دانشگاه خلیج فارس
بوشهر

دینامیک سازه ها- دکتر علیرضا فیوض

سرفصل مطالب

فصل ۱- مقدمه

فصل ۲ – معادله حرکت سیستمهای یک درجه آزاد

فصل ۳- ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزاد

فصل ۴- پاسخ در برابر بارهای هارمونیک

فصل ۵- پاسخ در برابر بارهای متناوب

فصل ۶- پاسخ در برابر بارهای ضربه ای

فصل ۷- پاسخ در برابر بارهای کلی

فصل ۸- روش های عددی

فصل ۹- سیستم های غیر خطی

فصل ۱۰- سیستمهای تعمیم یافته

فصل ۱۱- معادله حرکت سیستمهای چند درجه آزاد

فصل ۱۲ – ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزاد

فصل ۱۳ – پاسخ سیستم های چند درجه آزاد

فصل ۱۴ - معادله حرکت سیستمهای پیوسته

فصل ۱۵ – ارتعاش آزاد سیستم های پیوسته

فصل ۱۶ – پاسخ سیستم های پیوسته

ارزیابی

تکالیف	۱۰ درصد
میان ترم از فصل ۱ تا ۷	۴۵ درصد
نهایی از فصل ۸ تا ۱۶	۴۵ درصد

مراجع

1-“Dynamics of Structures”, R.W. Clough and J.Penzien, Computers and Structures Inc., 3rd edition, 2003.

2- “Dynamics of Structures, theory and application to earthquake engineering”, A.K. Chopra, Prentice-Hall, 1995.

دانشگاه خلیج فارس
بوشهر

دینامیک سازه ها

دکتر علیرضا فیوض

فصل اول

مقدمه

۱-۱ دینامیک سازه ها

موضوع علم دینامیک سازه عبارت است از محاسبه پاسخ سازه ها در برابر بارهای دینامیکی. منظور از پاسخ سازه کمیت هایی نظیر تغییرمکان، سرعت، شتاب، عکس العمل تکیه گاه، نیروهای داخلی و تنش ها و کرنش ها می باشد. منظور از بارهای دینامیکی بارهایی است که مقدار یا محل اثر یا جهت آنها تابعی از زمان باشد.

۱-۲ انواع بارهای دینامیکی

بارهای دینامیکی را به دو دسته می توان تقسیم بندی نمود:

الف- بارهای متعیّن(Deterministic) یا بارهای از پیش تعریف شده (Prescribed)

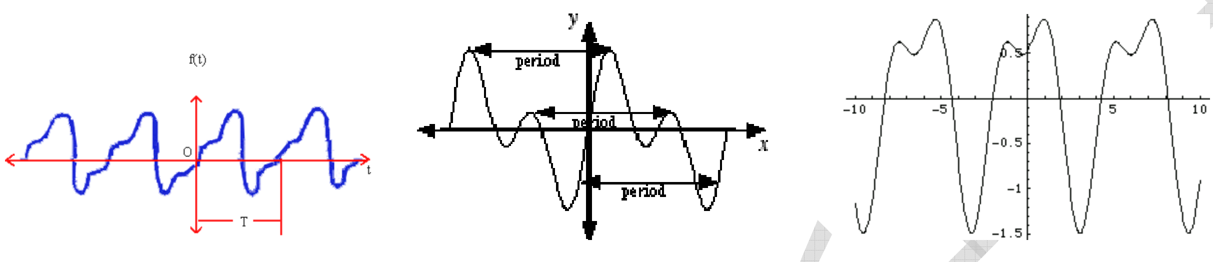
ب- بارهای غیرمتعیِن(Nondeterministic) یا تصادفی (Random) یا احتمالی(Probabilistic)

بارهای متعیَن بارهایی هستند که تغییرات زمانی آنها معلوم است ولی بارهای غیرمتعیِن بارهایی هستند که تغییرات زمانی آنها دقیقاً معلوم نیست ولی می توان بعضی از توابع آماری آنها نظیر میانگین، میانگین مربعات، واریانس و ... را تعریف نمود. می توان گفت که بارهای متعیَن بارهایی هستند که اتفاق افتاده اند ولی بارهای غیرمتعیِن بارهایی هستند که در آینده به سازه وارد می شوند. مثلاً زلزله ای که اتفاق افتاده است متعیَن است چون تغییرات زمانی آن مشخص است. ولی زلزله ای که در آینده اتفاق می افتد و سازه برای آن طراحی می شود غیرمتعیَن است چون تغییرات زمانی آن معلوم نیست.

به این ترتیب کلیه بارهایی که در هنگام طراحی سازه پیش بینی می شود به سازه وارد شوند بارهای تصادفی هستند. حتی بار مرده ساختمان نیز بار تصادفی است، چون بار مرده ای که در هنگام طراحی فرض می شود به سازه وارد می شود را دقیقاً نمی توان پیش بینی نمود و احتمالاً در طول زمان تغییر خواهد کرد که تغییرات آن با زمان مشخص نیست.

موضوع این درس بارهای متعَین است. بارهای متعَین را می توان به انواع مختلفی تقسیم بندی نمود.

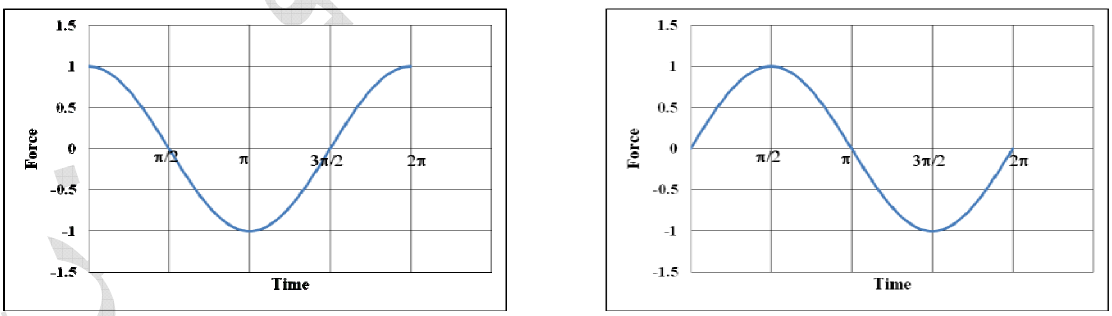
الف- بارهای متناوب(Periodic) بارهایی هستند که شکل آنها در یک محدوده زمانی تکرار می شود (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱ مثال هایی از بارهای متناوب

بارهای متناوب خود به دو دسته تقسیم بندی میشوند:

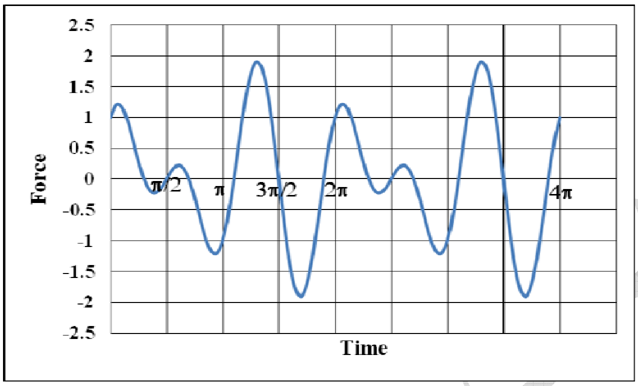
۱- بار هارمونیک ساده(Simple Harmonic) بارهایی که فقط از یک موج سینوسی یا کسینوسی تشکیل میشوند(شکل ۱-۲).



شکل ۱-۲ مثال هایی از بارهای هارمونیک ساده

۲- بار تناوبی پیچیده(Complex periodic)

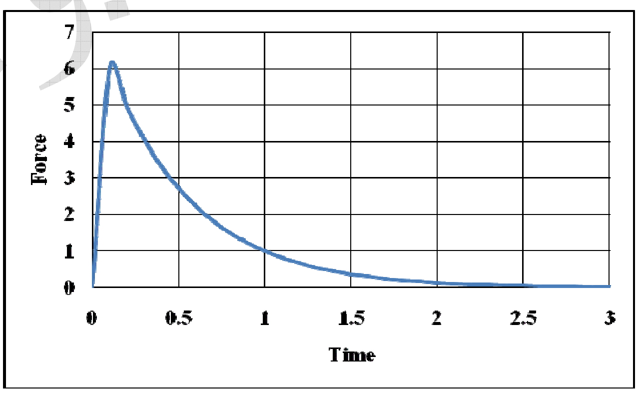
این نوع بار ترکیبی از چند بار هارمونیک ساده با فرکانس و دامنه های مختلف (شکل ۱-۳) و یا حتی نامنظم میتواند باشد. نمونه ای از این بارها نیروی امواج بر سازه های دریایی یا اسکله ها هستند.



شکل ۱-۳ نمونه ای از بار تناوبی پیچیده

ب- بارهای ضربه ای(Impulsive loading)

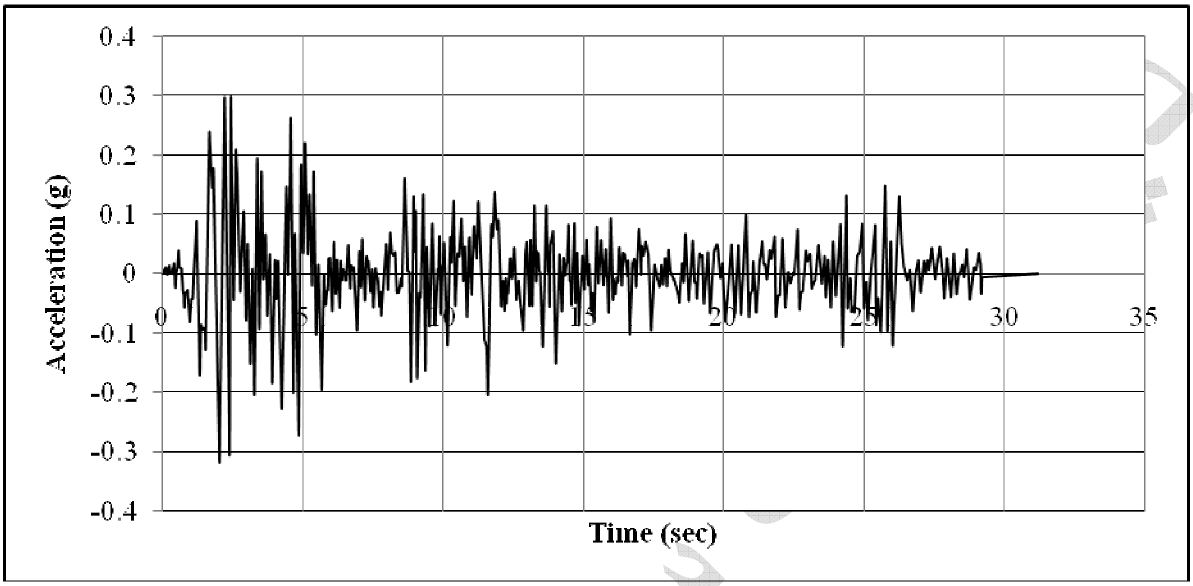
بارهایی که مدت زمان اعمال آنها بسیار کوتاه باشد.مثل نیروی انفجار یا ضربه آسانسور یا برخورد کامیون به پایه پل (شکل ۱-۴).



شکل ۱-۴ نمونه ای از بار انفجاری

پ- بارهای نامنظم(Irregular)

بارهایی هستند که شکل هندسی خاصی ندارند مثل بار زلزله (شکل ۱-۵).



شکل ۱-۵ شتاب زلزله السنترو

۱-۳ مثال هایی از بارهای دینامیکی

الف- بار زلزله (Earthquake). بار زلزله یک نوع بار دینامیکی است. چون واضح است که وابسته به زمان می باشد. البته زلزله خود بار نیست بلکه حرکات زمین است که چون در جرم ساختمان شتاب ایجاد می کند، باعث تولید نیروی اینرسی در سازه شده که اصطلاحاً نیروی زلزله نامیده می شود.

ب- فشار باد(wind). واضح است که فشار باد تابعی از زمان می باشد. یعنی در یک لحظه از زمان ممکن است مقداری باشد و پس از آن کم یا زیاد شود. بنابراین فشار باد نیز یک نوع بار دینامیکی محسوب می شود.

پ- موج(wave). فشار امواج روی سازه های ساحلی و فراساحلی، نیرویی ایجاد می کند که تابعی از زمان و در نتیجه دینامیکی است.

ت- بارهای متحرک(moving load). حرکت اتومبیل روی پل باری است که مقدار آن را می توان ثابت درنظر گرفت (با صرفنظر کردن از اثرات ضربه) ولی موقعیت آن با زمان متغیر است. بنابراین بارهای محرک نیز دینامیکی محسوب میشوند.

ث- ضربه اتومبیل(Impact). بعضی از سازه ها (مثل پایه پل ها یا حفاظ های اطراف جاده و...) در معرض برخورد اتومبیل هستند. این نیرو نیز تابعی از زمان ودینامیکی است.

ت- ماشین آلات ارتعاشی(rotating machinery). ماشین آلاتی که به سازه متصل می شوند در صورتی که یک موتور محرک داشته باشند(مثل آسانسور، چیلر، کمپرسور و...)، نیرویی به سازه وارد می کنند که تابعی از زمان و دینامیکی است.

ج- ارتعاشات محیطی(ambient vibration). ارتعاشاتی که بر اثر عوامل محیطی مثل ترافیک، وزش ملایم هوا، و لرزش های ریز زمین ایجاد میشود نیز در زمره بارهای دینامیکی محسوب میشوند.

چ- بار زنده(Live Load). بار زنده وارد بر سازه ها نیز دینامیکی است زیرا این بار بعضی اوقات به سازه وارد می شود و بعضی اوقات این بار وجود ندارد.

ح- بار مرده(Dead Load). حتی بار مرده ساختمان را نیز می توان دینامیکی محسوب نمود زیرا این بار نیز به تدریج ودر طول زمان به سازه وارد می شود. حتی در زمان بهره برداری ممکن است بارمرده به ساختمان تغییر کند بنابراین بار مرده نیز تابعی از زمان میباشد.

۱-٤ تفاوت بین مسائل دینامیکی و استاتیکی

بین مسائل استاتیکی و دینامیکی سه تفاوت عمده وجود دارد:

۱- در مسائل استاتیکی نیروی وارد و پاسخ سازه نسبت به زمان ثابت هستند ولی در مسائل دینامیکی چون نیروی وارد به سازه تابعی از زمان است پاسخ سازه نیز تابعی از زمان می باشد.

۲- چون در مسائل دینامیکی تغییر مکان سازه تابعی از زمان است بنابر این ذرات مختلف سازه دارای سرعت و شتاب نیز هستند. همانطور که می دانیم حاصل ضرب جرم ذرات در شتاب آنها نیرویی بوجود می آورد که نیروی اینرسی نامیده می شود. در مسائل استاتیکی این نیرو وجود ندارد. بنابراین در مسائل دینامیکی باید اثر نیروی اینرسی درنظر گرفته شود.

۳- اگر سازه ای دارای تغییر مکان، سرعت یا شتاب اولیه باشد و سپس به آن نیرو وارد نشود به تدریج و به مرور زمان دامنه حرکت آن کاهش میابد تا بالاخره به صفر میرسد. علت این امر اتلاف انرژی است که خاص مسائل دینامیکی می باشد. عامل اتلاف انرژی در مسائل دینامیکی میرایی نامیده میشود. در مسائل استاتیکی میرایی وجود ندارد ولی در مسائل دینامیکی لازم است میرایی نیز درنظر گرفته شود.

۱-۵ روش مدلسازی

به دو صورت می توان یک سازه را مدلسازی نمود:

(الف)مدل جرم متمرکز: در این روش جرم، سختی، میرایی و نیروی سازه در نقاط معینی به صورت متمرکزدر نظر گرفته می شود.

(ب) مدل جرم پیوسته: در این روش جرم، سختی، میرایی یا نیروی سازه به صورت پیوسته در نظر گرفته می شود.

می توان گفت که کلیه سازه های واقعی از مدل جرم پیوسته تبعیت می کنند ولی با فرضیاتی می توان آنها را به صورت جرم متمرکز درنظر گرفت .

۱-٦ فرضیات اصلی تحلیل دینامیکی سازه ها

فرضیاتی که برای تحلیل دینامیکی سازه ها در این درس درنظر گرفته می شود همان فرضیات اصلی تحلیل استاتیکی سازه ها می باشند که عبارتند از:

(الف) تغییر فرم های کوچک: بر اساس این فرض تغییر فرمها آنقدر کوچک هستند که روی روابط تعادل تأثیر زیادی نمی گذارند.

(ب) خطی بودن سازه: این فرض به این مفهوم در نظر گرفته می شود که رابطه بین تنش و کرنش به صورت خطی است. همچنین رفتار سیستم به صورت ارتجاعی است یعنی با برداشتن بار سازه به جای اول خود بر می گردد. با صادق بودن این فرض اصل جمع آثار قوا نیز برقرار خواهد بود.

در این درس بجز در جاهایی که صراحتاً ذکر می شود از این دو فرض استفاده می شود.

فصل ۲

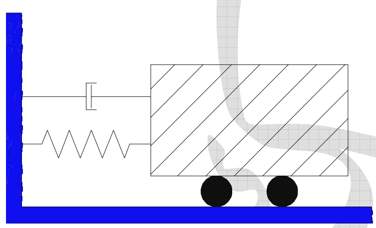
معادله حرکت سیستم های یکدرجه آزاد

۲-۱ سیستمهای یک درجه آزاد

سیستم های یک درجه آزاد سیستم هایی هستند که جابجایی کلیه نقاط آن را می توان بر حسب جابجایی یک نقطه بیان نمود. مثال هایی از این سیستم عبارت است از:

الف- سیستم جرم- فنر- دامپر ، نمونه ای از این سیستم ها درشکل ۲- ۱ **سیستم جرم-فنر-دامپر** نشان داده شده است.

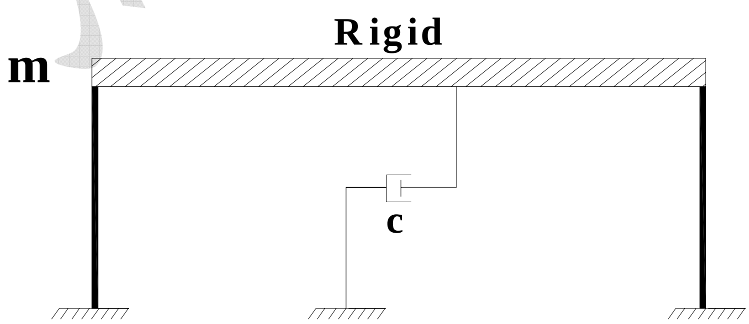
جابجایی این سیستم بوسیله جرم آن بیان میشود.



شکل ۲- ۱ سیستم جرم-فنر-دامپر

ب- مدل یک درجه آزاد از یک قاب یک طبقه

یک قاب یک طبقه که سقف آن صلب باشد را می توان به صورت یک سیستم یک درجه آزاد در نظر گرفت (شکل ۲-۲). تنها حرکتی که برای این قاب امکان پذیر است جابجایی افقی سقف است که به عنوان درجه آزادی در نظر گرفته می شود.



شکل ۲-۲ مدل سقف صلب

۲-۲ اجزای سیستم های دینامیکی

کلیه سیستم های دینامیکی از اجزای زیر تشکیل شده اند:

الف- جرم (Mass)، سیستمهای دینامیکی حتماً جرم دارند.

ب – سختی (Stiffness)، سیستم های دینامیکی حتماً دارای سختی هستند.

ج – میرایی (Damping)، میرایی جزء خصوصیات ذاتی سیستم های دینامیکی است و در کلیه این سیستمها وجود دارد.

د – نیرو (Force)، به سیستمهای دینامیکی ممکن است نیرو وارد شود. البته وارد شدن نیرو جزء شروط الزامی سیستم های دینامیکی نیست و ممکن است به یک سیستم دینامیکی نیرو وارد نشود.

۲-۳ معادله حرکت سیستم های یک درجه آزادی Equation of Motion of SDOF

روش های نوشتن معادله حرکت سیستم های دینامیکی عبارتند از:

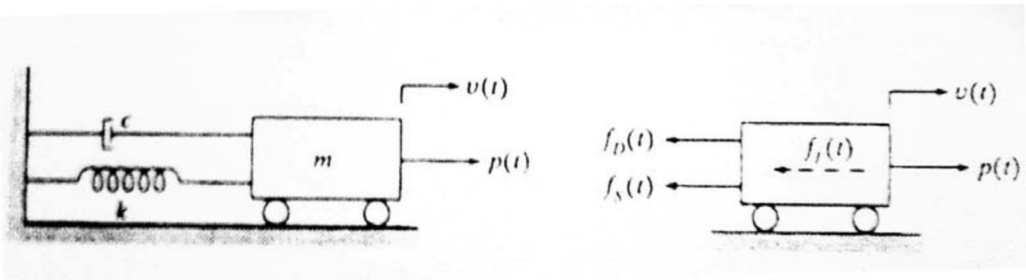
۱) اصل دالامبر: در این روش از قانون دوم نیوتن استفاده می شود که روابط تعادل دینامیکی بدست می آید.

۲) روش کار مجازی: این روش بر اساس این اصل بنا شده است که اگر سیستمی در حال تعادل (استاتیکی یا دینامیکی) باشد و به آن یک تغییر مکان کوچک که با تکیه گاههای آن سازگار باشد داده شود، مجموع کار انجام شده توسط نیروهای وارد بر آن صفر است.

۳) اصل هامیلتون: این روش همان روش انرژی است. بر اساس آن مجموع انرژی پتانسیل وجنبشی سیستم در هر لحظه از زمان ثابت می ماند.

در اینجا از روش تعادل برای نوشتن معادله حرکت استفاده می شود.

در این روش ابتدا نمودار جسم آزاد سازه ترسیم شده، سپس روابط تعادل نوشته می شود. نمودار جسم آزاد سیستم جرم-فنر در لحظه t در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.



شکل ۲-۳ نمودار جسم آزاد سیستم جرم فنر

رابطه تعادل برای این سیستم به صورت زیر نوشته می شود.

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = P(t) \qquad (۲-۱)$$

که در آن:

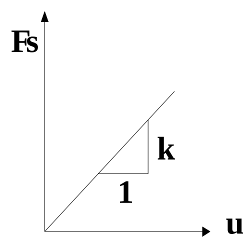
Inertia force نیروی اینرسی $= F_I(t)$

Damping force نیروی میرایی $= F_D(t)$

Spring force نیروی فنری $= F_s(t)$

External force نیروی خارجی $= P(t)$

محاسبه f_s: این نیرو نیرویی است که در فنر بوجود می آید به همین دلیل به آن نیـروی فنـری وبعضـی اوقـات نیـروی ارتجاعی (elastic) گفته می شود. با فرض خطی بودن تغییرات نیروی فنری بر حسب تغییر مکان (شکل ۲-۴) خواهیم داشت.

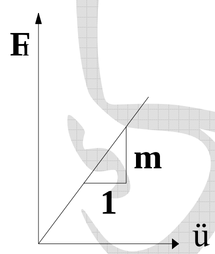


شکل ۲-۴ رابطه نیروی فنری با تغییر فرم

$$f_S(t) = k.u(t) \tag{۲-۲}$$

در این رابطه فرض شده است که نیروی فنر با تغییر فرم آن متناسب است و ضریب تناسب سختی فنر، k، نامیده می شود. همچنین $f_S(t)$ نیروی فنری و $u(t)$ تغییر مکان سیستم می باشند.

محاسبه f_I: بر اساس قانون دوم نیوتن نیروی اینرسی با شتاب نسبت مستقیم دارد و ضریب تناسب جرم می باشد(شکل ۲-۵)



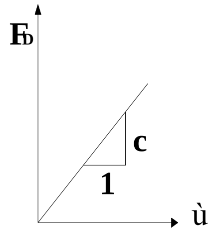
شکل ۲-۵ رابطه نیروی اینرسی با شتاب

بنابراین:

$$f_I(t)=m.\ddot{u}(t) \tag{۳-۲}$$

که در آن $f_I(t)$ نیروی اینرسی، m جرم سیستم و $\ddot{u}(t)$ مشتق دوم تغییر مکان (شتاب) می باشد.

محاسبه f_D: نیروی میرایی وضعیت پیچیده تری نسبت به نیروهای فنری و اینرسی دارد. در اصل رابطه ای که بتوان نیروی میرایی را بر اساس آن بدست آید و مورد قبول همه محققین باشد هنوز بدست نیامده است. ولی می توان گفت که برای اکثر سازه ها نیروی میرایی متناسب با سرعت است (شکل ۲-۶) که ضریب تناسب، ضریب میرایی نامیده می شود. لازم به ذکر است که میرایی سیستمی که در آن نیروی میرایی متناسب با سرعت باشد، میرایی لزج (viscouse) نامیده می شود.



شکل ۲-۶ رابطه نیروی میرایی با سرعت

بنابراین در این مورد نیز می توان نوشت:

$$f_D(t)=c.\dot{u}(t) \qquad (۲-۴)$$

که در آن $f_D(t)$ نیروی میرایی، c ضریب میرایی و $\dot{u}(t)$ مشتق اول تغییر مکان (سرعت) می باشد.

با جایگذاری این روابط در معادله تعادل خواهیم داشت:

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=p(t) \qquad (۲-۵)$$

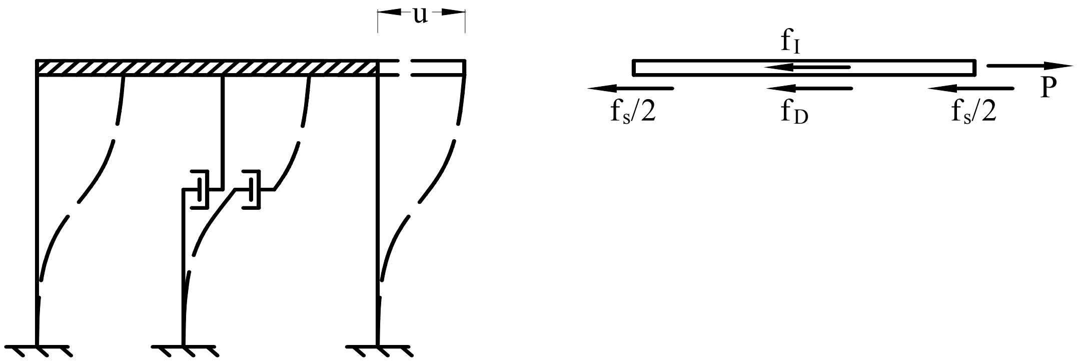
این معادله، معادله حرکت سیستم یک درجه آزاد است. همانطور که مشاهده می شود این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ با ضرایب ثابت است که حل آن بستگی به $p(t)$ دارد.

۲-٤ معادله حرکت سیستم سقف صلب تحت نیروی وارد بر سقف

دیاگرام جسم آزاد سیستم سقف صلب در شکل (۲-۷) نشان داده شده است. در این مورد نیز معادله تعادل به صورت زیر نوشته می شود.

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = P(t) \qquad (۲-۶)$$

در اینحالت نیز نیروی اینرسی برابر با حاصلضرب جرم سقف در شتاب آن، نیروی میرایی برابر با حاصلضرب ضریب میرایی در سرعت سقف و نیروی فنری برابر با حاصلضرب سختی ستون ها در جابجایی سقف می شود. باید توجه داشت که منظور از جابجایی سقف، تغییر مکان نسبی سقف نسبت به تکیه گاه است. منظور از سختی ستون نیز همان تعریف استاندارد سختی یعنی نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد در سقف است.



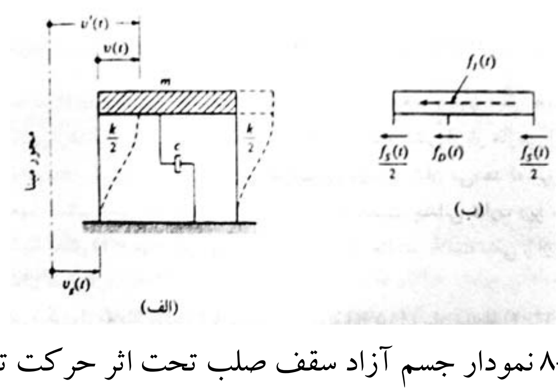
شکل ۲-۷ نمودار جسم آزاد سیستم سقف صلب

بنابراین در مورد سیستم های سقف صلب نیز معادله حرکت همان معادله (۲-۵) می باشد، ولی بایـد توجـه نمـود که منظور از $u(t)$ تغییرمکان نسبی سقف نسبت به زمین است.

۲-۵ معادله حرکت سیستم سقف صلب تحت شتاب پایه

در اینجا فرض بر این است که به سیستم سقف صلب نیروی خـارجی وارد نمـی شـود، در عـوض تکیـه گـاه آن حرکت افقی دارد. نمودار جسم آزاد سقف در شکل ۲-۸ نشان داده شده است. چنانچـه در ایـن شـکل دیـده مـی شـود تکیه گاه سازه به اندازه $u_g(t)$ جابجا شده است و سقف سازه به اندازه $u(t)$ نسبت به تکیه گـاه تغییرمکـان پیـدا کـرده است. معادله تعادل سقف در این حالت به صورت زیر نوشته می شود:

$$f_I + f_D + f_S = 0 \tag{۲-۷}$$



شکل ۲-۸ نمودار جسم آزاد سقف صلب تحت اثر حرکت تکیه گاه

همانطور که انتظار می رود چون به سقف نیروی خارجی وارد نمی شود بنابراین سمت راست این معادله صفر است.

