتم بیابید.

$$\log_{\sqrt{100}} 10 \sqrt[3]{100}$$

$$\log_{\sqrt{25}} \sqrt[10]{512}$$

$$y = 2 - \log_3(x + 1)$$

$$y = -|\log_{\sqrt{2}}(x - 1)|$$

$$y = \log_{\sqrt{3}}(x - 2)$$

۱۷۹ نمودار تابعهای زیر را رسم کنید.

۱۸۰ نمودار توابع زیر را رسم کنید.



ب

$$y = \log_{\circ, 3}(x + 1)$$

۱۸۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف

$$y = 1 + \log_3 x$$

ب

$$y = -3^x - 2$$

پ

$$y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

۱۸۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف

$$2 \log_2 8 - 3 \log_5 \sqrt[3]{5} + 2^{\log_2 3}$$

ب

$$3 \log_{\circ, \circ \circ 1} + \log \sqrt[3]{1 \circ \circ} + \log_{\Delta} \frac{1}{25}$$

پ

$$\log_2 32 + \log_{\frac{1}{3}} 81 + \log_{\sqrt{3}} 9 \sqrt{3}$$

ت

$$2^{\log_2 5 - \log_2 3}$$

ث

$$\log_{\sqrt{2}} 8 + 5^{(1 + \log_5 4)}$$

ج

$$\log_{\Delta} \sqrt{125} + \log_2 2 + \log_{\circ, 1}$$



ج

$$\log_3(\log_3(\log_5 125))$$

ح

$$\log_5 5 \times \log_6 6 \times \log_7 7 \times \dots \times \log_{24} 24$$

خ

$$\frac{1}{\log_2 24} + \frac{1}{\log_3 24} + \frac{1}{\log_6 24}$$

۱۸۳ حاصل $[\log_6 2] + [\log_7 6]$ برابر است با:

- ۱ (۱) $2(2)$
۳ (۳) $4(4)$ صفر

درس سوم: ویژگی های لگاریتم و حل معادله های لگاریتمی

۱۸۴ اگر نمودار تابع $f(x) = 2 + \log_a^x$ از نقطه $(\frac{1}{3}, -2)$ عبور کند، آنگاه مقدار a را به دست آورید.

۱۸۵ تساوی دو تابع $f(x) = \log(x^2 + 4x + 4)$ و $g(x) = 2 \log(x + 2)$ را بررسی کنید:

۱۸۶ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \log_3\left(\frac{9}{\sqrt[4]{27}}\right) + \log_{0.001}$$

۱۸۷ اگر $x > 0$ و $x \neq 1$ ، حاصل $\log_x \sqrt{x^3 \times \sqrt{x \times \sqrt[5]{x}}}$ را بیابید.

۱۸۸ اگر $\log 5 = a$ باشد، مقدار $\log_8^{25}$ را برحسب a بیابید.

۱۸۹ تساوی توابع $f(x) = \log x^2$ و $g(x) = 2 \log x$ را بررسی کنید.

۱۹۰ تساوی دو تابع f و g را بررسی کنید.

$$f(x) = \log(x - 2) - \log(x + 5) \quad g(x) = \log\left(\frac{x - 2}{x + 5}\right)$$

۱۹۱ ضابطه های تابع وارون تابع $f(x) = \log_3(2x + 5) + \log_3 x^{-1}$ را در صورت امکان بیابید.

۱۹۲ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشند، مقدار $\log_{40}^5$ را برحسب a و b بیابید.



۱۹۳ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف

$${}_3\frac{1}{r}\log_r^{\Delta} + {}_2^{-}\log_r^{\Delta} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_r^{\Delta}}$$

ب

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_r^{\Delta}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\Delta\log_r^{\Delta}} - {}_2^{-}\log_r^{\Delta}$$

۱۹۴ دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف

$$f(x) = \log(x - 2) + \log(x + 7)$$

ب

$$g(x) = \log(x - 2)(x + 7)$$

۱۹۵ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف

$${}_7^{\Delta}(\log_{r_1}^{\Delta} + \log_{r_1}^{\Delta})$$

ب

$$\frac{\log_{\Delta}^{16} - \log_{\Delta}^8}{\log_{\Delta}^{128}}$$

۱۹۶ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف

$$\log_{100}^{\Delta}\sqrt[2]{\Delta} + \log_{100}^{\Delta}\sqrt[5]{2}$$

ب

$$\log_{\Delta}^6 - \log_{\Delta}^2 \times \log_r^{\Delta}$$

۱۹۷ معادله‌های زیر را حل کنید.



الف

$$(\log_3 x)^2 + 2 = \log_3 x^2$$

ب

$$\log_9 x + \log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{4}$$

۱۹۸ الف. حاصل عبارت $(\sqrt{10})^{\log 8 + \log 2}$ را به دست آورید.

ب. معادله لگاریتمی مقابل را حل کنید

$$\log(x^2 + 1) - 2 \log x = 1$$

۱۹۹ دامنه‌ی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)}$$

۲۰۰ معادله زیر را حل کنید.

$$x^{\log_5 x} = 5^{100}$$

۲۰۱ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می ماند بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۰٫۰۱ گرم کاهش می یابد؟

۲۰۲ الف) جرم باکتری ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری ها حدود ۵۰۰۰ گرم می شود؟ ($\log 2 \simeq 0,301$)

۲۰۳ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log_{\frac{1}{9}}(x+2) - \log_{\frac{1}{7}}(2x^2 + 3x + 2) = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{3}$$

۲۰۴ حاصل عبارت زیر را بیابید. ($[]$ جزء صحیح است)

$$A = [\log_3 100] - 2 [\log_{0,4} 4]$$

۲۰۵ دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{\log_2(x-5)} \quad \text{ب) } g(x) = \sqrt{\log_{0,2}(x+3)}$$

۲۰۶ دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.



الف

$$f(x) = \log_7 \log_7 (x - 4)$$

ب

$$f(x) = \log_7 \log_{\sqrt{7}} (x - 1)$$

معادلات زیر را حل کنید. ۲۰۷

الف

$$\log_{16}^x + \log_8^x + \log_2^x = 7$$

ب

$$\log_7 (\log_7 (\log_7 x)) = 0$$

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید. ۲۰۸

الف

$$\log_7 m^7 - \log_7 m - 3 = 0$$

ب

$$\log_7 (12b - 21) - \log_7 (b^2 - 3) = 2$$

پ

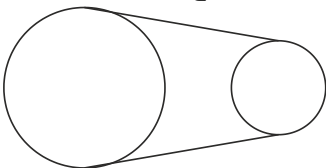
$$\log_{\frac{1}{10}} (x^2 - 1) = -1$$

فصل چهارم : مثلثات

درس اول : رادیان

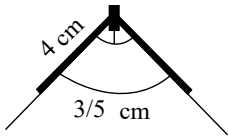
۲۰۹ دو چرخ به شعاع‌های $5cm$ و $8cm$ توسط یک تسمه به هم متصل شده‌اند. اگر چرخ بزرگتر 100° بچرخد، چرخ کوچکتر چند درجه و

چند رادیان می‌چرخد؟

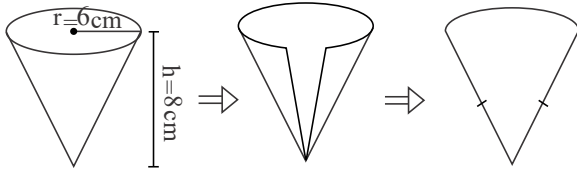




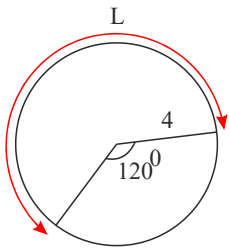
۲۱۰ پرکاری تسمه فلزی خمیده‌ای به طول $۳\frac{۵}{۸}$ سانتی‌متر دارد که به فاصله ۴ سانتی‌متر از لولای پرگار ثابت شده است. زاویه مرکزی بین دو پایه پرگار وقتی پایه آن کامل باز شده، چند رادیان است؟



۲۱۱ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6\text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8\text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

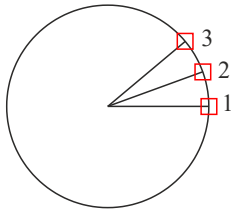


۲۱۲ در شکل مقابل، طول کمان L را بیابید.

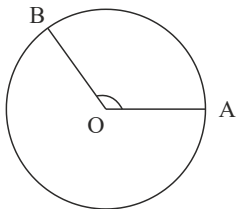


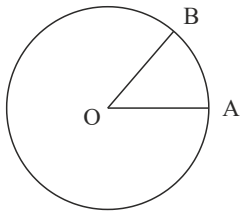
۲۱۳ اندازه زاویای مثلثی با اعداد ۳، ۷ و ۱۰ متناسب هستند، زاویای مثلث را بر حسب رادیان و درجه بیابید.

۲۱۴ فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که ۳۰ کابین دارد و کابین‌های آن شماره‌گذاری شده‌اند، اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما در کابین شماره ۲ نشسته باشید، بعد از $\frac{2\pi}{3}$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟



۲۱۵ با نخی به طول ۲۰۰ cm یک دایره به صورت مقابل می‌سازیم. اگر طول کمان $\widehat{AB}$ برابر ۸۰ cm باشد، زاویه مرکزی $\widehat{AOB}$ چند درجه و چند رادیان است؟





۲۱۶ شعاع دایره مقابل برابر 10 cm می‌باشد:

الف) اگر زاویه مرکزی $\widehat{AOB}$ برابر 40° باشد، طول کمان $\widehat{AB}$ برابر چند سانتی‌متر است؟
 ب) اگر طول کمان $\widehat{AB}$ برابر $\frac{5\pi}{3}\text{ cm}$ باشد، زاویه مرکزی $\widehat{AOB}$ چند درجه است؟

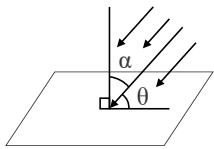
۲۱۷ برای هر یک از زاویه‌های داده شده مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

الف) $\frac{7\pi}{3}$ (ب) $\frac{11\pi}{6}$ (پ) $-\frac{21\pi}{4}$ (ت) $-\frac{103\pi}{2}$

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها

۲۱۸ عبارت زیر را ساده کنید:

$$A = 3 \sin\left(\frac{41\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{29\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{19\pi}{10}\right)$$



۲۱۹ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر) اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطه $I = k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را نشان می‌دهد.

الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

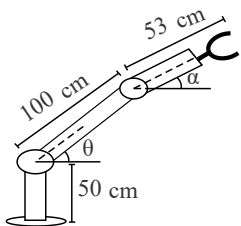
پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).
 (با کمی تغییر)

۲۲۰ اگر $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ ، مقدار عبارت $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - 7\pi)}$ را بیابید.

۲۲۱ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{4\pi}{14} + \cos^2 \frac{6\pi}{14}$$

درس سوم: توابع مثلثاتی



۲۲۲ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی

آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این ربات را از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید.
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع 23.5 cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



۲۲۳) برد تابع زیر را بیابید.

$$y = \sin^3 x$$

۲۲۴) نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید.

$$y = 2 \sin(x + 1) - 1$$

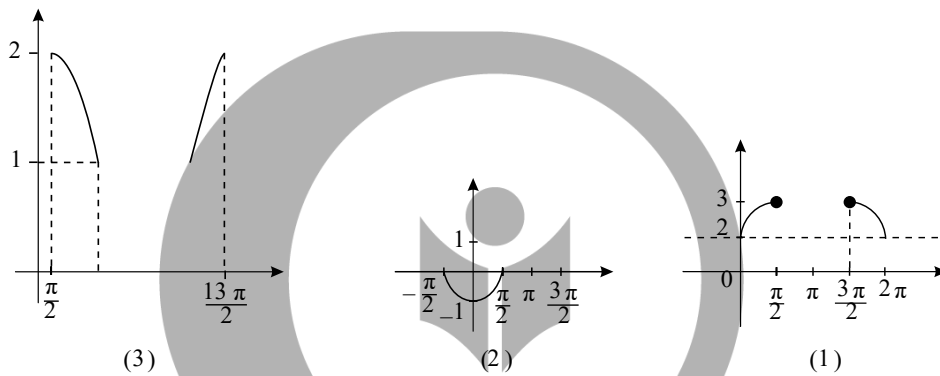
الف

$$y = \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

ب

۲۲۵) در هریک از نمودارهای زیر، بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. باتوجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودارها را کامل کنید.

الف. $y = 2 + |\sin x|$ ب. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ پ. $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

۲۲۶) اگر $\sin x \sin y = \frac{3}{4}$ و $\tan y \tan x = 5$ باشد، حاصل $\cos(x - y)$ را بیابید.

۲۲۷) درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

۲۲۸) درستی روابط زیر را ثابت کنید.



الف

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

ب

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

۲۲۹ اگر $A + B = \frac{\pi}{4}$ باشد، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف

$$\sqrt{2} \sin A = \cos B - \sin B$$

ب

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$$

۲۳۰ عبارت‌های زیر را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی a ، b ، c به دست آورید.

الف

$$\sin(a + b + c)$$

ب

$$\cos(a + b + c)$$

۲۳۱ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

۲۳۲ مقدار $\sin(22,5^\circ)$ را محاسبه کنید.

۲۳۳ اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cot 2x$ را بیابید.

۲۳۴ اگر $\sin x = \frac{-1}{3}$ و $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\tan 2x$ را بیابید.

۲۳۵ اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ و x زاویه‌ای حاده باشد، نسبت‌های مثلثاتی $2x$ را بیابید.



۲۳۶

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

۲۳۷

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

۲۳۸

درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1 - \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)} = \sin 2a$$

الف

ب

$$\cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta = \frac{\sin 8\theta}{8 \sin \theta}$$

۲۳۹

درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف

ب

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

فصل پنجم : حد و پیوستگی

درس اول : مفهوم حد و فرایندهای حدی

۲۴۰

اگر $(m + 3, 1 + 2m)$ یک بازه متقارن به شعاع $3/5$ باشد، مرکز بازه متقارن $(m - 1, m)$ را بیابید.



۲۴۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقاط است؟

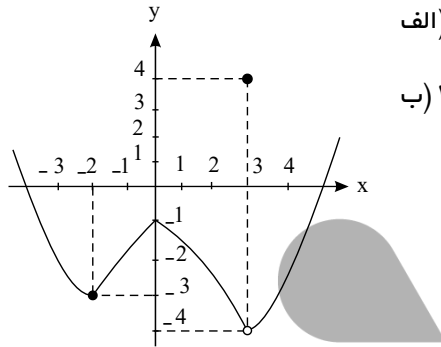
پ) آیا این تابع در همسایگی $2/9$ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x = -3$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x = -3$ چطور؟

۲۴۲ در شکل مقابل، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب) $3 \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + f(3) - f(-2)$



۲۴۳ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای $x = -2$ مثال بزنید.

۲۴۴ نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

۲۴۵ برای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-|x|}}{x - [x]}$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) این تابع در همسایگی کدام نقاط تعریف شده است؟

ب) این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟

۲۴۶ کدامیک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی محذوف ۳ نیست؟

الف

$$A = (-2, 3) \cap (3, 4)$$

ب

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - 3| < 1\}$$

پ

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{|x - 3|} > 1\}$$



ت

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2\}$$

ث

$$E = (1, 2) - \{3\}$$

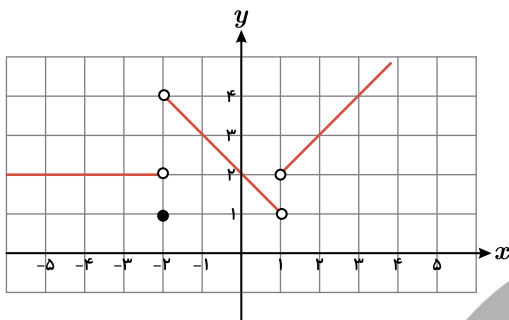
۲۴۷ آیا تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ در همسایگی صفر تعریف شده است؟ چرا؟

درس دوم : حد های یک طرفه (حد چپ و حد راست)

۲۴۸ نمودار تابع f به صورت زیر است.

الف) دامنه این تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

ب) حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)



$$\lim_{x \rightarrow -2^+} [f(x)] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad (3)$$

۲۴۹ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x = 1$ چه می توان گفت؟

۲۵۰ در مورد حد راست تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$ در نقطه $x = -3$ چه می توان گفت؟

۲۵۱ با رسم نمودار تابع $f(x) = 2 - |x - 1|$ ، حدهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

۲۵۲ نمودار تابع $f(x) = \frac{x|x-1|}{x-1}$ را رسم کرده و حد تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۲۵۳ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 0 \\ x + 3 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کرده و حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

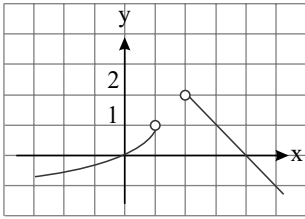
الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$ پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)]$

۲۵۴ نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد، ولی حد راست نداشته باشد.



۲۵۵ آیا $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2 - x}$ وجود دارد؟ چرا؟

۲۵۶ باتوجه به شکل، کمترین مقدار طبیعی n در معادله $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 5n = 0$ را به دست آورید.



درس سوم : قضایای حد

۲۵۷ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f + g$ در a چه می توان گفت؟

۲۵۸ تابع f را چنان تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)f(x) = 20$

۲۵۹ m را چنان بیابید که تابع مقابل در نقطه $x = \pi$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} m \sin \frac{x}{2} + \cos x & x < \pi \\ 2m - \cos \frac{x}{2} + \sin x & x \geq \pi \end{cases}$$

۲۶۰ در تابع مقابل مقادیر m و n را چنان بیابید که حد چپ تابع در $x = 1$ برابر -3 و حد راست تابع در $x = 1$ برابر 5 باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + 1 & x > 1 \\ 3x - n + 2 & x < 1 \end{cases}$$

۲۶۱ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع مقابل در نقطه $x = -2$ حدی برابر 4 داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - x & x < -2 \\ 2x + b & x > -2 \end{cases}$$

۲۶۲ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2mx^2 + 3x - m) = 10$ ، آنگاه m را بیابید.

۲۶۳ تابع f در نقطه -3 حد دارد و $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{3x - f(x)}{2f(x) + x^2} \right) = \frac{-11}{13}$ آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} (4f(x) - x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{-x^2 + f(x)}{5 - f(x)} \right)$

۲۶۴ اگر تابع f در کل اعداد حقیقی حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - f(x)}{f(x) + 3} \right) = \frac{1}{6}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} (f(x) + x^2)$ را بیابید.



۲۶۵ تابع f در نقطه $x = 2$ حد دارد و $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) + 2}{3f(x) - 1} \right) = \frac{1}{2}$ ، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x) - 5)$ را بیابید.

۲۶۶ اگر $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = -4$ آنگاه حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -2} (2f(x) - 3g(x) + h^2(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2g(x) - 4h(x)}{h(x) + f(x)} \right)$

۲۶۷ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -2$ آنگاه حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) - 3g(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} (-3f^2(x) + 7g^3(x))$

۲۶۸ دو تابع f, g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، با این حال $f \times g$ در a حد داشته باشد.

۲۶۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x \cos \frac{x}{2} - \sin^2 x)$

ب

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \tan^2 x}{x \sin 2x} \right)$

۲۷۰ حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

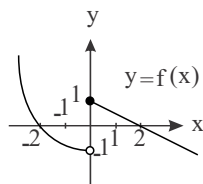
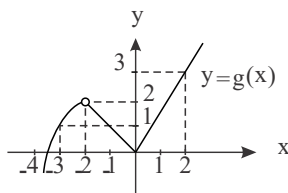
الف

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} - \frac{7}{x^2 - 9}$

ب

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x + 1}$

۲۷۱ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده اند. با استفاده از نمودارها مقدار حدهای زیر را بیابید.





الف

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x))$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -3} -3\sqrt{g(x)}$$

ت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\lambda g(x)}$$

۲۷۲) a و b را چنان بیابید که تابع مقابل در نقطه $x = 2$ حد چپ برابر -6 و حد راستی برابر 10 داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax - [2x], & x < 2 \\ b[-x] + 3x, & x > 2 \end{cases}$$

۲۷۳) مقدار a را چنان بیابید که تابع f با ضابطه $f(x) = a[x] + [x + 1]$ در نقطه $x_0 = -1$ حد داشته باشد.

۲۷۴) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow -6} \left[\frac{x}{2} \right] - 2 \left[\frac{x}{3} \right]$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\frac{-3}{x} \right]$$

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم)

۲۷۵) حاصل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x + x + 1}{x^2 - x - 1}$$

۲۷۶) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^9 - 1}$



حد زیر را محاسبه کنید. (۲۷۷)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

حاصل حدهای زیر را بیابید. (۲۷۸)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x}{x^3 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} (n \notin N)$$

حاصل حدهای زیر را حساب کنید. (۲۷۹)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$$

حاصل حدهای زیر را بیابید. (۲۸۰)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+1}}{x^2 + 2x - 8}$$

حاصل حدهای زیر را بیابید. (۲۸۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$



ب

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} - \sqrt{5}}{x^2 - 16}$$

۲۸۲ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 9}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$$

۲۸۳ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2a(\sqrt{x+3} - 2)}{|x-1|} & x < 1 \\ [x-1] + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است. a را چنان بیابید که تابع در $x = 1$ حد داشته باشد.

۲۸۴ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan(x+1)}{x^2 + x}$

۲۸۵ حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sin x} - \sqrt{2 - \sin x}}{3x}$$

۲۸۶ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \sqrt{1 + \tan x}}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}$$

۲۸۷ حدهای زیر را بیابید.



الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 4x}{\tan^2 3x}$$

۲۸۸ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan 2x}{x^3 + 3x^2}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{x^2 - 2x}$$

درس پنجم : پیوستگی

۲۸۹ به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی $x = 1$ تعریف شده باشد و در این نقطه نه حد داشته باشد و نه پیوستگی راست و نه پیوستگی چپ داشته باشد.