نیروی فنری از رابطه زیر بدست می آید:

(۲-۸)
$$f_S(t) = k.u(t)$$

که در آن $u(t)$ تغییرمکان نسبی سقف نسبت به تکیه گاه و k سختی ستون ها است.

نیروی میرایی نیز از رابطه زیر بدست می آید:

(۲-۹)
$$f_D(t)=c.\dot{u}(t)$$

که در آن $\dot{u}(t)$ سرعت نسبی سقف نسبت به تکیه گاه و c ضریب میرایی سیستم است.

نیروی اینرسی برابر با حاصلضرب جرم سقف در شتاب مطلق آن است. یعنی:

(۲-۱۰)
$$f_I(t)=m.\ddot{u}^t(t)$$

که در آن $\ddot{u}^t(t)$ شتاب مطلق سقف و m جرم آن است. با توجه به شکل ۲-۸ می توان نوشت:

(۲-۱۱)
$$u^t(t)=u(t)+u_g(t)$$

با مشتق گیری از آن داریم:

(۲-۱۲)
$$\dot{u}^t(t)=\dot{u}(t)+\dot{u}_g(t)$$

(۲-۱۳)
$$\ddot{u}^t(t)=\ddot{u}(t)+\ddot{u}_g(t)$$

با جایگذاری روابط (۲-۸)، (۲-۹) و (۲-۱۳) در رابطه (۲-۷) به رابطه زیر می رسیم:

(۲-۱۴)
$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=-m\ddot{u}_g(t)$$

ملاحظه می شود که این معادله همان معادله (۲-۵) است ولی در سمت راست آن بجای $P(t)$ عبارت $-m\ddot{u}_g(t)$ ظاهر شده است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که سازه ای که تکیه گاه تحت اثر شتاب پایه $\ddot{u}_g(t)$ قرار گرفته است معادل با سازه ای است که تکیه گاه آن ثابت است ولی سقف آن تحت اثر نیروی $-m\ddot{u}_g(t)$ قرار گرفته است. این نیرو، نیروی مؤثر زلزله نامیده می شود:

(۲-۱۵)
$$P_{eff}(t)=-m\ddot{u}_g(t)$$

پس در این حالت نیز معادله حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

(۲-۱۶)
$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=P_{eff}(t)$$

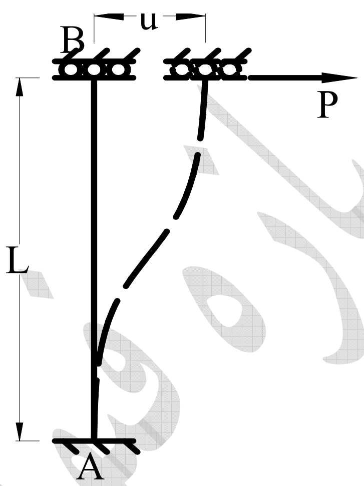
۲-٦ سختی سیستم های ارتجاعی

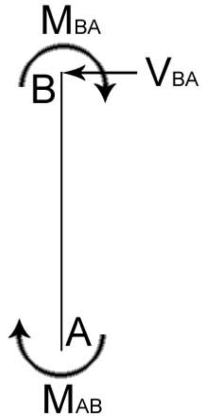
بدلیل اهمیت زیادی که سختی سازه ها در تحلیل دینامیکی سازه ها دارند، در این قسمت روش محاسبه سختی بعضی از سیستم های باربر جانبی شرح داده می شود. همانگونه که قبلاً گفته شد سختی سیستم های یک درجه آزاد برابر است با نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد.

$$P = k\Delta \;\; \Rightarrow \;\; k = \frac{P}{\Delta} \qquad (۲-۱۷)$$

برای محاسبه این نیرو از روش های کلاسیک تحلیل سازه ها می توان استفاده نمود که در مثال های زیر توضیح داده می شوند.

مثال ۱ – سختی یک ستون که یک تکیه گاه آن گیردار و تکیه گاه دیگر آن هدایت شونده است را بدست آورید. سختی خمشی ستون EI و طول آن L است.





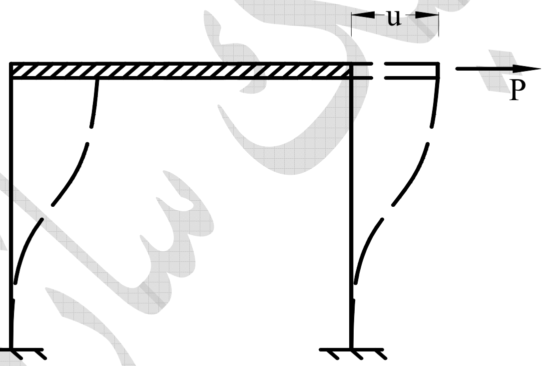
برای محاسبه سختی، نیروی P را در انتهای B وارد کرده وتغییر مکان آن را حساب و سپس از رابطهٔ (۲-۱۷) سختی را بدست می آوریم. برای محاسبهٔ تغییر مکان از هر یک از روش های تحلیل سازه میتوان استفاده نمود که برای این مثال از روش شیب-افت استفاده می کنیم.

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}(-3\frac{u}{L}) \;\Rightarrow\; M_{AB}=M_{BA}=\frac{-6EIu}{L^2}$$

$$\sum M_A=0 \;\Rightarrow\; V_{BA}L=M_{BA}+M_{AB} \;\;,\;\; P=-V_{BA} \;\;\Rightarrow\; P=\frac{12EI}{L^3}u$$

$$K={}^{P}\!/_{u} \;\;\Rightarrow\;\; K=\frac{12EI}{L^3}$$

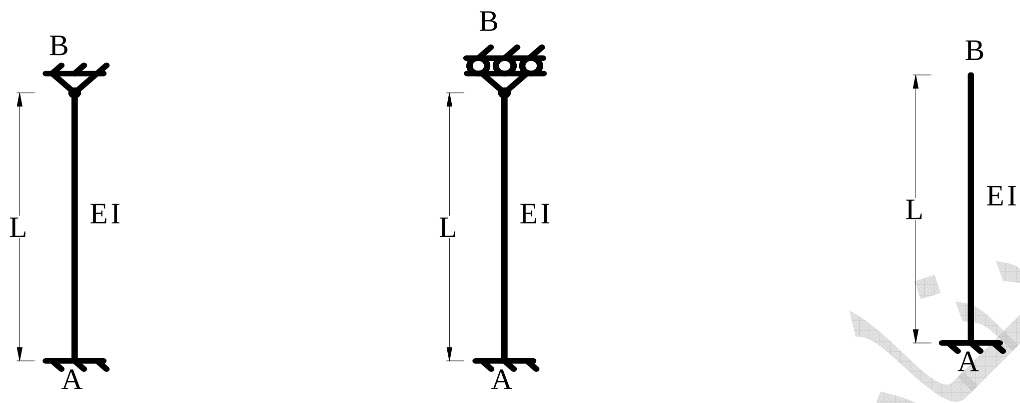
مثال۲- سختی قاب یک طبقه با سقف صلب و ارتفاع h را بدست آورید.



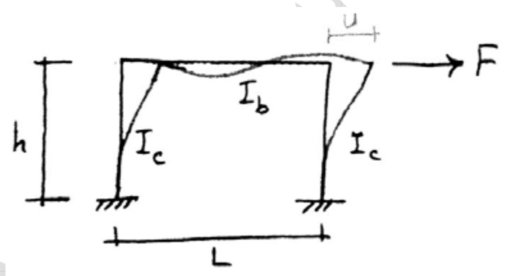
در این حالت چون سختی هر ستون $\frac{12EI}{h^3}$ است، سختی قاب برابر است با:

$$K=\frac{24EI}{h^3}$$

۱- سختی هر یک ستون های نشان داده شده را بدست آورید.

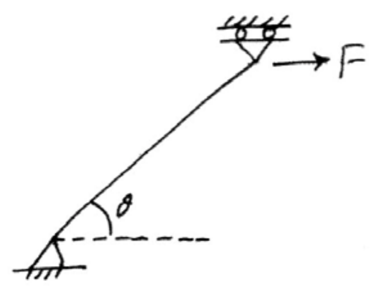


۲- سختی قاب یک طبقه با تیر انعطاف پذیر را بدست آورید. درجهٔ آزادی را تغییرمکان افقی تیر در نظر بگیرید. ممان اینرسی های تیر و ستون و ابعاد قاب روی شکل نشان داده شده است. ضریب الاستیسیته را E بگیرید.



همچنین سختی قاب را در حالت های خاص (الف) تیر صلب و (ب) تیر با ممان اینرسی صفر بدست آورید.

۳- سختی یک عضو مورب با سطح مقطع A، طول L و ضریب الاستیسیتهٔ E را بدست آورید

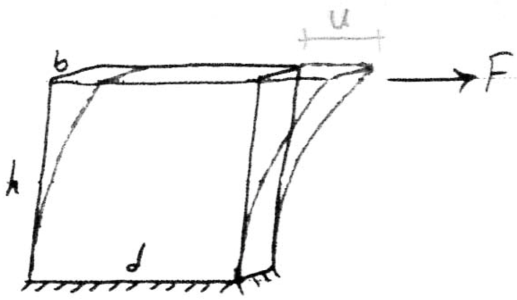


۴- سختی دیوار برشی نشان داده شده را محاسبه کنید.

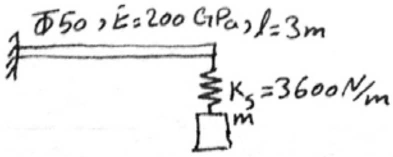
ضریب الاستیسیته E

ضریب پواسون ν

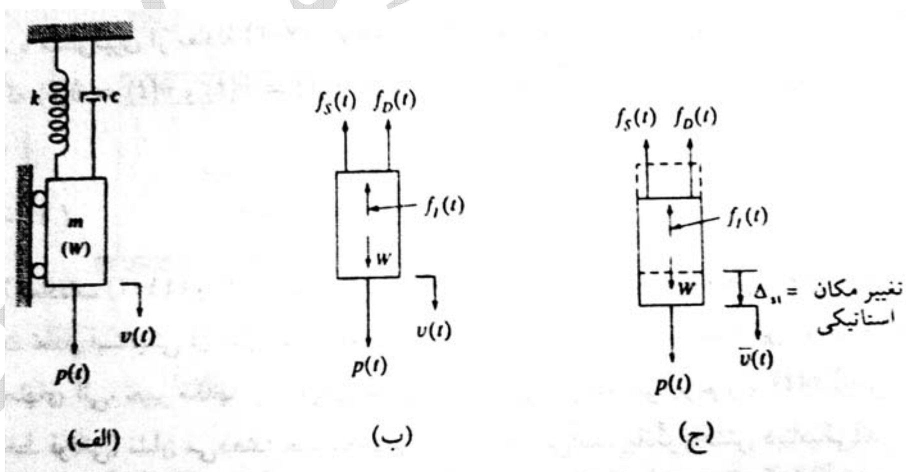
ضریب شکل برای مقاطع مستطیلی ۱/۵



۵- سختی سیستم نشان داده شده را بدست آورید؟



۶- معادله حرکت سیستم نشان داده شده را بدست آورید:



فصل ۳

ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزاد

۳-۱ مقدمه

در فصل قبل دیدیم که معادله حرکت سیستم های یک درجه آزاد به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P(t)$$

حل این معادله دیفرانسیل بستگی به نیروی $P(t)$ دارد. اولین حالتی که در نظر گرفته می شود اینستکه تیروی $P(t)$ را برابر صفر قرار دهیم. این حالت بسیار مهم در معادلات دیفرانسیل، حالت همگن و در دینامیک سازه ها ارتعاش آزاد نامیده می شود. منظور از ارتعاش آزاد ارتعاشی است که سیستم بدون وارد شدن نیرو انجام می دهد. سیستم را به دو صورت می توان در نظر گرفت: نامیرا و میرا. در این فصل معادله ارتعاش آزاد سیستم های نامیرا و میرا حل می شود. معادله فوق معادله ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی می باشد.

۳-۲ سیستم نامیرا

در این حالت فرض به این است که در سیستم، میرایی وجود ندارد و داریم $C=0$، در نتیجه معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$m\ddot{u}+ku=0 \qquad (۳-۱)$$

با تقسیم معادله فوق بر جرم (m) خواهیم داشت:

$$\ddot{u}+\frac{k}{m}u=0 \qquad (۳-۲)$$

پارامترهای k و m کمیت هایی مثبت هستند و تقسیم آنها نیز مثبت است. برای سادگی حاصل تقسیم آنها را ω^2 مینامیم.

$$\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۳-۳)$$

بنابراین معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{u}+\omega^2u=0 \qquad (۳-۴)$$

جواب این معادله عبارتست از :

$$u(t)=e^{\lambda t} \qquad (۳-۵)$$

که در آن پارامتر λ از قرار دادن این رابطه در معادله بدست می آید. با قرار دادن این رابطه و رابطه $\ddot{u}=\lambda^2e^{\lambda t}$ در معادله (۳-۲) داریم:

$$\lambda^2e^{\lambda t}+\omega^2e^{\lambda t}=0 \Rightarrow \left(\lambda^2+\omega^2\right)e^{\lambda t}=0 \Rightarrow \lambda^2+\omega^2=0 \qquad (۳-۶)$$

این معادله بسیار مهم، معادله مشخصه (characteristic equation) نامیده می شود که از حل آن دو مقدار موهومی برای λ بدست می آید:

$$\lambda_1=+i\omega \;,\; \lambda_2=-i\omega \tag{۳-۷}$$

که در آن $i=\sqrt{-1}$. چون دو مقدار متمایز برای λ بدست آمده است پس جواب معادله حرکت به صورت زیر می شود:

$$u(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t} \tag{۳-۸}$$

در این رابطه c_1 و c_2 ثابتهای انتگرال گیری می باشند که از شرایط اولیه بدست می آیند. این رابطه جواب معادله حرکت است که می توان آن را به صورت ساده تری نیز نوشت.

با استفاده از اتحاد اولر $\left(e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)\right)$ داریم:

$$u(t)=c_1\left(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right)+c_2\left(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\right) \tag{۳-۹}$$

و یا:

$$u(t)=\left(c_1+c_2\right)\cos(\omega t)+\left(ic_1-ic_2\right)\sin(\omega t) \tag{۳-۱۰}$$

از آنجایی که c_1 و c_2 مقادیر ثابتی هستند، مقادیر $\left(c_1+c_2\right)$ و $\left(ic_1-ic_2\right)$ نیز ثابت هستند و می توان فرض کرد:

$$A=c_1+c_2 \quad , \quad B=ic_1-ic_2 \tag{۳-۱۱}$$

بنابراین معادله حرکت را به صورت زیر نیز نوشته میشود:

$$u(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{۳-۱۲}$$

که در آن B,A همان ثابتهای انتگرال گیری می باشند.

همچنین می توان معادله $u(t)$ را به فرم زیر نیز نوشت:

$$u(t)=\rho\cos(\omega t+\theta) \tag{۳-۱۳}$$

در این رابطه ρ و θ ثابت های انتگرال گیری هستند که با A و B به صورت زیر رابطه دارند:

$$\rho^2=A^2+B^2 \;,\; \tan\theta=\frac{-B}{A} \tag{۳-۱۴}$$

وبالاخره $u(t)$ به فرم زیر نیز نوشته می شود:

$$u(t)=\rho'\sin(\omega t+\theta') \tag{۳-۱۵}$$

که در آن θ',ρ' ثابتهای انتگرال گیری هستند که رابطه آنها با A و B به صورت زیر است:

$$\rho'^2=A^2+B^2 \;,\; \tan\theta'=\frac{A}{B}$$

پس معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی که در حالت ارتعاش آزاد نامیرا می باشد را می توان به چهار فرم زیر نوشت:

$$u(t)=c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t}$$

$$u(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

$$u(t)=\rho\cos(\omega t+\theta)$$

$$u(t)=\rho'\sin(\omega t+\theta')$$

شرایط اولیه(Initial Condition)

برای یافتن ثابتهای انتگرال گیری نیاز به شرایط اولیه می باشد. فرض می شود که در زمان صفر تغییر مکان و سرعت برابر u_0 و $\dot{u}_0$ هستند. یعنی

$$@t=0\ :\ u(t)=u_0\ ,\ \ \dot{u}(t)=\dot{u}_0 \qquad (۱۶-۳)$$

با قرار دادن این شرایط در یکی از جواب ها ثابت های انتگرال گیری بدست می آیند. مثلاً با قرار دادن رابطه (۳-۱۶) در رابطه (۳-۱۲) داریم:

$$A=u_0\ ,\quad B=\frac{\dot{u}_0}{\omega} \qquad (۱۷-۳)$$

بنابراین جواب معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=u_0\cos\omega t+\frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t \qquad (۱۸-۳)$$

همچنین ρ و θ از روابط زیر بدست می آیند:

$$\rho=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{u_0^2+(\frac{\dot{u}_0}{\omega})^2}\ ,\quad \tan\theta=-\frac{B}{A}=-\frac{\dot{u}_0}{u_0\omega} \qquad (۱۹-۳)$$

لازم به ذکر است که ρ ماکزیمم جابجایی سیستم است که به آن دامنه حرکت گفته می شود و θ نیز اختلاف فاز نام دارد.

فرکانس

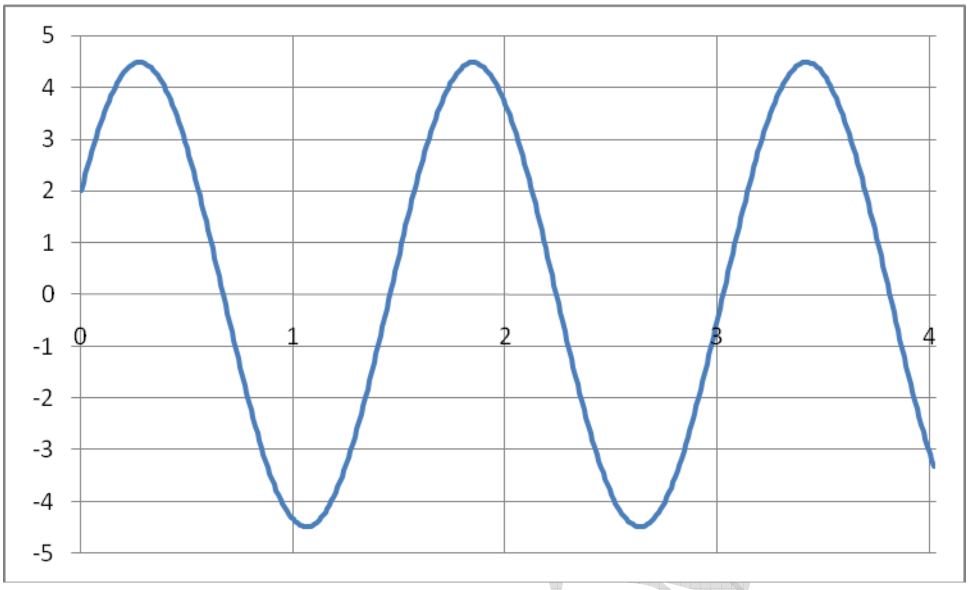
نمودار معادله (۳-۱۸) در شکل ۳-۱ ترسیم شده است. چنانکه از معادله (۳-۱۸) و این شکل دیده می شود، حرکت سیستم در این حالت یک حرکت هارمونیک ساده است که تعاریف زیر در رابطه با آن بیان می شود:

دوره تناوب (Period): مدت زمانی است که یک رفت و برگشت انجام می گردد و معمولاً با T نشان داده می شود. واحد دوره تناوب ثانیه (sec) می باشد.

فرکانس دایره ای (cyclic frequency): معکوس دوره تناوب می باشد که عبارتست از تعداد رفت و برگشت ها در یک ثانیه. واحد فرکانس دایره ای دور در ثانیه یا هرتز (Hz) می باشد و با f نشان داده می شود.

$$f=\frac{1}{T} \qquad (۲۰-۳)$$

مثلاً اگر دوره تناوب یک سازه ۰/۵ ثانیه باشد، فرکانس دایره آن ۲ هرتز است.



شکل ۳-۱ ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزاد نامیرا

فرکانس زاویه ای (Angular frequency): مقدار زاویه ای است که در یک ثانیه طی می شود وواحد آن رادیان بر ثانیه (rad/sec) بوده و با ω نشان داده می شود. چون یک رفت و برگشت 2π رادیان است، پس:

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \tag{۳-۲۱}$$

لازم به ذکر است که چون k و m جزء خصوصیات ذاتی سیستم است، با توجه به رابطه (۳-۳) میتوان نتیجه گرفت که فرکانس و دوره تناوب هم جزء خصوصیات ذاتی سیستم می باشد.

۳-۳ ارتعاش آزاد میرا (Damped Free Vibration)

در این حالت میرایی برابر صفر نیست و معادله حرکت به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \tag{۳-۲۲}$$

با تقسیم طرفین این معادله بر m داریم:

$$\ddot{u}+\frac{c}{m}\dot{u}+\frac{k}{m}u=0 \tag{۳-۲۳}$$

با تعریف c/m به صورت زیر:

$$\frac{c}{m}=2\xi\omega \tag{۳-۲۴}$$

و استفاده از رابطه (۳-۳) معادله تعادل به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{u}+2\xi\omega\dot{u}+\omega^2u=0 \qquad (۳-۲۵)$$

در روابط فوق ξ که مقدار بدون بعدی است، نسبت میرایی نامیده می شود. لازم به ذکر است که مقدار ضریب میرایی یا نسبت میرایی قابل محاسبه نیست و فقط برای سازه های توسط آزمایش قابل اندازه گیری است. نسبت میرایی ،ξ، مقدار کوچکی است و بر اساس آزمایشات انجام شده روی سازه های موجود نسبت آن بین ۲ تا ۷ درصد می باشد. در صورت موجود نبودن اطلاعات دقیقی راجع به میرایی سازه، معمولاً نسبت میرایی ۵ درصد در نظر گرفته می شود.

جواب معادله (۳-۲۵) به صورت زیر است:

$$u(t)=e^{\lambda t} \qquad (۳-۲۶)$$

که مشتقات آن عبارتند از:

$$\dot{u}(t)=\lambda e^{\lambda t} \quad , \quad \ddot{u}(t)=\lambda^2 e^{\lambda t} \qquad (۳-۲۷)$$

با جایگذاری این روابط در معادله (۳-۲۵)، معادله (۳-۲۸) بدست می آید.

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+2\xi\omega\lambda e^{\lambda t}+\omega^2 e^{\lambda t}=0 \qquad (۳-۲۸)$$

و چون $e^{\lambda t} \neq 0$ بنابراین:

$$\lambda^2+2\xi\omega\lambda+\omega^2=0 \qquad (۳-۲۹)$$

این معادله همان معادله مشخصه است که از حل آن فرکانس سیستم بدست می آید، به همین دلیل بعضی وقتها به آن معادله فرکانس نیز گفته می شود. جوابهای این معادله عبارتند از:

$$\lambda_1=-\xi\omega+\omega\sqrt{\xi^2-1} \quad , \quad \lambda_2=-\xi\omega-\omega\sqrt{\xi^2-1} \qquad (۳-۳۰)$$

در این حالت نیز دیده می شود که معادله مشخصه دو ریشه متمایز دارد، ولی بسته به مقدار ξ، این دو ریشه ممکن موهومی، حقیقی و یا تکراری باشند. در ادامه این سه حالت مورد بررسی قرار می گیرند.

حالت اول: $\xi<1$

در اکثر سازه ها میرایی خیلی کمتر از ۱ است و چنانکه قبلاً گفته شد، در حدود ۵ درصد است. این حالت، میرایی زیر بحرانی (Undercritically damped) نامیده می شود. در این حالت جواب های معادله مشخصه به صورت موهومی در می آیند و آنها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda_1=-\xi\omega+i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad , \quad \lambda_2=-\xi\omega-i\omega\sqrt{1-\xi^2} \qquad (۳-۳۱)$$

برای ساده شدن روابط، فرکانس میرا (damped frequency) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2} \qquad (۳-۳۲)$$

البته چون نسبت میرایی عدد خیلی کوچکی است، می توان گفت:

$$\omega_d \approx \omega \qquad (۳-۳۳)$$

ولی در این فصل از رابطه ۳-۳۲ استفاده می شود.

به این ترتیب جواب معادله (۳-۲۵) عبارت است از:

$$u(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{(-\xi\omega+i\omega_d)t}+c_2e^{(-\xi\omega-i\omega_d)t}=c_1e^{-\xi\omega t}\times e^{i\omega_d t}+c_2e^{-\xi\omega t}\times e^{-i\omega_d t} \quad (۳۴-۳)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند. این معادله به صورت زیر ساده میشود:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left(c_1e^{i\omega_d t}+c_2e^{-i\omega_d t}\right) \quad (۳۵-۳)$$

با مقایسه این معادله با معادله ارتعاش آزاد نامیرا، (معادله ۳-۸)، ملاحظه می شود که عبارت درون پرانتز این رابطه شبیه به معادله ارتعاش آزاد است ولی بجای ω ، ω_d وجود دارد. البته این تغییر، تغییر خیلی مهمی نیست. تفاوت مهم این دو معادله عبارت جلوی پرانتز در رابطه (۳-۳۵) می باشد. این عبارت یک تابع نمایی با توان منفی است. بنابراین نزولی می باشد. البته عبارت درون پرانتز یک تابع هارمونیک است که وقتی در تابع نزولی ضرب می شود دامنه آن کاهش می یابد.

در این مورد نیز با استفاده از اتحاد اولر معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

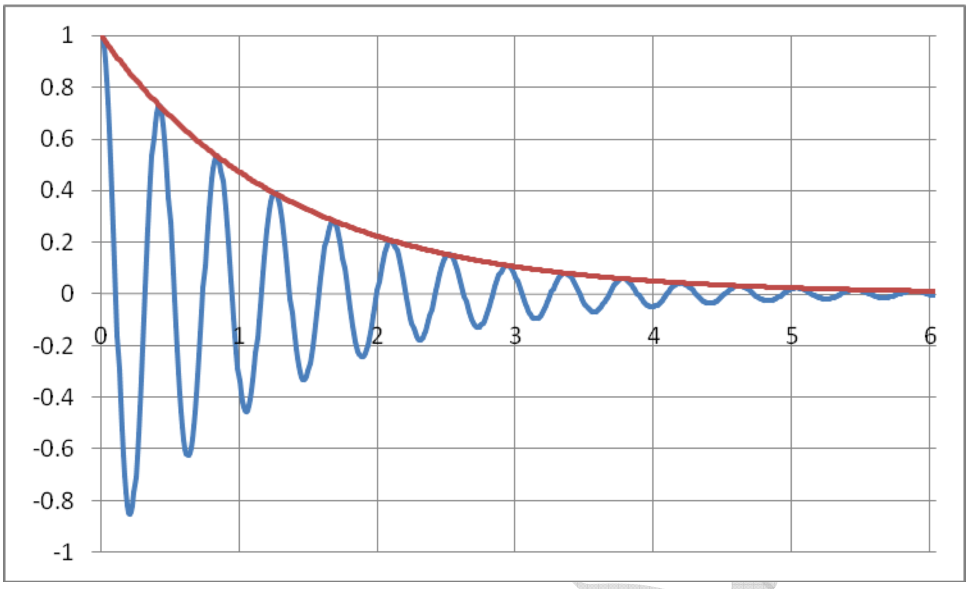
$$u(t)=e^{-\xi\omega t}[A\cos(\omega_d t)+B\sin(\omega_d t)] \quad (۳۶-۳)$$

که در آن A و B ثابت های انتگرال گیری هستند. قابل توجه اینکه اگر در این رابطه $\xi=0$ باشد، همان رابطه ارتعاش آزاد نامیرا بدست خواهد آمد.

همچنین میتوان معادله حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$u(t)=\rho e^{-\xi\omega t}[\cos(\omega_d t+\theta)] \quad (۳۷-۳)$$

در این رابطه ρ و θ ثابت های انتگرال گیری هستند. نمودار حرکت سیستم در حالت ارتعاش آزاد میرا در شکل ۳-۲ نشان داده شده است.



شکل ۳-۲ ارتعاش آزاد سیستم میرا

چنانچه در این شکل دیده می شود دامنه ارتعاش پس از هر سیکل رفت و برگشت کاهش می یابد و به سمت صفر میل می کند.

در این حالت نیز شرایط مرزی عبارتند از:

$$@t=0 \;:\; u=u_0 \;,\; \dot{u}=\dot{u}_0 \qquad (۳۸-۳)$$

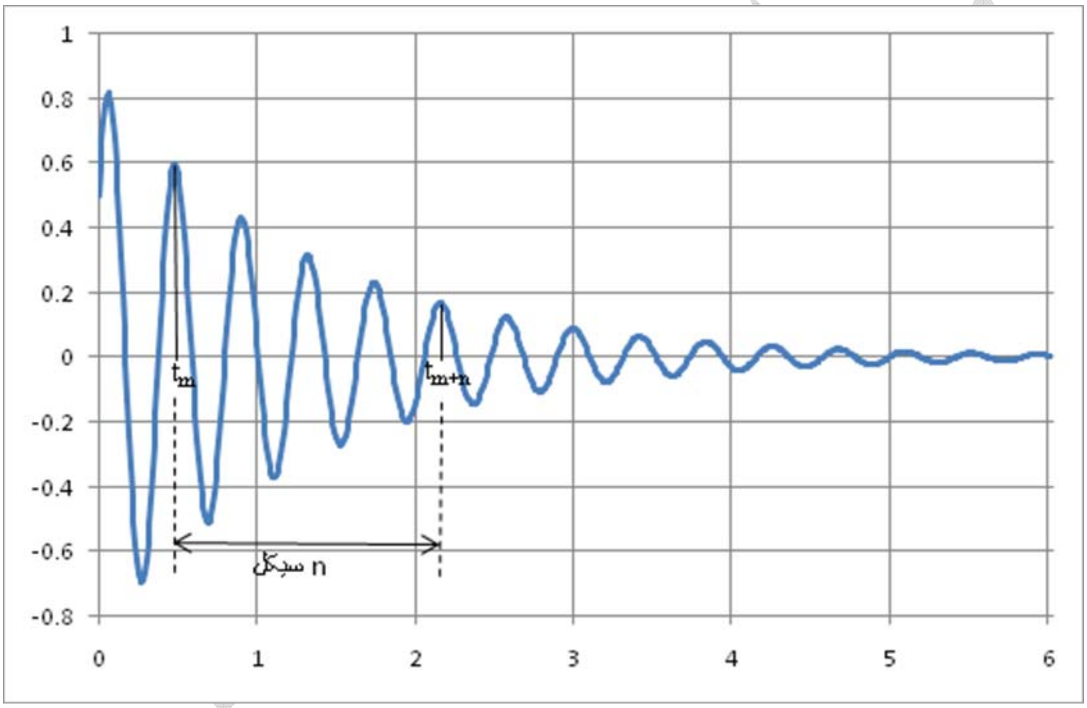
که با اعمال معادله حرکت به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left[\left(\frac{\dot{u}_0+u_0\xi\omega}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t+u_0\cos\omega_D t\right] \qquad (۳۹-۳)$$

معمولاً پارامتر میرایی را با انجام آزمایش ارتعاش آزاد میرا در سازه به دست می آورند.

تنزل لگاریتمی (Logarithmic Decrement):

همانطور که قبلاً گفته شد، ضریب میرایی و نسبت میرایی از طریق آزمایش بدست می آیند. روش هـای مختلفـی بـرای این کار وجود دارد که یکی از آنها استفاده از آزمایش ارتعاش آزاد است. در اینجا بدون وارد شدن بـه جزییـات انجـام آزمایش فرض می شود که نمودار تغییر مکان بر حسب زمان در آزمایش ارتعـاش آزاد بـه صـورت شـکل ۳-۴ بدسـت آمده است.



شکل ۳-۴ نمونه ای از نمودار تغییرمکان بر حسب زمان در آزمایش ارتعاش آزاد

دو زمان مختلف t_m و t_{m+n} را درنظر بگیرید. فرض کنید u_m تغییرمکان در لحظه t_m و u_n تغییرمکان در لحظه t_{m+n} باشد. فاصله زمانی بین این دو لحظه برابر با n سیکل است. چون هر سیکل ارتعاش برابر T_D ثانیه است، بنابراین

$$t_{m+n}=t_m+nT_D=t_m+\frac{2n\pi}{\omega_D} \qquad (۳-۴۰)$$

تغییر مکان در لحظه های t_m و t_{m+n} با استفاده از رابطهٔ (۳-۳۷) برابر است با:

$$u_m=e^{-\xi\omega t_m}[\rho\cos(\omega_D t_m+\theta)] \qquad (۳-۴۱)$$

$$u_{m+n}=e^{-\xi\omega t_{m+n}}[\rho\cos(\omega_D t_{m+n}+\theta)] \qquad (۳-۴۲)$$

عبارت درون پرانتز رابطه (۳-۴۲) را با استفاده از رابطه (۳-۴۰) می توان به صورت زیر نوشت:

$$\omega_D t_{m+n}=\omega_D\left(t_m+nT_D\right)=\omega_D t_m+n\omega_D T_D=\omega_D t_m+n\times 2\pi \qquad (۳-۴۳)$$

بنابراین:

$$\cos(\omega_D t_{m+n})=\cos(\omega_D t_m+n\times 2\pi) \;\Rightarrow\; \cos(\omega_D t_{m+n})=\cos(\omega_D t_m) \quad (۳-۴۴)$$

با قرار دادن این رابطه در رابطه (۳-۴۲) خواهیم داشت:

$$u_{m+n}=e^{-\xi\omega t_{m+n}}[\rho\cos(\omega_D t_m+\theta)] \quad (۳-۴۵)$$

از تقسیم رابطهٔ (۳-۴۱) بر (۳-۴۵) داریم:

$$\frac{u_m}{u_{m+n}}=\frac{e^{-\xi\omega t_m}}{e^{-\xi\omega t_{m+n}}} \quad (۳-۴۶)$$

با استفاده از رابطهٔ (۳-۴۰) ، رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\omega t_{m+n}=\omega(t_m+nT_D)=\omega t_m+n\omega\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۳-۴۷)$$

در نتیجه

$$\frac{u_m}{u_{m+n}}=\frac{e^{-\xi\omega t_m}}{e^{-\xi\omega t_m}\times e^{\left(\frac{-2n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}}=e^{\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \quad (۳-۴۸)$$

اگر از طرفین این رابطه لگاریتم گرفته شود، رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\ln\left(\frac{u_m}{u_{m+n}}\right)=2n\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۳-۴۹)$$

این رابطه به رابطهٔ تنزل لگاریتمی معروف است. اگر فرض کنیم:

$$\delta=\ln\left(\frac{u_m}{u_{m+n}}\right) \quad (۳-۵۰)$$

آنگاه:

$$\delta=2n\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۳-۵۱)$$

از این رابطه میتوان نسبت میرایی را بدست آورد. لازم به یادآوری است که فرض بر این است که تغییر مکان بر حسب زمان اندازه گیری شده است و مقادیر u_m و u_{m+n} معلوم هستند در نتیجه δ را می توان از رابطهٔ (۳-۵۰) بدست آورد و آنگاه از رابطهٔ (۳-۵۱) مقدار نسبت میرایی را محاسبه نمود.

اگر نسبت میرایی کوچک باشد(که در سازه های معمولی اینچنین است)، مخرج رابطهٔ (۳-۵۱) تقریباً برابر یک می شود و می توان نوشت:

$$\delta\approx 2n\pi\xi \;\Rightarrow\; \xi\approx\frac{\delta}{2n\pi} \quad (۳-۵۲)$$

اگر تعداد سیکل ها نیز یک انتخاب شود، رابطهٔ محاسبهٔ نسبت میرایی به صورت سادهٔ زیر در می آید:

$$\xi=\frac{\delta}{2\pi} \quad (۳-۵۳)$$

حالت دوم) $\xi=1$

این حالت میرایی بحرانی (Critically Damped) نام دارد. در این حالت میرایی سیستم از رابطه زیر بدست می آید:

$$\xi=1 \Rightarrow c_c=2m\omega=2m\sqrt{\frac{k}{m}}=2\sqrt{km} \tag{۵۴-۳}$$

قبلاً دیدیم که سختی و جرم و میرایی جزء خصوصیات ذاتی سیستم های دینامیکی هستند واین سه پارامتر مستقل از یکدیگر می باشند. اگر بین این سه پارامتر رابطهٔ (۳-۵۴) برقرار باشد، میرایی سیستم میرایی بحرانی است.

در این حالت ریشه های معادلهٔ مشخصه (۳-۳۰) برابرند با:

$$\lambda_1=\lambda_2=-\omega \tag{۵۵-۳}$$

یعنی معادلهٔ مشخصه ریشه های تکراری دارد. بنابراین جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۳-۲۵) به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=(c_1+c_2t)e^{-\omega t} \tag{۵۶-۳}$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. شرایط اولیه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$@t=0\ :\ u=u_0,\dot{u}=\dot{u}_0 \tag{۵۷-۳}$$

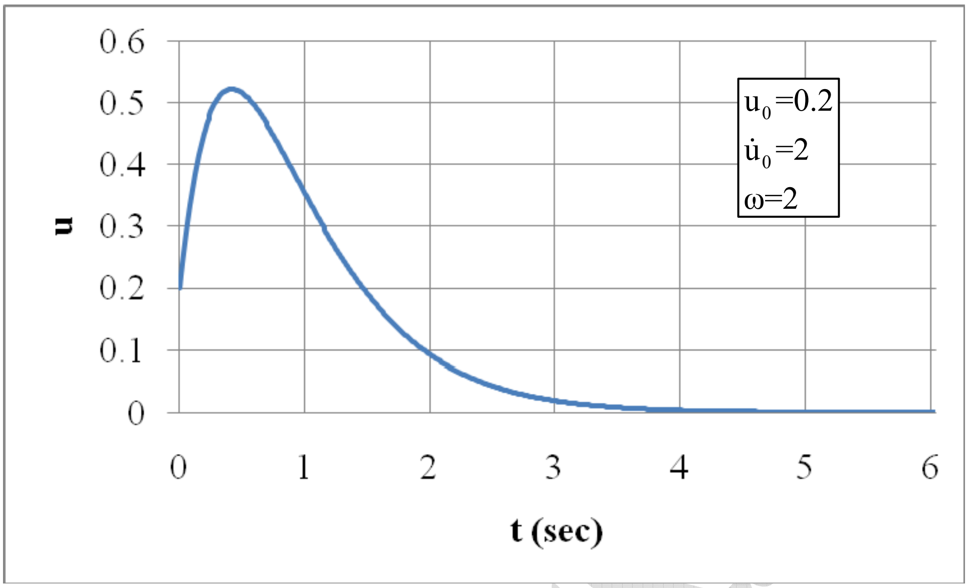
با اعمال این شرایط در معادلهٔ (۳-۵۶) خواهیم داشت:

$$c_1=u_0\ \ ,\ \ c_2=\dot{u}_0+u_0\omega \tag{۵۸-۳}$$

در نتیجه پاسخ سیستم به صورت معادلهٔ (۳-۵۹) خواهد شد:

$$u(t)=[u_0+(\dot{u}_0+u_0\omega)t]e^{-\omega t} \tag{۵۹-۳}$$

نمودار این معادله در شکل (۳-۵) ترسیم شده است. این حرکت از u_0 شروع شده، با شیب $\dot{u}_0$ ادامه می یابد تا به ماکزیمم جابجایی برسد و سپس به صورت نمایی کاهش یافته تا به صفر برسد. چنانچه ملاحظه می شود این حرکت نوسانی نیست. در اصل می توان گفت که $\xi=1$ کمترین مقدار نسبت میرایی است که به ازای آن حرکت از حالت نوسانی به غیرنوسانی تبدیل می شود. به همین دلیل به آن میرایی بحرانی گفته می شود.



شکل ۳-۵ نمودار جابجایی سیستم در حالت میرایی بحرانی

حالت سوم $\xi>1$

این حالت میرایی فوق بحرانی (Overcritically damped) نامیده می شود. در این حالت جواب های معادلهٔ مشخصه به صورت زیر در می آید:

$$\lambda_1=-\xi\omega+\omega\sqrt{\xi^2-1}\quad,\quad \lambda_2=-\xi\omega-\omega\sqrt{\xi^2-1} \tag{۶۰-۳}$$

برای سادگی روابط پارامتر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\omega}=\omega\sqrt{\xi^2-1} \tag{۶۱-۳}$$

با این تعریف ریشه های معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$\lambda_1=-\xi\omega+\hat{\omega}\quad,\quad \lambda_2=-\xi\omega-\hat{\omega} \tag{۶۲-۳}$$

این دو ریشه حقیقی متمایز هستند، در نتیجه جواب معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$u(t)=c_1e^{(-\xi\omega+\hat{\omega})t}+c_2e^{(-\xi\omega-\hat{\omega})t} \tag{۶۱-۳}$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند و از شرایط مرزی بدست می آیند. با توجه به روابط زیر:

$$e^x=\cosh(x)+\sinh(x)\quad,\quad e^{-x}=\cosh(x)-\sinh(x) \tag{۶۲-۳}$$

معادلهٔ (۳-۶۱) را به شکل زیر نیز می توان نوشت:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}[A\cosh(\hat{\omega}t)+B\sinh(\hat{\omega}t)] \tag{۶۳-۳}$$

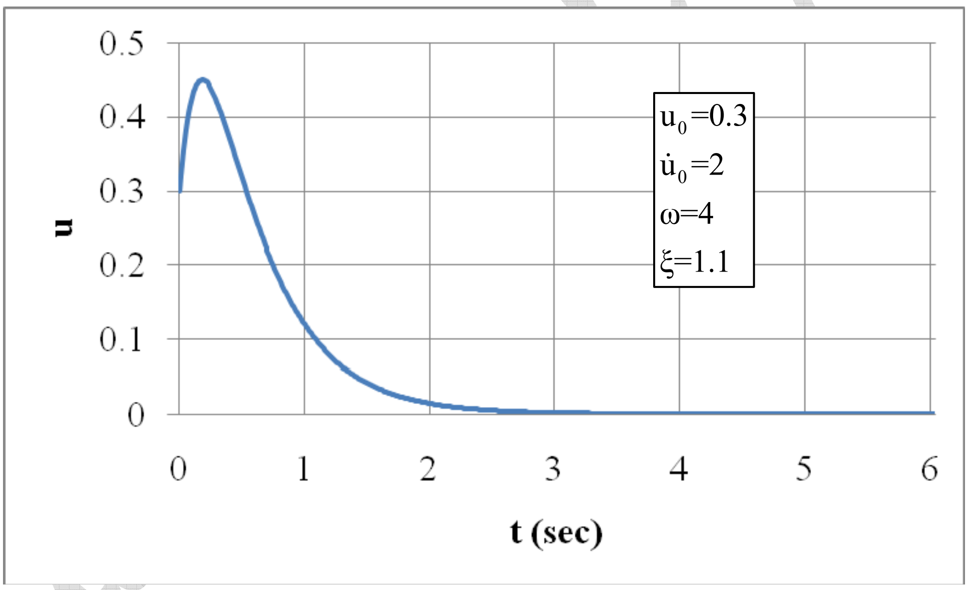
که در آن A و B ثابت های انتگرال گیری هستند. در این حالت نیـز همـان شـرایط اولیـهٔ قبلـی (معادلـهٔ ۳-۵۷) درنظـر گرفته می شود که با اعمال آن ثابت های انتگرال گیری به صورت زیر بدست می آیند:

$$A=u_0 \quad , \quad B=\frac{\dot{u}_0+\xi\omega u_0}{\hat{\omega}} \tag{۳-۶۲}$$

بنابراین در این حالت تغییرمکان سیستم به صورت زیر در می آید:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left[u_0\cosh(\hat{\omega}t)+\frac{\dot{u}_0+\xi\omega u_0}{\hat{\omega}}\sinh(\hat{\omega}t)\right] \tag{۳-۶۳}$$

نمودار این معادله در شکل ۳-۶ نشان داده شده است.چنانچـه ملاحظـه مـی شـود ایـن نمـودار هـم نظیـر نمـودار معادلـه حرکت سیستم با میرایی بحرانی است. در این حالت نیز تغییر مکان به صورت نوسانی نیست.



شکل ۳-۶ نمودار تغییرمکان بر حسب زمان برای سیستم های با میرایی فوق بحرانی

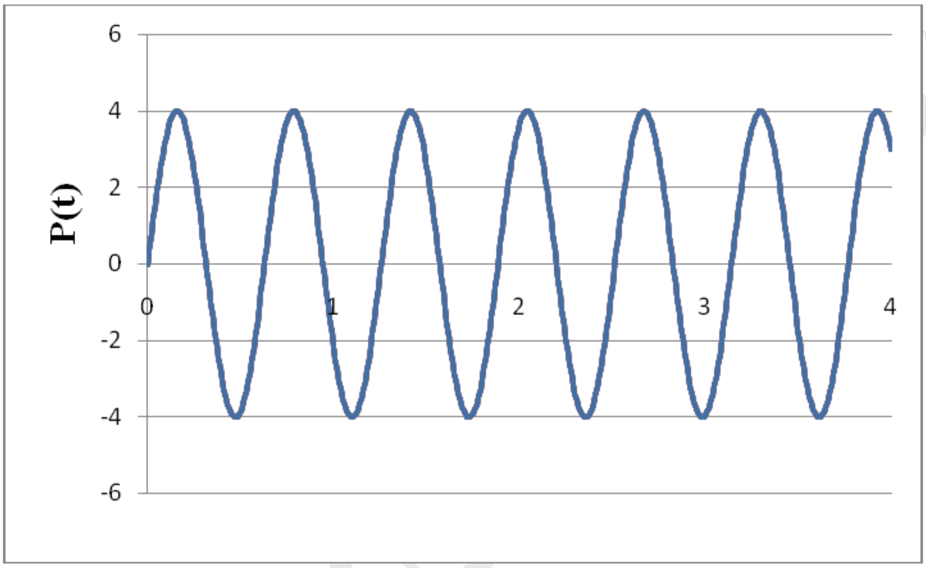
فصل ۴

بارهای هارمونیک

٤-١- مقدمه

در این فصل فرض می شود که بار وارد بر سیستم به صورت هارمونیک است. نمونه ای از این نوع بار در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. بار هارمونیک به صورت زیر تعریف می شود:

$$p(t)=p_0\sin\bar{\omega}t \tag{۱-۴}$$



شکل ۴-۱ نمودار بار هارمونیک

P_0 دامنه بار و $\bar{\omega}$ فرکانس آن است. زمان تناوب بار هم از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\bar{T}=\frac{2\pi}{\bar{\omega}} \tag{۲-۴}$$

معادله حرکت سیستم در این فصل به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P_0\sin\bar{\omega}t \tag{۳-۴}$$

برای حل این معادله آن را بر m تقسیم کرده و از تعاریف (۳-۳) و (۳-۲۴) استفاده می کنیم.

$$\ddot{u}+2\xi\omega\dot{u}+\omega^2u=\frac{p_0}{m}\sin\bar{\omega}t \tag{۴-۴}$$

این معادله، معادله حرکت سیستم یک درجه آزاد تحت اثر نیروی هارمونیک است که در ادامه آن را حل می کنیم .

٤-٢ پاسخ سیستم

جواب معادله حرکت از دو قسمت تشکیل می شود، جواب همگن وجواب خصوصی:

$$u(t)=u_h(t)+u_p(t) \tag{۴-۵}$$

که در آن $u_h(t)$ جواب عمومی یا جواب همگن و $u_p(t)$ جواب خصوصی است و در ادامه بدست می آیند.

جواب همگن:

$u_h(t)$ جواب همگن است و برابر است با جواب معادله (۴-۳) وقتی که سمت راست آن صفر باشد. همانطور که در فصل ۳ دیدیم این حالت، ارتعاش آزاد نام دارد و جواب آن به صورت زیر نوشته می شود.

$$u_h=e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_D t+B\sin\omega_D t) \tag{۴-۶}$$

جواب خصوصی :

$u_p(t)$ جواب خصوصی است که جوابی است که در معادله (۴-۳) صدق می کند. این جواب به صورت زیر نوشته می شود:

$$u_p=G_1\sin\bar{\omega}t+G_2\cos\bar{\omega}t \tag{۴-۷}$$

ضرایب G_1 و G_2 از قرار دادن رابطه (۴-۷) در معادله (۴-۳) بدست می آید. مشتقات رابطه (۴-۷) عبارتند از:

$$\dot{u}_p=G_1\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t-G_2\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t \quad , \quad \ddot{u}_p=-G_1\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t-G_2\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}t \tag{۴-۸}$$

با قراردادن روابط (۴-۷) و (۴-۸) در رابطه (۴-۳) داریم:

(۴-۹)

$$\left(-G_1\bar{\omega}^2\sin(\bar{\omega}t)-G_2\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega}t)\right)+2\xi\omega\left(G_1\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t)-G_2\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t)\right)+\omega^2\left(G_1\sin(\bar{\omega}t)+G_2\cos(\bar{\omega}t)\right)=\frac{P_0}{m}\sin(\bar{\omega}t)$$

این رابطه را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\left[G_1\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)-G_2\times2\xi\omega\bar{\omega}-\frac{P_0}{m}\right]\sin(\bar{\omega}t)+\left[G_2\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)-G_1\times2\xi\omega\bar{\omega}\right]\cos(\bar{\omega}t)=0 \tag{۴-۱۰}$$

چون توابع سینوس و کسینوس مستقل از یکدیگر هستند، شرط برقراری تساوی فوق اینستکه عبارتهای درون کروشه در رابطه (۴-۱۰) صفر باشد:

$$\begin{cases} G_1\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)-G_2\times 2\xi\omega\bar{\omega}=\dfrac{P_0}{m} \\ -G_1\times 2\xi\omega\bar{\omega}+G_2\left(\omega^2-\bar{\omega}^2\right)=0 \end{cases} \qquad (۱۱-۴)$$

از حل این دو معادله، ضرایب G_1 و G_2 به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} G_1=\dfrac{p_0}{m}\times\dfrac{(\omega^2-\bar{\omega}^2)}{(\omega^2-\bar{\omega}^2)^2+(2\xi\omega\bar{\omega})^2} \\ G_2=\dfrac{p_0}{m}\times\dfrac{(-2\xi\omega\bar{\omega})}{(\omega^2-\bar{\omega}^2)^2+(2\xi\omega\bar{\omega})^2} \end{cases} \qquad (۱۲-۴)$$

اگر صورت و مخرج روابط فوق را بر ω^2 تقسیم کنیم و از رابطه $m=k/\omega^2$ نیز استفاده کنیم، آنگاه

$$\begin{cases} G_1=\dfrac{P_0}{k}\times\dfrac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \\ G_2=\dfrac{P_0}{k}\times\dfrac{(-2\xi\beta)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \end{cases} \qquad (۱۳-۴)$$

β نسبت فرکانس نامیده می شود و برابر است با :

$$\beta=\frac{\bar{\omega}}{\omega} \qquad (۱۴-۴)$$

در اصل β نسبت فرکانس نیروی وارد به فرکانس طبیعی سیستم است.

با قرار دادن روابط (۴-۱۳) در رابطه (۴-۷) جواب مخصوص به صورت زیر بدست می آید:

$$u_p=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t-(2\xi\beta)\cos\bar{\omega}t\right] \qquad (۱۵-۴)$$

این جواب را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$u_p=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\left[\sin(\bar{\omega}t+\theta)\right] \qquad (۱۶-۴)$$

که در آن:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \qquad (۱۷-۴)$$

جواب کلی :

جواب کلی معادله (۴-۴) از جمع روابط (۴-۶) و (۴-۱۵) بدست می آید:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left[A\cos(\omega_D t)+B\sin(\omega_D t)\right]+\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin(\bar{\omega}t)-(2\xi\beta)\cos(\bar{\omega}t)\right] \qquad (۱۸-۴)$$

A و B ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. یکی از مهمترین شرایط اولیه، شرایط سکون است. یعنی در ابتدای حرکت تغییرمکان و سرعت صفر است:

$$@t=0 \ : \ u=0 \quad , \quad \dot{u}=0 \tag{۴-۱۹}$$

با قرار دادن این شرایط در رابطهٔ (۴-۱۸) ثابت های انتگرال گیری به صورت زیر بدست می آید:

$$B=\frac{P_0}{k}\times\frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}\left[2\xi^2\beta-\left(1-\beta^2\right)\right] \quad , \quad A=\frac{P_0}{k}\times\frac{2\xi\beta}{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2} \tag{۴-۲۰}$$

همانطور که قبلاً گفته شد جواب معادلهٔ حرکت (معادلهٔ ۴-۱۸) دو قسمت دارد. قسمت اول مربوط به جواب همگن و قسمت دوم مربوط به جواب مخصوص است. این جوابها در شکل (۴-۲) ترسیم شده اند.

همانطور که مشاهده می شود قسمت اول این جواب (شکل ۴-۲ الف) مربوط به ارتعاش آزاد است که بدلیل وجود ضریب $e^{-\xi\omega t}$ کاهش یابنده است و به همین دلیل به این قسمت از جواب، ارتعاش گذرا (Transient) نیز گفته می شود. ولی قسمت دوم جواب (شکل ۴-۲ ب) که مربوط به جواب مخصوص است، حالت هارمونیک دارد که دامنه آن ثابت است و تا بی نهایت ادامه دارد. به همین دلیل به این قسمت از جواب حالت یکنواخت (steady state) یا ماندگار نیز گفته می شود. مجموع این دو جواب نیز در شکل ۴-۲ پ نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود اثر ارتعاش آزاد بسیار کم بوده و در سیکل های ابتدایی است و پس از آن پاسخ کلی و پاسخ ماندگار یکی می شوند. بنابراین با دقت بسیار خوبی می توان پاسخ کلی و پاسخ حالت ماندگار را برابر در نظر گرفت، یعنی :

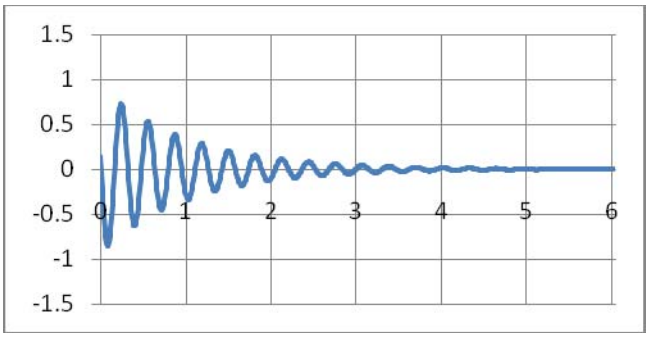
$$u(t)\approx u_p(t) \tag{۴-۲۱}$$

۴-۳ تغییر مکان استاتیکی (Static Displacement)

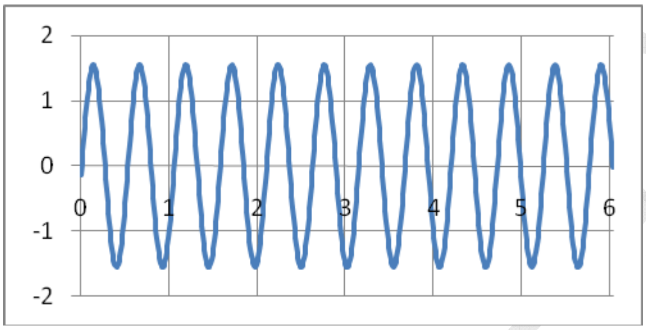
نیروی $P(t)$ از دو ترم تشکیل شده است. ترم اول دامنه نیرو یعنی P است و ترم دوم $\sin(\omega t)$ است که به نیرو حالت دینامیکی می دهد. اگر این نیرو به صورت استاتیکی وارد شود یعنی از جمله $\sin(\omega t)$ صرفنظر گردد آنگاه تغییر مکان سیستم نیز به صورت استاتیکی می شود و برابر با P_0/k می باشد.

$$u_{st}=\frac{P_0}{k} \tag{۴-۲۲}$$

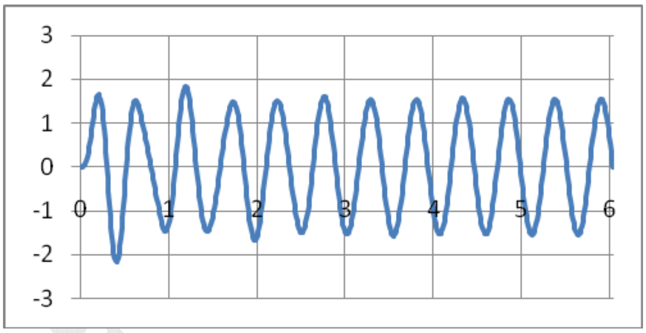
به این تغییر مکان، تغییر مکان استاتیکی گفته می شود.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۴-۲ پاسخ هارمونیک: (الف) جواب همگن، (ب) جواب مخصوص، (پ) جواب کلی

٤-٤ نسبت پاسخ (Response ratio)

نسبت تغییر مکان دینامیکی به تغییر مکان استاتیکی را نسبت پاسخ می گویند و با R(t) نشان می دهند:

$$R(t)=\frac{u(t)}{u_{st}} \qquad (۲۳-۴)$$

٤-٥ ضریب بزرگنمایی دینامیکی (Dynamic Amplification Factor)

همانطور که در معادلهٔ (۴-۱۶) نشان داده شد حداکثر پاسخ سیستم در حالت ماندگار برابر با تغییر مکان سیستم در حالت استاتیکی P_0/k ضربدر حداکثر تغییر مکان در حالت دینامیکی ($\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$) است. این نکته نشان می دهد که حداکثر تغییر مکان در حالت دینامیکی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u_{max}=u_{st}\times D \tag{۴-۲۴}$$

که در آن D ضریب بزرگنمایی دینامیکی نامیده می شود و برابر است با:

$$D=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \tag{۴-۲۵}$$

به عبارت دیگر تغییر مکان ماکزیمم دینامیکی برابر است با تغییر مکان استاتیکی ضربدر ضریب بزرگنمایی دینامیکی. رابطه (۴-۲۵) رابطه بسیار مهمی است زیرا با استفاده از آن می توان بدون انجام تحلیلی دینامیکی، تغییر مکان ماکزیمم سیستم را بدست آورد. باید توجه داشت که محاسبه تغییر مکان استاتیکی، ساده است و برای استفاده از رابطه (۴-۲۴) تنها کافیست ضریب بزرگنمایی دینامیکی محاسبه شود. لازم به ذکر است که در حالتیکه نیروی وارد بر سیستم به صورت هارمونیک باشد ضریب بزرگنمایی دینامیکی از رابطه (۴-۲۵) بدست می آید ولی برای سایر نیروها باید این ضریب محاسبه گردد.