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی $x = -2$ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی نه پیوستگی راست و نه پیوستگی چپ داشته باشد.

۲۹۰ پیوستگی تابع $f(x) = [\frac{x}{2}] - [\frac{x+2}{3}]$ را در نقطه $x = 4$ بررسی کنید.۲۹۱ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} |x+3| & x \neq -3 \\ 2 & x = -3 \end{cases}$ را رسم کرده و پیوستگی آن را در $x = -3$ بررسی کنید.

۲۹۲ پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad x_0 = -2$

ب) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$

۲۹۳ آیا تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ در نقطه $x_0 = 1$ پیوسته است؟ چرا؟



۲۹۴ نمودار توابع زیر را رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آن‌ها را تعیین کنید.

الف

$$f(x) = |x - 1| + 2$$

ب

$$f(x) = x + [x]$$

۲۹۵ نمودار توابع زیر را رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آن‌ها را تعیین کنید.

الف

$$f(x) = x + |x|$$

ب

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

۲۹۶ یک بازه بسته بنویسید که تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۲۹۷ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع با ضابطه‌ی زیر در نقطه $x_0 = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [3x] + b & x < 1 \\ 2ax + 1 & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{1 - x} & x > 1 \end{cases}$$

۲۹۸ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0 = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [-x] + a & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} + b & x > 2 \end{cases}$$

۲۹۹ تابع f با ضابطه‌ی زیر مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که f در $x_0 = 1$ پیوسته باشد ([نماد جزء، صحیح است]).

$$f(x) = \begin{cases} a[4x] - b & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ a \sin \frac{\pi}{4} x + b & x > 1 \end{cases}$$

۳۰۰ پیوستگی تابع $f(x) = x[x] - 2$ را در بازه $[2, 3]$ بررسی کنید.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$a_1, a_5, a_{\Delta 1} \rightarrow \text{دنباله‌ی هندسی باشند} \rightarrow a_5^2 = a_1 a_{\Delta 1}$$

$$\Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = a_1(a_1 + 50d) \rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 50a_1d$$

$$\Rightarrow 25d^2 = 40a_1d \Rightarrow 5d = 8a_1$$

$$\text{هندسی } q = \frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 + 5d}{a_1} = \frac{a_1 + 8a_1}{a_1} = 9$$

می‌دانیم در دنباله هندسی a و b و c داریم: $b^2 = ac$

۲

$$\frac{a_{20} - a_5}{a_{12} - a_8} = \frac{a_1 + 19d - a_1 - 5d}{a_1 + 11d - a_1 - 7d} = \frac{14d}{4d} = \frac{7}{2}$$

۳

در هر دنباله‌ی عددی $a_n = a_1 + (n-1)d$ می‌باشد.

$$\begin{cases} a_{17} = 60 \\ a_{23} = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 16d = 60 \\ a_1 + 22d = 84 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 6d = 24 \rightarrow d = 4$$

$$a_{40} - a_{22} = a_1 + 39d - a_1 - 21d = 18d \stackrel{d=4}{=} 72$$

۴

$a, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, b$
جمله‌ی هفتم جمله‌ی اول

$$b - a = 840 \Rightarrow a_7 - a_1 = 840$$

$$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow a_1 + 6d - a_1 = 840 \Rightarrow 6d = 840 \Rightarrow d = 140$$

دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید $3 + 3 = 6$ متر طی کند، برای توپ دوم باید $6 + 6 = 12$ متر و برای توپ سوم $9 + 9 = 18$ متر و...
طی کند. پس داریم:

$$a_1 = 6, d = 6, 12, 18, \dots \text{ دنباله‌ی مسافت‌ها}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 918 \Rightarrow \frac{n}{2}(12 + 6n - 6) = 918$$

$$3n(n+1) = 918 \rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 306 = \underbrace{17 \times 18}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = 17$$

۵

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 20 \rightarrow 2a_1 + 7d = 5$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 34 \quad \begin{cases} a_1 + 14d = 34 \\ -2 \times (2a_1 + 7d = 5) \Rightarrow -3a_1 = 24 \rightarrow a_1 = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = 3 \rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(2a_1 + 49d) = 25(-16 + 147) = 3275$$

۶

$$n, 2n, 3n, \dots, 11n$$

$$n + 2n + 3n + \dots + 11n = 462 \rightarrow n(1 + 2 + 3 + \dots + 11) = 462$$

$$n \times \frac{11 \times 12}{2} = 462 \rightarrow 66n = 462 \rightarrow n = 7$$

۷

$$\text{یادآوری: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



۸

می‌دانیم: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$a_1 = 2, d = 5, S_n = \frac{n}{2}(4 + 5(n-1)) = 117$$

$$\Rightarrow n(5n-1) = 117 \Rightarrow 5n^2 - n - 117 = 0 \quad \Delta = 1 + 3420 = 3421$$

$$n = \frac{1 \pm 59}{10} \rightarrow n = -\frac{58}{10} \text{ و } n = 6$$

۹

می‌دانیم: $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

$$21 \leq 6k \leq 182 \rightarrow 3,5 \leq k \leq 30,3$$

$$\Rightarrow k = 4, 5, \dots, 30 \Rightarrow n = 30 - 4 + 1 = 27$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$24, 30, \dots, 180 \rightarrow S_{27} = \frac{27}{2}(a_1 + a_{27}) = \frac{27}{2}(24 + 180) = 2754$$

۱۰

$$5, 10, 15, \dots, 100 \rightarrow a_1 = 5, d = 5, n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{100 - 5}{5} + 1 = 20$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10(5 + 100) = 1050$$

۱۱ اگر بین ۴ و ۶ تعداد n جمله قرار دهیم، تعداد کل جملات $n+2$ می‌باشد پس داریم:

$$S_{(n+2)} = \left(\frac{n+2}{2}\right)(a_1 + a_{n+2}) = \left(\frac{n+2}{2}\right)(4 + 6) > 50 \Rightarrow \left(\frac{n+2}{2}\right) > 5$$

$$\Rightarrow n+2 > 10 \rightarrow n > 8 \rightarrow n \text{ حداقل } 9$$

۱۲

$$\text{فرد } n \rightarrow \text{شماره‌ی جمله‌ی وسط} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = a_1 + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)d \quad (1)$$

$$\Rightarrow a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = a_1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = n \times \frac{1}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow S_n = n\left(a_1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d\right) \xrightarrow{(1)} S_n = n \cdot a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

۱۳

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$2(7a-9) = 2a-1+a+5 \rightarrow 14a-18=3a+4 \rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow 3, 5, 7, \dots \quad a_1 = 3, d = 2 \rightarrow S_n = 168 \rightarrow \frac{n}{2}(6 + 2n - 2) = 168$$

$$\Rightarrow n^2 + 2n - 168 = 0 \rightarrow \Delta = 4 + 4 \times 168 = 676$$

$$n = \frac{-2 \pm 26}{2} = -14, 12 \rightarrow n = 12$$

یادآوری: در دنباله حسابی a و b و c داریم: $2b = a + c$

۱۴

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{30} = 15(2a_1 + 29d)$$

$$S'_{30} = 15(2a_1 + 29(d+2)) = 15(2a_1 + 29d + 58) = 15(2a_1 + 29d) + 15 \times 58$$

$$S'_{30} = S_{30} + 870 \rightarrow \text{به مجموع } 30 \text{ جمله‌ی اول } 870 \text{ واحد اضافه می‌شوند}$$

۱۵

$$شش مضارب شش $6k \rightarrow 100 \leq 6k \leq 999 \rightarrow 16,6 \leq k \leq 166,5$$$

$$k = 17, 18, \dots, 166 \rightarrow \text{تعداد } n = 166 - 17 + 1 = 150$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$



$$102, 108, \dots, 996$$

$$S_{150} = \frac{150}{2}(a_1 + a_{150}) = \frac{150}{2}(102 + 996) = 82350$$

۱۶

$$a_1 = 5, d = 3 \rightarrow S_n > 493 \rightarrow \frac{n}{2}(10 + 3n - 3) > 493$$

$$3n^2 + 7n - 986 > 0 \quad \Delta = 49 + 12 \times 986 = 11881$$

$$n = \frac{-7 \pm 109}{6} = -\frac{58}{3}, 17 \Rightarrow n < -\frac{58}{3} \text{ یا } n > 17 \Rightarrow n \geq 18 \quad \text{حداقل ۱۸ جمله غ ق ق}$$

۱۷

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5}{9}n^2$$

$$n^2 + n = \frac{5}{9}n^2 \Rightarrow n^2 - 9n = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ غ ق ق} \\ n = 9 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۱۸

می دانیم هر دنباله ی عددی $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ می باشد.

$$a_1 = 7$$

$$a_{n+2} = 29 \Rightarrow a_1 + (n+1)2 = 29 \xrightarrow{a_1=7} 7 + 2n + 2 = 29 \Rightarrow 2n = 20 \Rightarrow n = 10$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[7 + 29] = 6 \times 36 = 216$$

۱۹

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$$

$$S'_{10} = \frac{10}{2}(2(a_1 + 4) + 9(d + 2)) = 5(2a_1 + 8 + 9d + 18)$$

$$= 10a_1 + 45d + 26(5) = S_{10} + 130 \Rightarrow 130 \text{ واحد اضافه می شود.}$$

۲۰

روش اول:

$$S_1 = a_1 = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{4-6}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 0$$

$$d = 0 - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$a_{10} = \frac{-2}{3} + 9\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3} + \frac{18}{3} = \frac{16}{3}$$

روش دوم: در هر دنباله ی عددی در S_n ، ضریب n^2 برابر $\frac{d}{2}$ است. بنابراین:

$$a_1 = S_1 = \frac{-2}{3}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -\frac{2}{3} + \frac{18}{3} = \frac{16}{3}$$

۲۱

$$a, b, c \Rightarrow b = \sqrt{a \times c} \text{ واسطه هندسی}$$



$$\text{واسطه هندسی} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \sqrt{5 - 3} = \sqrt{2}$$

۲۲ اگر جمله‌ی وسط را x در نظر بگیریم داریم: xq , x , $\frac{x}{q}$

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 125 \rightarrow x^3 = 125 \rightarrow x = 5$$

$$\frac{5}{q} + 5 + 5q = 31 \rightarrow \frac{5}{q} + 5q = 26 \rightarrow 5q^2 - 26q + 5 = 0 \rightarrow \Delta = 576$$

$$q = \frac{26 \pm 24}{10} = q = 5, \frac{1}{5} \rightarrow q = 5 \rightarrow 1, 5, 25 \quad q = \frac{1}{5} \rightarrow 25, 5, 1$$

۲۳

$$a_{10} = 48 \rightarrow a_1 q^{19} = 48 \Rightarrow \frac{a_1 q^{19}}{a_1 q^2} = \frac{48}{3} \Rightarrow q^{17} = 16 = 2^4$$

$$a_2 = 3 \rightarrow a_1 q^2 = 3$$

$$q = \pm \sqrt[17]{2^4} \rightarrow q = \pm \sqrt[17]{2^4} \quad a_1 q^2 = 3 \rightarrow a_1 \times \sqrt[17]{2^4} = 3 \rightarrow a_1 = \frac{3}{\sqrt[17]{2^4}}$$

$$a_9 = a_1 q^8 = \frac{3}{\sqrt[17]{2^4}} \times \sqrt[17]{2^4} = 3 \times \sqrt[17]{\frac{2^4}{2^4}} = 3 \times \sqrt[17]{1} = 3 \times 1 = 3$$

۲۴

$$\begin{cases} a_1 + a_9 = 18 \Rightarrow a_1 + a_1 q^8 = 18 \\ a_2 + a_{10} = 12 \Rightarrow a_1 q + a_1 q^9 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + q^8) = 18 \\ a_1 q(1 + q^8) = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a_1(1 + q^8)(1 - q + q^9)}{a_1 q(1 + q^8)} = \frac{18}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - q + q^9}{q} = \frac{3}{2} \rightarrow 2 - 2q + 2q^9 = 3q \rightarrow 2q^9 - 5q + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \rightarrow q = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۲۵

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_6 = 126, S_9 = 112 \rightarrow \frac{S_6}{S_9} = \frac{126}{112}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^9 - 1)}{q - 1}} = \frac{63}{56} \Rightarrow \frac{(q^6 - 1)(q^3 + 1)}{q^9 - 1} = \frac{63}{56} \rightarrow q^3 + 1 = \frac{63}{56}$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{7}{56} = \frac{1}{8} \rightarrow q = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a_9}{a_6} = q^3 = \frac{1}{8}$$

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow \frac{6(1 - (-2)^n)}{1 - (-2)} = 1026$$

$$\Rightarrow 513 = 1 - (-2)^n \Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$$

۲۷ اگر شدت تابش اولیه a باشد داریم:

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \dots \rightarrow \text{میزان جذب شده در لایه ها} \rightarrow a_1 = \frac{a}{2}, q = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_n > \frac{99}{100} a \rightarrow \frac{\frac{a}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{99}{100} a \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < 1 - \frac{99}{100}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \rightarrow 2^n > 100 \rightarrow n \geq 7$$

۲۸

$$x = -1 \rightarrow 4x^2 - mx - 7 = 0 \rightarrow 4 + m - 7 = 0 \rightarrow \boxed{m = 3}$$



$$4x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow (x+1)(4x-7) = 0 \rightarrow x = -1, x = \frac{7}{4}$$

۲۹ فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + m = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 2 \\ \alpha + \beta = \frac{b}{a} = \frac{-(-8)}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2\beta - 2 = 2 \Rightarrow \beta = 2, \alpha = 0 \\ \Rightarrow \alpha\beta = 2 \times 0 = \frac{c}{a} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 8 \end{aligned}$$

۳۰

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-1)} -x_1 - x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \quad \underline{x_1 + 2x_2 = 3} \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

x_2 ریشه‌ی معادله است و در معادله صدق می‌کند. پس:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5}{2} \rightarrow 2x_2^2 - x_2 + k = 0 \rightarrow 2 \times \frac{25}{4} - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow \frac{25}{2} - \frac{5}{2} + k = 0 \\ \Rightarrow 10 + k = 0 &\rightarrow k = -10 \end{aligned}$$

۳۱

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) \xrightarrow[\alpha\beta=1]{\alpha+\beta=5} 1((25) - 2) = 23$$

۳۲

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta^2 \\ \alpha\beta &= \frac{c}{a} = 8 \xrightarrow{\alpha=\beta^2} \beta^3 = 8 \Rightarrow \beta = 2 \\ \beta &= 2 \end{aligned}$$

ریشه در معادله صدق می‌کند، بنابراین:

۳۳

$$3x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{1}{3}, P = \alpha\beta = \frac{-1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{جدید } S' &= \frac{2}{\alpha} - 1 + \frac{2}{\beta} - 1 = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} - 2 = \frac{2S}{P} - 2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-1}{3}} - 2 = -\frac{2}{1} - 2 = -4 \\ \text{جدید } P' &= \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{2}{\beta} - 1\right) = \frac{4}{\alpha\beta} - \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta} + 1 = \frac{4}{\alpha\beta} - 2\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 1 \\ &= \frac{4}{P} - 2\left(\frac{S}{P}\right) + 1 = \frac{4}{\frac{-1}{3}} - 2\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{-1}{3}}\right) + 1 = -12 + 2 + 1 = -9 \end{aligned}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 9 = 0$$

۳۴

الف

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

ب x ها

پ

(1, 2)

ت

$(-1, +\infty)$

۳۵ الف

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \quad P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$$



(ب) یکی از ریشه‌ها m و دیگری $2m$ می‌باشد و داریم:

$$S = m + 2m = 3m, \quad P = m \times 2m = 2m^2$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$$

به ازای هر عدد حقیقی m یک معادله به دست می‌آید، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

(۳۶) الف) تابع دارای یک ریشه‌ی مضاعف در $x = 2$ است.

روش اول:

$$x = 0 \rightarrow P(0) = c = -2 \rightarrow P(x) = ax^2 + bx - 2$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a, (2, 0) \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2(-4a) = 2 \Rightarrow -4a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 2$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

روش دوم:

$$\text{ریشه‌ی مضاعف} \Rightarrow x = 2 \rightarrow P(x) = a(x - 2)^2 \quad (0, -2) \Rightarrow -2 = a(0 - 2)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

(ب) روش اول:

$$x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$x = -3 \rightarrow y = 0 \rightarrow 9a - 3b + c = 0 \quad (2)$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \xrightarrow{(1), (2)} 3a + c = 0$$

$$(-1, -2) \Rightarrow a - b + c = -2 \rightarrow a - 2a + c = -2 \rightarrow -a + c = -2$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a - c = -2 \end{cases} \Rightarrow 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}, b = 1$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

صفرهای تابع $x = -2$ و $x = 1$ است.

روش دوم: چون $x = -3$ و $x = 1$ ریشه‌های تابع هستند داریم:

$$P(x) = a(x + 3)(x - 1) \rightarrow (-1, -2) \Rightarrow -2 = a \times 2 \times (-2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}(x + 3)(x - 1) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

(۳۷) اگر α و β ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$\alpha = \frac{1}{\beta} + 2 \xrightarrow{\times \beta} \alpha\beta = 1 + 2\beta, \alpha\beta = \frac{c}{a} = m \Rightarrow m = 1 + 2\beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{m - 1}{2} \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند}} \left(\frac{m - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m - 1}{2}\right) + m = 0$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2 - 2m + 1 + 2m - 2 + 4m = 0 \rightarrow m^2 + 4m - 1 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 = 20 \rightarrow m = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow m = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$x^2 + x - 2 \pm \sqrt{5} = 0 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow \text{هر ۲ قابل قبول}$$

(۳۸)

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 100 = 149 > 0, \quad S = \frac{-b}{a} = \frac{7}{5} > 0, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{5} = -1 < 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف علامت است که عدد مثبت از لحاظ قدر مطلق از دیگری بزرگتر است.

(۳۹) ۲ و ۴ صفرهای تابع هستند.



$$y = a(x - 2)(x - 4) \rightarrow 2 = a(0 - 2)(0 - 4) \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

c منفی

b منفی

a منفی (۴۰)

(۴۱)

الف

برای تعیین صف‌های هر تابع، باید معادله $y = 0$ را حل کنیم.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}, x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

ب

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0}, 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 24 = -23 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

پ

$$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x^2 + 5 = 0, x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \Rightarrow \text{تابع } h(x) \text{ صفر ندارد.}$$

(۴۲)

الف

$$\text{سهمی روبه بالا } a > 0 \rightarrow \boxed{a = 1} \rightarrow f(x) = x^2 + bx + c$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -3 \Rightarrow b = 6a = 6 \times 1 = 6 \rightarrow \boxed{b = 6}$$

$$(-3, 5) \rightarrow 5 = 9 - 3b + c \Rightarrow 5 = 9 - 18 + c \rightarrow \boxed{c = 14}$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 14 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

ب

$$\text{سهمی روبه پایین } a < 0 \rightarrow \boxed{a = -1} \rightarrow f(x) = -x^2 + bx + c$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a = 4(-1) = -4 \rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$(-2, 2) \rightarrow 2 = -4 - 2b + c \Rightarrow 6 = -2(-4) + c \rightarrow \boxed{c = -3}$$

$$f(x) = -x^2 - 4x - 2 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

پ

$$\text{سهمی روبه بالا } a > 0 \rightarrow \boxed{a = 1} \rightarrow f(x) = x^2 + bx + c$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a = -6 \rightarrow \boxed{b = -6}$$

$$(3, -3) \rightarrow 9 - 18 + c = -3 \rightarrow \boxed{c = 6}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 6 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$\Delta = 36 - 24 = 12 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

ت

$$\text{سهمی روبه پایین } a < 0 \rightarrow \boxed{a = -1} \rightarrow f(x) = -x^2 + bx + c$$



$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a = 4(-1) = -4 \rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$(-2, -1) \rightarrow -4 - 2b + c = -1 \rightarrow -4 + 8 + c = -1 \rightarrow \boxed{c = -5}$$

$$f(x) = -x^2 - 4x - 5 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = 0, 2, -2$$

$$g(x) = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

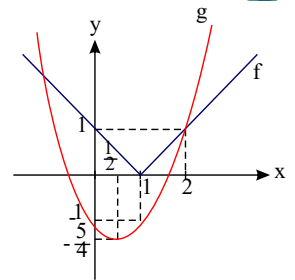
$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} + 1 = 0 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 + x = 0 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

$$f(x) = |x - 1|$$

$$g(x) = x^2 - x - 1$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{راس } y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1 - 2 - 4}{4} = -\frac{5}{4}$$



$$\text{ریشه‌های معادله } \begin{cases} \text{یک ریشه مثبت} \rightarrow x = 2 \\ \text{یک ریشه منفی} \end{cases}$$

$$x^6 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = k \rightarrow k^3 - 3k + 2 = 0 \rightarrow (k - 2)(k - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ k = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)} + 6 = 0$$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = k \rightarrow k^3 - \sqrt{k} + 6 = 0 \rightarrow (k - 6)(k - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ k = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

$$4 - x^2 = k \rightarrow k^2 - 2k - 15 = 0 \rightarrow (k + 3)(k - 5) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = -3 \rightarrow 4 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ k = 5 \rightarrow 4 - x^2 = 5 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$x = -2 \rightarrow x^2 + kx^2 - x - 2 = 0 \rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = 2}$$

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2$$

$f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.

۴۳

الف

ب

۴۴

۴۵

الف

ب

پ

۴۶



$$\begin{array}{r} x^2 + 2x^2 - x - 2 \mid \frac{x+2}{x^2-1} \\ -x^2 - 2x^2 \\ \hline -x - 2 \\ +x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+2)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

روش دیگر: میتوان $f(x)$ را تجزیه کرد.

$$x^2 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

۴۷

الف

$$x(2x^2 + x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \quad 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

ب

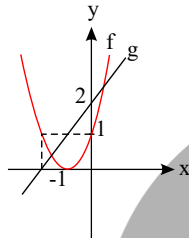
$$\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10 \xrightarrow{\times 24} 9x^2 - 33 + 148 - 4x^2 = 240$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

۴۸

با فرض $f(x) = (x+1)^2$ و $g(x) = x+2$ داریم.

معادله ۲ ریشه دارد. $\Rightarrow$ ۲ نقطه برخورد
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی.



۴۹

$$\frac{1}{x-2} = t \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1, t = -3$$

$$t = 1 \rightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \rightarrow x-2 = 1 \rightarrow x = 3$$

$$t = -3 \rightarrow \frac{1}{x-2} = -3 \rightarrow x-2 = -\frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

۵۰

الف

$$\left. \begin{array}{l} 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ x - [x] = 0 \Rightarrow [x] = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{باید از این بازه نقاط صحیح را برداریم.}$$

پس دامنه تابع برابر است با:

$$D = (-3, -2) \cap (-2, -1) \cap (-1, 0) \cap (0, 1) \cap (1, 2) \cap (2, 3) \quad \text{یا} \quad D = (-3, 3) - \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

ب -2 و -1 و 0 و 1 و 2

پ 3

ت -3

۵۱

$$t = \frac{1}{x-2} \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \rightarrow t = -3, 1$$

$$\frac{1}{x-2} = -3 \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{x-2} = 1 \rightarrow x = 3$$

۵۲

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{x} \Rightarrow \text{زمان ماشین A به تنهایی}$$

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{x+15} \Rightarrow \text{زمان ماشین B به تنهایی}$$



$$\frac{1}{18} = \text{میزان کار در یک ساعت} \rightarrow 18 = \text{زمان هر دو ماشین با هم}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x(x+15)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x^2 + 15x = 36x + 270 \Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \quad x=30, x=-9 \text{ غ ق}$$

$$45 = \text{زمان ماشین B به تنهایی} \rightarrow 30 = \text{زمان ماشین A به تنهایی}$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{x+3}$$

$$2 \text{ توان} \Rightarrow 3x+1 = 16+x+3-8\sqrt{x+3} \Rightarrow 8\sqrt{x+3} = -2x+18$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x+3} = 9-x \xrightarrow{2 \text{ توان}} 16(x+3) = 81-18x+x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 - 16x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0$$

$$\text{جمع ضرایب} = 0 \Rightarrow x=1, x=\frac{c}{a}=33$$

$$x=1 \xrightarrow{\text{امتحان در معادله}} \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \Rightarrow 2+2=4 \Rightarrow x=1 \text{ قابل قبول}$$

$$x=33 \xrightarrow{\text{امتحان در معادله}} \sqrt{36} + \sqrt{100} = 4 \Rightarrow 6+10=4 \text{ غلط} \Rightarrow x=33 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$2x - x^2 = \sqrt{6(x^2 - 2x) + 7} \quad 2x - x^2 = t$$

$$t = \sqrt{-6t+7} \rightarrow t^2 = -6t+7 \rightarrow t^2 + 6t - 7 = 0$$

$$\text{جمع ضرایب صفر} \rightarrow t=1, t=-7 \text{ غیر قابل قبول} \rightarrow t=1 \rightarrow 1 = \sqrt{-6+7} \quad \checkmark$$

$$t=1 \rightarrow 2x - x^2 = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow \boxed{x=1}$$

عبارت‌های $\sqrt{2-x}$ و $\sqrt{1-x}$ هر دو نامنفی‌اند. حال اگر عدد ۳ را به مجموع آنها اضافه کنیم، حاصل حتماً بزرگتر مساوی ۳ خواهد بود. بنابراین معادله هرگز صفر نمی‌شود.

$$\begin{cases} x < 1 \Rightarrow y = -x + 1 - x + 2 = -2x + 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow y = x - 1 - x + 2 = 1 \\ x > 2 \Rightarrow y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x + 3 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3 & x > 2 \end{cases}$$

$$x \leq 1 \rightarrow x-1 \leq 0 \rightarrow |x-1| = -x+1$$

$$x \leq 1 \rightarrow x-3 \leq -2 \rightarrow |x-3| = -x+3$$

$$y = |x-3| + |x-1| = -x+3 - x+1 = -2x+4$$

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(-x) & x < 0 \\ x \cdot x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ -x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline x^2-1 & + & - \end{array}$$

$$h(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) & x < -1 \\ -(x-1) + x+1 & -1 \leq x < 1 \\ x-1 + x+1 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$



x	-1	1
x-1	-	-
x+1	-	+

٥٩

الف

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1-2=x-1 & x \geq -1 \\ -x-1-2=-x-3 & x < -1 \end{cases}$$

ب

x	-2	1
x-1	-	-
x+2	-	+

ب

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -2 \leq x \leq 1 \\ x > 1 \end{cases} \\ &\begin{aligned} :y &= -(x-1+x+2) = -2x-1 \\ :y &= -x+1+x+2 = 3 \\ :y &= x-1+x+2 = x+1 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -2x-1 & x < -2 \\ 3 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$$

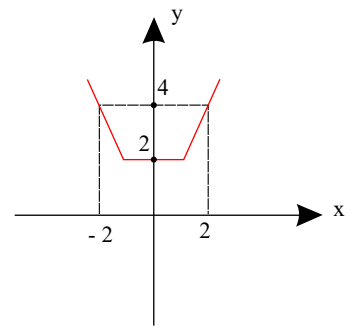
٦٠

x	-1	+1
x+1	-	+
x-1	-	-

$$f(x) = |x+1| + |x-1| \quad \begin{aligned} x+1=0 &\Rightarrow x=-1 \\ x-1=0 &\Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

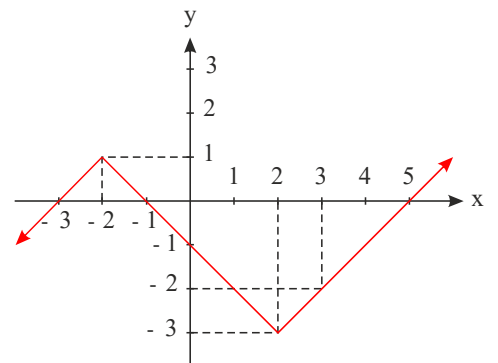
$$R_f = [2, +\infty)$$



٦١

$$\begin{aligned} x \leq -2 &\Rightarrow y = -x+2+x+2+x-1 = x+3 \\ -2 \leq x \leq 2 &\Rightarrow y = -x+2-x-2+x-1 = -x-1 \\ x \geq 2 &\Rightarrow y = x-2-x-2+x-1 = x-5 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq -2 \\ -x-1 & -2 \leq x \leq 2 \\ x-5 & x \geq 2 \end{cases}$$



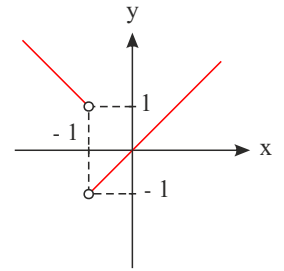
٦٢



$$x > -1 \Rightarrow y = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$$

$$x < -1 \Rightarrow y = \frac{-x(x+1)}{x+1} = -x$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < -1 \\ x & x > -1 \end{cases}$$



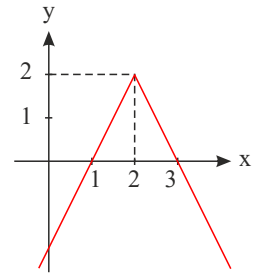
۶۳

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x < 2 \Rightarrow y = 2x - 4 + 2 = 2x - 2$$

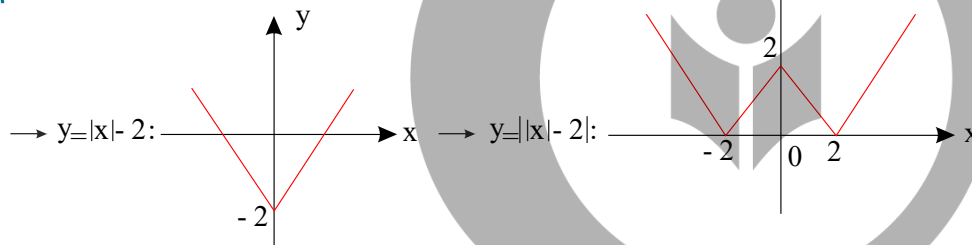
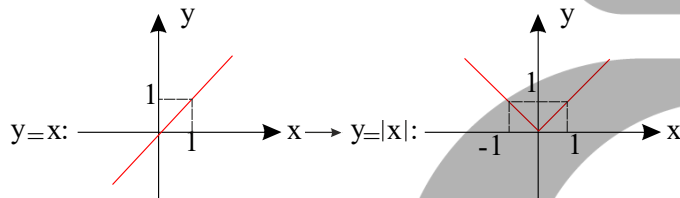
$$x \geq 2 \Rightarrow y = -(2x - 4) + 2 = -2x + 6$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 2 \\ -2x + 6 & x \geq 2 \end{cases}$$



۶۴

برای رسم تابع $y = ||x| - 2|$ ابتدا تابع $y = |x|$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمتی که پائین محور x هاست را به بالا قرینه می‌کنیم تا به $|x|$ برسیم و سپس آنرا ۲ واحد به پائین انتقال می‌دهیم تا به $|x| - 2$ برسیم.

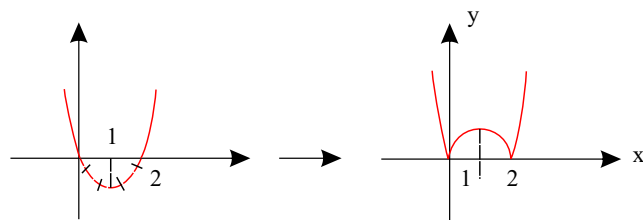


۶۵

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$\text{راس سهمی: } x = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \quad y = |x^2 - 2x|$$



۶۶

$$y = |x - 3| - 5 \Rightarrow \underbrace{y + 5}_{+} = \underbrace{|x - 3|}_{+} \Rightarrow y + 5 \geq 0 \Rightarrow y \geq -5$$

۶۷

$$x < 2 \Rightarrow \frac{6(x-2)}{-(x-2)} = x \Rightarrow x = -6 \Rightarrow \text{قابل قبول}$$

$$x > 2 \Rightarrow \frac{6(x-2)}{x-2} = x \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \text{قابل قبول}$$



۶۸

$$\begin{aligned} -|a| \leq a \leq |a| & \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \\ -|b| \leq b \leq |b| & \\ \rightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| & \xrightarrow{\text{بنا به قراین قدر مطلق}} |a + b| \leq |a| + |b| \end{aligned}$$

۶۹

$$|y - 3| = 5 - |x + 3|, \quad |y - 3| \geq 0 \Rightarrow 5 - |x + 3| \geq 0$$

$$\Rightarrow |x + 3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x + 3 \leq 5 \Rightarrow \boxed{-8 \leq x \leq 2}$$

۷۰

$$|x - 1| = 2 - |2y - 4| \Rightarrow |x - 1| \geq 0 \Rightarrow 2 - |2y - 4| \geq 0$$

$$\Rightarrow |2y - 4| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2y - 4 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2y \leq 6 \Rightarrow \boxed{1 \leq y \leq 3}$$

۷۱ نکته: $|u| > u$ فقط زمانی برقرار است که u منفی باشد. پس داریم:

۷۲

$$|x - 1| > x - 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 1}$$

۷۳

$$y = \sqrt{x - |x|} \Rightarrow y = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \sqrt{2x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow R_f = \{0\}$$

غ ق ق ق

۷۴

می‌دانیم:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\begin{aligned} a = x & \quad |x + y - x| \leq |x| + |y - x| \\ b = y - x & \quad |y| \leq |x| + |y - x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x| \end{aligned}$$

۷۵ اگر نقطه‌های مورد نظر را x در نظر بگیریم، داریم:

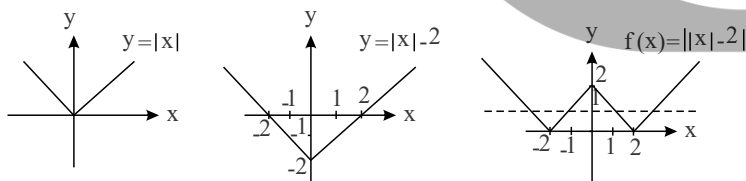
$$|x - (-1)| + |x - 3| = 6 \Rightarrow |x + 1| + |x - 3| = 6$$

$$x < -1 \Rightarrow -x - 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2} \text{ قابل قبول}$$

$$-1 \leq x < 3 \Rightarrow x + 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow 4 = 6 \text{ غلط}$$

$$x \geq 3 \Rightarrow x + 1 + x - 3 = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 4} \text{ قابل قبول}$$

۷۶



خط $y = 1$ نمودار تابع f را در ۴ نقطه قطع می‌کند پس معادله $f(x) = 1$ دارای ۴ ریشه است، دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی.

$$f(x) = 1 \Rightarrow ||x| - 2| = 1 \Rightarrow |x| - 2 = \pm 1 \Rightarrow |x| = 3, |x| = 1$$

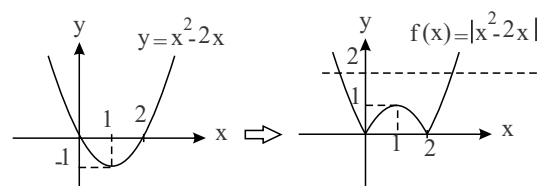
$$|x| = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}, \quad |x| = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

۷۷

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$\text{رأس } y = 1 - 2 = -1$$



چون خط $y = 2$ نمودار تابع f را در ۲ نقطه قطع می‌کند. معادله $|x^2 - 2x| = 2$ دارای ۲ ریشه است، یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد.

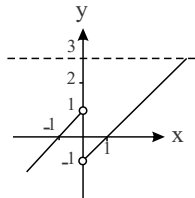
$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = \pm 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$



$$\Delta = 4 + 8 = 12 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

ریشه ندارد. $x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow$

الف) $y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - \frac{x}{-x} & x < 0 \\ x - \frac{x}{x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$



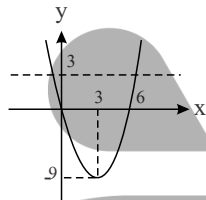
خط $y = 3$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند. پس معادله $y = 3$ یک ریشه مثبت دارد.

$x - \frac{x}{|x|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ x > 0 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

غیر قابل قبول
جواب

ب) $y = x^2 - 6x \rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$

رأس $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$
رأس $y = 9 - 18 = -9$



معادله $y = 3$ دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است.

$y = 3 \rightarrow x^2 - 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Delta = 36 + 12 = 48 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2}$

$|x^2 - 9| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x^2 - 9 \leq 7 \Rightarrow 2 \leq x^2 \leq 16 \Rightarrow \sqrt{2} \leq |x| \leq 4$

$\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq \sqrt{2} \Rightarrow x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} & (1) \\ |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 & (2) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow -4 \leq x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } \sqrt{2} \leq x \leq 4$

$|x - 1| |x + 1| \leq |x + 1| \Rightarrow |x - 1| |x + 1| - |x + 1| \leq 0$

$\Rightarrow \underbrace{|x + 1|}_{\text{نامنفی}} (|x - 1| - 1) \leq 0 \xrightarrow{x=-1} |x - 1| - 1 \leq 0 \Rightarrow |x - 1| \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \text{جواب کلی} = [0, 2] \cup \{-1\}$

$|x^2 - 9| + 9 > x^2 \Rightarrow |x^2 - 9| > x^2 - 9$

$\Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$

$x^2 - 2x + 1 + |x - 1| < 2 \Rightarrow (x - 1)^2 + |x - 1| - 2 < 0$

$\Rightarrow |x - 1|^2 + |x - 1| - 2 < 0, \quad |x - 1| = t \Rightarrow t^2 + t - 2 < 0$

$\Rightarrow (t - 1)(t + 2) < 0 \Rightarrow -2 < t < 1 \Rightarrow \underbrace{-2 < |x - 1| < 1}_{\text{همواره برقرار}}$

$\Rightarrow |x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ ریشمی قدر مطلق

$x < 2 \Rightarrow -x + 2 \leq x \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1 \cap x < 2 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \quad (1)$

$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \leq x \Rightarrow -2 \geq 0 \rightarrow \text{درست} \Rightarrow \text{جواب} \quad x \geq 2 \quad (2)$

$(1) \cup (2) \Rightarrow x \geq 1$

۷۸

۷۹

۸۰

۸۱

نکته: نامساوی $|A| > A$ فقط زمانی صحیح است که $A < 0$ باشد.

۸۲ به طرفین نامعادله عدد ۱ را اضافه می‌کنیم.

۸۳

۸۴



$$||x| - 2| = 3 \rightarrow |x| - 2 = \pm 3 \Rightarrow |x| - 2 = 3$$

غیر قابل قبول $|x| - 2 = -3 \rightarrow |x| = -1$, $|x| = 5 \rightarrow x = \pm 5$

۸۵

محل تلاقی نمودارهای دو تابع f و g در واقع ریشه‌های معادله‌ی $f = g$ می‌باشد.

$$||x - 1| - 4| = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| - 4 = 4 \Rightarrow |x - 1| = 8 \Rightarrow x - 1 = \pm 8 & x = 9, -7 \\ |x - 1| - 4 = -4 \Rightarrow |x - 1| = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

در ۳ نقطه اشتراک دارند.

۸۶

الف

$$\sqrt{(2x - 3)^2} = |x| \Rightarrow |2x - 3| = |x|$$

می‌دانیم:

$$|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

پس می‌توان نوشت:

$$2x - 3 = \pm x$$

$$\begin{cases} 2x - 3 = x \Rightarrow x = 3 \\ 2x - 3 = -x \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

x	-1
$x + 1$	$- \quad 0 \quad +$

ب ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

دو حالت داریم:

$$x \geq -1 \Rightarrow x + 1 = 4 + 2x \Rightarrow x = -3 \quad \text{غ ق ق}$$

$$x < -1 \Rightarrow -x - 1 = 4 + 2x \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \quad \text{ق ق ق}$$

جواب $x = -3$ غیر قابل قبول است، چون در محدوده $x \geq -1$ نیست و جواب $x = -\frac{5}{3}$ قابل قبول است، چون در محدوده $x < -1$ است.

ب می‌دانیم $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ ، سپس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{|3x - 1|} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} |3x - 1| = 2$$

$$3x - 1 = \pm 2 \begin{cases} 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

می‌دانیم اگر $a = \pm k \Leftrightarrow |a| = k$ پس:

هر دو جواب قابل قبول اند، چون مخرج را صفر نمی‌کنند.

۸۷

$$-2 < x < 4 \quad \text{الف}$$

$$(-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \quad \text{ب}$$

$$\text{بیشتر} \quad \text{پ}$$

$$9\pi \quad \text{ت}$$

۸۸ روش اول: باید شیب AB و AC یکسان باشد.

$$m_{AB} = \frac{1 - 3}{3 - 6} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}, \quad m_{AC} = \frac{-3 - 3}{-3 - 6} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow$ ۳ نقطه بر یک خط قرار دارند

روش دوم: معادله‌ی خط گذرنده از ۲ نقطه مثلاً A و B را یافته و مختصات نقطه‌ی سوم یعنی C باید در آن صدق کند.

$$m_{AB} = \frac{2}{3}, \quad A(6, 3) \Rightarrow y - 3 = \frac{2}{3}(x - 6) \Rightarrow 3y - 9 = 2x - 12$$

$$3y - 2x + 3 = 0, \quad C(-3, -3) \Rightarrow 3(-3) - 2(-3) + 3 = 0$$

$\Rightarrow -9 + 6 + 3 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ ۳ نقطه بر یک خط قرار دارند



۸۹

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow \frac{-2 + 4 + x_C}{3} = 3 \Rightarrow 2 + x_C = 9 \rightarrow x_C = 7$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow \frac{5 - 6 + y_C}{3} = -2 \Rightarrow y_C = -5 \rightarrow C = (7, -5)$$

نقطه‌ی برخورد دو خط d_1 و d_2 را یافته و این نقطه باید در خط d_3 صدق کند. (۹۰)

$$d_1: 3x - y - 1 = 0 \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 9x - 3y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$d_2: 2x + 3y - 8 = 0$$

$$11x - 11 = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 3y - 8 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow A(1, 2) \Rightarrow (m - 2)x + 2y - 2m = 0$$

$$\Rightarrow m - 2 + 4 - 2m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

اگر طول از مبدأ خط p و عرض از مبدأ خط q باشند، معادله‌ی خط بصورت $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ است. (۹۱)

$$p = 3q \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3q} + \frac{y}{q} = 1 \xrightarrow{\times 3q} x + 3y = 3q$$

$$A(3, -2) \Rightarrow 3 + 3(-2) = 3q \Rightarrow -3 = 3q \Rightarrow q = -1, p = -3$$

$$\Rightarrow x + 3y = 3q = 3(-1) = -3 \Rightarrow x + 3y = -3$$

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(2-1)^2 + (m-2)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (m+1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 + m^2 - 4m + 4 = 16 + m^2 + 2m + 1 \Rightarrow 5 - 17 = 6m \rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow A(2, -2)$$

$$y = -x \rightarrow M(a, -a) \rightarrow MB = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (-a-1)^2} = 2\sqrt{5} \rightarrow a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 = 20$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 18 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3, a = 3 \rightarrow M(3, -3)$$

$$a = -3, M(-3, 3)$$

شرط این که خط 2 و $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ بر هم منطبق باشند، آن است که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (۹۴)

$$5x - my - 3 = 0$$

$$mx - 20y - m + 4 = 0 \Rightarrow \frac{5}{m} = \frac{-m}{-20} = \frac{-3}{-m+4}$$

$$\frac{5}{m} = \frac{m}{20} \Rightarrow m^2 = 100 \Rightarrow \boxed{m = \pm 10} \quad (1)$$

$$\frac{5}{m} = \frac{3}{m-4} \Rightarrow 5m - 20 = 3m \Rightarrow 2m = 20 \Rightarrow \boxed{m = 10} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{m = 10}$$

$$2x - 3y + 1 = 0, x = 0 \rightarrow -3y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow A(0, \frac{1}{3})$$

$$2x - 3y + 1 = 0 \rightarrow \text{شیب خط} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{شیب خط مورد نظر} = -\frac{3}{2}$$