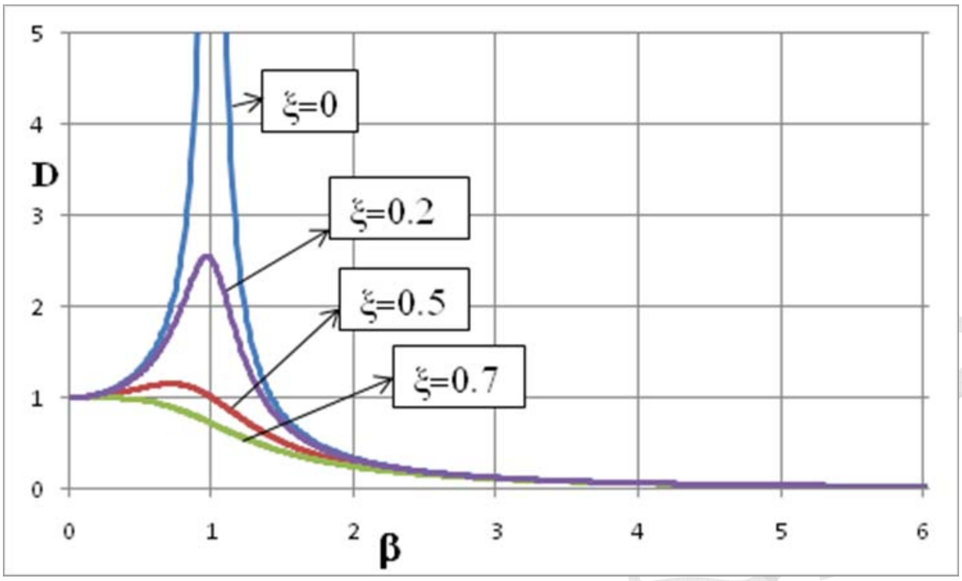
ضریب بزرگنمایی دینامیکی بار هارمونیک به نسبت فرکانس و نسبت میرایی بستگی دارد. نمودار آن در شکل ۴-۳ ترسیم شده است. نکته ای که در این شکل وجود دارد اینستکه با افزایش نسبت میرایی، ضریب بزرگنمایی کاهش می یابد.

٤-٦ پاسخ تشدید (Resonant Response)

چنانچه دیدیم ضریب بزرگنمایی دینامیکی تابعی از نسبت فرکانس است. برای پیدا کردن مقدار ماکزیمم آن از رابطهٔ (۴-۲۵) نسبت به β مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم.

$$\frac{\partial D}{\partial \beta}=0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{Peak}=\sqrt{1-2\xi^2} \tag{۴-۲۶}$$

در این رابطه دیده می شود که حداکثر β به نسبت میرایی بستگی دارد. البته برای سازه های واقعی که نسبت میرایی خیلی کوچک است، حداکثر β نزدیک ۱/۰ می شود. اگر نسبت میرایی صفر باشد ($\xi=0$)، آنگاه $\beta_{Peak}=1$. این



شکل ۴-۳ نمودار ضریب بزرگنمایی بار هارمونیک

حالت خیلی مهم، تشدید یا رزونانس نامیده می شود. در حالت تشدید ضریب دینامیکی و در نتیجه پاسخ دینامیکی ماکزیمم خواهد شد.

با قرار دادن این مقدار در رابطهٔ (۴-۲۵)، ماکزیمم ضریب بزرگنمایی دینامیکی بدست می آید:

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (۴-۲۷)$$

برای نسبت های میرایی سازه ها می توان نوشت:

$$D_{max} \approx \frac{1}{2\xi} \qquad (۴-۲۸)$$

این رابطه به این مفهوم است که مثلاً اگرنسبت میرایی سازه ۰/۰۵ باشد، پاسخ دینامیکی نسبت به پاسخ استاتیکی ۱۰ برابر خواهد شد.

حال تغییر فرم سیستم را وقتی که $\beta = 1$ باشد بررسی می کنیم. در این حالت پاسخ سیستم از رابطهٔ (۴-۱۵) بدست می آید که عبارت است از:

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t)-\frac{p_0/k}{2\xi}\cos\bar{\omega}t \qquad (۴-۲۹)$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه سکون ضرایب A و B به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$A=\frac{P_0}{k}\frac{\omega}{2\omega_D}=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \quad , \quad B=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{2\xi} \tag{۳۰-۴}$$

در نتیجه پاسخ سیستم عبارت است از:

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left((\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})\sin\omega_D t+\cos\omega_D t\right)-\cos\overline{\omega}t\right] \tag{۳۱-۴}$$

با توجه به اینکه مقدار ξ کوچک است، ضریب جمله $\sin\omega_D t$ در مقابل ضریب ۱ در عبارت درون پرانتز رابطهٔ ۴-۳۱ کوچک می شود و می توان از آن صرف نظر نمود. همچنین $\omega_D \approx \omega$ در نتیجه :

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\times\frac{1}{2\xi}\cos\omega t(e^{-\xi\omega t}-1) \tag{۳۲-۴}$$

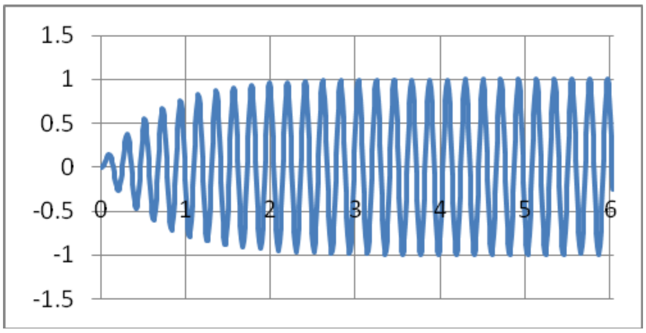
همچنین نسبت پاسخ به صورت زیر بدست می آید:

$$R(t)=\frac{u(t)}{P_0/k}=\frac{1}{2\xi}\cos\omega t(e^{-\xi\omega t}-1) \tag{۳۳-۴}$$

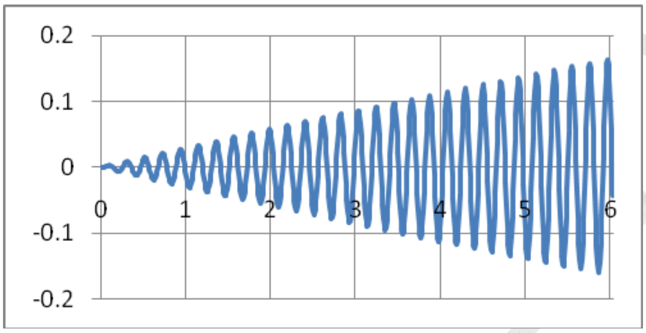
اگر $\xi=0$ باشد آنگاه $R(t)$ بصورت مبهم خواهد بود. برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می شود که پس از این کار نسبت پاسخ به صورت زیر در می آید.

$$R(t)=\frac{1}{2}\times(-\omega t\cos\omega t) \tag{۳۴-۴}$$

نمودار پاسخ سیستم در حالتی که نسبت فرکانس ۱/۰ باشد ($\beta=1$)، در دوحالت سیستم نامیرا و سیستم میرا در شکل ۴-۴ ترسیم شده است. ملاحظه می شود که در حالت نامیرا، پاسخ سیستم به طور نامحدودی افزایش می یابد. در حالت میرا پاسخ سیستم افزایش می یابد ولی میزان افزایش محدود است و حد آن $1/(2\xi)$ می باشد.



(الف) سیستم میرا $\xi=0.05$



(ب) سیستم نامیرا

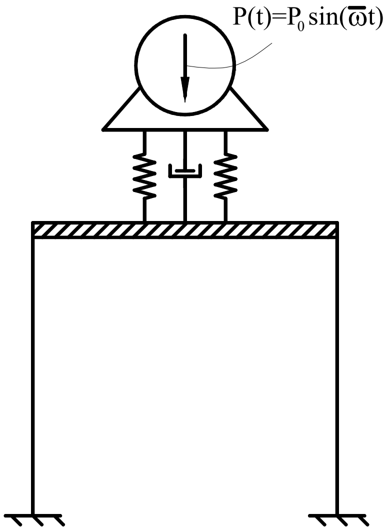
شکل۴-۴ پاسخ سیستم در حالت تشدید

٤-٧ جدا سازی ارتعاش (Vibration Isolation)

بحث جداسازی ارتعاش بحث بسیار گسترده است و اگر بخواهد بطور مفصل مورد بررسی قرار گیرد خود میتواند موضوع یک کتاب باشد. در اینجا این بحث بطور خیلی ساده و خلاصه مطرح می شود. جدا سازی ارتعاش به دو صورت می تواند مطرح شود. یکی جلوگیری از انتقال ارتعاش ماشین آلات به سازه و دیگری جلوگیری از انتقال ارتعاش زمین به سازه. این دوحالت در ادامه مورد بحث قرار می گیرند.

الف- جداسازی ارتعاش ماشین آلات از سازه

فرض کنید یک ماشین مکانیکی به سازه متصل شده باشد که در مواقعی که کار می کند نیروی هارمونیکی به میزان $P(t)=P_0\sin\bar{\omega}t$ تولید می کند(شکل ۴-۵). می خواهیم نیرویی که به سازه منتقل می شود را حساب کنیم.



شکل ۴-۵ ماشین مکانیکی متصل به سازه

معادلهٔ حرکت این سیستم همان معادلهٔ (۴-۴) است، بنابراین تغییر مکان سیستم از رابطهٔ (۴-۱۶) بدست می آید که می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$u(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۴-۳۵}$$

سرعت سیستم با مشتق گیری از این رابطه بدست می آید:

$$\dot{u}(t)=\frac{P_0}{k}D\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۴-۳۶}$$

نیرویی که به سازه منتقل می شود، همانطوریکه از روی شکل مشخص است برابر است با جمع نیروی فنر و نیروی میرایی.

$$f(t)=f_S(t)+f_D(t) \tag{۴-۳۷}$$

نیروی فنر و میرایی از روابط زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned} f_S&=ku=P_0D\sin(\bar{\omega}t+\theta)\\ f_D&=c\dot{u}=c\frac{P_0}{k}D\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t+\theta)\end{aligned} \tag{۴-۳۸}$$

که نیروی میرایی با استفاده از تعاریف : $c=2m\omega\xi$ و $k=m\omega^2$ و $\beta=\bar{\omega}/\omega$ به صورت زیر در می آید:

$$f_D=c\dot{u}=P_0\left(2\xi\beta\right)D\cos(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۴-۳۹}$$

در نتیجه نیروی منتقل شده به سازه عبارت است از:

$$f(t)=P_0D\sin(\bar{\omega}t+\theta)+P_0\left(2\xi\beta\right)D\cos(\bar{\omega}t+\theta) \tag{۴-۴۰}$$

این نیرو را به صورت زیر نیز می توان نمایش داد:

$$f(t)=P_0D\sqrt{1+\left(2\xi\beta\right)^2}\sin(\bar{\omega}t+\theta') \tag{۴-۴۱}$$

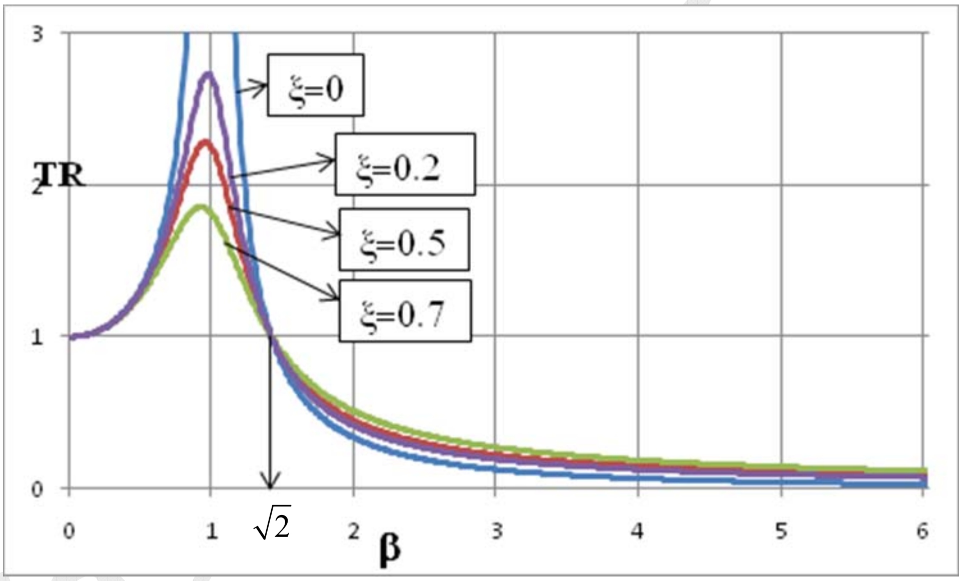
بنابراین حداکثر نیروی وارد بر سازه برابر است با:

$$f_{max}=P_0D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2} \tag{۴-۴۲}$$

ملاحظه می شود که حداکثر نیرویی که ماشین مکانیکی تولید می کند P_0 است ولی حداکثر نیرویی که به سازه وارد می شود $f_{max}=P_0D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$ است. به نسبت این دو نیرو ضریب انتقال گفته شده و با TR نشان داده می شود.

$$TR=D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}=\sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \tag{۴-۴۳}$$

در واقع ضریب انتقال نشان می دهد که چه مقدار از نیروی تولید شده به سازه منتقل می شود. ضریب انتقال تابعی از نسبت میرایی و نسبت فرکانس است. نمودار ضریب انتقال برای نسبت میرایی های مختلف بر حسب نسبت فرکانس در شکل ۴-۶ ترسیم شده است. چنانچه در این شکل دیده می شود همهٔ نمودارها از $\sqrt{2}$ می گذرند. به عبارت دیگر اگر



شکل ۴-۶ نمودار ضریب انتقال

نسبت فرکانس برابر $\sqrt{2}$ باشد، برای کلیهٔ میرایی ها، ضریب انتقال ۱/۰ می شود. بدیهی است اگر بخواهیم نیروی کمتری نسبت به آنچه که ماشین تولید می کند به سازه وارد شود، باید ضریب انتقال کوچکتر از ۱/۰ شود، بنابراین با توجه به شکل ۴-۶ باید نسبت فرکانس بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد. در این حالت ملاحظه می شود که با افزایش میرایی، ضریب انتقال کاهش می یابد. بنابراین می توان گفت که کمترین ضریب انتقال وقتی بدست می آید که نسبت فرکانس بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد و نسبت میرایی تا حد ممکن بزرگ انتخاب شود.

ب- جداسازی ارتعاش زمین از سازه

حالت مهم دیگری که وجود دارد، جداسازی ارتعاش زمین از سازه است(شکل ۴-۷). در این حالت فرض می کنیم تغییرمکان زمین یک تابع هارمونیک به صورت زیر است:

$$u_g(t)=u_{g0}\sin(\overline{\omega}t) \qquad (۴۴-۴)$$

که در آن u_{g0} حداکثر تغییرمکان زمین و $\overline{\omega}$ فرکانس حرکت زمین است. معادلهٔ تعادل سازه عبارت است از:

$$f_I(t)+f_D(t)+f_s(t)=0 \qquad (۴۵-۴)$$

نیروهای اینرسی، میرایی و فنری به صورت زیر هستند:

$$f_I(t)=m\ddot{u}^t \quad , \quad f_D(t)=c(\dot{u}^t-\dot{u}_g) \quad , \quad f_I(t)=k(u^t-u_g) \qquad (۴۶-۴)$$

که در آن u^t تغییرمکان کل سازه است. بنابراین:

$$m\ddot{u}^t+c(\dot{u}^t-\dot{u}_g)+k(u^t-u_g)=0 \qquad (۴۷-۴)$$

و یا:

$$m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=c\dot{u}_g+ku_g \qquad (۴۸-۴)$$

با توجه به رابطهٔ (۴-۴۴) و رابطهٔ $\dot{u}_g(t)=u_{g0}\overline{\omega}\cos(\overline{\omega}t)$ ، رابطهٔ فوق به صورت زیر در می آید:

$$m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=cu_{g0}\overline{\omega}\cos(\overline{\omega}t)+ku_{g0}\sin(\overline{\omega}t) \qquad (۴۹-۴)$$

که به صورت زیر نیز می تواند نوشته شود:

$$m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=u_{g0}\sqrt{k^2+c^2\overline{\omega}^2}\,\sin(\overline{\omega}t+\theta) \qquad (۴۹-۴)$$

اگر فرض کنیم که

$$P_0=u_{g0}\sqrt{k^2+c^2\overline{\omega}^2} \qquad (۵۰-۴)$$

آنگاه معادلهٔ (۴-۵۰) شبیه به معادلهٔ (۴-۳) خواهد شد. بنابراین پاسخ آن به صورت زیر خواهد شد:

$$u^t(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\overline{\omega}t+\theta) \qquad (۵۱-۴)$$

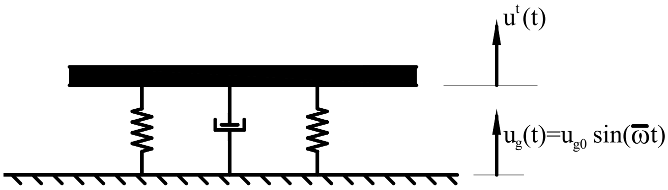
بنابراین حداکثر تغییرمکان سازه برابر است با:

$$u_{max}=\frac{u_{g0}\sqrt{k^2+c^2\overline{\omega}^2}}{k}D \qquad (۵۲-۴)$$

که با کمی ساده سازی به صورت زیر در می آید:

$$u^t_{max}=u_{g0}\sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \qquad (۵۳-۴)$$

در این حالت نسبت حداکثر تغییر مکان سازه به حداکثر تغییرمکان زمین همان ضریب انتقال(رابطهٔ) خواهد شد و دقیقاً همان بحث هایی که در رابطه با جداسازی ارتعاش ماشین آلات از سازه مطرح شد در این مورد نیز صادق است.



شکل ۴-۷ جداسازی ارتعاش زمین از سازه

ضریب مهم دیگری که می توان تعریف نمود، کارایی سیستم است که با E نشان داده می شود.

$$E=1-TR \qquad (۵۴-۴)$$

اگر ضریب انتقال صفر باشد، یعنی هیچ نیرویی به سازه منتقل نشود، آنگاه کارایی سیستم ۱۰۰٪ است ولی اگر ضریب انتقال ۱/۰ باشد، یعنی تمام نیروی تولید شده به سازه منتقل شده و کارایی سیستم صفر است.

In the Name of God

Dynamics of Structures

Problems of ch. 4 ***Response to Harmonic Loading***

1. Consider the basic structure of Fig. P1 with zero damping and subjected to harmonic excitation at the frequency ratio $\beta = 0.8$. Including both steady-state and transient effects, plot the response ratio R(t).

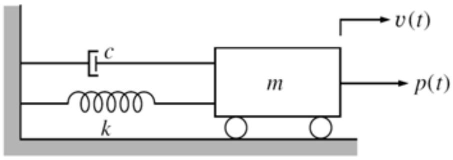


Fig. P1

2. Consider the basic system of Fig. P1 with the following properties: m =350 ton and k = 4000 Kn/m. If this system is subjected to resonant harmonic loading ($\overline{\omega} = \omega$) starting from "at rest" conditions, determine the value of the response ratio R(t) after four cycles ($\overline{\omega}t=8\pi$), assuming:

(*a*) c = 0

(*b*) c = 90 Kn-Sec/m

(*c*) c = 350 Kn-Sec/m

3. Consider the same vehicle and bridge structure of Fig. P2. Assuming that the mass of the vehicle is 1800 kg, the equivalent stiffness of the spring system is 225 Kn/m and the damping is 40 percent of critical.
Determine:

(*a*) the vehicle speed required to induce resonance in the vehicle spring system.

(*b*) the total amplitude of vertical motion v^t_{max} at resonance.

(*c*) the total amplitude of vertical motion v^t_{max} at the speed of 72 km/hr.

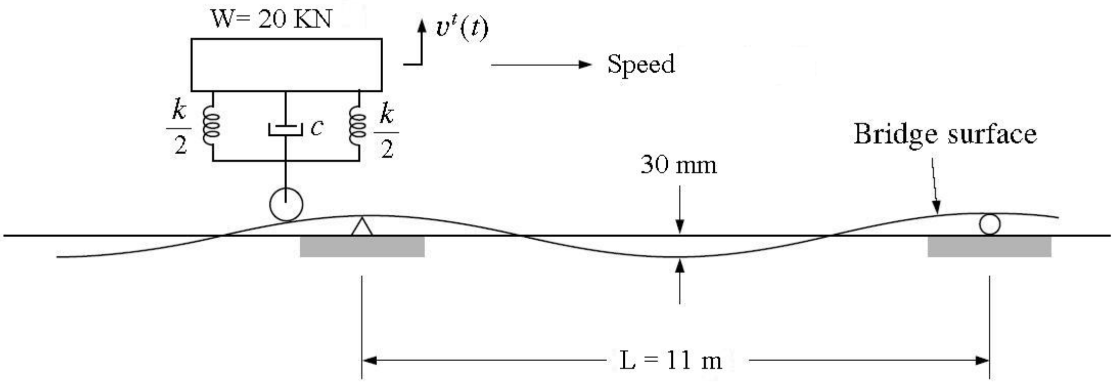


Fig. P2

4. A control console containing delicate instrumentation is to be located on the floor of a test laboratory where it has been determined that the floor slab is vibrating vertically with an amplitude of 0.76 mm at 20 Hz. If the weight of the console is 360 kg, determine the stiffness of the vibration isolation system required to reduce the vertical-motion amplitude of the console to 0.127 mm.

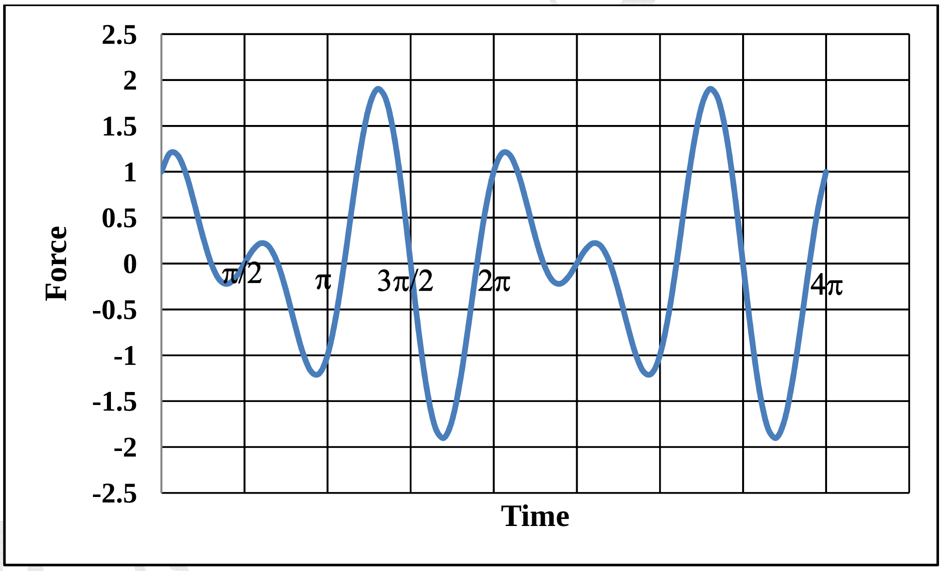
5. A sieving machine weighs 30 Kn, and when operating at full capacity, it exerts a harmonic force on its supports of 320 Kn amplitude at 12 Hz. After mounting the machine on spring-type vibration isolators, it was found that the harmonic force exerted on the supports had been reduced to 225 Kn amplitude. Determine the spring stiffness k of the isolation system.

فصل ۵

بارهای متناوب

۵-۱ مقدمه

بارهای متناوب بارهایی هستند که شکل آنها در دوره های زمانی خاصی که دوره تناوب نامیده می شود، ثابت می ماند. نمونه ای از این بارها در شکل (۵-۱) نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود شکل بار در زمان صفر تا 2π مثل شکل بار در زمان 2π تا 4π است. البته لازمۀ اینکه این بار تناوبی باشد اینستکه این روند از $-\infty$ تا $+\infty$ادامه داشته باشد. بنابراین اولاً بار به صورت تناوبی بوده و ثانیاً دوره تناوب آن 2π است. در این فصل پاسخ سازه در مقابل چنین بارهایی بدست می آید. قبل از اینکه پاسخ سازه محاسبه شود کلیاتی راجع به تبدیل توابع متناوب به توابع هارمونیک ارائه خواهد شد.



شکل ۵-۱ مثالی از بارمتناوب

۵-۲ سری فوریه (Fourier series)

در ریاضیات مهندسی ثابت می شود که اگر تابع $P(t)$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب T_p باشد، می توان آن را به صورت مجموعه ای از توابع هارمونیک به صورت زیر نوشت:

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\sin(\overline{\omega}_n t)+b_n\cos(\overline{\omega}_n t)\right] \qquad (۵-۱)$$

که در آن

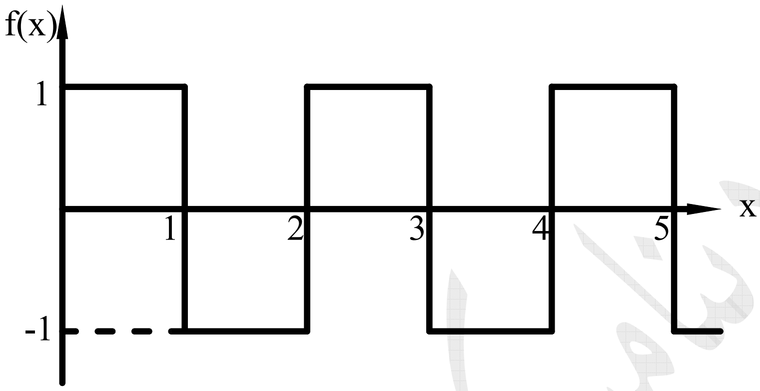
$$\overline{\omega}_n=\frac{2n\pi}{T_P} \qquad (۵-۲)$$

و ضرایب b_n , a_n , a_0 به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_p}P(t)dt \\ a_n&=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\sin(\overline{\omega}_n t)dt \\ b_n&=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\cos(\overline{\omega}_n t)dt \end{aligned} \qquad (۵-۳)$$

رابطهٔ (۵-۱) را سری فوریه می نامند. توجه شود که رابطهٔ (۵-۱) وقتی دقیقاً برقرار می شود که تعداد جملات سری بی نهایت شود، لیکن چون عملاً تعداد جملاتی که استفاده می شود محدود است، رابطهٔ (۵-۱) تقریبی خواهد شد. بدیهی است هر چه تعداد جملات بیشتر شود، جواب سری فوریه به جواب دقیق نزدیکتر خواهد شد. در مثال زیر مورد استفاده سری فوریه نشان داده خواهد شد.

مثال : تابع زیر را به صورت سری فوریه نشان دهید.