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 6y - 2 = -9x \Rightarrow 9x + 6y - 2 = 0$$

$$m_{AB} = \frac{2 - (-1)}{k - 4} = \frac{3}{k - 4}$$

$$\text{الف) } 3y + 2x + 6 \rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{k-4} = -\frac{2}{3} \Rightarrow k-4 = -\frac{9}{2} \rightarrow k = -\frac{1}{2}$$



$$\text{ب) } 2y - 5x = 1 \rightarrow \text{شیب} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{k-4} = -\frac{2}{5} \Rightarrow k-4 = -\frac{15}{2} \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$$

۹۷

$$d: 3ax - (3a+1)y - 4 = 0 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{3a}{3a+1}$$

$$d': ax + (a-1)y - 2a + 1 = 0 \rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{a}{a-1} = \frac{a}{1-a}$$

$$\left(\frac{3a}{3a+1}\right) \times \left(\frac{a}{1-a}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3a^2}{3a - 3a^2 + 1 - a} = -1$$

$$\Rightarrow 3a^2 = -2a + 3a^2 - 1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۹۸

دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ را موازی متمایز گوئیم هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

$$\frac{2-a}{a} = \frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{5} \Rightarrow \frac{2-a}{a} = \frac{1}{-3} \Rightarrow a = -6 + 3a \Rightarrow 6 = 2a \Rightarrow \boxed{a=3}$$

۹۹

خط $4y - 3x = -1$ را با نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y = x$ قطع می‌دهیم. نقطه‌ی برخورد باید در خط دوم صدق کند.

$$\begin{cases} 4y - 3x = -1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 4x - 3x = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$A(-1, -1) \Rightarrow (2a-1)x + (a+2)y = 2 \Rightarrow -2a + 1 - a - 2 = 2$$

$$\Rightarrow -3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

۱۰۰

برای یافتن نقطه‌ی برخورد دو خط، باید دستگاه ۲ معادله‌ی ۲ مجهولی حاصل از آن دو خط را حل کنیم.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 9x - 6y = 12 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$$

$$13x = 26 \Rightarrow \boxed{x=2} \quad 2x + 3y = 7$$

$$\Rightarrow 4 + 3y = 7 \rightarrow y = 1 \rightarrow \text{نقطه‌ی برخورد ۲ خط} = (2, 1)$$

۱۰۱

نقطه‌ی دلخواهی روی خط $ax + by + c = 0$ در نظر گرفته و فاصله آن را تا خط $ax + by + c' = 0$ به دست می‌آوریم.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$$

$$A = (0, -\frac{c}{b}) \Rightarrow \text{فاصله } A \text{ تا خط} = \frac{|0 + b(-\frac{c}{b}) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۰۲

$$\text{فاصله‌ی ۲ خط موازی} = \frac{|k - (-7)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|k + 7|}{5} = 3$$

$$\Rightarrow |k + 7| = 15 \rightarrow k + 7 = \pm 15 \rightarrow k = 8, k = -22$$

$$3x - 4y + 8 = 0, 3x - 4y - 22 = 0$$

$$3x - 4y + k = 0$$

$$3x - 4y - 7 = 0$$

۱۰۳

نکته: فاصله ۲ خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

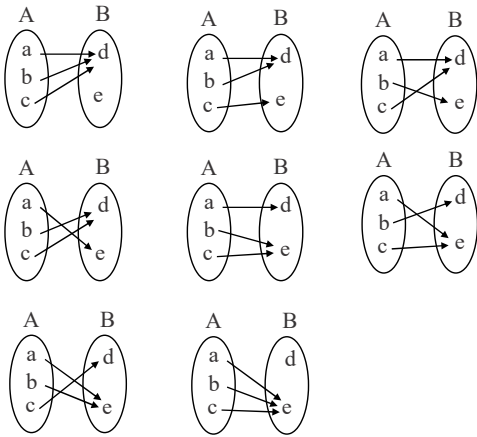
$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_1: 3x + 4y + 1 = 0, d_2: 6x + 8y - 8 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3x + 4y - 4 = 0$$

$$d_2: 3x + 4y - 4 = 0$$

$$\text{فاصله‌ی ۲ خط موازی} = \frac{|-4 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

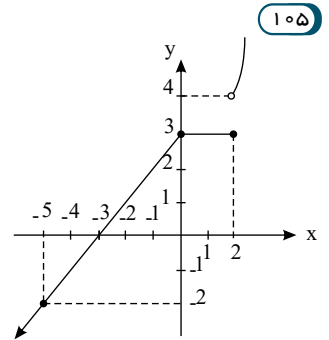
۱۰۴



$$(-3, 0), (-5, -2) \rightarrow m = \frac{0 - (-2)}{-3 - (-5)} = 1$$

$$y - 0 = 1(x + 3) \rightarrow y = x + 3$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$



الف) $f: [-6, 9] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = -x^2 - 1$

ب) $x = -3 \rightarrow f(-3) = -9 - 1 = -10$

پ) $f(x) = -65 \rightarrow -x^2 - 1 = -65 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \pm 8$

غ ق ک ۸ ، جواب $x = -8$ ، $-6 \leq x < 9 \rightarrow x = 8$

۱۰۷ الف) هر عضو A به یکی از ۴ عضو B می‌تواند متناظر شود یعنی برای هر عضو A ، ۴ انتخاب وجود دارد. پس:

$$A: 2, 5, 6, 7, 8 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$$

ب) چون شامل زوج مرتب (۱۰ و ۶) است یعنی عضو ۶ از A فقط یک انتخاب از B دارد پس:

$$A: 2, 5, 6, 7, 8 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 4 \times 4 \times 1 \times 4 \times 4 = 4^4$$

ج) فاقد (۱ و ۲) یعنی عضو ۲ به عضو ۱ از B متناظر نمی‌شود یعنی می‌توانی به بقیه اعضای B متناظر می‌شود. برای عضو ۷ از A نیز همین گونه است یعنی عضو ۷ می‌تواند به تک تک اعضای B به جز ۴ متناظر شود. پس برای ۲، ۷ انتخاب داریم:

$$A: 2, 5, 6, 7, 8 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 3 \times 4 \times 4 \times 3 \times 4 = 3^2 \times 4^3$$

د) طبق توضیحات بالا داریم:

$$A: 2, 5, 6, 7, 8 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 4 \times 1 \times 3 \times 4 \times 1 = 3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48$$

۱۰۸ برد تابع را یافته و B هر مجموعه‌ای است که برد تابع زیرمجموعه آن باشد:

$$x > -3 \rightarrow -2x < 6 \rightarrow -2x + 4 < 6 + 4 \rightarrow f(x) < 10 \rightarrow R_f = (-\infty, 10)$$

$$B = (-\infty, 10) \text{ یا } B = (-\infty, 10] \text{ یا } B = (-\infty, 11]$$

۱۰۹ برد تابع را می‌یابیم. B هر مجموعه‌ای است که برد تابع زیرمجموعه آن باشد، پس:

$$-3 < x \leq 4 \rightarrow 0 \leq x^2 \leq 16 \rightarrow -16 \leq -x^2 \leq 0 \rightarrow -16 + 7 \leq -x^2 + 7 \leq 7$$

$$\rightarrow -9 \leq f(x) \leq 7 \rightarrow R_f = [-9, 7]$$

$$B = [-9, 7] \text{ یا } B = \mathbb{R} \text{ یا } B = (-10, 7] \text{ یا } B = (-10, 9)$$



۱۱۰

$$f(-2) = 17 \rightarrow 4m - 3 = 17 \rightarrow 4m = 20 \rightarrow m = 5$$

$$f(x) = 5x^2 - 3 \rightarrow f(3) = 45 - 3 = 42$$

۱۱۱ الف) دو تابع مساویند. هم ضابطه‌ی دو تابع و هم دامنه‌ی آن‌ها با هم برابر است.

$$f(x) = \sqrt{x^2} \quad D_f = \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$g(x) = |x| \quad D_g = \mathbb{R}$$

ب) دو تابع مساوی نیستند. چون مقادیرشان در $x = 3$ برابر نیستند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x + 3 \quad f(3) = 5, \quad g(3) = 6 \Rightarrow f(3) \neq g(3)$$

ج) دو تابع مساویند.

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x(x - 2)}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases} = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases} = f(x)$$

۱۱۲

برای هریک از ۴ عضو مجموعه A دو انتخاب از B وجود دارد $\Leftarrow 2^4 = 16 =$ تعداد توابع

۱۱۳

چون مساویند پس دامنه‌ی هر دو تابع برابر است و باید مقادیرشان در همه‌ی نقاط برابر باشد بنابراین:

$$f(4) = g(4) \Rightarrow 4 + 4 = 8 = g(4)$$

$$g(4) = k - 1 = 8 \Rightarrow k = 9$$

۱۱۴

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 & |x| \neq 1 \\ \frac{a}{x + 1} & x = 1 \\ \frac{b}{x - 1} & x = -1 \end{cases}$$

$$x \neq \pm 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = g(1) \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = g(-1) \Rightarrow \frac{b}{-2} = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

۱۱۵

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 4 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$2 \begin{cases} \nearrow \sqrt{3} \\ \searrow -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

۱۱۶

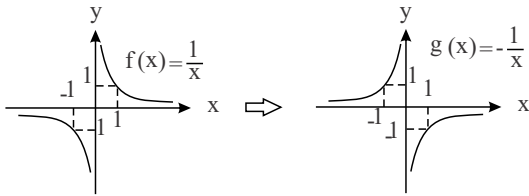
$$\text{الف) } t = 5 \rightarrow n(5) = \frac{9500 \times 5 - 2000}{4 + 5} = \frac{45500}{9} = 5055,5$$

$$\text{ب) } n(t) = 5500 \Rightarrow \frac{9500t - 2000}{4 + t} = 5500$$

$$\Rightarrow 9500t - 2000 = 22000 + 5500t \Rightarrow 4000t = 24000 \Rightarrow t = 6$$

۱۱۷ برای رسم نمودار $y = -f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است که نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.

بنابراین برای رسم $g(x) = -\frac{1}{x}$ باید نمودار $f(x) = \frac{1}{x}$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.



١١٨

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{|x|-5}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) |x|-5 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 5 \Rightarrow x \neq \pm 5 \\ (2) \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{array} \right\} \cap D_f = [2, +\infty) - \{5\}$$

١١٩

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \rightarrow$$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
	$+$	$-$	$+$	$+$

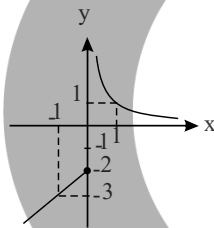
$$D_g = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g \rightarrow f(x) \neq g(x)$$

١٢٠

الف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x-2 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{matrix}$$



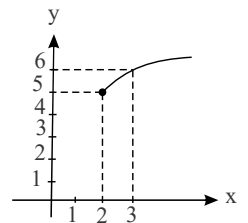
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$

ب

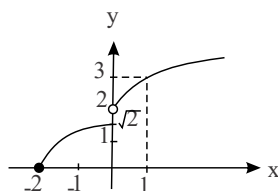
$$f(x) = \sqrt{x-2} + 5, x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} + 5 \geq 5 \Rightarrow f(x) \geq 5 \Rightarrow R_f = [5, +\infty)$$



ج

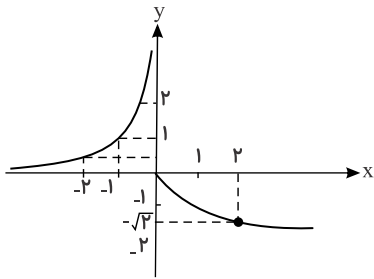
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{matrix}$$



$$D_f = [-2, +\infty)$$

$$R_f = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty)$$

د



$$y = |x| = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ \hline y & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$D_f = \mathbb{R}, R_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$$

۱۲۱

الف

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}} \rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \geq 0 \xrightarrow{x \geq 0} 2-\sqrt{x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x} \leq 2$$

همواره مثبت

$$\rightarrow x \leq 4 \cap x \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4 \rightarrow D_f = [0, 4]$$

ب

$$f(x) = \sqrt{||x+1|-3|-2} \rightarrow ||x+1|-3|-2 \geq 0 \rightarrow ||x+1|-3| \geq 2$$

$$\rightarrow |x+1|-3 \leq -2 \text{ یا } |x+1|-3 \geq 2 \rightarrow |x+1| \leq 1 \text{ یا } |x+1| \geq 5$$

$$\rightarrow -1 \leq x+1 \leq 1 \text{ یا } x+1 \leq -5 \text{ یا } x+1 \geq 5$$

$$\rightarrow -2 \leq x \leq 0 \text{ یا } x \leq -6 \text{ یا } x \geq 4 \rightarrow D_f = (-\infty, -6] \cup [-2, 0] \cup [4, +\infty)$$

۱۲۲

هر دو ضابطه در $x = 2$ مشترک هستند بنابراین باید مقادیرشان در این نقطه برابر باشد.

در هر دو ضابطه باید یک مقدار بدهد.

$$k(2) + 2 = (2)^k \Rightarrow 2k + 2 = 8 \Rightarrow k = 3$$

۱۲۳

$$(y+1)^2 + (x-2)^2 = 0 \Rightarrow \text{جمع دو جمله‌ی نامنفی صفر شده پس تک تک جملات صفر است} \Rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix}$$

جواب این رابطه فقط تک‌نقطه‌ی $(2, -1)$ است پس این رابطه تابع است.

۱۲۴

شرط تابع بودن: $if : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow 2 - |x_1| = 2 - |x_2|$$

$$|y_1| = |y_2| \Rightarrow y_1 = \pm y_2$$

پس تابع نیست چون به ازای x مساوی دو y می‌دهد.

۱۲۵

شرط تابع بودن: $if : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 2} = \sqrt{x_2 + 2} \Rightarrow y_1 = y_2$$

پس این رابطه تابع است.

۱۲۶

الف

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 2xy$$

$$\rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \rightarrow (x - y)^2 = 0 \rightarrow y = x \text{ تابع است.}$$

ب

$$y = \sqrt{2x-3} \pm \sqrt{3-2x}$$

$$\text{شرایط رادیکال‌ها} = \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ 3-2x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 0 \pm 0 = 0$$



فقط $x = \frac{3}{2}$ در این رابطه قابل استفاده است و این رابطه فقط از یک زوج مرتب تشکیل یافته است پس تابع است.

$$\left\{\left(\frac{3}{2}, 0\right)\right\}$$

۱۲۷

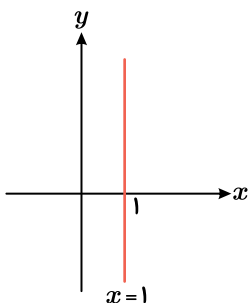
الف

$$3x + 2y = 12 \Rightarrow 2y = -3x + 12 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$$

y برحسب x یک جواب دارد، پس تابع است.

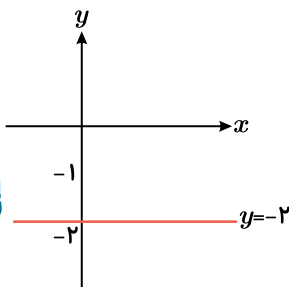
ب

تابع نیست، زیرا به ازای مقدار ثابت ۱ برای x ، هر مقداری می‌تواند باشد. مثلاً دو زوج مرتب $(1, 4)$ و $(1, 2)$ در رابطه $x = 1$ مدق می‌کنند، پس تابع نیست. نمودار آن خطی قائم موازی محور y ها است.



پ

تابع است، زیرا به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.



ت

$y_1 = x + 3$ روی دامنه خود $(x \leq 0)$ تابع است. همین‌طور $y_2 = x - 1$ روی دامنه خود $(x \geq 0)$ تابع می‌باشد. حال با اشتراک دامنه‌ها خواهیم داشت:

$$x \leq 0 \cap x \geq 0 = \{0\}$$

برای x مشترک، مقادیر y را از دو ضابطه تابع به دست می‌آوریم. اگر مقدار y ها برابر باشد، f تابع است:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 + 3 = 3 \\ y = 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

چون به ازای $x = 0$ دو مقدار برای y به دست آمده است، پس f تابع نیست.

ث

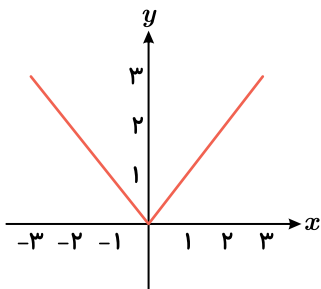
$$y^2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y = \pm x$$

$$\text{مثال نقض: } x = 2 \Rightarrow y^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

y برحسب x دو جواب دارد، پس تابع نیست.

ج

تابع است، زیرا به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.



$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

الف) از دو طرف تساوی برکت می‌گیریم:

۱۲۸

$$[x + [x]] = [2020,6] \Rightarrow 2[x] = 2020 \Rightarrow [x] = 1010 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} x + 1010 = 2020,6 \Rightarrow x = 1010,6$$

ب) مشابه قسمت اول اگر از دو طرف تساوی برکت بگیریم به رابطه $2[x] = [a]$ می‌رسیم. در نتیجه $[x] = \frac{[a]}{2}$. پس شرط وجود جواب این است که $[a]$ زوج باشد و در این



حالت ریشه معادله $x = a - \frac{[a]}{2}$ است.

۱۲۹

$$f(2 - \sqrt{2}) = [2 - \sqrt{2} + 3] = [5 - \sqrt{2}] = 5 + [-\sqrt{2}] = 5 + (-2) = 3$$

۱۳۰

$$f(x) = 0 \quad g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right]$$

$$\begin{aligned} D_f &= R \\ D_g &= R \end{aligned} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right] = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

$$f = g$$

توجه: کسر $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ یک کسر کوچکتر از واحد است یعنی مخرج آن بزرگتر از صورت است بنابراین مقدار آن همیشه عددی بین صفر و یک است.

۱۳۱

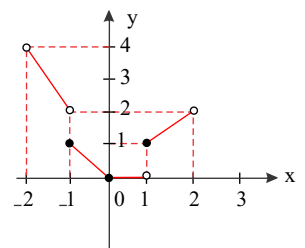
$$y = x[x] \quad -2 < x < 2$$

$$-2 < x < -1 \Rightarrow y = -2x \quad \begin{array}{c|cc} x & -2 & -1 \\ \hline y & 4 & 2 \end{array}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -x \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$$

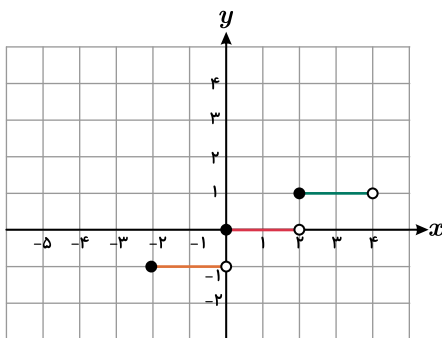
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 0 \end{array}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = x \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$$



۱۳۲

$-1 \leq \frac{x}{2} < 0$	$0 \leq \frac{x}{2} < 1$	$1 \leq \frac{x}{2} < 2$
$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$
$f(x) = -1$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$

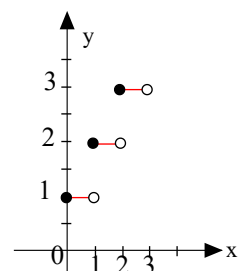


۱۳۳

توجه: x وزن هر بسته برحسب کیلوگرم است.

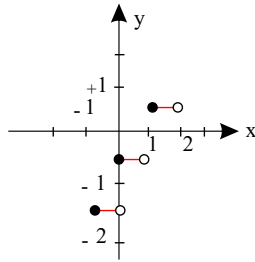
هر یک واحد محور y ها را معادل ۱۰۰۰ تومان در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 1 \\ 4 & 1 \leq x < 2 \\ 6 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



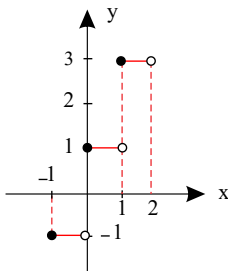


$$\text{الف) } y = [x] - \frac{1}{2}$$



نمودار رو به رو همان نمودار $y = [x]$ است که $\frac{1}{2}$ واحد به سمت پایین محور y ها جابه‌جا شده است.

$$\text{ب) } y = 2[x] + 1$$



نمودار روبه‌رو همان نمودار $y = [x]$ است که عرض آن در عدد ۲ ضرب شده و یک واحد هم بالاتر آمده است.

$$y = \left[\frac{1}{3}x\right] \quad x \in [-6, 6] \Rightarrow \frac{1}{3}x \in [-2, 2]$$

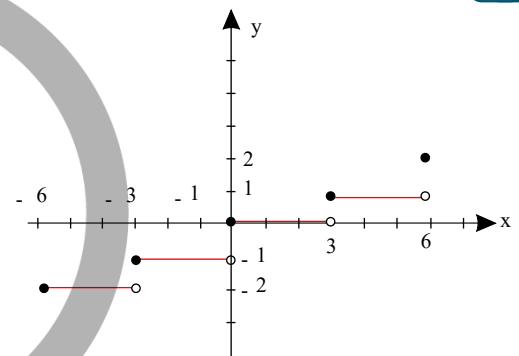
$$-2 \leq \frac{1}{3}x < -1 \Rightarrow -6 \leq x < -3 \Rightarrow y = -2$$

$$-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow -3 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq \frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 6 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 2$$



الف

$$f(x) = [x] + 1 \quad -2 \leq x < 3$$

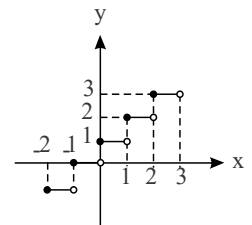
$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = -2 + 1 = -1$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -1 + 1 = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = 0 + 1 = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = 1 + 1 = 2$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = 2 + 1 = 3$$



ب



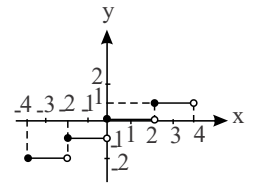
$$f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] \quad -4 \leq x < 4 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}x < 2$$

$$-2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \Rightarrow f(x) = -2, -4 \leq x < -2$$

$$-1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow f(x) = -1, -2 \leq x < 0$$

$$0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow f(x) = 0, 0 \leq x < 2$$

$$1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow f(x) = 1, 2 \leq x < 4$$



۱۳۷ باید برد تابع را بیابیم. هم دامنه هر مجموعه‌ای که برد تابع زیرمجموعه آن باشد، می‌توان در نظر گرفت.

$$-4 \leq x \leq 4 \rightarrow 20 \geq -5x \geq -20 \rightarrow -20 \leq -5x \leq 20$$

$$-20 + 2 \leq -5x + 2 \leq 20 + 2 \rightarrow -18 \leq f(x) \leq 22 \rightarrow R_f = [-18, 22]$$

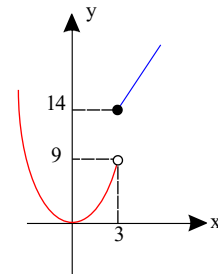
$$B = [-18, 22] \text{ یا } B = [-18, +\infty) \text{ یا } B = (-\infty, 22]$$

۱۳۸

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 3 \\ 3x + 5 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{x < 3} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 4, x = -2 \rightarrow f(-2) = 4$$



یک به یک نیست

۱۳۹

مولفه‌ی اول یکسان نداشته باشد و در صورت یکسان بودن مولفه‌ی اول باید مولفه‌ی دوم هم برابر باشد.

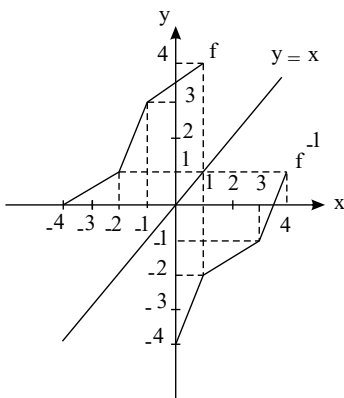
$$f = \{(1, \alpha^2 - \beta^2), (1, 1), (2, 3), (\alpha - \beta, 3)\}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1 \quad \alpha - \beta = 2$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 1 \rightarrow (\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$$

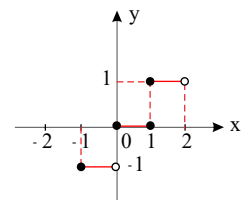
۱۴۰ خیر. تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ تابع ثابت بوده و یک به یک نمی‌باشد. پس وارون‌پذیر هم نیست.

۱۴۱ تابع یک‌به‌یک است پس وارون‌پذیر است و نمودار تابع وارون آن به صورت زیر است.



۱۴۲ برای بررسی وارون‌پذیری کافی است یک‌به‌یک بودن را بررسی کنیم زیرا هنگامی که تابع یک‌به‌یک باشد وارون‌پذیر نیز خواهد بود:

$$y = [x] \text{ رسم نمودار}$$





همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود خط افقی وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند مثلاً خط $y = 1$ نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند پس یک به یک نیست.

۱۴۳

$$f^{-1}(\sqrt{x}) = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+2\sqrt{x-4}} \\ \Rightarrow x = x+2\sqrt{x-4} \Rightarrow x-x = 2\sqrt{x-4}$$

$$\frac{x-x \geq 0}{\text{توان ۲}} \rightarrow 3x + x^2 - 12x = 4x - 16 \Rightarrow x^2 - 16x + 52 = 0 \rightarrow x = \frac{16 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 8 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\frac{x \leq 6}{\rightarrow} x = 8 - 2\sqrt{3} \rightarrow x = 8 - 2\sqrt{3} \Rightarrow f^{-1}(\sqrt{x}) = 8 - 2\sqrt{3}$$

۱۴۴

$$y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \xrightarrow{a \neq 0} x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \text{ تابع وارون}$$

$$y = mx + n \Rightarrow \text{تابع خطی است.}$$

$$\text{با فرض } -\frac{b}{a} = n \text{ و } \frac{1}{a} = m \text{ داریم:}$$

۱۴۵

$$\text{الف)} D_f = \{4, 6, 7\}, D_g = \{3, 6, 4\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{4, 6\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(4, \frac{5}{6} \right), \left(6, \frac{3}{6} \right) \right\} = \left\{ \left(4, \frac{5}{6} \right) \right\}$$

تعریف نشده

$$\text{ب)} (2f + g)(4) = 2f(4) + g(4) = 2 \times 5 + 6 = 16$$

$$f(x) = \sqrt{x+3}, D_f = [-3, +\infty), g(x) = \frac{2}{x} \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_f \cap D_g = [-3, +\infty) - \{0\} \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+3} + \frac{2}{x}$$

$$D_{f+g} = [-3, +\infty) - \{0\}$$

$$D_{f \times f} = D_f \cap D_f = [-3, +\infty) \Rightarrow (f \times f)(x) = f(x) \times f(x) = \sqrt{x+3} \times \sqrt{x+3} = x+3$$

$$D_{f \times f} = [-3, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x+3} = 0 \rightarrow x = -3$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} = (-3, +\infty) - \{0\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{2}{x\sqrt{x+3}} \quad D_{\frac{g}{f}} = (-3, +\infty) - \{0\}$$

۱۴۷

$$f(x) = \frac{4}{x-2} \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}, g(x) = \frac{1}{6-x} \quad D_g = \mathbb{R} - \{6\}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{2, 6\} \rightarrow D_{f-g} = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{4}{x-2} - \frac{1}{6-x} \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

$$f = 0 \rightarrow \frac{4}{x-2} = 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | f = 0\} = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$



$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{6-x}}{\frac{x-2}{x-2}} = \frac{x-2}{6-x} \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

۱۴۸

چهار عمل اصلی فقط روی دامنه‌های مشترک انجام می‌شود پس ابتدا باید اشتراک دامنه‌ها را بیابیم.

$$D_f = \{-4, -1, 0, \frac{5}{3}, 3\}, D_g = \{-4, -2, 0, 3, 5, 9\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{-4, 0, 3\}$$

$$f + g = \{(-4, 6), (0, 2), (3, -5)\}, \quad f - g = \{(-4, 20), (0, 8), (3, -5)\}$$

$$f \times g = \{(-4, -91), (0, -15), (3, 0)\}, \quad \frac{f}{g} = \left\{ \left(-4, -\frac{13}{3}\right), \left(0, -\frac{5}{3}\right) \right\}$$

۱۴۹

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$D_f \Rightarrow x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow x(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \cup x \leq -2$$

$$D_g \Rightarrow \frac{-1}{x^2 + 2x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 2x} \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2x < 0 \Rightarrow x(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 0$$

$$D_f \cap D_g = \emptyset$$

۱۵۰

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad D_f = ? \quad D_g = ?$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 = D_f$$

$$D_{gof} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{-2 \leq x \leq 2, \sqrt{4-x^2} \neq 1\}$$

$$4-x^2 \neq 1 \Rightarrow -x^2 \neq -3 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3} \quad D_{gof} = [-2, 2] - \{\pm\sqrt{3}\}$$

$$g(f(x)) = \frac{\sqrt{4-x^2} + 2}{\sqrt{4-x^2} - 1}$$

۱۵۱

$$D_g = \mathbb{N}, D_f = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 2 = 4, (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + 4 = 7$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 5 + 6 = 11, (f+g)(4) = f(4) + g(4) = 7 + 8 = 15$$

$$f+g = \{(1, 4), (2, 7), (3, 11), (4, 15)\}$$

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = 2 \times 2 = 4, (gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = 6$$

$$(gof)(3) = g(f(3)) = g(5) = 10, (gof)(4) = g(f(4)) = g(7) = 14$$

$$gof = \{(1, 4), (2, 6), (3, 10), (4, 14)\}$$

۱۵۲

$$الف) f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \neq 1 | g(x) \neq 0\} \Rightarrow g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_{fog} = \mathbb{R} - \{1, -2\}$$

$$ب) (fog)(x) = f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{x-1}{x+2}$$



$$ج) (g - f)(2) = g(2) - f(2) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

۱۵۳

$$2r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2} \Rightarrow r(x) = \frac{x}{2}$$

(الف)

$$A(r) = \pi r^2$$

(ب)

$$(Aor)_{(x)} = A(r(x)) = A\left(\frac{x}{2}\right) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$$

(ج)

$(Aor)_{(x)}$ تابعی است که مساحت را به عنوان تابعی از x بیان می‌کند.

۱۵۴

$$f(x) = 2x + a \xrightarrow{x=f(x)} f(f(x)) = 2f(x) + a$$

$$bx + 6 = 2f(x) + a \xrightarrow{f(x)=2x+a} bx + 6 = 2(2x + a) + a \Rightarrow bx + 6 = 4x + 3a \Rightarrow 4 = b$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 6$$

۱۵۵

$$f(x) = x + 1 \xrightarrow{x=g(x)} f(g(x)) = g(x) + 1$$

$$f(g(x)) = 3x + 5 = g(x) + 1 \Rightarrow g(x) = 3x + 4$$

۱۵۶

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}, \quad D_g : 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \leq 5 | g(x) \neq \pm 1\}$$

$$g(x) \neq -1 \Rightarrow \sqrt{5-x} \neq -1 \rightarrow \text{برقرار است.}$$

$$g(x) \neq 1 \Rightarrow \sqrt{5-x} \neq 1 \Rightarrow 5-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$$

$$D_{fos} = \{x \leq 5 | x \neq 4\} = (-\infty, 5] - \{4\}$$

۱۵۷

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 \quad g(x) = ? \quad fog(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow g^2(x) + 2g(x) + 1 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$$

$$(g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow |g(x) + 1| = |x - 2| \Rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2)$$

$$\begin{cases} g(x) = x - 2 - 1 \Rightarrow g(x) = x - 3 \\ g(x) = -x + 2 - 1 \Rightarrow g(x) = -x + 1 \end{cases}$$

۱۵۸

$$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \sqrt{-x} - 2$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g : x \leq 0$$

$$D_{fog(x)} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \left\{ x | x \leq 0, \sqrt{-x} - 2 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow D_{fog} = x \leq 0$$

$$gof(x) = \sqrt{-x^2 - 1} - 2 \Rightarrow -x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow \text{ضابطه } gof \text{ وجود ندارد.}$$

۱۵۹

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-|x-1|}} \quad g(x) = |x-1| \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$2 - |x-1| > 0 \Rightarrow 2 > |x-1| \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3 = D_f$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g \Rightarrow -1 < x < 3 \cap \mathbb{R} \Rightarrow (-1, 3)$$

$$fog(x) = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x | x \in \mathbb{R}, -1 < |x-1| < 3\} \Rightarrow |x-1| < 3 \Rightarrow -3 < x-1 < 3 \Rightarrow D_{fog} = (-2, 4)$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \left| \frac{1}{\sqrt{2-|x-1|}} - 1 \right|$$

۱۶۰

(الف)

$$D_f = [-2, 3] \quad R_f = [-1, 4]$$



$$D_g = (1, 4] \quad R_g = [-2, 1]$$

ب

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + \text{تعریف نشده} = \text{تعریف نشده}$$

$$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 3(0) = 0$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{-1}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(-1) = 0$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (1, 3]$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = (1, 3] - \{2\} = (1, 2) \cup (2, 3]$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = (1, 3] - \{-1\} = (1, 3]$$

$$(3, 4), (0, 1) \in f \quad m = \frac{1-4}{0-3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{معادله خط گذرنده از دو نقطه :} \\ \text{ضابطه } f \end{array}$$

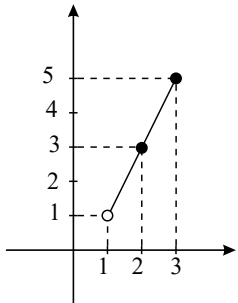
$$(2, 0), (4, -2) \in g$$

$$m = \frac{-2-0}{4-2} = -1$$

$$\Rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2 \quad \text{ضابطه } g$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x+1)(-x+2) = -x^2 + x + 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{-x+2}$$



$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{6\}$$

همواره مخالف صفر

$$D_g = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{2, 6\} - \{x \mid \frac{4}{x-2} = 0\} = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x}{6-x} \times \frac{x-2}{4} = \frac{x^2 - 2x}{24 - 4x}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{2, 6\} - \{x \mid \frac{x}{6-x} = 0\} = \mathbb{R} - \{2, 6, 0\}$$

$\downarrow$
 $x=0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{x-2} \times \frac{6-x}{x} = \frac{24-4x}{x^2-2x}$$

$$D_{f-g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

ب

ت

ث

ج

۱۶۱

الف



$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right) \times \left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$(f \cdot f)(x) = f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \neq 1 | \frac{1}{x-1} \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1, \frac{1}{2}\}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-1} \neq 1 \\ & \downarrow \\ & 1 \neq x-1 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow x \neq \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$g(f(x)) = \frac{\frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-2}$$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty) \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\} = [1, +\infty) - \{x | \sqrt{x-1} = 0\} = (1, +\infty)$$

$$\downarrow$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [1, +\infty) - \{x | x+1 = 0\} = [1, +\infty)$$

$$\downarrow$$

$$x = -1$$

$$D_{f \cdot g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [1, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-1} \times (x+1)$$

$$D_{ff} = D_f \cap D_f = [1, +\infty)$$

$$(f \cdot f)(x) = (\sqrt{x-1})^2 = |x-1| = x-1$$

$$g(f(x)) = \sqrt{x-1} + 1$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) | \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_f = [-1, +\infty)$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} = [-1, +\infty) - \{1\} - \{x | \sqrt{x+1} = 0\} = (-1, +\infty) - \{1\}$$

$$\downarrow$$

$$x = -1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)\sqrt{x+1}}{1}$$

همواره مخالف صفر

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [-1, +\infty) - \{1\} - \{x | \frac{1}{x-1} = 0\} = [-1, +\infty) - \{1\}$$

$$D_{fg} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [-1, +\infty) - \{1\} \quad (f \cdot g)(x) = (\sqrt{x+1}) \times \left(\frac{1}{x-1}\right)$$



$$g(f(x)) = \frac{2}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in [-3, +\infty) | \sqrt{x+3} \neq 2\} = [-3, +\infty) - \{1\} = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$$

$\downarrow$
 $x+3 \neq 4 \Rightarrow x \neq 1$

$$D_{ff} = D_f \cap D_f = [-3, +\infty)$$

$$(f \cdot f)(x) = f(x) \times f(x) = (\sqrt{x+3})^2 = |x+3| = x+3$$

$$D_f = \{1, 2, 0\} \quad D_g = \{0, 1, -2\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\} = \{0, 1\} - \{1\} = \{0\}$$

$$\frac{g}{f} = \{(0, \frac{2}{-2})\} = \{(0, -2)\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{0, 1\} - \{0\} = \{1\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(0, \frac{-2}{2}), (1, \frac{0}{-1})\} = \{(0, -1), (1, 0)\}$$

$$D_{fg} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{0, 1\}$$

$$fg = \{(1, (-1) \times 0), (0, 2 \times (-2))\} = \{(1, 0), (0, -4)\}$$

$$f - g = \{(1, 0 - (-1)), (0, -2 - 2)\} = \{(1, 1), (0, -4)\}$$

$$D_{ff} = D_f \cap D_f = \{1, -2, 0\}$$

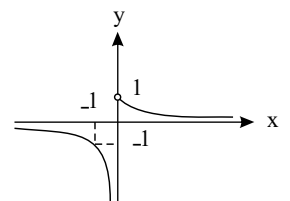
$$ff = \{(1, 0 \times 0), (-2, 4 \times 4), (0, (-2) \times (-2))\} = \{(1, 0), (-2, 16), (0, 4)\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{1\}$$

$$g \circ f = \{(1, 2)\}$$

۱۶۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 2^{-x} & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ (\frac{1}{2})^x & x > 0 \end{cases}$$



$$R_f = (-\infty, 1) - \{0\}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2^x-1} \leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^{2^x+2} \xrightarrow{0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1} 2^{2^x-1} \geq 2^{2^x+2}$$

$$2^x > 1 \rightarrow 2^x - 1 \geq 2^x + 2 \Rightarrow 2^x - 2^x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$2^x - 2^x + 3$	$+$	0	$-$	0

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$\frac{1}{q} = 2^{-2}, -2 < \sqrt{2} < \sqrt{5} < \frac{5}{2} \xrightarrow{2^x > 1} 2^{-2} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\sqrt{5}} < 2^{\frac{5}{2}}$$

$$2^x > 0 \Rightarrow 2^x - 2 > 0 - 2 \rightarrow f(x) > -2 \rightarrow R_f = (-2, +\infty)$$

$$(0, 2)^x > 0 \Rightarrow -(0, 2)^x < 0 \Rightarrow -(0, 2)^x + 3 < 3 \rightarrow f(x) < 3 \Rightarrow R_f = (-\infty, 3)$$

ت

۱۶۳

جدول تعیین علامت زیر را در نظر بگیرید:

۱۶۴

۱۶۵

الف

می‌دانیم اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ آن‌گاه $a^x > 0$ می‌باشد، پس داریم:

ب

می‌دانیم اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ آن‌گاه $a^x > 0$ می‌باشد، پس داریم:



۱۶۶

الف

$$\frac{\cancel{2}^x \times 2^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}} = \cancel{2}^x \times 2 \Rightarrow \frac{2^x}{2^{1-x}} = 2 \Rightarrow 2^x \times 2^{x-1} = 2$$

$$\Rightarrow 2^x \times 2^{2x-2} = 2 \Rightarrow 2^{3x-2} = 2 \Rightarrow 3x - 2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

ب

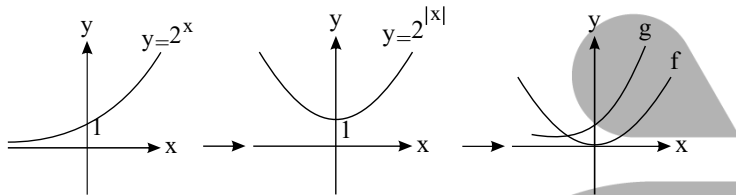
$$\frac{(2^2)^x \times (2^2)^{x-2}}{2^{x-1} \times (2 \times 2)^x} = 2^{-x} \Rightarrow \frac{2^{2x} \times 2^{2x-4}}{2^{x-1} \times 2^x \times 2^x} = 2^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{4x-4}}{2^{2x-1} \times 2^x} = 2^{-x} \Rightarrow 2^{4x-4} \times 2^{-(2x-1)} \times \cancel{2^{-x}} = \cancel{2^{-x}}$$

$$2^{4x-4-2x+1} = 1 \Rightarrow 2^{2x-3} = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

۱۶۷

$$2^{|x|} - 1 = 2^x \Rightarrow f(x) = 2^{|x|} - 1, g(x) = 2^x \Rightarrow f(x) = g(x)$$



طبق شکل بالا، معادله $f(x) = g(x)$ فقط یک ریشه منفی دارد.

۱۶۸

$$\underbrace{2^x + 2^x + \dots + 2^x}_{15} = \underbrace{2 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x + \dots + 2 \cdot 2^x}_{45}$$

$$\Rightarrow 15 \times 2^x = 45 \times 2^x \Rightarrow \cancel{2}^x \times 3 \times \cancel{2}^x = \cancel{2}^x \times 9 \times \cancel{2}^x \Rightarrow 2^{x+1} = 2^2 \times (2^x)^x$$

$$\Rightarrow 2^{x+1} = 2^{2+3x} \Rightarrow x + 1 = 2 + 3x \Rightarrow -1 = 2x \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

۱۶۹

$$\text{الف)} \quad 2 \times (2^2)^x = (2^2)^x \rightarrow 2 \times 2^{2x} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{1+2x} = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow 1 + 2x = 2x \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \times 49^{2x} = \sqrt[3]{9} \rightarrow 9^{-1} \times (9^2)^{2x} = 9^{\frac{1}{3}} \rightarrow 9^{-1+4x} = 9^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow -1 + 4x = \frac{1}{3} \Rightarrow 4x = \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow 4x = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

۱۷۰

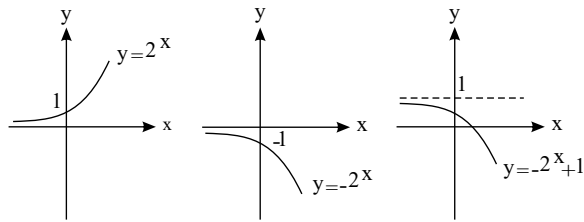
$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^{-x} = \frac{3}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow \left(\frac{3}{\sqrt[3]{3^2}}\right)^{-x} = \frac{3}{\sqrt[5]{3^3}} \Rightarrow \left(\frac{3}{3^{\frac{2}{3}}}\right)^{-x} = \frac{3}{3^{\frac{3}{5}}}$$

$$\Rightarrow \left(3^{1-\frac{2}{3}}\right)^{-x} = 3^{1-\frac{3}{5}} \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{-x} = 3^{\frac{2}{5}} \Rightarrow 3^{-\frac{x}{3}} = 3^{\frac{2}{5}}$$

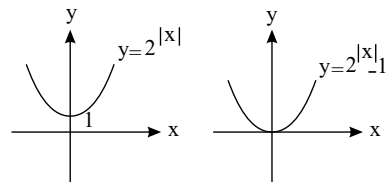
$$\Rightarrow -\frac{x}{3} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{6}{5} = -1,2 \rightarrow \text{نقطه‌ی برخورد } \left(-1,2, \frac{3}{\sqrt[5]{27}}\right)$$

۱۷۱

الف



ب



۱۷۲

الف

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار داروی باقی مانده (میلی گرم)	۳۰۰	۱۵۰	۷۵	$\frac{۷۵}{۲}$	$\frac{۷۵}{۴}$	$\frac{۷۵}{۸}$	$\frac{۷۵}{۱۶}$

ب

چون زمان‌های سپری شده دنباله حسابی و مقدار داروهای باقی مانده، دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس ضابطه تابع فوق، نمایی است و می‌توان نوشت:

$$f(t) = ab^t$$

باتوجه به جدول داریم: $f(0) = 300$ و $f(1) = 150$ ، پس:

$$300 = ab^0 \Rightarrow a = 300$$

$$150 = ab^1 \Rightarrow 150 = 300 \cdot b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) = 300 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

۱۷۳ چون نمودار سهمی رو به بالاست، پس $a > 0$ است. چون جمع ریشه‌ها منفی است، پس $-\frac{b}{a} < 0$ و چون $a > 0$ پس $-b < 0$ است. یعنی $b > 0$. همچنین ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a} < 0$ و چون $a > 0$ پس $c < 0$ خواهد بود. چون سهمی محور x را در دو نقطه قطع کرده است، پس دو ریشه دارد که یکی مثبت و دیگری منفی است.