حل:

چنانچه ملاحظه می شود دورهٔ تناوب این تابع ۲ است. این تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<1 \\ -1 & 1\leq x<2 \end{cases}$$

همچنین $\overline{\omega}_n$ برابر است با:

$$\overline{\omega}_n=\frac{2n\pi}{T_p}=n\pi$$

بنابراین ضرایب سری فوریه برابرند با:

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_0^1(1)dx+\int_1^2(-1)dx\right]=0$$

$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}f(x)\sin(\overline{\omega}_n x)dx=\frac{2}{2}\left[\int_0^1(1)\sin(n\pi x)dx+\int_1^2(-1)\sin(n\pi x)dx\right]=\frac{2\left(1-\cos(n\pi)\right)}{n\pi}=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi} & n=1,3,5,... \\ 0 & n=2,4,6,...\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}f(x)\cos(\overline{\omega}_n x)dx=\frac{2}{2}\left[\int_0^1(1)\cos(n\pi x)dx+\int_1^2(-1)\cos(n\pi x)dx\right]=0 \quad , \quad n=1,2,3,...$$

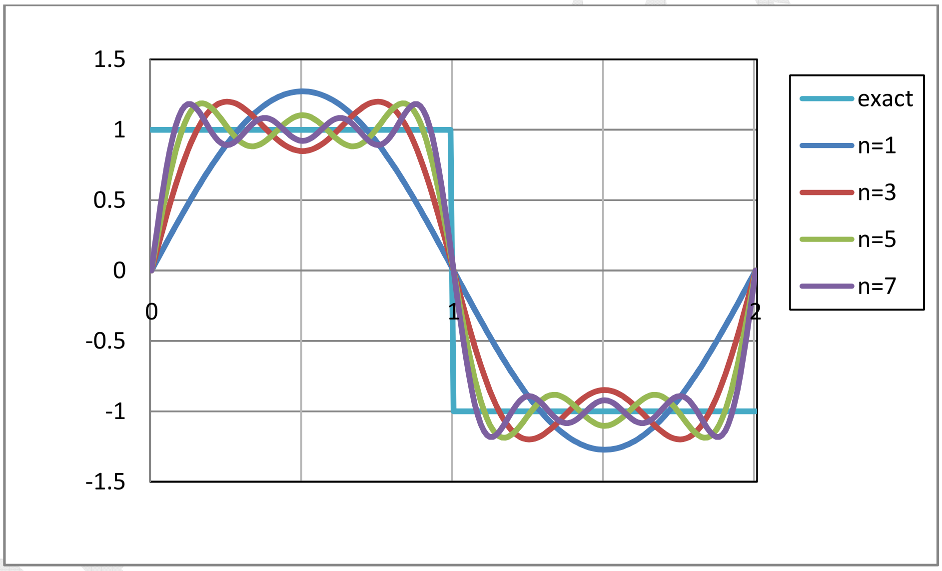
در نتیجه f(x) به صورت زیر در می آید:

$$f(x)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[\frac{4}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]$$

این رابطه به صورت گسترده عبارت است از:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sin(\pi x)+\frac{4}{3\pi}\sin(3\pi x)+\frac{4}{5\pi}\sin(5\pi x)+\frac{4}{7\pi}\sin(7\pi x)+\cdots$$

نمودار f(x) در شکل زیر نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه میشود با افزایش تعداد جملات، سری به سمت جواب دقیق میل می کند.



۵-۳ پاسخ به بارگذاری سری فوریه

بر اساس رابطۀ (۵-۱) هر نیرویی که بصورت متناوب باشد را می توان بر حسب مجموعه از نیروهای هارمونیک بیان نمود. به عبارت دیگر اگر نیروی وارد بر سیستم تناوبی باشد آنگاه معادلۀ حرکت بصورت زیر در می آید:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\sin(\overline{\omega}_n t)+b_n\cos(\overline{\omega}_n t)\right] \qquad (۵-۴)$$

چون رفتار سیستم را بصورت خطی فرض کرده ایم بنابراین اصل جمع آثار قوا برقرار است یعنی می توان معادلۀ فوق را برای هر یک از جملات سمت راست بطور جداگانه حل نمود و سپس پاسخ ها را با یکدیگر جمع کرد.

ابتدا پاسخ سیستم در برابر جملۀ a_0 بدست می آوریم. در این حالت چون مقدار نیرو ثابت است و به زمان بستگی ندارد پس پاسخ هم ثابت است و جملات $\dot{u}$ و $\ddot{u}$ صفر خواهند شد و پاسخ سیستم در این حالت عبارت است از:

$$u(t)=\frac{a_0}{k} \qquad (۵-۵)$$

پاسخ سیستم در برابر جملۀ $a_n\sin(\overline{\omega}_n t)$ از رابطۀ (۴-۱۵) بصورت زیر بدست می آید:

$$u(t)=\frac{a_n}{k}\times\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\left[(1-\beta_n^2)\sin(\overline{\omega}_n t)-(2\xi\beta_n)\cos(\overline{\omega}_n t)\right] \qquad (۵-۶)$$

که در آن β_n برابر است با:

$$\beta_n=\frac{\overline{\omega}_n}{\omega} \qquad (۵-۷)$$

بالاخره پاسخ سیستم در برابر جملۀ $b_n\cos(\overline{\omega}_n t)$ نیز برابر است با:

$$u(t)=\frac{b_n}{k}\times\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\cos(\overline{\omega}t)+(2\xi\beta)\sin(\overline{\omega}t)\right] \qquad (۵-۷)$$

بنابراین جواب معادلۀ (۵-۴) از جمع روابط (۵-۵)، (۵-۶) و (۵-۷) بدست می آیدکه عبارت است از:

$$u(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\right]\times\left(\frac{a_n}{k}\times\left[(1-\beta_n^2)\sin(\overline{\omega}_n t)-(2\xi\beta_n)\cos(\overline{\omega}_n t)\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{b_n}{k}\times\left[(1-\beta_n^2)\cos(\overline{\omega}_n t)-(2\xi\beta_n)\sin(\overline{\omega}_n t)\right]\right)\right\} \qquad (۸-۵)$$

٤-۵ فرم نمایی سری فوریه

در بخش ۵-۲ نشان داده شد که هر تابع متناوب را می توان به مجموعه ای از توابع هارمونیک تبدیل نمود. همچنین در ریاضیات مهندسی نشان داده میشود که توابع متناوب را به صورت زیر نیز میتوان نمایش داد:

$$P(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i(\overline{\omega}_n t)} \qquad (۹-۵)$$

که c_n از رابطهٔ زیر محاسبه می شود:

$$c_n=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)e^{-i(\overline{\omega}_n t)}dt \qquad (۱۰-۵)$$

به عبارت دیگر برای یک تابع متناوب $P(t)$ ابتدا باید از رابطهٔ (۵-۱۰) ضرایب c_n را بدست آورد و سپس با استفاده از رابطهٔ (۵-۹) تابع را به صورت نمایی نشان داد. رابطهٔ (۵-۹) فرم نمایی سری فوریه نامیده می شود. در اصل روابط (۵-۹) و (۵-۱۰) همان روابط سری فوریه هستند که به شکل دیگری نوشته شده اند. برای نشان دادن اینکه روابط (۵-۱) و (۵-۳) با روابط (۵-۹) و (۵-۱۰) یکی هستند به صورت زیر عمل می کنیم.

رابطهٔ (۵-۹) را به صورت زیر می نوان نوشت:

$$P(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n}e^{-i\overline{\omega}_n t}+c_n e^{i\overline{\omega}_n t}\right] \qquad (۱۱-۵)$$

که با استفاده از اتحاد اولر ($e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$) رابطهٔ زیر حاصل می شود:

$$P(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n}\left(\cos(\overline{\omega}_n t)-i\sin(\overline{\omega}_n t)\right)+c_n\left(\cos(\overline{\omega}_n t)+i\sin(\overline{\omega}_n t)\right)\right] \qquad (۱۲-۵)$$

وبا دسته بندی آن، به رابطهٔ زیر می رسیم:

$$P(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(c_n+c_{-n}\right)\cos(\bar{\omega}_n t)-i\left(c_n-c_{-n}\right)\sin(\bar{\omega}_n t)\right] \tag{۵-۱۳}$$

حال با توجه به رابطهٔ (۵-۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} c_n&=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)e^{-i\bar{\omega}_n t}dt=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\cos\bar{\omega}_n t dt-\frac{i}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\sin\bar{\omega}_n t dt \\ c_{-n}&=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)e^{+i\bar{\omega}_n t}dt=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\cos\bar{\omega}_n t dt+\frac{i}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\sin\bar{\omega}_n t dt \end{aligned} \tag{۵-۱۴}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} c_n+c_{-n}&=\frac{2}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\cos(\bar{\omega}_n t)dt \\ c_n-c_{-n}&=\frac{-2i}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\sin(\bar{\omega}_n t)dt \end{aligned} \tag{۵-۱۵}$$

حال تغییر متغیر های زیر را درنظر می گیریم:

$$\begin{aligned} a_0&=c_0 \\ a_n&=-i\left(c_n-c_{-n}\right) \\ b_n&=c_n+c_n \end{aligned} \tag{۵-۱۶}$$

بنابراین معادلهٔ (۵-۱۳) را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\sin(\bar{\omega}_n t)+b_n\cos(\bar{\omega}_n t)\right] \tag{۵-۱۷}$$

که همان رابطهٔ (۵-۱) است. ضرایب a_n و b_n نیز با توجه به روابط (۵-۱۵) و (۵-۱۶) عبارتند از:

$$\begin{aligned} b_n&=c_n+c_{-n}=\frac{2}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\cos(\bar{\omega}_n t)dt \\ a_n&=-i(c_n-c_{-n})=\frac{2}{T_P}\int_0^{T_P}p(t)\sin(\bar{\omega}_n t)dt \end{aligned} \tag{۵-۱۸}$$

که همان روابط (۵-۳) است.

به این ترتیب نشان داده شد که توابع متناوب را می توان به فرم نمایی (روابط ۵-۹ و ۵-۱۰) نیز نشان داد.

۵-۵ پاسخ به فرم نمایی سری فوریه

در این قسمت پاسخ سازه در برابر بارهای متناوب، وقتی که این بار به فرم نمایی نوشته شود، بدست می آید. ابتدا پاسخ سازه در برابر یک تابع نمایی محاسبه می شود. یعنی معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p(t)=e^{i\bar{\omega}_n t} \qquad (۱۹-۵)$$

جواب این معادله دو قسمت همگن و مخصوص دارد. همانطور که در فصل ۴ دیده شد، جواب مخصوص که در دینامیک سازه ها، پاسخ ماندگار نامیده می شود، اهمیت بیشتری دارد و می توان از جواب همگن صرفنظر نمود. پاسخ ماندگار معادلهٔ فوق بصورت زیر است:

$$u(t)=He^{in\bar{\omega}_n t} \qquad (۲۰-۵)$$

ضریب H از قرار دادن رابطهٔ (۵-۲۰) در رابطهٔ (۵-۱۹) بدست می آید. مشتقات رابطهٔ (۵-۲۰) برابرند با:

$$\dot{u}(t)=H(i\bar{\omega}_n)e^{i\bar{\omega}_n t} \quad , \quad \ddot{u}(t)=H(-\bar{\omega}_n^2)e^{i\bar{\omega}_n t} \qquad (۲۱-۵)$$

بنابراین معادلهٔ (۵-۱۹) به صورت زیر در می آید:

$$mH(-\bar{\omega}_n^2)e^{i\bar{\omega}_n t}+CH(i\bar{\omega}_n)e^{i\bar{\omega}_n t}+KHe^{i\bar{\omega}_n t}=e^{i\bar{\omega}_n t} \qquad (۲۲-۵)$$

چون $e^{i\bar{\omega}_n t} \neq 0$ ، پس این ضریب از طرفین رابطهٔ فوق حذف شده و H به صورت زیر بدست می آید:

$$H=\frac{1}{-m\bar{\omega}_n^2+Ci\bar{\omega}_n+K} \qquad (۲۳-۵)$$

چنانچه دیده می شود، ضریب H تابعی از $\overline{\omega}_n$ است، به همین دلیل معمولاً به صورت $H(\overline{\omega}_n)$ نوشته شده و به آن تابع پاسخ فرکانسی (Frequency Response Function) گفته می شود. این تابع را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$H(\overline{\omega}_n)=\frac{1}{k[(2\xi\beta_n i)+(1-\beta_n^2)]} \tag{۵-۲۴}$$

بنابراین جواب معادلهٔ (۵-۱۹) به صورت زیر می شود:

$$u(t)=\frac{1}{k[(2\xi\beta_n i)+(1-\beta_n^2)]}\times e^{i\overline{\omega}_n t} \tag{۵-۲۵}$$

پس اگر نیروی وارد بر سیستم به صورت رابطهٔ (۵-۹) نوشته شده باشد، آنگاه پاسخ سیستم به صورت زیر خواهد شد:

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(\overline{\omega}_n) e^{i\overline{\omega}_n t} \tag{۵-۲۶}$$

In the Name of God

Dynamics of Structures

Problems of Ch. 5 *Periodic Loading*

1-Express the periodic loading shown in Fig. P1 as a Fourier series. Thus, determine the coefficients a_n and b_n for the periodic loading given by

$$P(t) = P_0 \sin(\frac{3\pi}{T_p} t) \qquad (0 < t < 2\pi)$$

$$P(t) = 0 \qquad (2\pi < t < 3\pi)$$

Then write the loading in the series form.

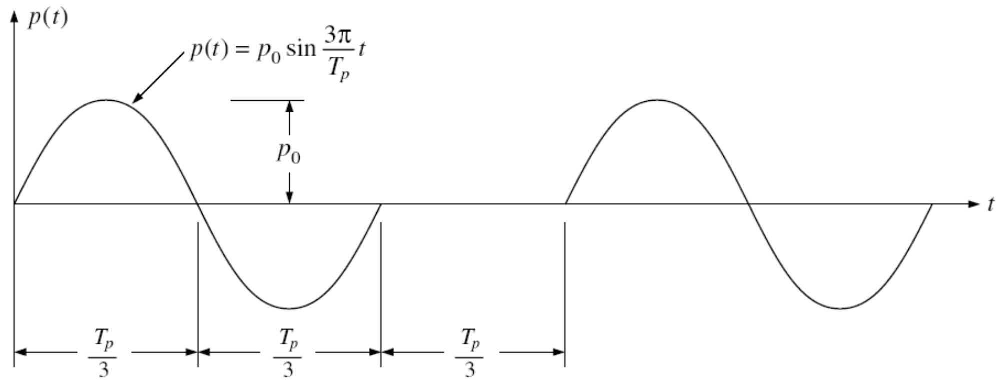


Fig. P1

2- Repeat Prob. 1 for the periodic loading shown in Fig. P2.

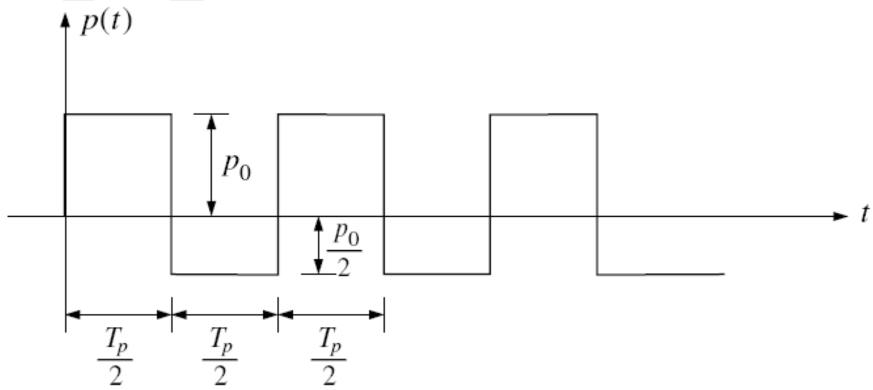


Fig. P2

3- Consider the system and loading shown in Fig. P3. The loading consists of the positive portion of a simple sine function. (a) Express the loading as Fourier coefficients. (b) Determine the response of the system to the loading. Assume 10% damping.

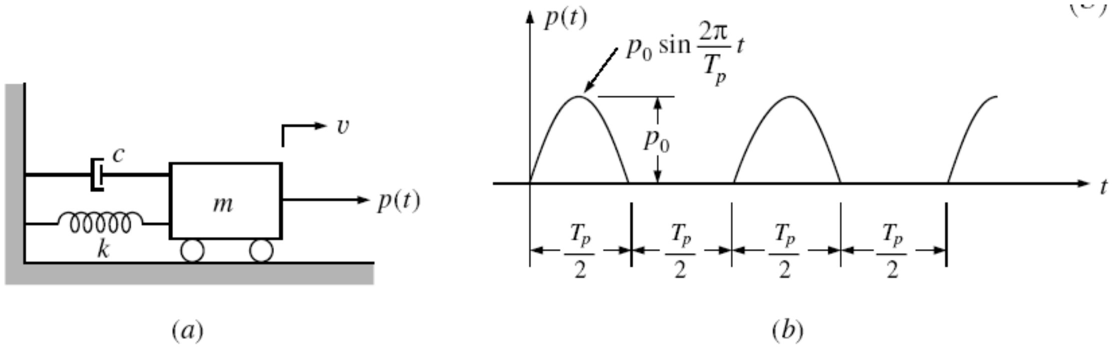


Fig. P3

4- The periodic loading of Fig. P4 can be expressed by the sine series

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\overline{\omega}_n t)$$

where

$$b_n = -\frac{2P_0}{n\pi}(-1)^n$$

Plot the steady-state response of a SDOF structure to this loading for one full period, considering only the first four terms of the series and evaluating at time increments given by $\overline{\omega}_1 \Delta t = 30^\circ$**. Assume 0% damping.**

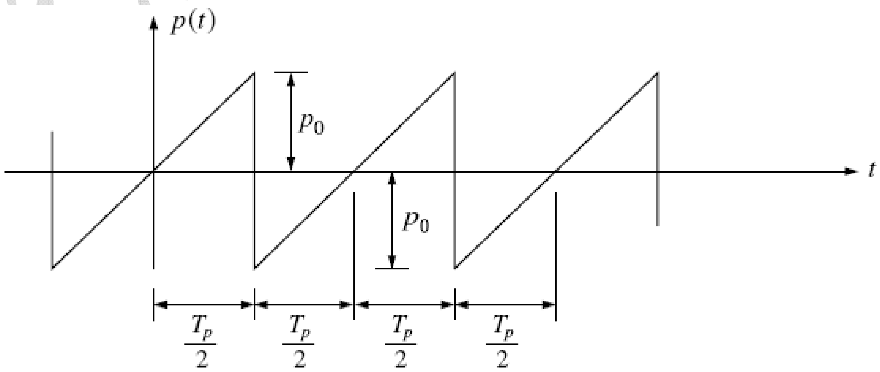


Fig. P4

فصل ۶

بارهای ضربه ای

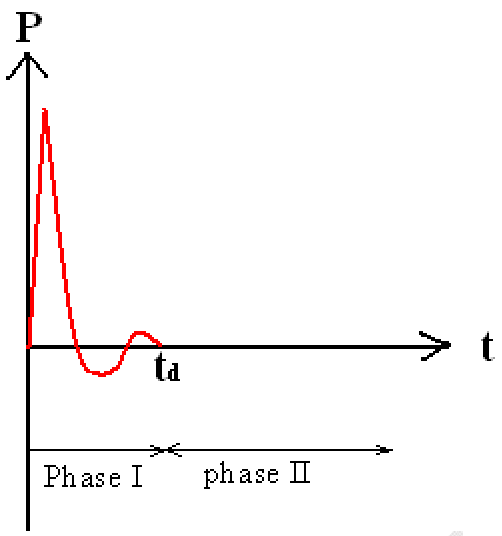
Impulsive loading

٦-١ مقدمه

بارگذاری ضربه ای به نوعی بار دینامیکی گفته می شود که مدت زمان تأثیر نیرو بر سازه کوتاه باشد. البته موضوع اینکه زمان تأثیر نیروچقدر کوتاه باشد تا بتوان آن را ضربه ای محسوب نمود، موضوعی است که نیاز به بررسی دارد و در این فصل ضابطه ای برای آن بدست می آید.

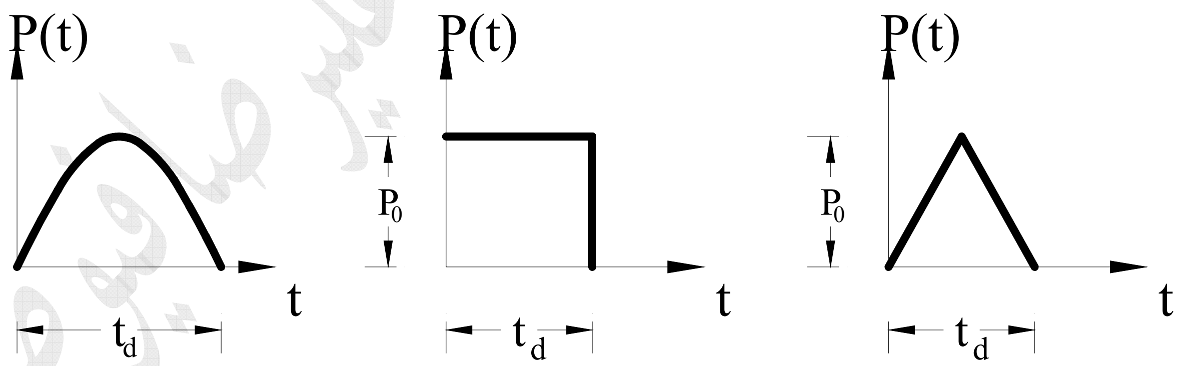
یکی از انواع بارگذاری ضربه ای، بار انفجار (Blast) است. انفجار میتواند ناشی از انفجارهای فیزیکی یا شیمیایی باشد. از مثال های دیگر بارهای ضربه ای می توان از برخورد کامیون به پایه پل یا ضربه ناشی از شروع یا توقف ناگهانی جرثقیل یا آسانسور نام برد. یک نمونه از بارهای ضربه ای در شکل (۶-۱) نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود بار در مدت زمان کوتاهی به سرعت افزایش می یابد تا به مقدار حداکثر خود میرسد. سپس کاهش یافته تا به صفر می رسد. این زمان فاز مثبت نامیده می شود. در این فاز نیروی وارد بر سازه به صورت فشار است. پس از آن نیروی وارد بر سازه به صورت منفی یا مکش میشود و بعد از آن با یکی دو نوسان به صفر می رسد.

مدت زمان تأثیر بار را می توان به دو مرحله مختلف تقسیم بندی نمود. در مرحله اول نیرو وارد می شود که می توان آن را مرحله ی نیرویی نامید و در مرحله بعد که نیرو وارد نمی شود و می توان آن را مرحله ارتعاش آزاد نامید (شکل ۶-۱).



شکل ۶-۱ نمونه ای از بارهای ضربه ای

شکل ۶-۱ نمونه ای واقعی از بارهای انفجاری است. برای تحلیل معمولاً از شکل های ساده تری که بوسیلهٔ روابط ریاضی قابل بیان باشند و بار انفجاری را نیز به خوبی مدلسازی کنند استفاده می شود. سه نمونه از این نوع بارها در شکل ۶-۲ نشان داده شده است.



شکل ۶-۲ نمونه هایی از بارهای ساده شده ضربه ای

در ادامه پاسخ سازه در برابر این بارها بدست می آید.

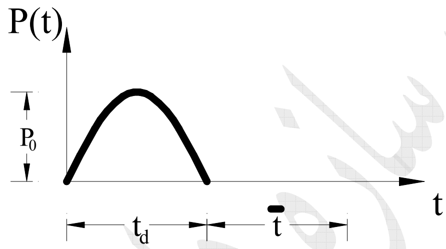
۶-۲ بار نیم موج سینوسی

این نوع بار در واقع بار هارمونیک سینوسی است که مدت زمان تأثیر آن فقط تا نصف زمان تناوب آن است(شکل ۶-۳). این بار را به صورت زیر تعریف می شود.

$$P(t)=\begin{cases} P_0\sin\overline{\omega}t & 0<t<t_d \\ 0 & t_d<t<\infty \end{cases} \tag{۶-۱}$$

رابطهٔ مدت زمان بارگذاری و زمان تناوب و فرکانس آن به صورت زیر است:

$$t_d=\frac{\overline{T}}{2}=\frac{2\pi}{2\overline{\omega}}=\frac{\pi}{\overline{\omega}} \tag{۶-۲}$$



شکل ۶-۳ بار نیم موج سینوسی

در بار های ضربه ای به دلیل سرعت زیاد بارگذاری سرعت سیستم تغییر قابل ملاحظه ای ندارد و به همین دلیل در مدت زمان تأثیر نیرو، سیستم را میتوان نا میرایی در نظر گرفت. در این فصل در مرحلهٔ اول بارگذاری سیستم به صورت نامیرا در نظر گرفته می شود. در نتیجه معادلهٔ حرکت به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}+ku=P(t) \tag{۶-۳}$$

این معادله در دو مرحلهٔ به صورت مجزا حل می شود:

مرحلهٔ اول: مرحلهٔ نیرویی $0<t<t_d$

در این مرحله معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{u}+ku=P_0\sin(\overline{\omega}t) \tag{۶-۴}$$

همانطور که در فصل ۴ دیده شد، جواب این معادله عبارت است از:

$$u_I(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin(\bar{\omega}t)-\beta\sin(\omega t)\right] \quad (۵-۶)$$

در این رابطه اندیس I به پاسخ در مرحلهٔ اول اشاره دارد. در پایان این مرحله تغییر مکان و سرعت سیستم برابر است با:

$$u_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[-\beta\sin(\pi/\beta)\right] \quad , \quad \dot{u}_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\times\frac{-\bar{\omega}}{1-\beta^2}\left[1+\cos(\pi/\beta)\right] \quad (۶-۶)$$

مرحلهٔ دوم: ارتعاش آزاد $t_d<t$

در این مرحله به سیستم نیرو وارد نمی شود و سیستم تحت اثر تغییر مکان و سرعت اولیه ارتعاش می کند. معادلهٔ حرکت سیستم در این مرحله برابر است با:

$$m\ddot{u}+ku=0 \quad (۷-۶)$$

که پاسخ آن عبارت است از:

$$u_{II}(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t) \quad (۸-۶)$$

اندیس II در این رابطه به پاسخ در مرحلهٔ دوم اشاره دارد. A و B در این رابطه ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. در مرحلهٔ دوم اگر مبدأ زمان t_d گرفته شود، آنگاه پاسخ معادلهٔ (۶-۷) به صورت رابطهٔ (۳-۱۸) خواهد شد:

$$u_{II}(\bar{t})=\frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin(\omega\bar{t})+u_0\cos(\omega\bar{t}) \quad (۹-۶)$$

u_0 و $\dot{u}_0$ مقادیر تغییر مکان و سرعت در ابتدای مرحلهٔ دوم هستند و

$$\bar{t}=t-t_d \quad (۱۰-۶)$$

با جایگذاری $u_I(t_d)$ به جای u_0 و $\dot{u}_I(t_d)$ به جای $\dot{u}_0$ رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$u_{II}(\bar{t})=\frac{P_0}{k}\times\frac{-\beta}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\pi/\beta\right)\cos\left(\omega\bar{t}\right)+\left(1+\cos\left(\pi/\beta\right)\right)\sin\left(\omega\bar{t}\right)\right] \quad (۱۱-۶)$$

بنابراین به طور خلاصه می توان پاسخ سیستم در برابر بار نیم موج سینوسی را به صورت زیر نوشت:

$$u=\begin{cases}\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\bar{\omega}t\right)-\beta\sin\left(\omega t\right)\right] & 0<t<t_d\\ \frac{P_0}{k}\times\frac{-\beta}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\pi/\beta\right)\cos\left(\omega\left(t-t_d\right)\right)+\left(1+\cos\left(\pi/\beta\right)\right)\sin\left(\omega\left(t-t_d\right)\right)\right] & t_d<t\end{cases} \quad (۱۲-۶)$$

همانطور که قبلاً گفته شد در طراحی به مقادیر ماکزیمم پاسخ نیاز است. در ادامه پاسخ ماکزیمم سیستم در برابر بار نیم سینوسی بدست می آید. برای این منظور مشتق رابطهٔ $u_I(t)$ نسبت به زمان را برابر صفر قرار داده تا زمان ماکزیمم پاسخ بدست آید:

$$\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t_m)-\beta\omega\cos(\omega t_m)=0 \quad (۱۳-۶)$$

و یا:

$$\cos(\bar{\omega}t_m)=\cos(\omega t_m) \quad (۱۴-۶)$$

از حل این معادله زمان ماکزیمم بدست می آید:

$$\bar{\omega}t_m=\pm\omega t_m+2n\pi \;\Rightarrow\; t_m=\frac{2n\pi}{\bar{\omega}\pm\omega} \quad n=1,2,3,... \quad (۱۵-۶)$$

کوچکترین زمان ماکزیمم (زمانی که برای اولین بار ماکزیمم اتفاق می افتد) برابر است با:

$$t_m=\frac{2\pi}{\bar{\omega}+\omega}=\frac{\bar{T}}{1+1/\beta} \quad (۱۶-۶)$$

اگر $t_m \le t_d$ باشد ماکزیمم پاسخ در مرحلهٔ اول اتفاق می افتد، یا به عبارتی شرط اینکه ماکزیمم پاسخ در مرحلهٔ اول اتفاق بیافتد اینستکه:

$$t_m=\frac{\bar{T}}{1+1/\beta}\le t_d \quad (۱۷-۶)$$

و چون $t_d=\frac{\bar{T}}{2}$ است، پس شرط وقوع ماکزیمم در مرحلهٔ اول به صورت زیر بیان می شود:

(۱۸-۶)

$$\beta\le 1 \quad \Rightarrow \quad t_d\ge\frac{T}{2}$$

از این رابطه می توان نتیجه گرفت که اگر مدت زمان تأثیر نیرو بیشتر از نصف زمان تناوب سازه باشد، ماکزیمم پاسخ در مرحلهٔ اول اتفاق می افتد. ولی اگر مدت زمان تأثیر نیرو کمتر از نصف زمان تناوب سازه باشد، ماکزیمم پاسخ در مرحلهٔ دوم اتفاق می افتد. در این حالت می توان گفت که بار به صورت ضربه ای وارد شده است. بنابراین بار ضربه ای را به صورت زیر می توان تعریف کرد:

بار ضربه ای: اگر مدت زمان تأثیر نیرو به حدی کم باشد که ماکزیمم پاسخ در مرحلهٔ ارتعاش آزاد اتفاق بیافتد بار، ضربه ای محسوب می شود.