۱۷۴

$$|a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

چون سهمی رو به پایین است، پس $a = -1$ است.

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + bx + c$$

$$(0, 1) \in f \Rightarrow 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$(1, 3) \in f \Rightarrow -1 + b + 1 = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 3x + 1$$

۱۷۵ با در نظر گرفتن شرایط معنی‌دار بودن لگاریتم داریم:

$$\frac{x+1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} \begin{array}{c|ccc} -\infty & -1 & 0 & +\infty \\ \hline + & 0 & - & + \end{array} \begin{array}{l} x < -1 \text{ یا } x > 0 \end{array} \quad (1)$$

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \quad (2)$$

$$1 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \quad (3)$$

در نتیجه:

$$(1) \cap (2) \cap (3) : x < -1 \text{ یا } 0 < x < 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

۱۷۶

$$y = 1 + 2^{3^x} \Rightarrow 2^{3^x} = y - 1 \Rightarrow 3^x = \log_2(y - 1)$$

$$\Rightarrow x = \log_3 \log_2(y - 1) \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \log_3 \log_2(x - 1)$$

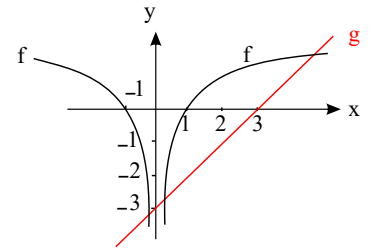
۱۷۷



$$\log|x| = x - 3$$

$$f(x) = \log|x|$$

$$g(x) = x - 3$$



معادله ۲ ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد.

۱۷۸

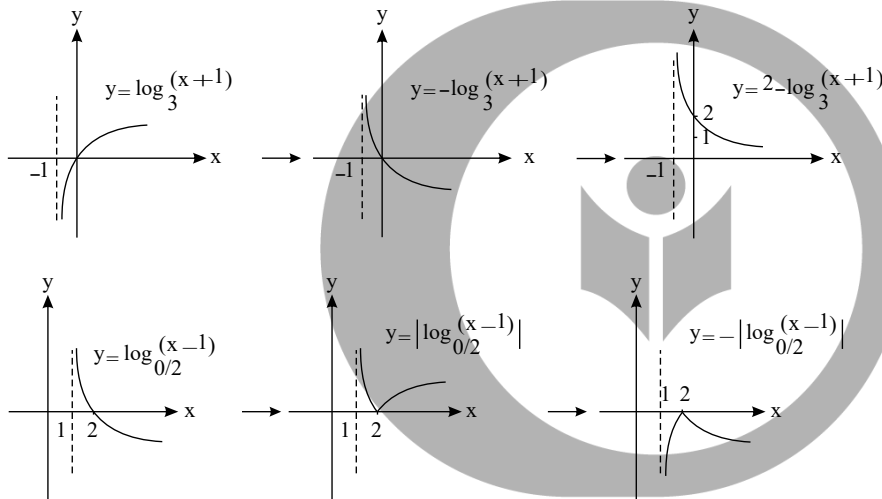
الف

$$\log_{0.001} 10\sqrt[3]{100} = x \Rightarrow (0.001)^x = 10\sqrt[3]{100} \Rightarrow (10^{-3})^x = 10 \times 10^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow 10^{-3x} = 10^{1+\frac{2}{3}} = 10^{\frac{5}{3}} \Rightarrow -3x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = -\frac{5}{9}$$

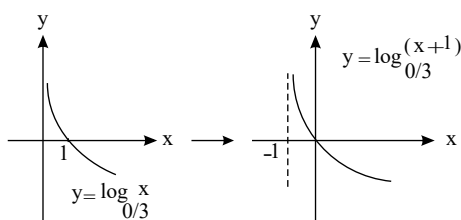
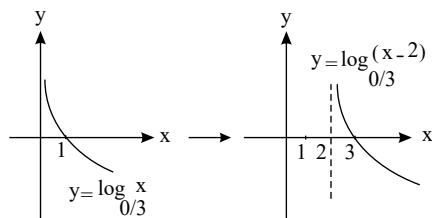
$$\log_{0.25} \sqrt[3]{512} = x \Rightarrow (0.25)^x = \sqrt[3]{512} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = \sqrt[3]{2^9}$$

$$(2^{-2})^x = 2^{\frac{9}{3}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^3 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$



الف

ب



۱۸۰

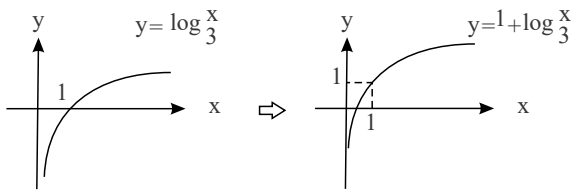
الف

ب

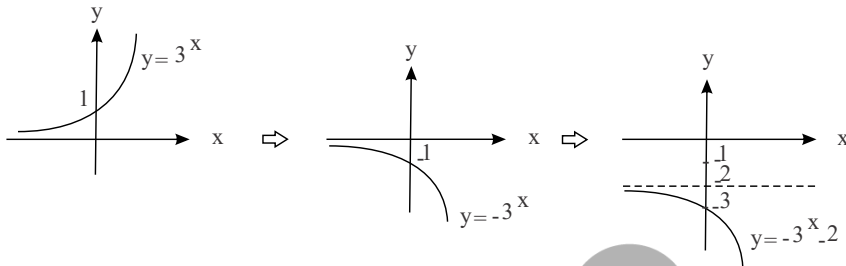
۱۸۱



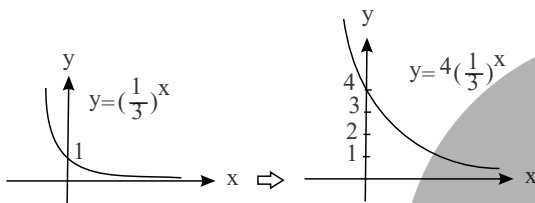
الف



ب



پ



١٨٢

الف

$$٢ \log_٢ ٢^٢ - ٣ \log_٥ ٥^{\frac{1}{٢}} + ٣ = ٦ \log_٢ ٢ - ٣ \times \frac{1}{٣} \log_٥ ٥ + ٣ = ٦ - ١ + ٣ = ٨$$

ب

$$٣ \log ١٠^{-٢} + \log ١٠^{\frac{٢}{٣}} + \log_٥ ٥^{-٢} = -٩ + \frac{٢}{٣} - ٢ = -\frac{٣١}{٣}$$

پ

$$\log_٢ ٢^٥ + \log_{٢^{-1}} ٢^٢ + \log_{\frac{1}{٢} \cdot \frac{٢}{٢}} ٢^٢ \times ٢^{\frac{1}{٢}} = ٥ - ٢ + \log_{\frac{1}{٢} \cdot \frac{٢}{٢}} \frac{٢}{٢} = ١ + \frac{\frac{٢}{٢}}{\frac{1}{٢} \cdot \frac{٢}{٢}} = ١ + \frac{١٢}{٣} = \frac{١٧}{٣}$$

ت

$$٢^{\log_٢ \frac{٥}{٢}} = \frac{٥}{٢}$$

ث

$$\log_{\frac{1}{٢} \cdot \frac{٢}{٢}} ٢^٢ + ٥^{(\log_٥ ٥ + \log_٥ ٢)} = \frac{٢}{\frac{1}{٢} \cdot \frac{٢}{٢}} + ٥^{\log_٥ ٢ \cdot ٥} = ٦ + ٢٥ = ٣١$$

ج

$$\log_٥ ٥^{\frac{٢}{٢}} + \log_{٢ \cdot ٢} ٢ + \log ١٠^{-1} = \frac{٢}{٢} + \frac{1}{٢} - 1 = ٢ - 1 = 1$$

ج

$$\log_٢ (\log_٢ (\log_٥ ٥^٢)) = \log_٢ (\log_٢ (٢)) = \log_٢ (1) = ٠$$

ح



$$\frac{\log 5}{\log 6} \times \frac{\log 6}{\log 7} \times \frac{\log 7}{\log 8} \times \cdots \times \frac{\log 14}{\log 15} = \frac{\log 5}{\log 15} = \frac{\log 5}{\log 3 \cdot 5} = \frac{\log 5}{\log 3 + \log 5} = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{1}{\log 3}$$

خ

$$\log_{15} 2 + \log_{15} 3 + \log_{15} 4 = \log_{15} 2 \times 3 \times 4 = \log_{15} 24 = 1$$

گزینۀ «۱» ۱۸۳

$$1 = 6^0 < 2 < 6^1 \Rightarrow \log_6 6^0 < \log_6 2 < \log_6 6^1 \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow [\log_6 2] = 0$$

$$4 = 2^2 < 6 < 2^3 \Rightarrow \log_2 2^2 < \log_2 6 < \log_2 2^3 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2$$

$$[\log_6 2] + [\log_2 6] = 0 + 2 = 2$$

$$\left(\frac{1}{3}, -2\right) \xrightarrow{184} -2 = 2 + \log_a \frac{1}{3} \rightarrow \log_a \frac{1}{3} = -2 \rightarrow a^{-2} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \sqrt[2]{3}$$

۱۸۵

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x^2 + 4x + 4) = \log(x+2)^2 \\ (x+2)^2 > 0 &\Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2\} \\ g(x) &= 2 \log(x+2) \\ x+2 > 0 &\Rightarrow x > -2 \Rightarrow D_g = (-2, +\infty) \\ D_f \neq D_g &\Rightarrow f \neq g \end{aligned}$$

۱۸۶

$$\frac{9}{\sqrt[5]{27}} = \frac{3^2}{3^{\frac{3}{5}}} = 3^{\frac{7}{5}}$$

$$A = \log_3 \frac{9}{\sqrt[5]{27}} + \log_{\circ} \circ \circ 1 = \frac{7}{5} + (-3) = -\frac{8}{5}$$

۱۸۷

$$\log_{bm}^a = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\begin{aligned} \log_x \sqrt{\sqrt{x^6} \times x \times \sqrt[5]{x}} &= \log_x \sqrt[5]{x^6 \times x \times \sqrt[5]{x}} = \log_x \sqrt[5]{x^6 \times x^5 \times x} = \log_x \sqrt[5]{x^{12}} = \log_x x^{\frac{12}{5}} \\ &= \log_x x^{\frac{12}{5}} = \frac{12}{5} \log_x x = \frac{12}{5} \times 1 = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

۱۸۸

$$\log_b^{\left(\frac{a}{c}\right)} = \log_b^a - \log_b^c, \quad \log_{bm}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \quad \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_{\frac{1}{a}}^2 = \frac{\log 5^2}{\log \frac{1}{a}} = \frac{2 \log 5}{-\log a} = \frac{2a}{-\log a} = \frac{2a}{\log \frac{1}{a}} = \frac{2a}{\log 10 - \log a} = \frac{2a}{3 - \log a}$$

۱۸۹

$$f(x) = \log x^2 \rightarrow x^2 > 0 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = 2 \log x \rightarrow x > 0 \rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f, g \text{ برابر نیستند.}$$

۱۹۰

$$f: \begin{cases} x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \\ x+5 > 0 \rightarrow x > -5 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > 2 \rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

$$g: \frac{x-2}{x+5} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -5 & 2 \\ \hline \frac{x-2}{x+5} & \frac{+}{-} & \frac{-}{+} \end{array}$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f, g \text{ برابر نیستند}$$

۱۹۱



$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c$$

$$f(x) = \log_r(r x + \Delta) + \log_r\left(\frac{1}{x}\right) = \log_r\left(\frac{r x + \Delta}{x}\right) = \log_r\left(r + \frac{\Delta}{x}\right)$$

$$f(x_1) = f(x_r) \rightarrow \log_r\left(r + \frac{\Delta}{x_1}\right) = \log_r\left(r + \frac{\Delta}{x_r}\right) \rightarrow r + \frac{\Delta}{x_1} = r + \frac{\Delta}{x_r} \rightarrow x_1 = x_r \quad \text{یک به یک است.}$$

$$y = \log_r\left(r + \frac{\Delta}{x}\right) \rightarrow r + \frac{\Delta}{x} = r^{y^y} \rightarrow \frac{\Delta}{x} = r^{y^y} - r \Rightarrow x = \frac{\Delta}{r^{y^y} - r}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\Delta}{r^x - r}$$

۱۹۲

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \quad \log_b^{\left(\frac{a}{c}\right)} = \log_b^a - \log_b^c, \quad \log_{b^n}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \quad \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\begin{aligned} \log_{a^o}^{\Delta^o} &= \frac{\log \Delta^o}{\log a^o} = \frac{\log \Delta + \log 1^o}{\log a + \log 1^o} = \frac{\log\left(\frac{1^o}{r}\right) + 1}{\log r^{r^r} + 1} = \frac{\log 1^o - \log r + 1}{r \log r + 1} \\ &= \frac{1 - a + 1}{rb + 1} = \frac{r - a}{rb + 1} \end{aligned}$$

۱۹۳

الف

$$\log_{b^n}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \quad a^{\log_b^b} = b^{\log_c^a}$$

$$\begin{aligned} r^{\log_r^{\sqrt{r\Delta}}} + r^{\log_r^{\frac{1}{r}}} + \Delta^{\log_r^{\frac{1}{r}}} &= r^{\log_r^{\Delta}} + \left(\frac{1}{r}\right)^{\log_r^r} + \Delta^{\log_r^{r^{-1}}} \\ &= \Delta^{\log_r^r} + \frac{1}{r} + \Delta^{-1} = \Delta + \frac{1}{r} + \frac{1}{\Delta} = \frac{r\Delta + \Delta + r}{1\Delta} = \frac{8r}{1\Delta} \end{aligned}$$

$$\log_{b^n}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \quad a^{\log_b^b} = b^{\log_c^a}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_r^r} + \left(\frac{1}{r}\right)^{-\Delta \log_r^r} - r^{\log_r^{\frac{1}{r}}} &= (r)^{\log_r^{\frac{1}{r}}} + (r)^{-\Delta \log_r^{\frac{1}{r}}} - (r)^{\log_r^{\frac{1}{r}}} \\ (r)^{\log_r^{r^{-r}}} + (r)^{-\Delta \log_r^{r^{-r}}} - r^{\log_r^{r^{-1}}} &= r^{-r} + r^{1^o} - r = \frac{1}{r^9} + r^{1^o} - r \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - r > 0 \rightarrow x > r \\ x + r > 0 \rightarrow x > -r \end{array} \right\} \cap \rightarrow x > r \rightarrow D_f = (r, +\infty)$$

$$(x + r)(x - r) > 0 \rightarrow$$

$$x < -r \quad \text{یا} \quad x > r \Rightarrow D_g = (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$$

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \quad \log_{b^n}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \quad a^{\log_b^b} = b^{\log_c^a}$$

$$r^{\log_r^{(r \times \Delta)}} = 1\Delta^{\log_r^r} = 1\Delta^{\frac{1}{r} \log_r^r} = 1\Delta^{\frac{1}{r}} = \sqrt{1\Delta}$$

$$\log_b^{\left(\frac{a}{c}\right)} = \log_b^a - \log_b^c, \quad \log_{b^n}^a = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\frac{\log_{\Delta^{\frac{1}{\Delta}}}^{\left(\frac{1}{\Delta}\right)}}{\log_{\Delta^r}^r} = \frac{\log_{\Delta^r}^r}{r \log_{\Delta^r}^r} = \frac{1}{r}$$

x	$-\infty$	-7	2	$+\infty$
$(x-2)(x+7)$	$\left(\frac{+}{-}\right)$	$\bullet$	$\circ$	$\left(\frac{+}{-}\right)$
	$\frac{-}{+}$			$\frac{+}{-}$

۱۹۵

الف

ب



$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c \quad / \quad \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\begin{aligned} \log_{100}^{\sqrt{5}} + \log_{100}^{\sqrt{5}} &= \log_{100} (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = \log_{100} 5 = \log_{100} 10 \times \sqrt{10} = \log_{100} 10 \times \frac{1}{2} \\ &= \log_{100} 10 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \log_{100} 10 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \quad / \quad \log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c \quad / \quad \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\begin{aligned} \log_8^5 - \log_8^5 \times \log_8^5 &= \log_8^5 - \frac{\log_8^5}{\log_8^5} \times \frac{\log_8^5}{\log_8^5} = \log_8^5 - \frac{\log_8^5}{\log_8^5} = \log_8^5 - \log_8^5 \\ &= \log_8^5 = \log_{8^5}^5 = \frac{1}{5} \log_{8^5}^5 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$(\log_8^x)^5 + 5 = 5 \log_8^x, \quad t = \log_8^x \rightarrow t^5 + 5 = 5t$$

$$t^5 - 5t + 5 = 0 \rightarrow t = 1, \quad t = 5 \Rightarrow \log_8^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

$$\log_8^x = 5 \rightarrow x = 8^5 \rightarrow \boxed{x = 32768}$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log_8^x + \log_8^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} \log_8^x + \frac{1}{5} \log_8^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{5}$$

$$\log_8^x = \frac{1}{5} \rightarrow x = 8^{\frac{1}{5}} \rightarrow \boxed{x = \sqrt[5]{8}}$$

$$\text{الف} \quad (\sqrt{10})^{\log 16} = 10^{\frac{1}{2} \log 16} = 10^{\log 16^{\frac{1}{2}}} = 10^{\log \sqrt{16}} = 10^{\log 4} = 4$$

$$\text{ب) } \log(x^5 + 1) - \log x^5 = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x^5 + 1}{x^5} = \log 10$$

$$\frac{x^5 + 1}{x^5} = 10 \Rightarrow x^5 + 1 = 10x^5 \Rightarrow 9x^5 = 1 \Rightarrow x^5 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[5]{9}}$$

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)} \quad \text{شرط لگاریتم: } \frac{5x - x^2}{4} > 0 \Rightarrow 5x - x^2 > 0 \rightarrow x(5 - x) > 0$$

x	0	5
x(5-x)	-	+

$$\rightarrow 0 < x < 5 \quad (1)$$

$$\text{شرط رادیکال: } \log\left(\frac{5x - x^2}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow \log\left(\frac{5x - x^2}{4}\right) \geq \log 1 \xrightarrow{10 > 1} \frac{5x - x^2}{4} \geq 1$$

$$\Rightarrow 5x - x^2 \geq 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) \leq 0$$

x	1	4
x^2 - 5x + 4	+	-

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$$



$$\Rightarrow D_f = [1, 4]$$

۲۰۰ از طرفین معادله در مبنای ۵ لگاریتم می‌گیریم.

$$x^{\log_5 x} = 5^{100} \Rightarrow \log_5^{\log_5 x} = \log_5^{100} \Rightarrow \log_5 x \times \log_5 x = 100$$

$$\Rightarrow (\log_5 x)^2 = 100 \Rightarrow \log_5 x = \pm 10$$

$$(1) \log_5 x = 10 \Rightarrow x = 5^{10}$$

$$(2) \log_5 x = -10 \Rightarrow x = 5^{-10}$$

۲۰۱ الف

$$M = 1, T = 4 \Rightarrow m(t) = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}}$$

(ب)

$$m(t) = 0.1 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}} = 0.1 \Rightarrow \frac{1}{100} \Rightarrow 2^{\frac{t}{4}} = 100$$

$$\Rightarrow \log 2^{\frac{t}{4}} = \log 100 \Rightarrow \frac{t}{4} \log 2 = \log 10^2 = 2 \Rightarrow t = \frac{8}{\log 2} \Rightarrow t = \frac{8}{0.301} = 26.57$$

۲۰۲ الف

$$m(t) = 2^t \Rightarrow m = 2^t \Rightarrow t = \log_2 m \Rightarrow m = \log_2 t \Rightarrow m^{-1}(t) = \log_2 t$$

تابع وارون این تابع یعنی $m^{-1}(t) = \log_2 t$ زمانی که جرم باکتری‌ها برابر t گرم می‌باشد را به دست می‌آورد.

(ب)

$$m^{-1}(5000) = \log_2 5000 = \log_2 5 \times 10^3 = \log_2 5 + 3 \log_2 10 = \frac{\log 5}{\log 2} + \frac{3 \log 10}{\log 2}$$

$$= \frac{1 - \log 2}{\log 2} + \frac{3}{\log 2} = \frac{1 - 0.301}{0.301} + \frac{3}{0.301} = 2.32 + 9.96 = 12.28$$

۲۰۳

$$a^{\log_b c} = b^{\log_c a}, \log_{\frac{a}{m}}^n = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$(x+2)^{\log_3^{9-1}} = (2x^2+3x+2)^{\log_3^Y-1}$$

$$\Rightarrow (x+2)^{-\log_3^2} = (2x^2+3x+2)^{-\log_3^Y} \Rightarrow (x+2)^{-2} = (2x^2+3x+2)^{-1}$$

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2x^2+3x+2} \Rightarrow x^2+4x+4 = 2x^2+3x+2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \text{ هر دو جواب قابل قبول}$$

۲۰۴

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$3^4 < 100 < 3^5 \Rightarrow \log_3 3^4 < \log_3 100 < \log_3 3^5 \rightarrow 4 < \log_3 100 < 5$$

$$\Rightarrow [\log_3 100] = 4$$

$$0.1 < 0.4 < 0.1 \Rightarrow 10^{-2} < 0.4 < 10^{-1} \Rightarrow \log 10^{-2} < \log 0.4 < \log 10^{-1}$$

$$\Rightarrow -2 < \log 0.4 < -1 \Rightarrow [\log 0.4] = -2$$

$$A = [\log_3 100] - 2[\log 0.4] = 4 - 2(-2) = 8$$

۲۰۵

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$\text{الف) شرط لگاریتم (۱) } x - 5 > 0 \rightarrow x > 5$$

$$\text{شرط رادیکال: } \log_3(x-5) \geq 0 \Rightarrow \log_3(x-5) \geq \log_3^1 \Rightarrow x-5 \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq 6 \text{ (۲)} \rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow x \geq 6 \rightarrow D_f = [6, +\infty)$$

$$\text{ب) شرط لگاریتم (۱) } x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$$



$$\log_{\sqrt{r}}(x+3) \geq 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{r}}(x+3) \geq \log_{\sqrt{r}}^1 \Rightarrow x+3 \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow -3 < x \leq -2 \rightarrow D_g = (-3, -2]$$

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$f(x) = \log_r \log_r(x-4) \rightarrow x-4 > 0 \rightarrow x > 4 \quad (1)$$

$$\log_r(x-4) > 0 \Rightarrow \log_r(x-4) > \log_r^1 \xrightarrow{r>1} x-4 > 1 \rightarrow x > 5 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x > 5 \rightarrow D_f = (5, +\infty)$$

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$f(x) = \log_r \log_{\sqrt{r}}(x-1) \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \quad (1)$$

$$\log_{\sqrt{r}}(x-1) > 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{r}}(x-1) > \log_{\sqrt{r}}^1 \xrightarrow{0<\sqrt{r}<1} x-1 < 1 \Rightarrow x < 2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow D_f = (1, 2)$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log_{\sqrt{r}}^x + \log_{\sqrt{r}}^x + \log_{\sqrt{r}}^x = 7 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \log_r^x + \frac{1}{\sqrt{r}} \log_r^x + \log_r^x = 7$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} + 1\right) \log_r^x = 7 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{r}} \log_r^x = 7 \Rightarrow \log_r^x = \frac{7\sqrt{r}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2^{\frac{7\sqrt{r}}{2}} = 16 \quad \text{جواب ۱۶}$$

$$\log_r(\log_r(\log_r^x)) = 0 \Rightarrow \log_r(\log_r^x) = r^0 = 1 \Rightarrow \log_r^x = r$$

$$\Rightarrow x = 2^r = 8 \quad \text{جواب ۸}$$

$$\log_r m^r - \log_r m - 3 = 0 \Rightarrow r \log_r m - \log_r m = 3 \Rightarrow \log_r m = 3$$

$$\Rightarrow m = r^3 \Rightarrow m = 64 \quad \text{قابل قبول ۶۴}$$

$$\log_r(12b-21) - \log_r(b^r-3) = 2 \Rightarrow \log_r\left(\frac{12b-21}{b^r-3}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{12b-21}{b^r-3} = r^2 = 4 \Rightarrow 4b^r - 12 = 12b - 21 \Rightarrow 4b^r - 12b - 12 + 21 = 0$$

$$\Rightarrow 4b^r - 12b + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-12)^r - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow (2b-3)^r = 0 \Rightarrow 2b-3 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$b = \frac{3}{2}$ غیر قابل قبول است زیرا عبارت مقابل لگاریتم منفی می‌شود. پس معادله جواب ندارد.

$$\log_{\frac{1}{10}}(x^r-1) = -1 \Rightarrow x^r-1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10 \Rightarrow x^r = 11 \Rightarrow x = \pm \sqrt[11]{11}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.





۲۰۹ مسافت طی شده در هر دو چرخ یکسان است.

$$\text{رادیان} \quad r = 180 \text{ cm} \quad \frac{100}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{100\pi}{180} = \frac{5\pi}{9}$$

$$\ell = r \cdot \alpha = 180 \times \frac{5\pi}{9} = \frac{100\pi}{3} \text{ cm}$$

۲۱۰ مسافت طی شده در چرخ کوچک هم برابر $\frac{40\pi}{9}$ سانتی‌متر است. پس داریم:

$$r' = 5 \text{ cm}, \ell = \frac{40\pi}{9} \text{ cm} \rightarrow \alpha' = \frac{\ell}{r'} = \frac{\frac{40\pi}{9}}{5} = \frac{40\pi}{45} = \frac{8\pi}{9} \text{ رادیان}$$

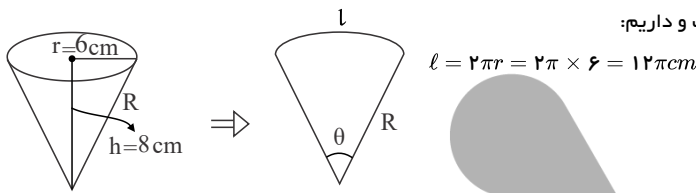
$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{8\pi}{9}}{\pi} = \frac{8}{9} \rightarrow D = 160^\circ$$

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{3.75}{4} = \frac{5}{8} \text{ rad}$$

۲۱۱

۲۱۱

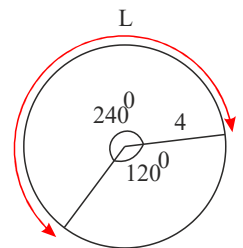
طول کمان مقابل به زاویه θ در قطاع حاصل همان محیط قاعده مخروط است و داریم:



$$R^2 = r^2 + h^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow R = 10 \Rightarrow \theta = \frac{\ell}{R} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$\alpha = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ \rightarrow L = \frac{240}{360} \times 2\pi r = \frac{24}{36} \times 2\pi \times 4$$

$$L = \frac{24 \times 8\pi}{36} = \frac{16\pi}{3}$$



۲۱۲

۲۱۳ مجموع زوایا در مثلث برابر 180° یا π رادیان است.

$$3 + 7 + 10 = 20 \rightarrow \frac{180}{20} = 9 \Rightarrow 3 \times 9 = 27^\circ, 7 \times 9 = 63^\circ, 10 \times 9 = 90^\circ$$

$$3 + 7 + 10 = 20 \rightarrow \frac{\pi}{20} \rightarrow 3 \times \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{20}, 7 \times \frac{\pi}{20} = \frac{7\pi}{20}, 10 \times \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{2}$$

۲۱۴ ابتدا فاصله بین هر دو کابین را بر حسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\text{فاصله هر دو کابین} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow \frac{\frac{2\pi}{30}}{\frac{\pi}{15}} = \frac{2\pi}{30} \times \frac{15}{\pi} = \frac{2}{3} \times \frac{15}{1} = 10$$

به اندازه ۱۰ کابین جلو رفته‌ایم پس در موقعیت کابین $12 = 10 + 2$ قرار می‌گیریم.

۲۱۵

$$\text{محیط دایره} = 200 \Rightarrow 2\pi r = 200 \Rightarrow r = \frac{100}{\pi} \text{ cm}$$

$$\ell = 80 \text{ cm} \Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{\ell}{r} = \frac{80}{\frac{100}{\pi}} = \frac{80\pi}{100} = \frac{4\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{4\pi}{5}}{\pi} = \frac{4}{5} \rightarrow D = \frac{4 \times 180}{5} = 144^\circ$$

۲۱۶

$$\text{الف) طول کمان } \widehat{AB} = \frac{40}{360} (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{9} \times 2\pi r = \frac{2\pi \times 10}{9} = \frac{20\pi}{9} \text{ cm}$$

$$\text{ب) } \frac{5\pi}{3} = \frac{\alpha}{360} (\text{محیط دایره}) \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi \times 10 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{20\pi\alpha}{360}$$



$$\Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi\alpha}{18} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{\alpha}{18} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

۲۱۷

الف) $\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi + \pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow$ ربع اول

ب) $\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow$ ربع چهارم

ج) $-\frac{21\pi}{4} = \frac{-20\pi - \pi}{4} = -5\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow$ ربع دوم

ت) $-\frac{103\pi}{2} = \frac{-102\pi + \pi}{2} = -51\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow$ نقطه A

۲۱۸

$$A = 3 \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2 \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{10}\right) - \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{10}\right)$$

$$= 3 \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} = 5 \sin \frac{\pi}{10}$$

۲۱۹ الف) با توجه به شکل α و θ متمم هستند یعنی:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$I = k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = k \sin \theta$$

ب)

$$\theta = 0 \rightarrow I = k \sin 0 = k \times 0 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{6} = \frac{k}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{3} = \frac{k\sqrt{3}}{2}$$

پ) بیشترین مقدار I زمانی است که $\sin \theta$ برابر یک باشد یعنی:

$$\sin \theta = 1 \Rightarrow I_{\max} = k, \quad \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

۲۲۰

$$\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(2\pi + \pi + \alpha)}{\cos(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos(6\pi + \pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha - \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}$$

$$= \frac{-\cos \alpha + \sin \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3 - 2}{3 + 2} = -\frac{1}{5}$$

۲۲۱

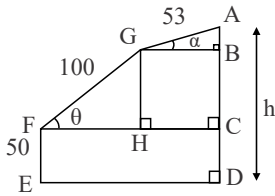
$$A = \cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \left(\frac{5\pi - 3\pi}{14}\right) + \cos^2 \left(\frac{5\pi - \pi}{14}\right)$$

$$= \cos^2 \left(\frac{\pi}{14}\right) + \cos^2 \left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{7} - \frac{3\pi}{14}\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{14}\right)$$

$$= \cos^2 \left(\frac{\pi}{14}\right) + \cos^2 \left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{14}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

۲۲۲



(الف)

$$GAB: \sin \alpha = \frac{AB}{53} \Rightarrow AB = 53 \sin \alpha$$

$$FGH: \sin \theta = \frac{GH}{100} \Rightarrow GH = 100 \sin \theta$$

$$\Rightarrow BC = GH = 100 \sin \theta$$

$$CD = EF \Rightarrow CD = 50$$

$$h = AB + BC + CD \Rightarrow h = 50 + 53 \sin \alpha + 100 \sin \theta$$

(ب)

$$h = 235, \alpha = -30^\circ \Rightarrow 50 + 53 \sin(-30^\circ) + 100 \sin \theta = 235$$

$$50 - 53 \times \frac{1}{2} + 100 \sin \theta = 235 \Rightarrow 100 \sin \theta = 235 - 50 + 26.5$$

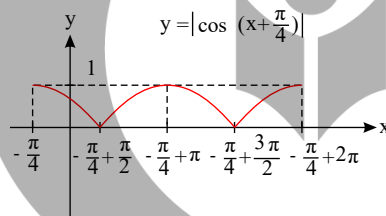
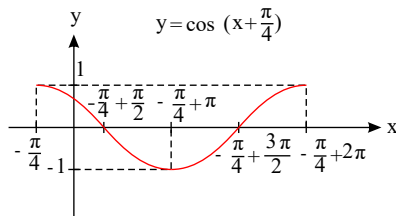
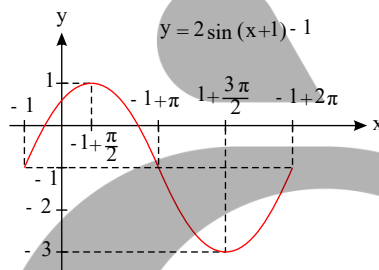
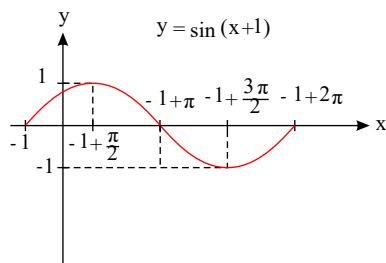
$$\Rightarrow 100 \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$y = \sin^2 x \rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow -1 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

۲۲۳

۲۲۴

(الف)

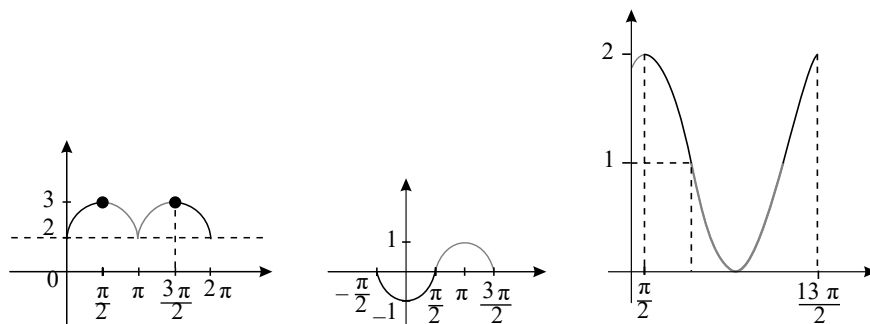


(ب)

(۲۲۵) الف. (۱)

ب. (۳)

پ. (۲) نظیر می‌شود.



$$\tan x \tan y = 5 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 5 \rightarrow \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{5}}{\cos x \cos y} = 5 \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{\frac{3}{5}}{5} = \frac{3}{25}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{3}{25} + \frac{4}{5} = \frac{3 + 20}{25} = \frac{23}{25}$$

۲۲۶



٢٢٧

$$\sqrt{r} \sin\left(x + \frac{\pi}{r}\right) = \sqrt{r} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{r} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{r} \right) = \sqrt{r} \left(\frac{\sqrt{r}}{r} \sin x + \frac{\sqrt{r}}{r} \cos x \right) = \sin x + \cos x$$

٢٢٨

الف

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

ب

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

٢٢٩

الف

$$\sqrt{r} \sin A = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\pi}{r} - B\right) = \sqrt{r} \left(\sin \frac{\pi}{r} \cos B - \cos \frac{\pi}{r} \sin B \right) = \sqrt{r} \left(\frac{\sqrt{r}}{r} \cos B - \frac{\sqrt{r}}{r} \sin B \right) = \cos B - \sin B$$

ب

$$A + B = \frac{\pi}{r} \rightarrow \tan(A + B) = \tan \frac{\pi}{r} \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1 \Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \tan A + \tan B(1 + \tan A) = 1 + 1 \Rightarrow (1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$$

٢٣٠

الف

$$\sin(a + b + c) = \sin(a + b) \cos c + \cos(a + b) \sin c$$

$$= (\sin a \cos b + \cos a \sin b) \cos c + (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \sin c$$

$$= \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c$$

ب

$$\cos(a + b + c) = \cos(a + b) \cos c - \sin(a + b) \sin c$$

$$= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \cos c - (\sin a \cos b + \cos a \sin b) \sin c$$

$$= \cos a \cos b \cos c - \cos c \sin a \sin b - \cos b \sin a \sin c - \cos a \sin b \sin c$$

٢٣١

$$\frac{r \tan x}{1 + \tan^r x} = \frac{r \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^r} = \frac{\frac{r \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^r x + \sin^r x}{\cos^r x}} = \frac{r \sin x \cos^r x}{\cos x} = r \sin x \cos x = \sin r x$$

٢٣٢

$$\cos r_{50}^\circ = 1 - r \sin^r r_{22,50}^\circ$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{r}}{r} = 1 - r \sin^r r_{22,50}^\circ$$

$$\rightarrow \sin r_{22,50}^\circ = \frac{\sqrt{r - \sqrt{r}}}{r}$$

$$\sin^r x + \cos^r x = 1 - r \sin^r x \cos^r x \quad \text{ميدانيم:} \quad \text{٢٣٣}$$

$$1 - r \sin^r x \cos^r x = \frac{1}{r} \Rightarrow r \sin^r x \cos^r x = \frac{1}{r} \Rightarrow \sin^r x \cos^r x = \frac{1}{r}$$

$$\sin x \cos x = \pm \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} \sin r x = \pm \frac{1}{r} \Rightarrow \sin r x = \pm 1$$

$$1 + \cot^r r x = \frac{1}{\sin^r r x} \Rightarrow 1 + \cot^r r x = \frac{1}{1} \Rightarrow \cot r x = 0$$

٢٣٤

$$\cos^r x = 1 - \sin^r x = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r-1}{r} \rightarrow \cos x = \pm \frac{r-1}{r} \xrightarrow{\text{ناحيه}} \cos x = \frac{-r-1}{r}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{r}}{\frac{-r-1}{r}} = \frac{1}{r+1} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$



$$\tan \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sqrt{x} \times \frac{\sqrt{x}}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

۲۳۵

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta}}{\frac{1}{\Delta}} = \sqrt{\Delta}$$

$$\sin \sqrt{x} = \sqrt{x} \sin x \cos x = \sqrt{x} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta} = \frac{\sqrt{x}}{\Delta}$$

$$\cos \sqrt{x} = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{\Delta} - \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{-\Delta}{\Delta}$$

$$\tan \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{1 - \Delta} = \frac{\sqrt{x}}{1 - \Delta} \rightarrow \cot \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{x}}{\Delta}$$

۲۳۶

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{x} &= \sqrt{x} \cos^2(x) - 1 = \sqrt{x}(\sqrt{x} \cos^2 x - 1) - 1 \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} \cos^2 x - \sqrt{x} \cos^2 x + 1) - 1 = \Delta \cos^2 x - \Delta \cos^2 x + 1 \end{aligned}$$

۲۳۷

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos \sqrt{x}$$

۲۳۸

الف با فرض $x = \frac{\pi}{4} + a$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} &= \frac{1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{1} = -\cos \sqrt{x} \\ &= -\cos \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + a\right)} = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{a}\right) = \sin \sqrt{a} \end{aligned}$$

ب

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos \sqrt{\theta} \cos \sqrt[3]{\theta} &= \frac{\sin \theta \cos \theta \cos \sqrt{\theta} \cos \sqrt[3]{\theta}}{\sin \theta} = \frac{\frac{1}{2} \sin \sqrt{\theta} \cos \sqrt{\theta} \cos \sqrt[3]{\theta}}{\sin \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin \sqrt{\theta} \cos \sqrt{\theta}}{\sin \theta} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin \Delta \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \sin \theta} \end{aligned}$$

۲۳۹

الف می‌دانیم: $\sin x = \sqrt{x} \sin \frac{x}{\sqrt{x}} \cos \frac{x}{\sqrt{x}}$ و $1 + \cos x = \sqrt{x} \cos^2 \frac{x}{\sqrt{x}}$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sqrt{x} \sin \frac{x}{\sqrt{x}} \cos \frac{x}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \cos^2 \frac{x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{x}{\sqrt{x}}} = \tan \frac{x}{\sqrt{x}}$$

ب

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{\sqrt{x}} - \tan \frac{x}{\sqrt{x}}}{1 + \tan \frac{\pi}{\sqrt{x}} \tan \frac{x}{\sqrt{x}}} = \frac{1 - \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{x}{\sqrt{x}}}}{1 + 1 \times \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{x}{\sqrt{x}}}} = \frac{\frac{\cos \frac{x}{\sqrt{x}} - \sin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{x}{\sqrt{x}}}}{\frac{\cos \frac{x}{\sqrt{x}} + \sin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{x}{\sqrt{x}}}} \\ &= \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{x}} - \sin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{x}{\sqrt{x}} + \sin \frac{x}{\sqrt{x}}} \times \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{x}} + \sin \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{x}{\sqrt{x}} + \sin \frac{x}{\sqrt{x}}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{\sqrt{x}} - \sin^2 \frac{x}{\sqrt{x}}}{\cos^2 \frac{x}{\sqrt{x}} + \sin^2 \frac{x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \sin \frac{x}{\sqrt{x}} \cos \frac{x}{\sqrt{x}}} \end{aligned}$$



$$= \frac{\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \sin 2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

۲۴۰ بازه باز (a, b) یک همسایگی متقارن به مرکز x_0 و شعاع r است اگر:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, r = \frac{b-a}{2}$$

$$\frac{1+2m-m-3}{2} = 3,5 \Rightarrow m-2=7 \Rightarrow m=9 \Rightarrow (m-1, m) = (8, 9) \Rightarrow \text{مرکز} = \frac{8+9}{2} = 8,5$$

۲۴۱ الف

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4} \Rightarrow 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow D_f = [-3, 3] - \{2, -2\}$$

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف نقاط $x=2$, $x=-2$ است.

پ) به تابع در همسایگی $2,9$ مثلاً در بازه $(2,8, 2,95)$ تعریف شده است.

ت) طبق دامنه، تابع در همسایگی چپ $x=-3$ تعریف نشده است ولی در همسایگی راست $x=-3$ تعریف شده است.

۲۴۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4 - 2 \times (-1) = -4 + 2 = -2$$

$$\text{ب) } 3 \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + f(3) - f(-2) = 3(-3) + 4 - (-3) = -9 + 4 + 3 = -2$$

۲۴۳

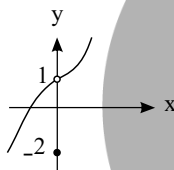
$$x = -2 \rightarrow \text{یک همسایگی } (-3, -1)$$

$$x = -2 \rightarrow \text{یک همسایگی محذوف } (-4, -1) - \{-2\} = (-4, -2) \cup (-2, -1)$$

$$x = -2 \rightarrow \text{یک همسایگی راست } (-2, -1) \quad x = -2 \rightarrow \text{یک همسایگی چپ } (-3, -2)$$

۲۴۴

$$f(0) = -2, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0)$$



۲۴۵ الف) دامنه‌ی این تابع را تعیین می‌کنیم.

$$9 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 9 \Rightarrow -9 \leq x \leq 9$$

$$x - [x] = 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

پس در تمام نقاط صحیح این تابع تعریف نشده است.