بنابراین در مورد بار نیم سینوسی اگر مدت زمان تأثیر بار کمتر از نصف زمان تناوب سازه باشد، بار ضربه ای محسوب می شود. مقدار ماکزیمم پاسخ از قرار دادن t_m در u_I بدست می آید:

$$u_{I,max}=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\bar{\omega}\frac{2\pi}{\bar{\omega}+\omega}\right)-\beta\sin\left(\omega\frac{2\pi}{\bar{\omega}+\omega}\right)\right] \quad (۱۹-۶)$$

و یا:

$$u_{I,max}=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\frac{2\pi\beta}{1+\beta}\right)-\beta\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)\right] \quad (۲۰-۶)$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی برابر است با:

$$D_I=\frac{u_{I,max}}{\left(P_0/k\right)}=\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\frac{2\pi\beta}{1+\beta}\right)-\beta\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)\right] \quad (۲۱-۶)$$

برای بدست آوردن ماکزیمم پاسخ در مرحلهٔ دوم نیز به همین ترتیب عمل می کنیم، یعنی ابتدا از u_{II} نسبت به t مشتق گرفته تا t_m بدست آید، سپس با جایگزینی آن در u_{II}، مقدار ماکزیمم و آنگاه ضریب بزرگنمایی دینامیکی در مرحلهٔ ارتعاش آزاد بدست می آید که عبارت است از:

$$D_{II}=\frac{u_{II,max}}{\left(P_0/k\right)}=\frac{-2\beta\cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{(1-\beta^2)} \quad (۲۲-۶)$$

بنابراین ضریب بزرگنمایی دینامیکی عبارت است از:

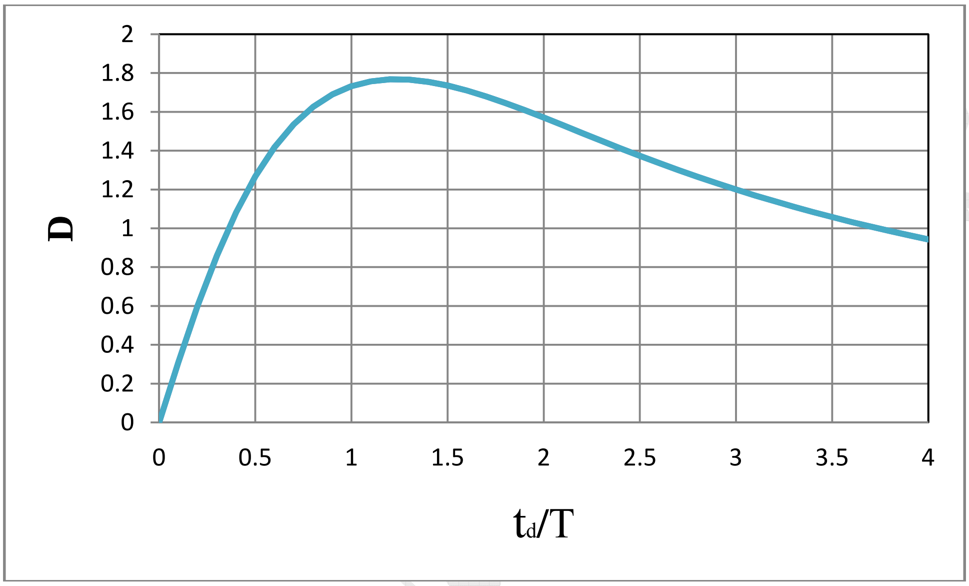
$$D=\begin{cases}\frac{1}{1-\beta^2}\left[\sin\left(\frac{2\pi\beta}{1+\beta}\right)-\beta\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)\right] & \beta\le 1\\ \frac{-2\beta\cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{(1-\beta^2)} & \beta>1\end{cases} \quad (۲۲-۶)$$

ملاحظه می شود که ضریب بزرگنمایی تابعی از β است و چون $\beta=\frac{T}{2t_d}$ پس ضریب بزرگنمایی تابعی از $\frac{t_d}{T}$ خواهد بود. توجه شود که در $\beta=1$، رابطهٔ D مبهم است. برای رفع ابهام از قانون هوپیتال استفاده می شود که به صورت زیر در می آید:

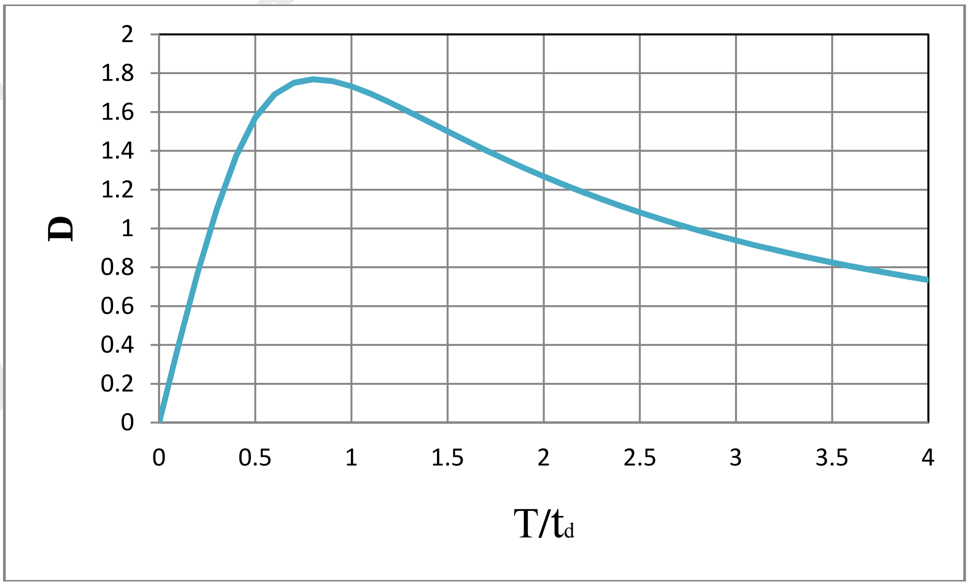
$$\beta=1 \;\Rightarrow\; D=\frac{\frac{2\pi}{(1+\beta)^2}\cos\left(\frac{2\pi\beta}{1+\beta}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)+\frac{2\pi\beta}{(1+\beta)^2}\cos\left(\frac{2\pi}{1+\beta}\right)}{-2\beta}=\frac{\pi}{2} \quad (۲۳-۶)$$

در شکل ۶-۴ نمودار ضریب بزرگنمایی بر حسب $\frac{t_d}{T}$ رسم شده است. یادآور میشود که با داشتن این نمودار یا رابطهٔ (۶-۲۲) می توان بدون تحلیل دینامیکی پاسخ ماکزیمم را بدست آورد بنابراین از اهمیت زیادی برخوردار است. همچنین ملاحظه می شود که محور افقی این نمودار فرکانس است که همپایه شده است. به همین دلیل به آن طیف

پاسخ بار نیم سینوسی نیز گفته می شود. می توان طیف پاسخ را بر حسب زمان تناوب نیز رسم نمود، که نمودار آن در شکل ۶-۵ ترسیم شده است. در این نمودار زمان تناوب هم پایه شده است.



شکل ۶-۴ ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای بار نیم سینوسی بر حسب فرکانس هم پایه شده



شکل ۶-۵ ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای بار نیم سینوسی بر حسب زمان تناوب هم پایه شده

٦-٣ بار مستطیلی

بار مستطیلی در شکل (۶-۶) نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود در مدت زمان t_d مقدار بار ثابت و برابر P_0 است و پس از آن صفر خواهد شد. به این نوع بار، بار پله ای نیز گفته می شود. بنابراین بار را به صورت زیر می توان تعریف نمود:

$$P(t)=\begin{cases}P_0 & 0\le t<t_d\\ 0 & t>t_d\end{cases} \qquad (۶-۲۴)$$

پس معادلهٔ حرکت سیستم نامیرا در مورد این بار هم در دو مرحله نوشته و حل می شود.

مرحلهٔ اول: مرحلهٔ نیرویی $0<t<t_d$

در این مرحله معادلهٔ حرکت برابر است با:

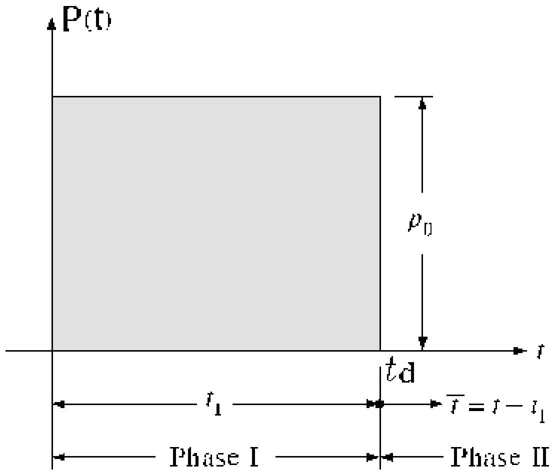
$$m\ddot{u}+ku=P_0 \qquad (۶-۲۵)$$

حل این معادله به صورت زیر است:

$$u_1(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)+\frac{P_0}{K} \qquad (۶-۲۶)$$

A و B ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. اگر شرایط اولیهٔ سکون برقرار باشد، آنگاه $A=0$ و $B=-P_0/K$ می شود. بنابراین پاسخ سیستم در این مرحله برابر است با:

$$u_1(t)=\frac{P_0}{k}\left[1-\cos(\omega t)\right] \qquad (۶-۲۷)$$



شکل ۶-۶ بار مستطیلی

مرحلهٔ دوم: مرحلهٔ ارتعاش آزاد $t>t_d$

در این مرحله ارتعاش سیستم به صورت آزاد و تحت اثر تغییر مکان و سرعت در پایان مرحلهٔ اول صورت می گیرد.

پاسخ سیستم در این حالت برابر است با:

$$u_{II}(\bar{t})=\frac{\dot{u}_I(t_d)}{\omega}\sin(\omega\bar{t})+u_I(t_d)\cos(\omega\bar{t}) \tag{۶-۲۸}$$

با توجه به رابطهٔ (۶-۲۷) داریم $u_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\left[1-\cos(\omega t_d)\right]$ و $\dot{u}_I(t_d)=\frac{P_0}{k}\omega\sin(\omega t_d)$. بنابراین پاسخ در این مرحله به صورت زیر در می آید:

$$u_{II}(\bar{t})=\frac{P_0}{k}\left[\sin(\omega t_d)\sin(\omega\bar{t})+\left(1-\cos(\omega t_d)\right)\cos(\omega\bar{t})\right] \tag{۶-۲۹}$$

پس از ساده کردن داریم:

$$u_{II}(\bar{t})=\frac{P_0}{k}\left[\cos(\omega\bar{t})-\cos\left(\omega\left(\bar{t}-t_d\right)\right)\right]=\frac{P_0}{k}\left[\cos\left(\omega\left(t-t_d\right)\right)-\cos(\omega t)\right] \tag{۶-۳۰}$$

بنابراین پاسخ سیستم نامیرا در برابر بار مستطیلی را به طور خلاصه می توان به صورت زیر نوشت:

$$u(t)=\begin{cases}\frac{P_0}{k}\left[1-\cos(\omega t)\right] & 0\le t<t_d\\ \frac{P_0}{k}\left[\cos\left(\omega\left(t-t_d\right)\right)-\cos(\omega t)\right] & t>t_d\end{cases} \tag{۶-۳۱}$$

برای محاسبهٔ پاسخ حدکثر، ابتدا فرض می کنیم که این پاسخ در مرحلهٔ اول اتفاق می افتد. بنابراین از $u_I(t)$ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\sin(\omega t_m)=0 \;\Rightarrow\; \omega t_m=n\pi \;\Rightarrow\; t_m=\frac{n\pi}{\omega}\quad , n=1,2,3,... \tag{۶-۳۲}$$

بدیهی است اگر $t_m<t_d$ باشد، پاسخ حدکثر در مرحلهٔ اول اتفاق می افتد. بنابراین در این حالت نیز شرط اینکه پاسخ حدکثر در مرحلهٔ اول باشد عبارت است از :

$$\frac{\pi}{\omega}<t_d \;\Rightarrow\; t_d>\frac{T}{2} \tag{۶-۳۳}$$

در صورتیکه این شرط برقرار باشد، مقدار پاسخ حداکثر برابر است با:

$$u_{I,max}(t)=\frac{P_0}{k}\left[1\text{-}\cos\left(\omega\frac{\pi}{\omega}\right)\right]=2\frac{P_0}{k} \qquad (۶-۳۴)$$

با توجه به تعریف بار ضربه ای، می توان گفت ، در صورتی بار مستطیلی ضربه ای محسوب می شود که $t_d \leq T/2$. در این صورت پاسخ حداکثر در مرحلهٔ ارتعاش آزاد اتفاق می افتد. برای محاسبهٔ پاسخ حداکثر در این حالت رابطهٔ $u_{II}(t)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$u_{II}(t)=\frac{P_0}{k}\left[\cos(\omega t)\left(\cos(\omega t_d)-1\right)+\sin(\omega t)\left(\sin(\omega t_d)\right)\right] \qquad (۶-۳۵)$$

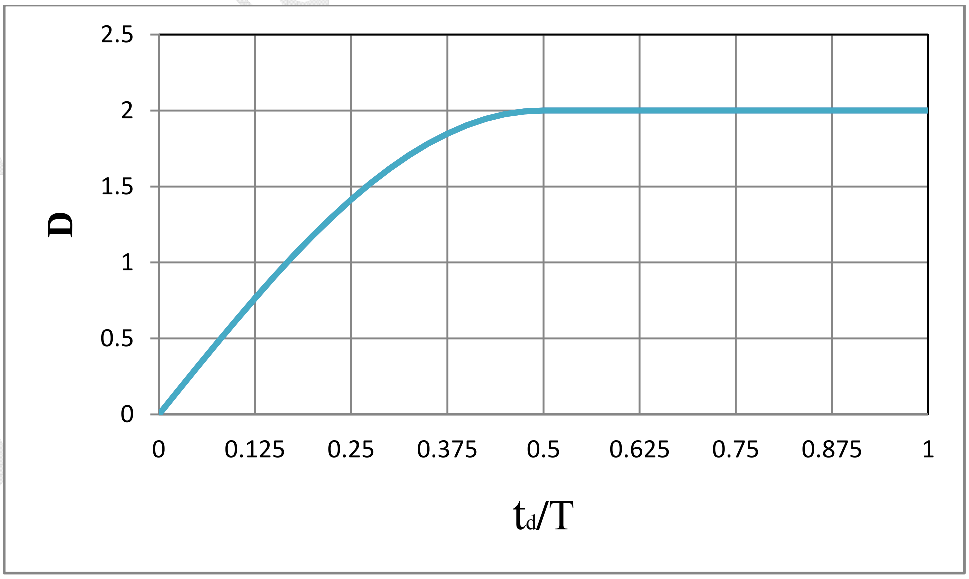
بنابراین پاسخ حداکثر در این حالت برابر می شود با:

$$u_{II,max}=\frac{P_0}{k}\sqrt{\left(\cos(\omega t_d)-1\right)^2+\left(\sin(\omega t_d)\right)^2}=\frac{P_0}{k}\sqrt{2-2\cos(\omega t_d)} \qquad (۶-۳۶)$$

بنابراین ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای بار مستطیلی به صورت زیر خواهد شد:

$$D=\begin{cases} 2 & \frac{t_d}{T}>0.5 \\ \sqrt{2-2\cos(\omega t_d)} & \frac{t_d}{T}\leq 0.5 \end{cases} \qquad (۶-۳۷)$$

نمودار ضریب بزرگنمایی دینامیکی بار مستطیلی در شکل (۶-۷) ترسیم شده است.



شکل ۶-۷ نمودار ضریب بزرگنمایی بار مستطیلی

مثال : یک سیستم یک درجه آزاد به جرم ۲۷۰ تن و سختی $k=2\times10^6\ KN/m$ تحت اثر نیروی مستطیلی با مقدار ۴۵۰۰ کیلونیوتن قرار گرفته است. حداکثر تغییر مکان و نیروی وارد بر آن را در حالت های زیر بدست آورید:

(الف) مدت زمان تأثیر نیرو $t_d=0.2\ sec$ باشد.

(ب) مدت زمان تأثیر نیرو $t_d=0.02\ sec$ باشد.

حل:

محاسبهٔ فرکانس و زمان تناوب سیستم :

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{2\times10^6}{270}}=86.066\ rad/sec \;\Rightarrow\; T=\frac{2\pi}{\omega}=0.073\ sec$$

(الف)

$$t_d=0.05\ sec \;\Rightarrow\; \frac{t_d}{T}=1.8315 \;\Rightarrow\; D=2$$

در این حالت بار به صورت ضربه ای نیست.

$$u_{max}=D\times\frac{P_0}{k}=2\times\frac{4500}{2\times10^6}=0.0045\ m=4.5\ mm$$
$$f_{s,max}=ku_{max}=D\times P_0=2\times4500=9000\ KN$$

(ب)

$$t_d=0.005\ sec \;\Rightarrow\; \frac{t_d}{T}=0.18315 \;\Rightarrow\; D=\sqrt{2-2\cos\left(86.066\times0.005\right)}=0.427$$

در این حالت بار به صورت ضربه ای است.

$$u_{max}=D\times\frac{P_0}{k}=0.427\times\frac{4500}{2\times10^6}=0.0096\ m=0.96\ mm$$
$$f_{s,max}=ku_{max}=D\times P_0=0.427\times4500=1921\ KN$$

ملاحظه می شود که با کاهش مدت زمان تأثیر نیرو تغییرمکان و نیرو نیز کم می شوند. بنابراین هر چه مدت زمان تأثیر نیرو کمتر باشد، نیروی الاستیک کمتر و در نتیجه نیروی اینرسی بیشتر خواهد شد. پس در بارهای ضربه ای بهتر است که جرم سیستم بیشتر باشد.

٤-٦ محاسبهٔ شتاب حداکثر

برای محاسبهٔ نیروی وارد بر سیستم دو راه وجود دارد. ضرب کردن سختی سیستم در تغییر مکان آن و یا ضرب کردن جرم سیستم در شتاب آن. چون محاسبهٔ جرم ساده تر از محاسبهٔ سختی است، معمولاً از روش دوم برای محاسبهٔ نیرو

استفاده می شود. در این بخش روابط لازم برای محاسبهٔ نیروی وارد بر سیستم با استفاده از جرم آن و ضریب بزرگنمایی دینامیکی بدست می آید.

در یک سیستم نامیرا تحت اثر شتاب پایه، معادلهٔ حرکت عبارت است از:

$$f_I(t)+f_s(t)=0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{u}^t(t)+ku(t)=0 \tag{۶-۳۸}$$

که در آن $\ddot{u}^t(t)$ شتاب مطلق سیستم است. بتایراین:

$$m\ddot{u}^t_{max}+ku_{max}=0 \tag{۶-۳۹}$$

که در آن $\ddot{u}^t_{max}$ حداکثر شتاب مطلق سیستم و u_{max} حداکثر تغییرمکان نسبی سیستم است. بنابراین:

$$\ddot{u}^t_{max}=\omega^2 u_{max} \tag{۶-۴۰}$$

اگر به جای u_{max}، مقدار آن را بر حسب ضریب بزرگنمایی قرار دهیم، آنگاه:

$$\ddot{u}^t_{max}=\omega^2\frac{P_0}{k}D \tag{۶-۴۱}$$

قابل ذکر است که اگر سیستم تحت اثر شتاب پایه باشد، آنگاه $P_0=m\ddot{u}_{g,max}$ و در نتیجه:

$$\ddot{u}^t_{max}=D\ddot{u}_{g,max} \tag{۶-۴۲}$$

بنابراین حداکثر نیروی وارد بر سیستم برابر است با:

$$f_{s,max}=m\ddot{u}^t_{max}=D\times m\ddot{u}_{g,max} \tag{۶-۴۳}$$

البته بهتر است این رابطه بجای جرم بر حسب وزن سیستم نوشته شود، در این صورت:

$$f_{s,max}=D\times\frac{\ddot{u}_{g,max}}{g}\times W \tag{۶-۴۴}$$

که در آن W جرم سیستم و g شتاب جاذبه است. از این رابطه می توان حداکثر نیروی وارد بر سیستم را بر اثر شتاب پایه بدست آورد. این رابطه در آیین نامه های زلزله به صورت زیر نوشته میشود:

$$f_{s,max}=CW \tag{۶-۴۵}$$

که در آن C ضریب زلزله نامیده می شود و برابر است با:

$$C=D\times\frac{\ddot{u}_{g,max}}{g} \tag{۶-۴۶}$$

لازم به ذکر است که این رابطه برای سیستم های خطی بدست آمده است. واضح است که در نظر گرفتن این واقعیت که رفتار سازه ها در هنگام زلزله از محدودهٔ خطی خارج و وارد محدودهٔ غیرخطی می شوند، نیروی وارد بر سازه را به میزان قابل توجهی تعدیل مینماید.

مثال: شتاب حداکثر زمین در منطقه ای $0.35g$ برآورد شده است. اگر ضریب بزرگنمایی دینامیکی ۲/۷۵ و وزن سیستم ۲۵۰۰ کیلونیوتن باشد، نیروی وارد بر آن چقدر است؟

حل:

$$C=2.75\times 0.35=0.9625$$
$$f_{s,max}=CW=0.9625\times 2500=2406\ \ KN$$

٦-٥ تحلیل تقریبی سیستم تحت اثر بار ضربه ای

معادلهٔ حرکت سیستم نامیرا به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}(t)+ku(t)=P(t) \qquad (۴۷-۶)$$

این معادله را به صورت زیر نیز می توان حل نوشت:

$$\int_0^{t_d} m\ddot{u}(t)\,dt=\int_0^{t_d} P(t)\,dt-\int_0^{t_d} ku(t)\,dt \qquad (۴۸-۶)$$

اگر مدت زمان تأثیر نیرو t_d کوچک باشد، مقدار انتگرال دوم سمت راست رابطهٔ فوق خیلی کوچک می شود و می توان از آن صرفنظر نمود. پس:

$$m\left[\dot{u}(t_d)-\dot{u}_0\right]\approx P(t)\Delta t \qquad (۴۹-۶)$$

سمت راست این رابطه ضربهٔ وارد بر سیستم و سمت چپ آن تغییر اندازهٔ حرکت آن است. اگر مدت زمان t_d به سمت صفر میل کند، رابطهٔ فوق دقیق خواهد بود که به نام قانون ضربه-اندازهٔ حرکت معروف است. Δt مدت زمان تأثیر نیرو است.

اگر حرکت از سکون شروع شده باشد، آنگاه:

$$\dot{u}(t_d)=\frac{1}{m}P(t)\Delta t \qquad (۵۰-۶)$$

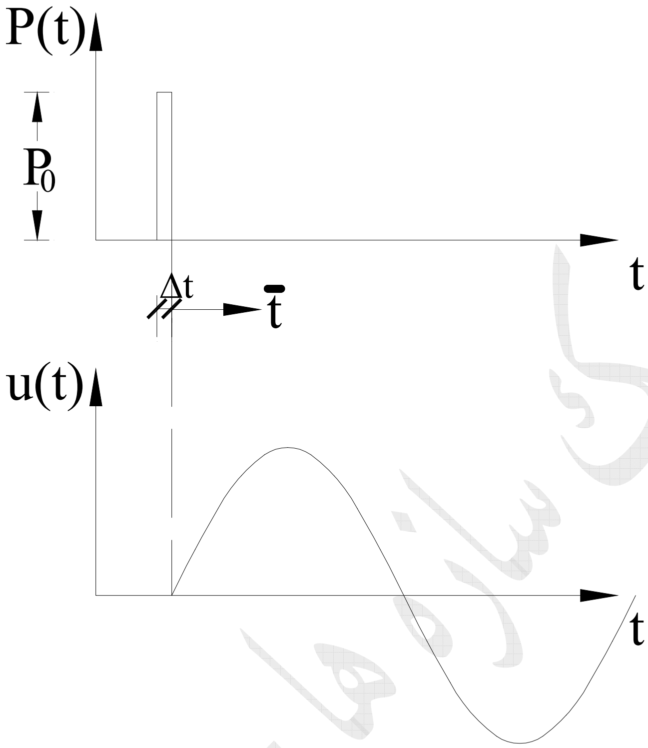
بعد از زمان t_d حرکت سیستم به صورت ارتعاش آزاد است. پس:

$$u(\bar{t})=\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega}\sin(\omega\bar{t})+u(t_d)\cos(\omega\bar{t}) \qquad (۵۱-۶)$$

چون $u(t_d)=0$، با جایگذاری رابطهٔ (۶-۵۰) در رابطهٔ (۶-۵۱) داریم:

$$u(\bar{t})=\frac{P(t)\Delta t}{m\omega}\sin(\omega\bar{t}) \qquad (۵۲-۶)$$

نمودار این معادله در شکل (۶-۸) ترسیم شده است.



شکل ۶-۸ نمودار پاسخ سیستم نامیرا تحت اثر نیروی ضربه ای به روش تقریبی

فصل ۷

نیروهای دینامیکی کلی

General Dynamic Loading

۷-۱ مقدمه

در فصول قبل بارهایی درنظر گرفته می شد که نوشتن یک رابطهٔ ریاضی برای آنها امکان پذیر بود. در این فصل بارهایی در نظر گرفته می شود که هر شکل دلخواهی می توانند داشته باشند. این شکل می تواند توسط یک رابطهٔ ریاضی بیان شود یا یک شکل نامنظم باشد.

برای حل معادلهٔ حرکت در این فصل از اصل جمع آثار قوا استفاده می شود به این ترتیب که نیرو به صورت مجموعه ای از ضربات متوالی در نظر گرفته شده، پاسخ سیستم در برابر هر ضربه بدست آمده و پاسخ ها با یکدیگر جمع می شوند.

۷-۲ پاسخ سیستم در برابر ضربهٔ واحد

در فصل ۶ دیدیم که وارد آمدن ضربه به سیستم سبب تغییر سرعت آن می شود. مثلاً اگر سرعت سیستم قبل از وارد شدن ضربه صفر باشد، پس از وارد شدن ضربه سرعت آن برابر می شود با:

$$\dot{u}=\frac{P(\tau)\Delta\tau}{m} \tag{۷-۱}$$

که در آن $P(\tau)$ مقدار نیرو و $\Delta\tau$ مدت زمان وارد آمدن نیرو و بنابراین $P(\tau)\Delta\tau$ ضربهٔ وارد به سیستم است. پس از اتمام نیرو پاسخ سیستم به صورت ارتعاش آزاد می باشد. شکل (۷-۱-الف) ضربهٔ وارد بر سیستم را نشان می دهد. این ضربه در زمان τ وارد شده است. پاسخ سیستم نامیرا در برابر این ضربه در شکل (۷-۱-ب) و پاسخ سیستم میرا در برابر این ضربه در شکل (۷-۱-پ) نشان داده شده است. در اینجا روابط پاسخ سیستم میرا در برابر ضربه نوشته می شود. بدیهی است پاسخ سیستم نامیرا با قرار دادن $\xi=0$ در روابط ذیل بدست می آید.