بنابراین تابع در همسایگی همه‌ی نقاط بازه $(-9, 9)$ غیر از نقاط صحیح این بازه تعریف شده است.

ب) تابع در همسایگی محذوف تمام نقاط صحیح بازه $(-9, 9)$ یعنی در $x = -8, -7, \dots, 7, 8$ تعریف شده است.

۲۴۶

الف) هست

ب) هست

پ)

$$\text{همسایگی محذوف ۳ است.} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \xrightarrow{+3} 2 < x < 4 \\ |x-3| \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{و } x \neq 3$$

$$\left. \begin{array}{l} x \neq 3 \\ |x-3| < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{همسایگی محذوف ۳ داریم.} \Rightarrow \text{نقاطی که فاصله آنها تا ۳ کمتر از ۱ است و خود ۳ نیز نباشد}$$

$$|x-3| > 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3 > 2 \\ \text{یا} \\ x-3 < -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ \text{یا} \\ x < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{همسایگی محذوف ۳ نیست.}$$

ث) فقط برداشتن ۳ مهم نیست. ابتدا باید یک همسایگی ۳ را داشته باشیم. بازه $(1, 2)$ همسایگی از ۳ نیست.

۲۴۷



$$f(x) = \frac{x}{[x]}$$

$$[x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$$

یعنی تابع در هیچ همسایگی راست صفر تعریف نشده است، پس تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است.

۲۴۸ الف) ۱

ب)

۳ (۱) ۱ (۲) ۳ وجود ندارد.

۲۴۹

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \Rightarrow x^2 - x \geq 0$$

x	0	1
$x^2 - x$	$\begin{array}{c} + \\ \circ \\ \text{ج} \end{array}$	$\begin{array}{c} - \\ \circ \\ \text{ج} \end{array}$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

چون تابع در همسایگی چپ نقطه $x = 1$ تعریف نشده است پس حد چپ ندارد.

۲۵۰ باید دامنهٔ تابع را به دست آوریم.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 15} \rightarrow x^2 - 2x - 15 \geq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \text{ یا } x \geq 5 \Rightarrow D_f = (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$$

x	-3	5
$x^2 - 2x - 15$	$\begin{array}{c} + \\ \text{ج} \end{array}$	$\begin{array}{c} - \\ \text{ج} \end{array}$

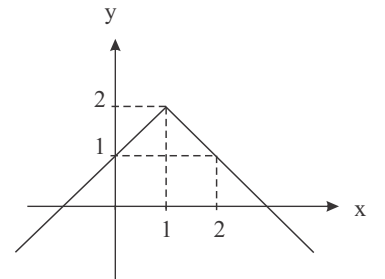
چون تابع در همسایگی راست $x = -3$ تعریف نشده است پس در این نقطه حد راست ندارد.

۲۵۱

$$f(x) = 2 - |x - 1| \quad \begin{array}{l|l} x=1 & x=0 \\ y=2 & y=1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} x=2 & y=1 \end{array}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = [2^-] = [2 - \varepsilon] = 1$$

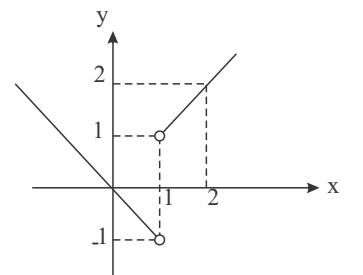
$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = [2] = 2$$



۲۵۲

$$f(x) = \frac{x|x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -x & x < 1 \\ \frac{x(x-1)}{x-1} = x & x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{حد ندارد}$$



۲۵۳

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow \\ x + 3 & x > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{array}$$

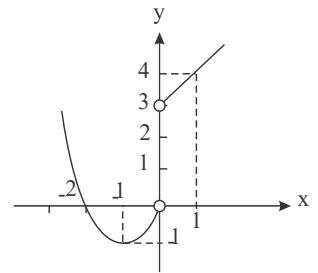


حد ندارد $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ حد ندارد

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] = [(-1)^+] = -1$

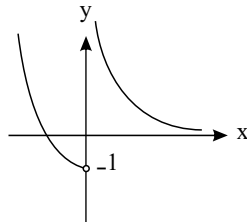
پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)] = [0^-] = [0 - \varepsilon] = -1$

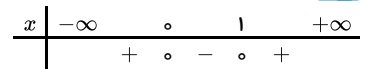


۲۵۴

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ حد ندارد $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$



۲۵۵



حد تابع وقتی $x \rightarrow 1^-$ موجود نیست زیرا همسایگی چپ $x = 1$ در دامنه نیست.

۲۵۶

$n^2 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 5n = 0 \Rightarrow n^2(1) - 3 \times 2 + 5n = 0 \Rightarrow n^2 + 5n - 6 = 0 \Rightarrow n = 1, n = -6$

چون n باید طبیعی باشد، پس $n = 1$.

۲۵۷ $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = M$ تابع $f + g$ در a حد ندارد زیرا اگر فرض کنیم $h = f + g$ در a حدی برابر M داشته باشد یعنی

چون f هم در a حدی برابر N دارد یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = N$ داریم:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (h(x) - f(x))$
 $= \lim_{x \rightarrow a} h(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M - N$

یعنی g در a حد دارد و این خلاف فرض است، پس تابع $h = f + g$ نمی‌تواند در a حد داشته باشد.

۲۵۸ چون تابع f در نقطه $x = 2$ باید حد داشته باشد داریم:

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4, f(x) = x + 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

۲۵۹

$L^- = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (m \sin \frac{x}{2} + \cos x) = m \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi = m - 1$

$L^+ = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (2m - \cos \frac{x}{2} + \sin x) = 2m - \cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi = 2m$

$2m = m - 1 \Rightarrow m = -1$

۲۶۰

$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - n + 2) = 3 - n + 2 = -3 \Rightarrow n = 8$

$L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + mx + 1) = 1 + m + 1 = 5 \Rightarrow m = 3$

۲۶۱ باید حد چپ و حد راست در -2 برابر ۴ باشند.

$L^- = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (ax^2 - x) = 4a + 2 = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$L^+ = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (2x + b) = -4 + b = 4 \Rightarrow b = 8$



۲۶۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2mx^2 + 3x - m) = 10 \Rightarrow 8 - 8m + 6 - m = 10 \Rightarrow 14 - 10 = 9m \Rightarrow m = \frac{4}{9}$$

۲۶۳ چون تابع f در نقطه -3 حد دارد پس $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{3x - f(x)}{2f(x) + x^2} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} 3x - \lim_{x \rightarrow -3} f(x)}{2 \lim_{x \rightarrow -3} f(x) + \lim_{x \rightarrow -3} x^2} = \frac{-9 - L}{2L + 9} = \frac{-11}{13}$$

$$\Rightarrow -22L - 99 = -117 - 13L \Rightarrow 117 - 99 = 22L - 13L \Rightarrow 9L = 18 \Rightarrow L = 2$$

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} (4f(x) - x) = 4 \lim_{x \rightarrow -3} f(x) - \lim_{x \rightarrow -3} x = 4L - (-3) = 4 \times 2 + 3 = 11$

ب) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{-x^2 + f(x)}{5 - f(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} (-x^2) + \lim_{x \rightarrow -3} f(x)}{5 - \lim_{x \rightarrow -3} f(x)} = \frac{-9 + 2}{5 - 2} = \frac{-7}{3}$

۲۶۴ چون تابع f در کل اعداد حقیقی حد دارد پس $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - f(x)}{f(x) + 3} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 3} = \frac{2 - L}{L + 3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow L + 3 = 24 - 6L \Rightarrow 7L = 21 \Rightarrow L = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x^2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = L + 16 = 3 + 16 = 19$$

۲۶۵ چون تابع f در نقطه $x = 2$ حد دارد پس $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) + 2}{3f(x) - 1} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 2}{3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 1} = \frac{L + 2}{3L - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3L - 1 = 2L + 4$$

$$\Rightarrow L = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x) - 5) = (\lim_{x \rightarrow 2} f(x))^2 - 5 = 5^2 - 5 = 20$$

الف) $\lim_{x \rightarrow -2} (2f(x) - 3g(x) + h^2(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow -2} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) + (\lim_{x \rightarrow -2} h(x))^2$

$$= 2 \times 3 - 3 \times 2 + (-4)^2 = 16$$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2g(x) - 4h(x)}{h(x) + f(x)} \right) = \frac{2 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) - 4 \lim_{x \rightarrow -2} h(x)}{\lim_{x \rightarrow -2} h(x) + \lim_{x \rightarrow -2} f(x)} = \frac{2 \times 2 - 4 \times (-4)}{-4 + 3} = \frac{4 + 16}{-1} = -20$

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) - 3g(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2 \times 4 - 3 \times (-2) = 8 + 6 = 14$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} (-3f^2(x) + 7g^2(x)) = -3(\lim_{x \rightarrow 3} f(x))^2 + 7(\lim_{x \rightarrow 3} g(x))^2 = -3 \times 4^2 + 7 \times (-2)^2$

$$= -3 \times 16 + 7 \times (-8) = -48 - 56 = -104$$

۲۶۸

تابع $f(x) = x - 1$ در نقطه $x = 1$ حد دارد و تابع $g(x) = [x]$ در نقطه $x = 1$ حد ندارد. زیرا حد چپ و راست آن نابرابرند و تابع $(f \times g)(x)$ در $x = 1$ حد دارد.

$$(f \times g)(x) = f(x)g(x) = (x - 1)[x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)[x] = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1)[x] = 0 \times 0 = 0$$



۲۶۹

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x \cos \frac{x}{2} - \sin^2 x) = 2 \times \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \tan^2 x}{x \sin 2x} \right) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} - \tan^2 \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{\frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{4}} = \frac{6\sqrt{3}-4}{\pi\sqrt{3}}$$

۲۷۰

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3-2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{0} \text{ حد وجود ندارد}$$

ب

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x+1} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] + |x|}{x+1} &= \frac{-1}{1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + |x|}{x+1} &= \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

چون حد چپ و راست نابرابرند پس حد وجود ندارد.

۲۷۱

الف

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) - \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2 \times 2 - 0 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \frac{0}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} = \frac{0}{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} -3\sqrt{g(x)} = -3\sqrt{\lim_{x \rightarrow -3} g(x)} = -3\sqrt{1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\lambda g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} \lambda g(x)} = \sqrt[3]{\lambda \lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \sqrt[3]{\lambda \cdot 3}$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax - [2x] = 2a - [2(2 - \varepsilon)] = 2a - [4 - 2\varepsilon] = 2a - 3 \Rightarrow 2a - 3 = -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} b[-x] + 3x = b[-(2 + \varepsilon)] + 6 = b[-2 - \varepsilon] + 6 = -3b + 6$$

$$\Rightarrow -3b + 6 = 1 \Rightarrow b = -\frac{5}{3}$$

۲۷۲

ت

۲۷۳

برای اینکه $f(x)$ در نقطه‌ی $x = -1$ حد داشته باشد باید حد چپ و راست آن در این نقطه باهم برابر باشند.



$$f(x) = a[x] + [x + 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (a[x] + [x + 1]) = -a + 0 = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (a[x] + [x + 1]) = -2a - 1$$

$$\Rightarrow -a = -2a - 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

۲۷۴

الف

$$L^- = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \left[\frac{x}{2} \right] - 2 \left[\frac{x}{3} \right] = \left[\frac{-\frac{1}{2} - \varepsilon}{2} \right] - 2 \left[\frac{-\frac{1}{2} - \varepsilon}{3} \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right] - 2 \left[-\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon}{3} \right] = -\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{2\varepsilon}{3} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{1}{12} + \frac{\varepsilon}{6}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \left[\frac{x}{2} \right] - 2 \left[\frac{x}{3} \right] = \left[\frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon}{2} \right] - 2 \left[\frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon}{3} \right] = \left[-\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \right] - 2 \left[-\frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{3} \right]$$

$$= -\frac{1}{4} - 2 \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

ب

$$x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+ \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < -2 \Rightarrow \frac{-3}{x} > 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \left[\frac{-3}{x} \right] = [6^+] = 6$$

$$x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} > -2 \Rightarrow \frac{-3}{x} < 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \left[\frac{-3}{x} \right] = [6^-] = 5 \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

۲۷۵

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1}{2x^2 - x - 1} \times \frac{2x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(2x+1)}{(2x+1)(x-1)x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x-1)x} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

۲۷۶

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^5 + x^4 + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{\overbrace{1+1+\dots+1}^{\text{۶ تا}}}{\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{۳ تا}}} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

۲۷۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - 2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x - 2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{2}$$

۲۷۸

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = \frac{1 \times 3}{3} = \frac{1}{1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{x - 1}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = n$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x}}{x^3 - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{(x^3 - 1)(\underbrace{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^3}}_3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{3(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x^2 + 2x - 8} \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x - 1}{(x^2 + 2x - 8)(2 + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+4) \times 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{6(x+4)} = \frac{-1}{36}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x + \sqrt{x})(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x + \sqrt{x})(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x}} = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} - \sqrt{5}}{x^2 - 16} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} + \sqrt{5}}{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} + \sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 + \sqrt{x+5} - 5}{(x^2 - 16)(\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} + \sqrt{5}}_{2\sqrt{5}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{2\sqrt{5}(x^2 - 16)} \times \frac{\sqrt{x+5} + 3}{\sqrt{x+5} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 5 - 9}{2\sqrt{5}(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2\sqrt{5}(x+4)(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{1}{2\sqrt{5} \times 8 \times 6} = \frac{1}{96\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2 - [x])\sqrt{(x-2)^2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-2)|x-2|}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{\sqrt{x+2} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{(x+8)^3} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4}{\sqrt[3]{(x+8)^3} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2}$$

٢٧٩

الف

ب

٢٨٠

الف

ب

٢٨١

الف

ب

٢٨٢

الف

ب



$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+6-8)(\sqrt{x+2+2})}{(x+2-4)(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6+4})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2+2}}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6+4}}$$

$$= \frac{2+2}{4+4+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۲۸۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2a(\sqrt{x+3-2})}{|x-1|} \times \frac{(\sqrt{x+3+2})}{(\sqrt{x+3+2})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overbrace{2a(x+3-4)}^{x-1}}{-(x-1)(\sqrt{x+3+2})} = \frac{-2a}{4} = \frac{-a}{2}$$

حد راست = حد چپ

برای داشتن حد باید:

$$\frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x-1] + 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] \not\rightarrow \not\rightarrow = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$$

۲۸۴

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} 1 \times \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \times \frac{\tan(x+1)}{x+1} = \frac{1}{-1} \times 1 = -1$$

۲۸۵

می‌دانیم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\sin x} - \sqrt{2-\sin x}}{3x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\sin x} - \sqrt{2-\sin x}}{3x} \times \frac{\sqrt{2+\sin x} + \sqrt{2-\sin x}}{\sqrt{2+\sin x} + \sqrt{2-\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sqrt{2+\sin x}} + \sin x - \cancel{\sqrt{2-\sin x}} + \sin x}{(3x)(\sqrt{2+\sin x} + \sqrt{2-\sin x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{2}{3(\sqrt{2+\sin x} + \sqrt{2-\sin x})} = \frac{2}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

۲۸۶

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \sqrt{1 + \tan x}} \times \frac{1 + \sqrt{1 + \tan x}}{1 + \sqrt{1 + \tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 + \sqrt{1 + \tan x})}{1 - 1 - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 + \sqrt{1 + \tan x})}{-\tan x} = -2$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \times \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}{1 + \sin x - 1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x \times 2}{2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2 \times 1 = 2$$

۲۸۷

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \times 1^2 = 2$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{\tan^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times 2 \sin^2 2x}{\tan^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x \right)^2}{\left(\frac{\tan 2x}{2x} \times 2x \right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \times 4x^2}{9x^2} = \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$$

۲۸۸



الف

نکته: $\tan u \sim u$, $\sin u \sim u$ $u \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan 3x}{x^2 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times 3x}{x^2(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x+3} = \frac{3}{3}$$

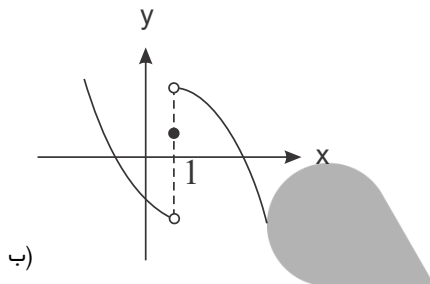
ب

نکته: $\sin u \sim u$ $u \rightarrow 0$

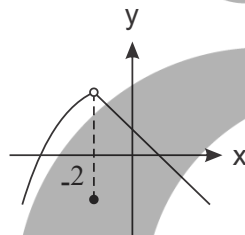
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{3} + x)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2}$$

۲۸۹

(الف)



ب)



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$$

۲۹۰

$$f(2) = [2] - [2] = 0$$

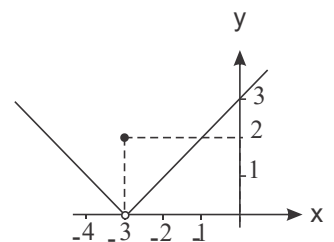
$$L^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} [\frac{x}{2}] - [\frac{x+2}{2}] = [\frac{2-\epsilon}{2}] - [\frac{2-\epsilon+2}{2}] = [2-\frac{\epsilon}{2}] - [2-\frac{\epsilon}{2}] = 1 - 1 = 0$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} [\frac{x}{2}] - [\frac{x+2}{2}] = [\frac{2+\epsilon}{2}] - [\frac{2+\epsilon+2}{2}] = [2+\frac{\epsilon}{2}] - [2+\frac{\epsilon}{2}] = 2 - 2 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} |x+3| & x \neq -3 \\ 2 & x = -3 \end{cases}$$

تابع در نقطه $x = 4$ پیوسته است.

۲۹۱

تابع در نقطه $x = -3$ ناپیوسته است.

۲۹۲

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

چون تابع در همسایگی نقطه $x = -2$ تعریف نشده پس حد نداشته و ناپیوسته است.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4 = g(1)$$

پس تابع در $x = 1$ پیوسته است.

۲۹۳

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad x \geq 1$$

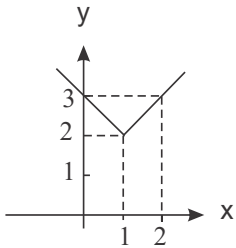


با توجه به دامنه چون تابع در همسایگی نقطه $x = 1$ تعریف نشده است پس حد نداشته و ناپیوسته است.

۲۹۴

الف

$$f(x) = |x - 1| + 2 \quad \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array} \right.$$



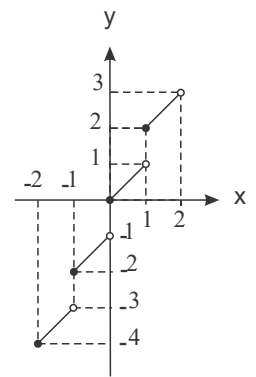
تابع در کل اعداد حقیقی پیوسته است.

ب

$$f(x) = x + [x] - 2 \quad \left| \begin{array}{l} -2 \leq x < -1 \rightarrow y = x - 2 \\ -1 \leq x < 0 \rightarrow y = x - 1 \\ 0 \leq x < 1 \rightarrow y = x \\ 1 \leq x < 2 \rightarrow y = x + 1 \end{array} \right.$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow y = x \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow y = x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$$

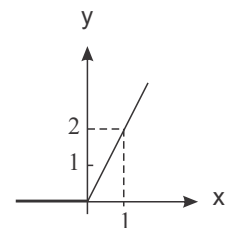


تابع در نقاطی به طول عدد صحیح یعنی در $\mathbb{Z}$ ناپیوسته است و در این نقاط پیوستگی راست دارد.

۲۹۵

الف

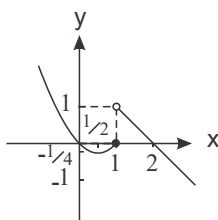
$$f(x) = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x & x \geq 0 \\ x - x = 0 & x < 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right.$$



تابع در کل اعداد حقیقی پیوسته است.

ب

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 1 \rightarrow \text{رأس} \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right.$$



تابع در نقطه $x = 1$ ناپیوسته است. در این نقطه پیوستگی چپ دارد.

در این سؤال هر بازه‌ای که در طرف راست یا چپ ۱ و فاقد ۱ باشد جواب است، مثلاً (۱, ۲).

۲۹۷



$$f(x) = \begin{cases} [3x] + b & x < 1 \\ 2ax + 1 & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{1 - x} & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [3x] + b = 2 + b$$

$$f(1) = 2a + 1 \rightarrow \begin{cases} 2 + b = -2 \rightarrow b = -4 \\ 2a + 1 = -2 \rightarrow a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} [-x] + a & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} + b & x > 2 \end{cases}$$

$$2 \text{ در چپ} = 2 \text{ حد راست در } 2 \text{ در چپ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} + b = 4 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [-x] + a = -2 + a$$

$$f(2) = 3 \rightarrow \begin{cases} 4 + b = 3 \rightarrow b = -1 \\ -2 + a = 3 \rightarrow a = 5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} a[3x] - b & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ a \sin \frac{\pi}{2} x + b & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} a \sin \frac{\pi}{2} x + b = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} a[3x] - b = a[3^-] - b = 3a - b$$

$$f(1) = 1$$

$$\begin{cases} 3a - b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = x[x] - 2 \quad x \in [2, 3)$$

$$x \in (2, 3) \Rightarrow 2 < x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 2 \Rightarrow \text{تابع پیوسته}$$

تابع در بازه باز $(2, 3)$ پیوسته است.

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 2 \times [2] - 2 = 2$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} x[x] - 2 = 2[2 + \varepsilon] - 2 = 2 \times 2 - 2 = 2 = f(2)$$

تابع در $x = 2$ پیوستگی راست دارد. پس تابع در بازه $[2, 3)$ پیوسته است.

۲۹۸

۲۹۹

۳۰۰