پاسخ سیستم نامیرا تحت اثر سرعت اولیهٔ $\dot{u}=P(\tau)\Delta\tau/m$ عبارت است از:

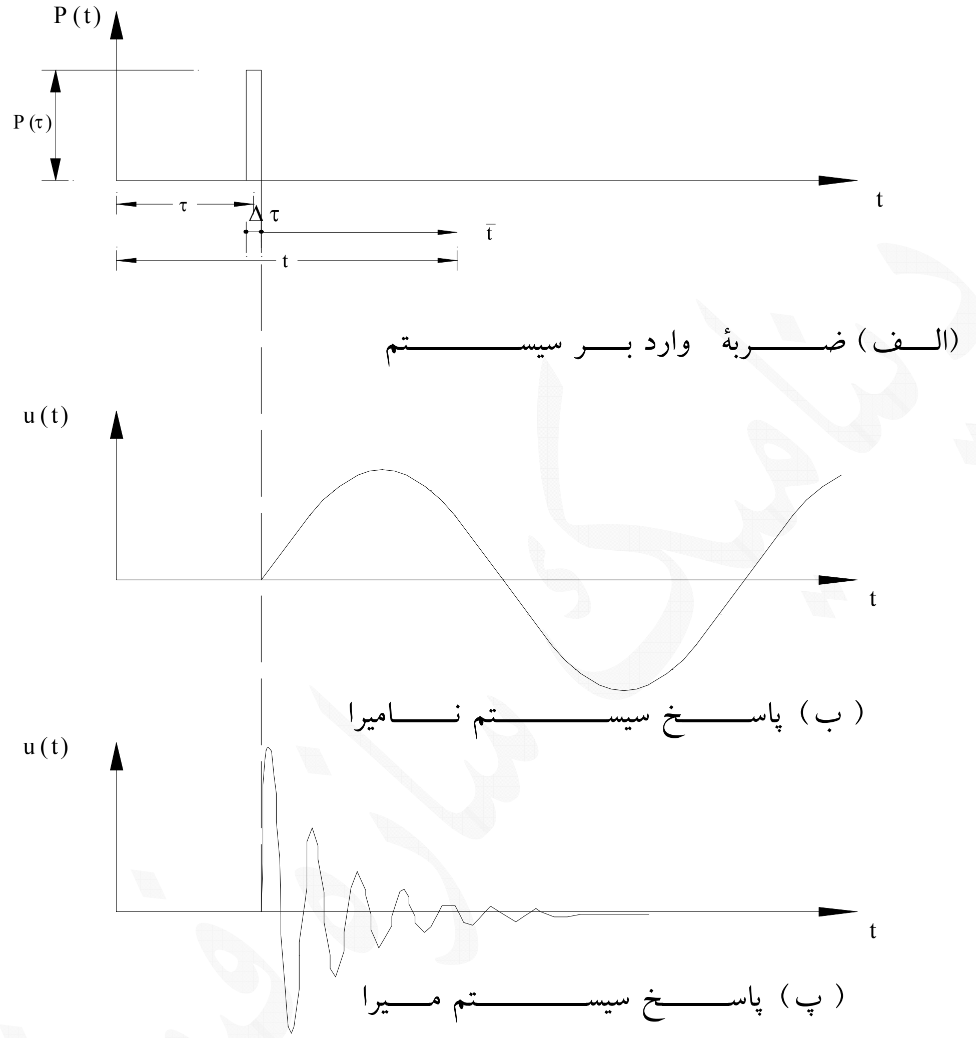
$$u(\bar{t})=\frac{P(\tau)\Delta\tau}{m\omega}e^{-\xi\omega\bar{t}}\sin(\omega\bar{t}) \tag{۷-۲}$$

اگر مقدار ضربهٔ وارد بر سیستم یک باشد، معادلهٔ فوق پاسخ ضربهٔ واحد نامیده شده و با $h(t)$ نشان داده می شود:

$$h(t)=\frac{1}{m\omega}e^{-\xi\omega t}\sin(\omega t) \tag{۷-۳}$$

بنابراین با توجه به اینکه $\bar{t}=t-\tau$ ، پاسخ سیستم در برابر ضربه را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

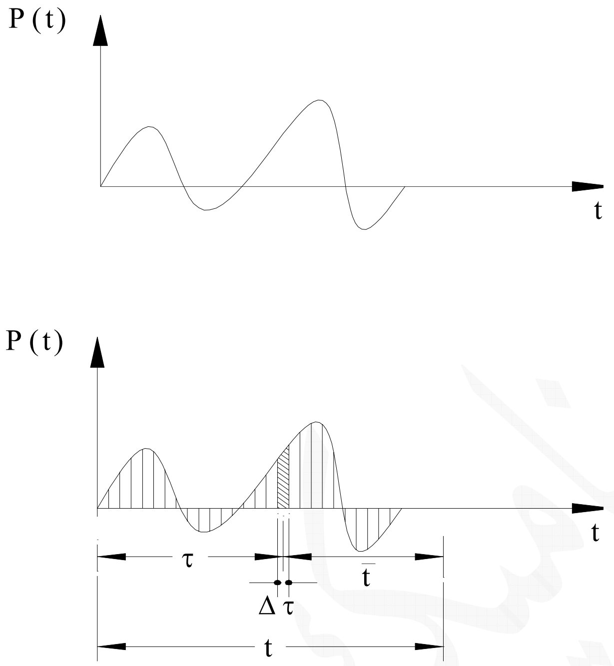
$$u(t)=P(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau \tag{۷-۴}$$



شکل ۷-۱ پاسخ سیستم در برابر ضربه

۷-۳ استفاده از روش جمع آثار قوا برای محاسبهٔ پاسخ سیستم در برابرهای کلی

فرض کنید به سیستم بار کلی مطابق شکل ۷-۲ وارد می شود. محور زمان را به زمان های خیلی کوتاه به اندازهٔ $\Delta\tau$ تقسیم بندی می کنیم. بنابراین بار وارد به یک سری ضربات متوالی تبدیل می شود. سپس پاسخ سازه در برابر هر یک



شکل ۷-۲ بار کلی

از این ضربات بدست می آید. چون رفتار سیستم خطی فرض می شود پس اصل جمع آثار قوا برقرار است و می توان گفت که پاسخ سیستم در برابر کل بار برابر است با مجموع پاسخ های سیستم در برابر هر یک از این ضربات.

$$u(t)=\int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (۵-۷)$$

این رابطه انتگرال کانولوشن نامیده می شود. با جایگزینی رابطهٔ (۷-۳) در این رابطه، رابطهٔ (۷-۶) بدست می آید.

$$u(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\left(\omega_D(t-\tau)\right)d\tau \qquad (۶-۷)$$

این رابطه، انتگرال دوهامل نام دارد. با استفاده از این رابطه می توان پاسخ سیستم را در برابر بار دلخواه $P(t)$ بدست آورد.

اگر به جای نیروی وارد بر سیستم، شتاب پایه وجود داشته باشد، آنگاه $P(\tau)=m\ddot{u}_g(\tau)$ خواهد شد و پاسخ سیستم عبارت است از:

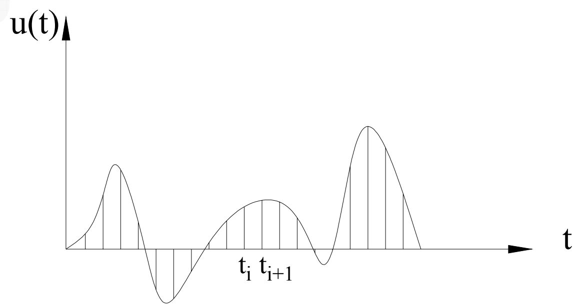
$$u(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin_D\left(\omega(t-\tau)\right)d\tau \qquad (۷-۷)$$

با استفاده از این رابطه می توان پاسخ سیستم در برابر زلزله ای که شتاب آن $\ddot{u}_g(\tau)$ است را بدست آورد.

لازم به ذکر است که اگر معادلهٔ نیرو یا شتاب به فرم ساده ای باشد، انتگرال های فوق را می توان به صورت تحلیلی حساب نمود. در غیر اینصورت لازم است از روش های عددی مثل روش جمع ساده یا روش ذوزنقه ای یا روش سیمسون برای محاسبهٔ آن استفاده کرد. جزییات این روش ها در کتب محاسبات عددی وجود دارد و در اینجا از ذکر جزییات آن خودداری می شود.

۷-٤ روش های گام به گام زمانی

هرچند روش گفته شده در بخش ۷-۳ کلی است و برای هر نوع بارگذاری می تواند بکار برده شود، لیکن وقت گیر بوده و در مسائل واقعی ممکن است بیش از حد طول بکشد. از طرف دیگر روش بخش ۷-۳ برای سیستم های خطی کاربرد دارد و در مسائل غیر خطی نمی توان از آن استفاده نمود. در این بخش از روش های گام به گام زمانی برای محاسبهٔ پاسخ سیستم استفاده می شود. در این روش بارگذاری در فواصل زمانی معینی مشخص است و پاسخ سیستم در این فواصل زمانی محاسبه می شود. به هر یک از این فواصل زمانی یک گام زمانی گفته می شود. پاسخ سازه در انتهای هر گام زمانی بر حسب شرایط اولیه در ابتدای گام زمانی (یعنی تغییر مکان و سرعت) و بارگذاری در این گام محاسبه می گردد. به این ترتیب پاسخ سیستم به صورت گام به گام بدست می آید (شکل ۷-۳). در انتخاب گام های زمانی ۳ نکته باید در نظر گرفته شود:



شکل ۷-۳ محاسبهٔ پاسخ سازه به صورت گام به گام

(الف) همگرایی (convergence) ، با کاهش گام های زمانی پاسخ، به سمت پاسخ دقیق میل خواهد نمود.

(ب) پایداری (stability)، خطاهای گرد کردن ممکن است در هر گام زمانی روی یکدیگر انباشته شوند و پاسخ واگرا گردد.

(پ) دقت (accuracy) پاسخ ها باید به اندازهٔ کافی به پاسخ دقیق نزدیک شوند.

روش های زیادی هستند که پاسخ سیستم را به صورت گام به گام محاسبه می کنند. سه دستهٔ کلی از این روش ها عبارتند از:

(الف) روش مبتنی بر درون یابی تابع نیرو

(ب) روش مبتنی بر تفاضل های محدود سرعت و شتاب

(پ) روش مبتنی بر تغییرات فرضی شتاب

در ادامه این روش ها توضیح داده می شوند.

۷-٤-۱ روش مبتنی بر درون یابی تابع نیرو (روش دقیق یا روش Jennings)

این روش ساده ترین روش گام به گام و در عین حال دقیق ترین روش نیز هست. در این روش معادلهٔ حرکت در یک گام زمانی به طور دقیق حل می شود. با فرض اینکه تغییرمکان و سرعت در ابتدای گام زمانی و مقدار نیرو در ابتدا و انتهای گام زمانی مشخص است، می خواهیم تغییرمکان و سرعت را در انتهای گام زمانی بدست آوریم.

در شکل ۷-۴ نمودار بارگذاری و تغییرمکان سیستم در یک گام زمانی دلخواه نشان داده شده است. چنانچه ملاحظه می شود فرض شده است که بار وارد بر سیستم در یک گام زمانی به صورت خطی تغییر می کند.

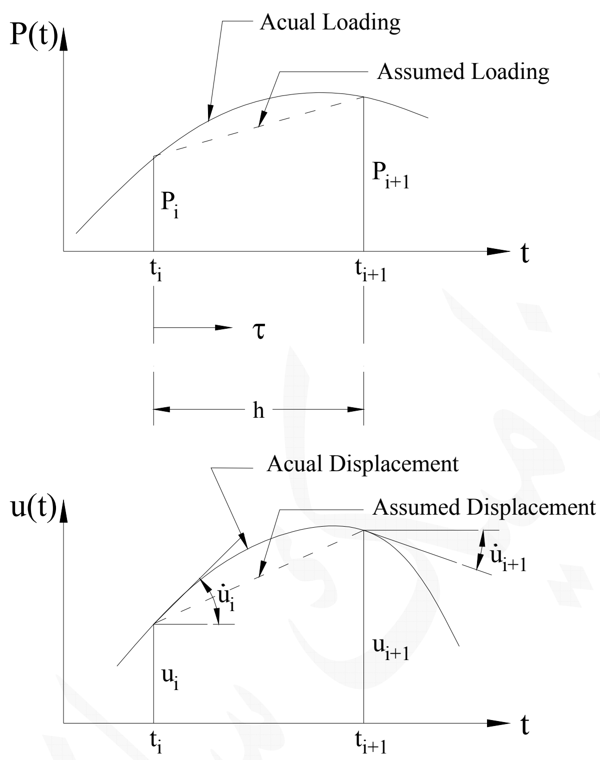
$$P(\tau)=P_i+\frac{P_{i+1}-P_i}{P_i}\tau \qquad (۸-۷)$$

بنابراین معادلهٔ حرکت در گام زمانی به صورت زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P_i+\alpha\tau \qquad (۹-۷)$$

در این رابطه ضریب α برای ساده شدن روابط به صورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\alpha=\frac{P_{i+1}-P_i}{P_i} \qquad (۱۰-۷)$$



شکل ۷-۴

پاسخ معادلهٔ (۷-۹) عبارت است از:

$$u(\tau)=e^{-\xi\omega\tau}\left[A\cos(\omega_D\tau)+B\sin(\omega_D\tau)\right]+\frac{P_i}{K}+\left(\frac{\alpha\tau}{K}-\frac{\alpha c}{K^2}\right) \qquad (۷\text{-}۱۱)$$

لازم به ذکر است که جملهٔ اول رابطهٔ فوق پاسخ ارتعاش آزاد، جملهٔ دوم پاسخ در برابر P_i و جملهٔ سوم پاسخ در برابر $\alpha\tau$ است. A و B ثابت های انتگرال گیری هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. شرایط اولیه برای گام زمانی عبارت است از تغییرمکان و سرعت در ابتدای گام زمانی، یعنی:

$$@\tau=0 : u=u_i \quad , \quad \dot{u}=\dot{u}_i \qquad (۷\text{-}۱۲)$$

با قرار دادن این روابط در رابطهٔ (۷-۱۱)، ضرایب A و B به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} A&=u_i+\frac{\alpha c}{k^2}-\frac{P_i}{K} \\ B&=\frac{1}{\omega_D}\left[\dot{u}_i+\xi\omega\left(u_i+\frac{\alpha c}{k^2}-\frac{P_i}{K}\right)-\frac{\alpha}{K}\right] \end{aligned} \qquad (۷\text{-}۱۳)$$

بنابراین معادلهٔ حرکت در گام زمانی به صورت زیر در می آید:

$$u(\tau)=e^{-\xi\omega\tau}\left\{\left(u_i+\frac{\alpha c}{k^2}-\frac{P_i}{K}\right)\sin(\omega_D\tau)+\frac{1}{\omega_D}\left[\dot{u}_i+\xi\omega\left(u_i+\frac{\alpha c}{k^2}-\frac{P_i}{K}\right)-\frac{\alpha}{K}\right]\cos(\omega_D\tau)\right\}+\frac{P_i}{K}+\frac{\alpha\tau}{K}-\frac{\alpha c}{K^2} \quad (۱۴-۷)$$

برای بدست آوردن تغییرمکان در انتهای گام زمانی، کافیست در رابطهٔ فوق $\tau=h$ قرار داده شود:

$$u_{i+1}=e^{-\xi\omega h}\left\{\left(u_i+\frac{(P_{i+1}-P_i)c}{hk^2}-\frac{P_i}{K}\right)\sin(\omega_D h)+\frac{1}{\omega_D}\left[\dot{u}_i+\xi\omega\left(u_i+\frac{(P_{i+1}-P_i)c}{hk^2}-\frac{P_i}{K}\right)-\frac{(P_{i+1}-P_i)}{hK}\right]\cos(\omega_D h)\right\}+\frac{P_{i+1}}{K}-\frac{(P_{i+1}-P_i)c}{hK^2} \quad (۱۵-۷)$$

لازم به ذکر است که در این رابطه بجای α از رابطهٔ (۷-۱۰) قرار داده شده است. این رابطه را بر حسب u_i ، $\dot{u}_i$ ، P_i و P_{i+1} میتوان دسته بندی نمود و به صورت زیر نوشت:

$$u_{i+1}=A_1u_i+B_1u_{i+1}+C_1P_i+D_1P_{i+1} \quad (۱۶-۷)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}
A_1&=e^{-\xi\omega h}\left[\cos(\omega_D h)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_D h)\right]\\
B_1&=\frac{e^{-\xi\omega h}\sin(\omega_D h)}{\omega_D}\\
C_1&=\frac{1}{K}\left\{\frac{2\xi}{h\omega}+e^{-\xi\omega h}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{h\omega_D}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin(\omega_D h)-\left(1+\frac{2\xi}{h\omega}\right)\cos(\omega_D h)\right]\right\}\\
D_1&=\frac{1}{K}\left\{1-\frac{2\xi}{h\omega}+e^{-\xi\omega h}\left[\frac{2\xi}{h\omega}\cos(\omega_D h)+\left(\frac{2\xi^2-1}{h\omega_D}\right)\sin(\omega_D h)\right]\right\}
\end{aligned} \quad (۱۷-۷)$$

همچنین برای بدست آوردن $\dot{u}_{i+1}$ باید از $u(\tau)$ نسبت به τ مشتق گرفت و سپس بجای $\tau=h$ قرار داده شود. با اینکار خواهیم داشت:

$$\dot{u}_{i+1}=-\xi\omega e^{-\xi\omega h}\left[A\sin(\omega_D h)+B\cos(\omega_D h)\right]+e^{-\xi\omega h}\omega_D\left[A\cos(\omega_D h)-B\sin(\omega_D h)\right]+\frac{\alpha}{K} \quad (۱۸-۷)$$

مجدداً بجای A و B از روابط(۷-۱۳) و بجای α از رابطهٔ (۷-۱۰) در رابطهٔ (۷-۱۸) قرار داده و رابطه حاصل را بر حسب u_i ، $\dot{u}_i$ ، P_i و P_{i+1} دسته بندی نمود. نتیجهٔ کار پس از مقداری عملیات جبری به صورت زیر در می آید:

$$\dot{u}_{i+1}=A_2u_i+B_2u_{i+1}+C_2P_i+D_2P_{i+1} \quad (۱۹-۷)$$

که در آن:

$$A_2=-e^{-\xi\omega h}\left[\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_D h\right)\right]$$
$$B_2=e^{-\xi\omega h}\left[\cos\left(\omega_D h\right)-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_D h\right)\right]$$
$$C_2=\frac{1}{K}\left\{\frac{-1}{h}+e^{-\xi\omega h}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{\xi}{h\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\left(\omega_D h\right)+\frac{1}{h}\cos\left(\omega_D h\right)\right]\right\} \qquad (۷-۲۰)$$
$$D_2=\frac{1}{Kh}\left\{1-e^{-\xi\omega h}\left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_D h\right)+\cos\left(\omega_D h\right)\right]\right\}$$

به طور خلاصه مراحل گام به گام در این روش به این صورت است که ابتدا ضرایب A_1 و ... از روابط (۷-۱۷) و (۷-۲۰) محاسبه می شوند. سپس در هر گام زمانی با داشتن u_i ، $\dot{u}_i$ ، P_i و P_{i+1} با استفاده از روابط (۷-۱۶) و (۷-۱۹) می توان تغییرمکان و سرعت را در پایان گام زمانی بدست آورد. لازم به ذکر است که نیروی وارد بر سیستم مشخص است، پس مقادیر P_i و P_{i+1} در کلیهٔ گام های زمانی معلوم هستند. همچنین در ابتدای حرکت مقادیر u_i ، $\dot{u}_i$ به عنوان شرایط اولیه مشخص هستند. بنابراین همهٔ اطلاعات لازم برای انجام مراحل گام به گام در دست بوده و می توان پاسخ سیستم در برابر هر نیرویی را بدست آورد.

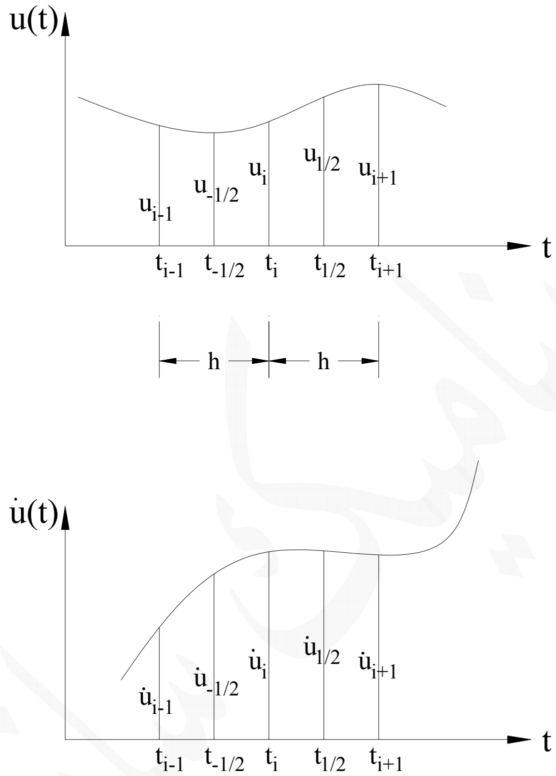
لازم به یادآوری است که شتاب زمین به صورت دیجیتال ثبت می شوند. به عبارت دیگر شتاب زمین در فواصل زمانی معینی (مثلاً ۰/۰۲ یا ۰/۰۰۵ ثانیه) داده شده اند. در این صورت روش ارائه شده دقیق خواهد بود و هیچ خطایی نخواهد داشت.

۷-٤-۲ روش تفاضل های مرکزی (Central Difference Method)

در این روش کمیت های سرعت و شتاب بر حسب تفاضل های تغییرمکان نوشته می شود. چون در معادلهٔ حرکت مشتق دوم وجود دارد، از دو گام زمانی استفاده می شود و زمان های وسط این گام ها نیز به عنوان زمان های کمکی در نظر گرفته می شود(شکل ۷-۵).

با توجه به اینکه سرعت مساوی تغییرات تغییرمکان تقسیم بر تغییرات زمان است، می توان روابط زیر را نوشت:

$$\dot{u}_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} \qquad (۷-۲۱)$$



شکل ۷-۵

$$\dot{u}_{-1/2}=\frac{u_i-u_{i-1}}{h} \quad , \quad \dot{u}_{1/2}=\frac{u_{i+1}-u_i}{h} \tag{۲۲-۷}$$

همچنین شتاب بر ابر است با تغییرات سرعت تقسیم بر تغییرات زمان، پس:

$$\ddot{u}_i=\frac{\dot{u}_{1/2}-\dot{u}_{-1/2}}{h} \tag{۲۳-۷}$$

با قرار دادن روابط (۷-۲۲) در رابطهٔ (۷-۲۳) داریم:

$$\ddot{u}_i=\frac{\dot{u}_{i+1}-2\dot{u}_i+\dot{u}_{i-1}}{h^2} \tag{۲۴-۷}$$

معادلهٔ حرکت در لحظهٔ t_i عبارت است از:

$$m\ddot{u}_i+c\dot{u}_i+ku_i=P_i \tag{۲۵-۷}$$

با جایزینی روابط (۷-۲۱) و (۷-۲۴) در رابطهٔ فوق داریم:

$$m\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+c\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+ku_i=P_i \qquad (۷-۲۶)$$

در این رابطه فقط u_{i+1} مجهول است و سایر کمیت ها در هر گام زمانی مشخص هستند. این رابطه را به صورت زیر می توان تنظیم نمود:

$$\left(\frac{m}{h^2}+\frac{c}{2h}\right)u_{i+1}=P_i-\left(\frac{m}{h^2}-\frac{c}{2h}\right)u_{i-1}-\left(k-\frac{2m}{h^2}\right)u_i \qquad (۷-۲۷)$$

با تعریف روابط زیر

$$\hat{k}=\left(\frac{m}{h^2}+\frac{c}{2h}\right) \quad , \quad \hat{P}_i=P_i-\left(\frac{m}{h^2}-\frac{c}{2h}\right)u_{i-1}-\left(k-\frac{2m}{h^2}\right)u_i \qquad (۷-۲۸)$$

رابطهٔ (۷-۲۷) را به صورت سادهٔ زیر می توان نوشت:

$$\hat{k}u_{i+1}=\hat{P}_i \qquad (۷-۲۹)$$

از حل این معادلهٔ u_{i+1} بدست می آید. توجه شود که برای محاسبه تغییرمکان در انتهای گام زمانی (u_i) به تغییرمکان ابتدای گام زمانی (u_{i-1}) و تغییر مکان گام زمانی قبل نیاز است.

در اولین گام زمانی (یعنی $i=1$) به u_0 و u_{-1} نیاز است. u_0 و $\dot{u}_0$ شرایط اولیهٔ حرکت هستند که معلوم می باشند ولی u_{-1} معلوم نیست. برای محاسبهٔ آن $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$ را با استفاده از روابط (۷-۲۱) و (۷-۲۴) می نویسیم:

$$\dot{u}_0=\frac{u_1-u_{-1}}{2h} \quad , \quad \ddot{u}_0=\frac{u_1-2u_0+u_{-1}}{h^2} \qquad (۷-۳۰)$$

از معادلهٔ اول u_1 را بدست آورده و در رابطهٔ دوم قرار می دهیم:

$$\ddot{u}_0=\frac{2h\dot{u}_0+u_{-1}-2u_0+u_{-1}}{h^2} \qquad (۷-۳۱)$$

از حل آن u_{-1} بدست می آید:

$$u_{-1}=\frac{1}{2}\ddot{u}_0h^2+u_0-h\dot{u}_0 \qquad (۷-۳۲)$$

البته در این رابطه $\ddot{u}_0$ مجهول است که آنهم با استفاده از معادلهٔ حرکت در لحظهٔ صفر محاسبه می شود:

$$m\ddot{u}_0+c\dot{u}_0+ku_0=P_0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u}_0=\frac{1}{m}\left(P_0-c\dot{u}_0-ku_0\right) \qquad (۷-۳۳)$$

بنابراین u_{-1} هم با استفاده از روابط (۷-۳۲) و (۷-۳۳) بدست می آید و می توان معادلهٔ (۷-۲۹) را از گام اول حل نمود و پاسخ سیستم را به صورت گام به گام بدست آورد.

لازم به ذکر است که این روش وقتی پایدار است که :

$$\frac{h}{T}<\frac{1}{\pi} \qquad (۷-۳۴)$$

۷-٤-۳ روش تغییرات فرضی شتاب

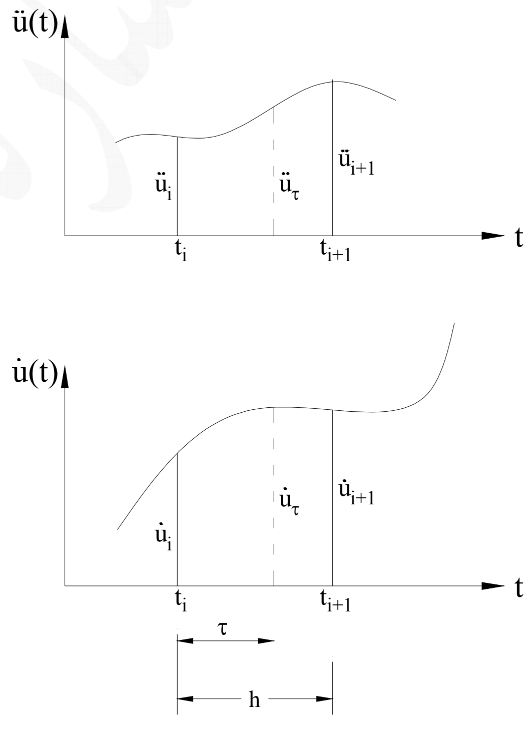
در این روش سرعت از انتگرال گیری از شتاب، و تغییرمکان از انتگرال گیری از سرعت بدست می آید. می دانیم سرعت برابر با انتگرال شتاب است، در نتیجه میتوان نوشت(شکل ۷-۶):

$$\dot{u}(\tau)=\dot{u}_i+\int_0^{\tau}\ddot{u}(\tau)d\tau \qquad (۷-۳۵)$$

همچنین تغییرمکان برابر با انتگرال سرعت است. پس:

$$u(\tau)=u_i+\int_0^{\tau}\dot{u}(\tau)d\tau \qquad (۷-۳۶)$$

بنابراین اگر تابع شتاب معلوم باشد با استفاده از روابط فوق می توان سرعت و تغییر مکان سیستم را بدست آورد. چون تابع شتاب سیستم معلوم نیست، می توان آن را به صورت دلخواهی فرض نمود. معمولاً تابع شتاب یا به صورت ثابت و یا به صورت خطی فرض می شود. این دو نوع تابع فرضی برای شتاب در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۷-۶

(الف) روش شتاب ثابت (Constant Acceleration)

در این روش فرض می شود تابع شتاب در یک گام زمانی ثابت و برابر با میانگین شتاب در ابتدا و انتهای گام زمانی است.

$$\ddot{u}=\frac{1}{2}\left(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}\right) \qquad (۳۷-۷)$$

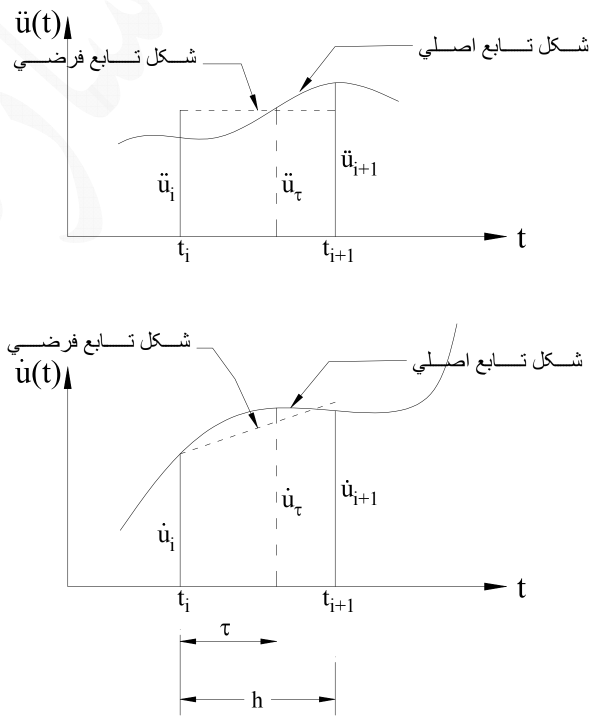
با قرار دادن این رابطه در رابطهٔ (۷-۳۵) سرعت سیستم بدست می آید:

$$\dot{u}(\tau)=\dot{u}_i+\int_0^\tau\left(\frac{\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}}{2}\right)d\tau=\dot{u}_i+\frac{\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}}{2}\tau \qquad (۳۸-۷)$$

با قرار دادن این رابطه در رابطهٔ (۷-۳۶) تغییرمکان سیستم بدست می آید:

$$u(\tau)=u_i+\int_0^\tau\left(\dot{u}_i+\frac{\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}}{2}\tau\right)d\tau=u_i+\dot{u}_i\tau+\frac{\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}}{4}\tau^2 \qquad (۳۹-۷)$$

برای بدست آوردن سرعت و تغییرمکان سیستم در انتهای گام زمانی کافیست در این روابط $\tau=h$ قرار داده شود.



شکل ۷-۷

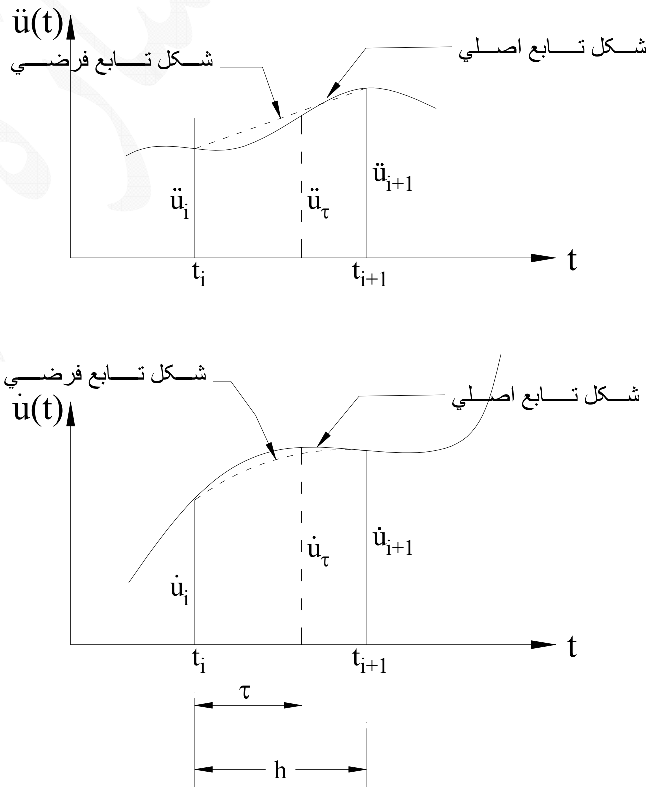
$$\dot{u}_{i+1}=\dot{u}_i+\frac{h}{2}\ddot{u}_i+\frac{h}{2}\ddot{u}_{i+1} \quad (۷-۴۰)$$

$$u_{i+1}=u_i+h\dot{u}_i+\frac{h^2}{4}\ddot{u}_i+\frac{h^2}{4}\ddot{u}_{i+1} \quad (۷-۴۱)$$

این دو رابطه تغییرمکان و سرعت را در انتهای گام زمانی بدست می دهند که البته بر حسب شتاب در انتهای گام زمانی است که خود مجهول می باشد. بنابراین برای اینکه بتوان تغییرمکان و سرعت را بدست آورد باید در این روابط تغییراتی بوجود آورد. قبل از آن روش شتاب خطی توضیح داده می شود.

(الف) روش شتاب خطی (Linear Acceleration)

در این روش فرض می شود در هر گام زمانی شتاب به صورت خطی از $\ddot{u}_i$ در ابتدای گام زمانی تا $\ddot{u}_{i+1}$ در انتهای گام زمانی تغییر می کند(شکل ۷-۸).



شکل ۷-۸

$$\ddot{u}(\tau)=\ddot{u}_i+\frac{\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i}{h}\tau \qquad (۴۲-۷)$$

سرعت سیستم از قرار دادن این رابطه در رابطهٔ (۷-۳۵) بدست می آید.

$$\dot{u}(\tau)=\dot{u}_i+\int_0^\tau\left(\ddot{u}_i+\frac{\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i}{h}\tau\right)d\tau=\dot{u}_i+\ddot{u}_i\tau+\frac{\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i}{2h}\tau^2 \qquad (۴۳-۷)$$

همچنین تغییرمکان سیستم از قرار دادن این رابطه در رابطهٔ (۷-۳۶) بدست می آید.

$$u(\tau)=u_i+\int_0^\tau(\dot{u}(\tau))d\tau=u_i+\int_0^\tau\left(\dot{u}_i+\ddot{u}_i\tau+\frac{\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i}{2h}\tau^2\right)d\tau=u_i+\dot{u}_i\tau+\frac{1}{2}\ddot{u}_i\tau^2+\frac{\tau^3}{6h}(\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i) \qquad (۴۴-۷)$$

برای بدست آوردن سرعت و تغییرمکان در انتهای گام زمانی کافیست در روابط (۷-۴۳) و (۷-۴۴) $\tau=h$ قرار داده شود.

$$\dot{u}_{i+1}=\dot{u}_i+\frac{h}{2}\ddot{u}_i+\frac{h}{2}\ddot{u}_{i+1} \qquad (۴۵-۷)$$

$$u_{i+1}=u_i+h\dot{u}_i+\frac{h^2}{3}\ddot{u}_i+\frac{h^2}{6}\ddot{u}_{i+1} \qquad (۴۶-۷)$$

به طور خلاصه می توان گفت که برای محاسبهٔ سرعت و تغییرمکان سیستم در روش شتاب از روابط (۷-۴۰) و (۷-۴۱) و در روش شتاب خطی از روابط (۷-۴۵) و(۷-۴۶) استفاده می شود. روابط (۷-۴۰) و (۷-۴۵) را می توان با یک رابطه و به صورت زیر نوشت:

$$\dot{u}_{i+1}=\dot{u}_i+(1-\gamma)h\ddot{u}_i+\gamma h\ddot{u}_{i+1} \qquad (۴۷-۷)$$

در هر دو روش شتاب ثابت و شتاب خطی $\gamma=1/2$ می باشد. لازم به ذکر است که این ضریب در اصل ضریب وزنی شتاب انتهای گام زمانی و $1-\gamma$ ضریب وزنی شتاب اابتدای گام زمانی است.

روابط (۷-۴۱) و (۷-۴۶) را نیز می توان با یک رابطه و به صورت زیر نوشت:

$$u_{i+1}=u_i+h\dot{u}_i+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i+\beta h^2\ddot{u}_{i+1} \qquad (۴۸-۷)$$

در روش شتاب ثابت $\beta=1/4$ و در روش شتاب خطی $\beta=1/6$ است. روابط (۷-۴۷) و (۷-۴۸) به روش Newmark-β مشهور هستند.

لازم به ذکر است که ثابت می شود که روش شتاب ثابت به طور بی قید و شرط پایدار است اما روش شتاب خطی به شرطی پایدار است که $\frac{h}{T}<\frac{\sqrt{3}}{\pi}=0.55$.

همانطور که قبلاً گفته شد برای محاسبهٔ سرعت و تغییرمکان از روابط (۷-۴۷) و (۷-۴۸) به شتاب در انتهای گام زمانی نیاز است ولی شتاب انتهای گام زمانی به شرطی بدست می آیند که تغییرمکان و سرعت در انتهای گام زمانی محاسبه شده باشد. به این روابط، فرمولاسیون ضمنی (Implicit Formulation) گفته می شود. برای اینکه تغییرمکان و سرعت در انتهای گام زمانی بدست آید این فرمولاسیون باید به فرمولاسیون صریح (Explicit Formulation) تبدیل شود. این کار در ادامه انجام خواهد شد.

از رابطهٔ (۷-۴۸) بدست آورده می شود:

$$\ddot{u}_{i+1}=\frac{1}{\beta h^2}\left[u_{i+1}-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right] \tag{۷-۴۹}$$

این رابطه در رابطهٔ (۷-۴۷) قرار داده می شود:

$$\dot{u}_{i+1}=\dot{u}_i+(1-\gamma)h\ddot{u}_i+\frac{\gamma}{\beta h}\left[u_{i+1}-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right] \tag{۷-۵۰}$$

معادلهٔ حرکت در لحظهٔ t_{i+1} عبارت است از:

$$m\ddot{u}_{i+1}+c\dot{u}_{i+1}+ku_{i+1}=P_{i+1} \tag{۷-۵۱}$$

روابط (۷-۴۹) و (۷-۵۰) را در رابطهٔ (۷-۵۱) قرار می دهیم:

$$\frac{m}{\beta h^2}\left[u_{i+1}-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right]+c\left\{\dot{u}_i+(1-\gamma)h\ddot{u}_i+\frac{\gamma}{\beta h}\left[u_{i+1}-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right]\right\}+ku_{i+1}=P_{i+1} \tag{۷-۵۲}$$

در این رابطه فقط u_{i+1} مجهول است. این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{m}{\beta h^2}+\frac{c\gamma}{\beta h}+k\right)u_{i+1}=P_{i+1}-\frac{m}{\beta h^2}\left[-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right]-c\left\{\dot{u}_i+(1-\gamma)h\ddot{u}_i+\frac{\gamma}{\beta h}\left[-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right]\right\} \tag{۷-۵۳}$$

و یا به طور خلاصه:

$$\hat{k}u_{i+1}=\hat{P}_{i+1} \tag{۷-۵۴}$$

که در آن:

$$\hat{k}=\frac{m}{\beta h^2}+\frac{c\gamma}{\beta h}+k \quad , \quad \hat{P}_{i+1}=P_{i+1}-\frac{m}{\beta h^2}\left[-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right]-c\left\{\dot{u}_i+(1-\gamma)h\ddot{u}_i+\frac{\gamma}{\beta h}\left[-u_i-h\dot{u}_i-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{u}_i\right]\right\} \tag{۷-۵۵}$$

ملاحظه می شود که در یک گام زمانی کلیهٔ پارامترهای رابطهٔ (۷-۵۴) معلوم هستند و از حل آن می توان u_{i+1} را بدست آورد و آنگاه با استفاده از روابط (۷-۴۹) و (۷-۵۰) شتاب و سرعت در پایان گام زمانی را نیز بدست می آید.

In the Name of God

Dynamics of Structures

Problems Set *Impulsive Loading*

1. **Consider a basic SDOF dynamic system with the following properties: W = 2700 N and k = 200 KN/m. Assume that it is subjected to a half sine-wave impulse of amplitude $P_0 = 2250\,\mathrm{N}$ and duration $t_d = 0.15\,\mathrm{sec}$. Determine:**

   (*a*) The time at which the maximum response will occur.

   (*b*) The maximum spring force produced by this loading. Check this result with that obtained by use of response spectrum curve(Fig. P1).

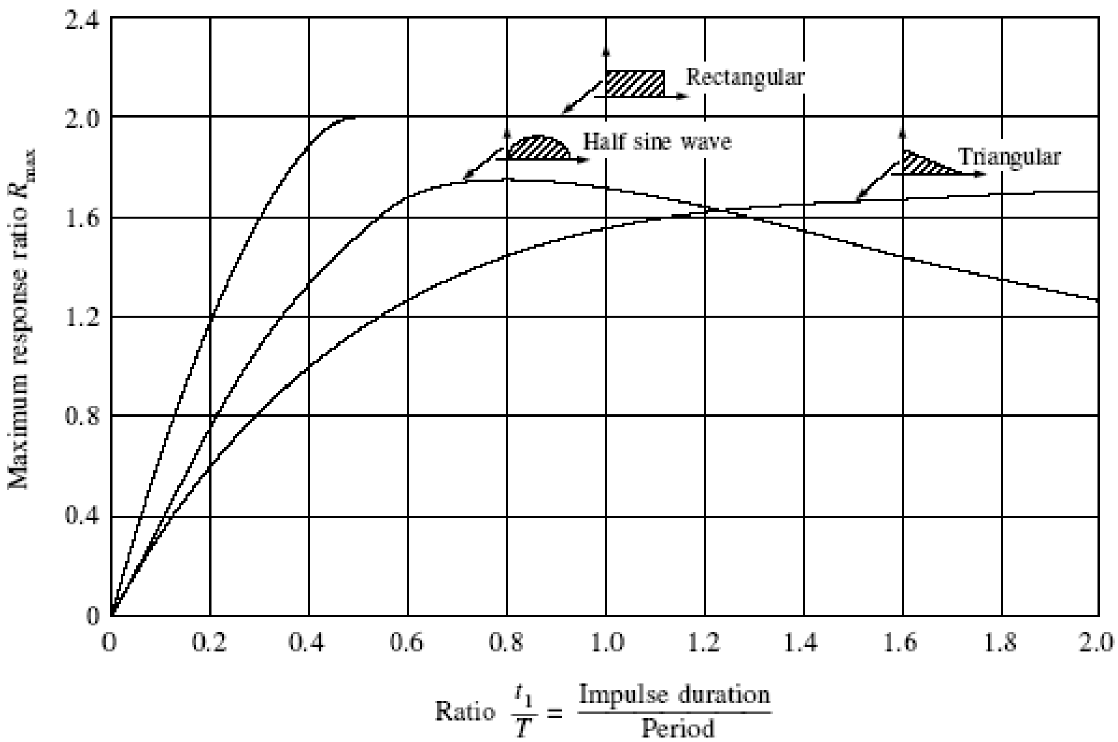


Fig. P1 Displacement-response spectra (shock spectra) for three types of impulse

2. A triangular impulse that increases linearly from zero to the peak value is expressed as $P(t) = P_0 \left(t/t_d \right) \quad \left(0 < t < t_d \right)$ **.**

(*a*) Derive an expression for the response of a SDOF structure to this loading, starting from "at rest" conditions.

(*b*) Determine the maximum response ratio

$$R_{max} = \frac{u_{max}}{P_0/K}$$

resulting from this loading if $t_d = \dfrac{3\pi}{\omega}$ **.**

3. A quarter cosine-wave impulse is expressed as :

$$P(t) = P_0 \cos(\overline{\omega} t) \qquad 0 < t < \frac{2\pi}{\overline{\omega}}$$

(*a*) Derive an expression for the response to this impulse, starting from rest.

(*b*) Determine the maximum response ratio

$$R_{max} = \frac{u_{max}}{P_0/K} \qquad \textbf{if} \qquad \overline{\omega} = \omega$$

4. A basic SDOF system, having the following properties, k=4000 KN/m and m=700 Ton, is subjected to a triangular impulse of the form of Fig. P4 with $P_0 = 68\,\mathrm{KN}$ **and** $\mathbf{t_d}$ **= 0.15 T.**

(*a*) Using the shock spectra of Fig. P1, determine the maximum spring force $\mathbf{f_{s,max}}$**.**

(*b*) Using approximate method, compute approximately the maximum displacement and spring force; and compare with the result of part *a*.

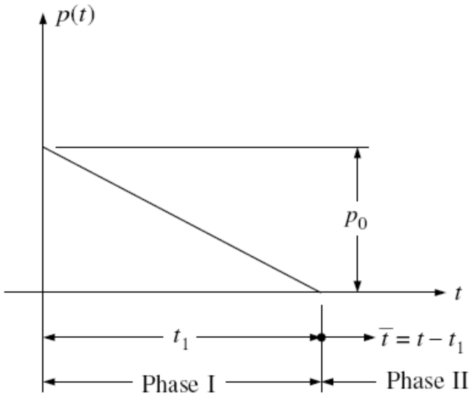


Fig. P4

5. The water tank of Fig. P5(*a*) can be treated as a SDOF structure with the following properties: m = 700 Ton, and k = 8000 KN/m. As a result of an explosion, the tank is subjected to the dynamic-load history shown in Fig. P5(*b*). Compute approximately the maximum overturning moment M_0 at the base of the tower using approximate method and evaluating the impulse integral by means of Simpson's rule:

$$\int P(t)dt = \frac{\Delta t}{3}\left(P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + P_4\right)$$

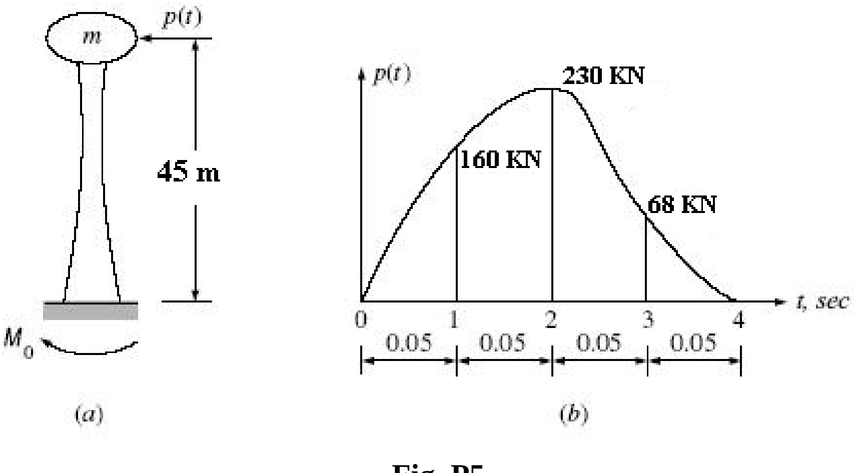


Fig. P5

In the Name of God

Dynamics of Structures

Problems Set *Impulsive Loading*

1. **Consider a basic SDOF dynamic system with the following properties: W = 2700 N and k = 200 KN/m. Assume that it is subjected to a half sine-wave impulse of amplitude $P_0 = 2250\,N$ and duration $t_d = 0.15\,sec$. Determine:**

   (*a*) The time at which the maximum response will occur.

   (*b*) The maximum spring force produced by this loading. Check this result with that obtained by use of response spectrum curve(Fig. P1).

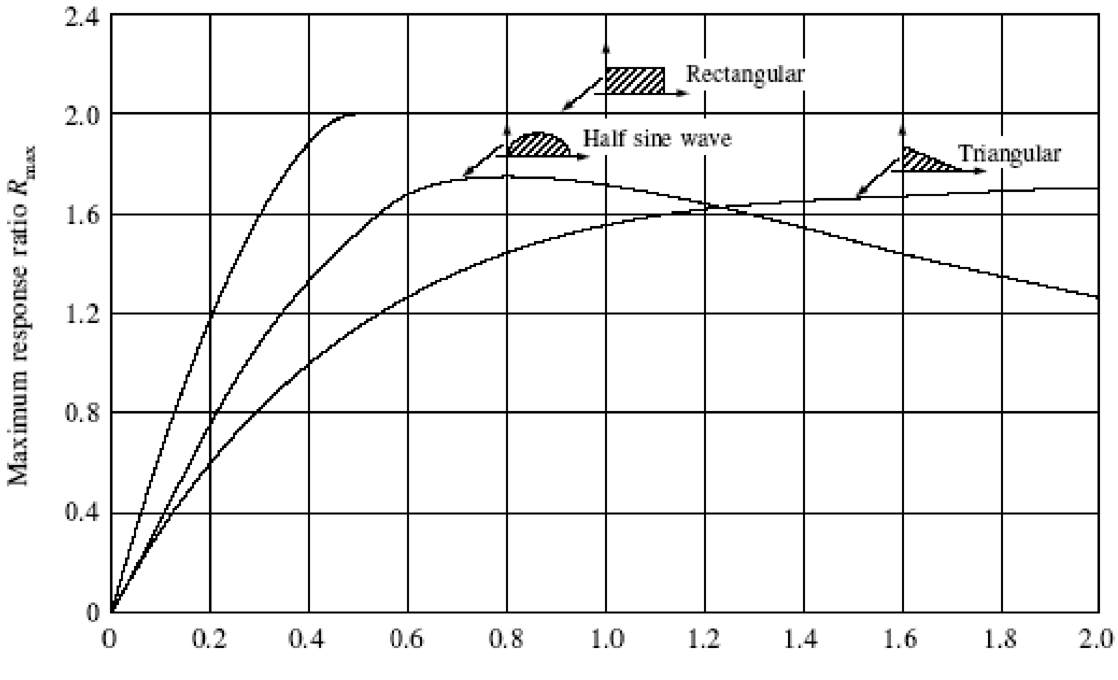


Fig. P1 Displacement-response spectra (shock spectra) for three types of impulse

2. A triangular impulse that increases linearly from zero to the peak value is expressed as $P(t) = P_0\left(t/t_d\right) \; \left(0 < t < t_d\right)$ **.**

(*a*) Derive an expression for the response of a SDOF structure to this loading, starting from "at rest" conditions.

(*b*) Determine the maximum response ratio

$$R_{max} = \frac{u_{max}}{P_0/K}$$

resulting from this loading if $t_d = \dfrac{3\pi}{\omega}$ **.**

3. A quarter cosine-wave impulse is expressed as :

$$P(t) = P_0 \cos(\overline{\omega}t) \qquad 0 < t < \frac{2\pi}{\overline{\omega}}$$

(*a*) Derive an expression for the response to this impulse, starting from rest.

(*b*) Determine the maximum response ratio

$$R_{max} = \frac{u_{max}}{P_0/K} \qquad \text{if} \qquad \overline{\omega} = \omega$$

4. A basic SDOF system, having the following properties, k=4000 KN/m and m=700 Ton, is subjected to a triangular impulse of the form of Fig. P4 with $P_0 = 68\,\text{KN}$ **and** t_d **= 0.15 T.**

(*a*) Using the shock spectra of Fig. P1, determine the maximum spring force $f_{s,max}$**.**

(*b*) Using approximate method, compute approximately the maximum displacement and spring force; and compare with the result of part *a*.

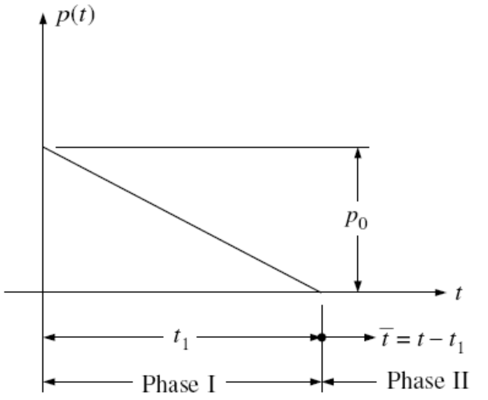


Fig. P4

5. **The water tank of Fig. P5(*a*) can be treated as a SDOF structure with the following properties: m = 700 Ton, and k = 8000 KN/m. As a result of an explosion, the tank is subjected to the dynamic-load history shown in Fig. P5(*b*). Compute approximately the maximum overturning moment M_0 at the base of the tower using approximate method and evaluating the impulse integral by means of Simpson's rule:**

$$\int P(t)dt = \frac{\Delta t}{3}\left(P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + P_4\right)$$

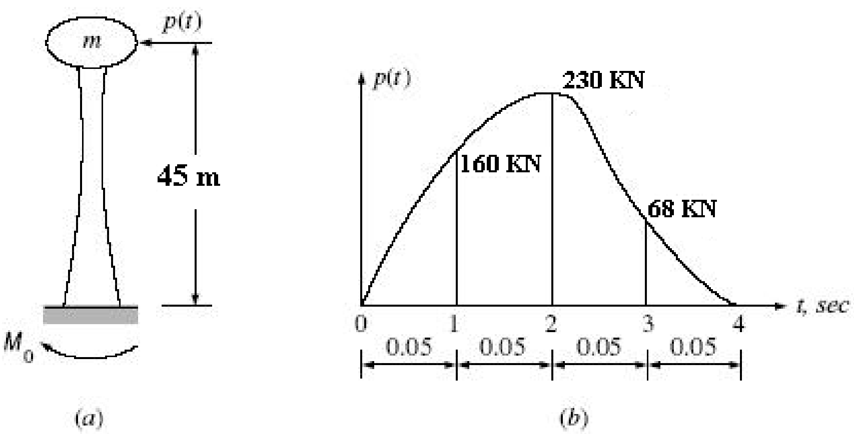


Fig. P5

In The Name Of God

Dynamics of Structures

Problem set #1 *Free Vibration*

1- For the system of Fig. P1, determine:

(a)the equivalent stiffness

(b)the natural frequency and period.

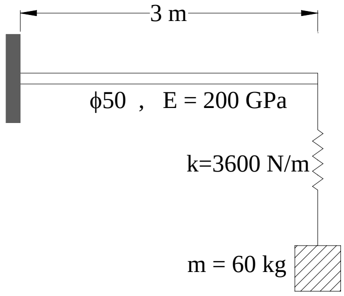


Fig. P1

2- The mass m of the building of Fig. P2 is 90 ton and the building is set into free vibration by releasing it (at time t = 0) from a displacement of 30 mm. If the maximum displacement on the return swing is 22 mm at time t = 0.64 sec, determine:

(*a*) the lateral spring stiffness k

(*b*) the damping ratio ξ

(*c*) the damping coefficient c

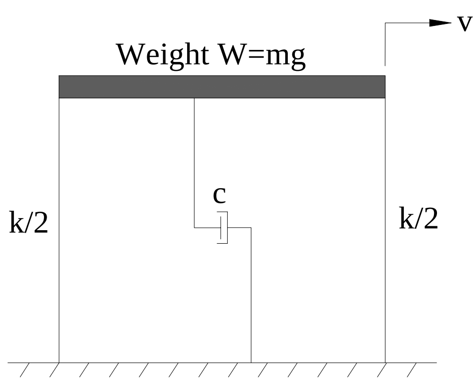


Fig. P2

3- Assume that the mass and stiffness of the structure of Fig. P2 are as follows: m = 350 ton, k = 8000 kN/m. If the system is set into free vibration with the initial conditions v(0) = 1.8 cm and $\dot{v}_0 = 142$ mm/sec, determine the displacement and velocity at t = 1.0 sec, assuming:

(*a*) c = 0 (undamped system)

(*b*) c = 490 kN.sec/m

4- Assume that the mass and stiffness of the system of Fig. P2 are m = 875 ton and k = 4000 kN/m, and that it is undamped. If the initial displacement is v(0) = 46 mm, and the displacement at t = 1.2 sec is also 46 mm, determine:

(*a*) the displacement at t = 2.4 sec

(*b*) the amplitude of free vibration ρ

5- Assume that the beam is rigid.

(a) Calculate the natural frequency and period.

(b) Compare the results with the SAP2000 program.

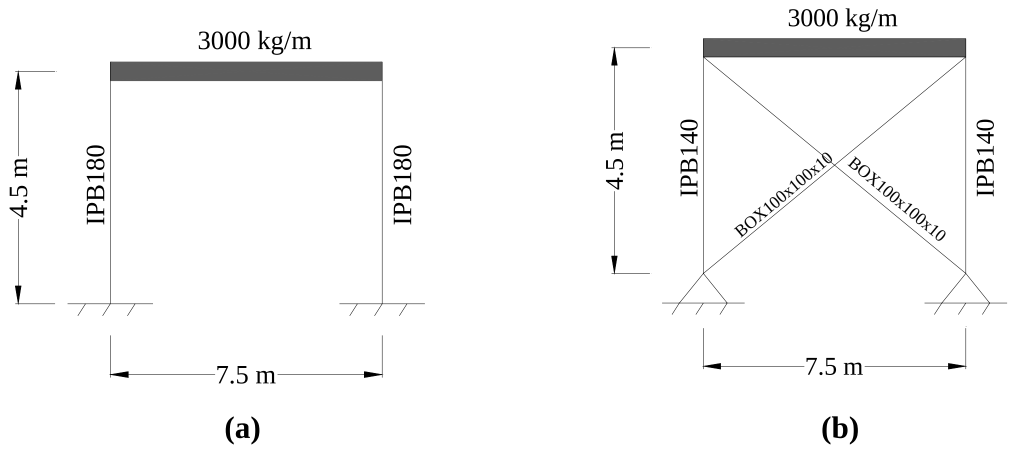


Fig. P5

6- The one story frame shown in Fig. P6 is subjected to the initial conditions $v_0 = 12.7\ \text{mm}$ and $\dot{v}_0 = 25.4\ \text{mm/sec}$. Determine:

(a) The lateral displacement equation of the rigid beam.

(b) The equation of base shear and overturning moment.

(c) The equation of bending moment and shear force in columns.

(c) The maximum displacement of the beam, shear force and bending moment of the column.

h= 3 m L=6 m $I=101\times10^{-6}\ m^4$ E=204 GPa

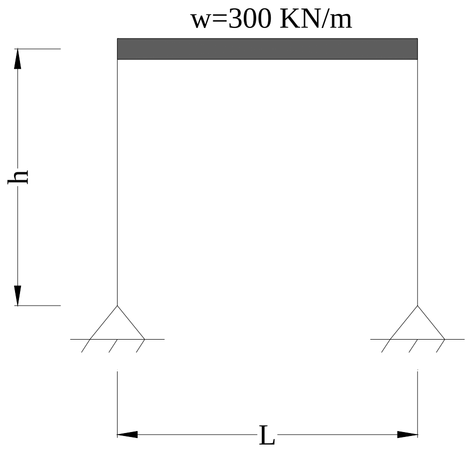


Fig. P6