① $\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$

$b(t) = 0$ $\Rightarrow$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همگن $\Rightarrow$ $y(t) = c\, e^{-\int a(t)\,dt}$

$y(t_0) = y_0$ $\Rightarrow$ ~ ~ ~ ~ ~ ~ $\Rightarrow$ $y(t) = \frac{y(t_0)}{y_0}\, e^{-\int a(t)\,dt}$

② $\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$ $\Rightarrow$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن

$b(t) \neq 0$

مثال: $t\frac{dy}{dt} + y = 2t \quad (t>0)$

بررسی خطی بودن $\leftarrow t \neq 0$ ✓

$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = 2 \longrightarrow$ خطی

$t\frac{dy}{dt} + y = 2t \;=\; \frac{d}{dt}(ty) = 2t$

از طرفین نسبت به t انتگرال می‌گیریم $\longrightarrow ty = t^2 + c \Rightarrow y(t) = \frac{t^2+c}{t} = t + \frac{c}{t}$

به صورت کلی: $\frac{d}{dt}(\text{یه چیزی}) = b(t)$

$\underbrace{\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y}_{\mu(t)\ \text{تابعی پیوسته}} = \mu(t)b(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)b(t)$ ★

$\cancel{\mu(t)\frac{dy}{dt}} + \mu(t)a(t)y = \cancel{\mu(t)\frac{dy}{dt}} + \frac{d\mu(t)}{dt}y \Rightarrow \frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)a(t)$

(+) ← a(t) چون اول طرف معادله در واقع a(t)- هستش.

$\Rightarrow \frac{\frac{d\mu(t)}{dt}}{\mu(t)} = a(t) \longrightarrow \mu(t) = c\, e^{\int a(t)\,d(t)}$

از اونجایی که دنبال یک $\mu(t)$ هستیم با قرار دادن $c=1$ ساده‌ترین را انتخاب می‌کنیم.

if $c=1 \longrightarrow \mu(t) = e^{\int a(t)\,dt}$ $\longrightarrow$ عامل / فاکتور انتگرال ساز

از طرفین $*$ انتگرال می‌گیریم نسبت به t : $\mu(t)y(t) = \int \mu(t)b(t)\,dt + c \longrightarrow y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)b(t)\,dt + c\right)$

$$\longrightarrow y(t) = e^{-\int a(t)\,dt}\left(\int \mu(t)b(t)\,dt + c\right) = \underbrace{c\,e^{-\int a(t)\,dt}}_{\text{جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همگن}} + \underbrace{e^{-\int a(t)\,dt}\int \mu(t)b(t)\,dt}_{\text{جواب خصوصی معادله ناهمگن}}$$

(کلی) جواب عمومی معادله ناهمگن

برای جواب مسئله ناهمگن با مقدار اولیه از طرفین $*$ از t_0 به t انتگرال می‌گیریم

$$\mu(t)y(t) - \mu(t_0)y(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)\,ds$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)\,ds + \mu(t_0)\underbrace{y(t_0)}_{y_0}\right)$$

مثال : $\frac{dy}{dt} + \underset{a(t)}{1}\,y = \underset{b(t)}{\frac{1}{1+t^2}}$, $y(2) = 3$.

از فرمول : $\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt} = e^{\int dt} = e^{t}$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{e^{t}}\left(\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\,ds + 3e^2\right) = \int_2^t \frac{e^{s-t}}{1+s^2}\,ds + 3e^{2-t}$$

مثال : $(1+t^2)\frac{dy}{dt} - 2ty = 1+t^2$

به فرم اولیه می‌نویسیم

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} - \frac{2t}{1+t^2}y = 1 \xrightarrow{\times\mu(t)} \mu(t)\frac{dy}{dt} - \mu(t)\frac{2t}{1+t^2}y = \mu(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)$$

$$\mu(t)\cancel{\frac{dy}{dt}} - \mu(t)\frac{2t}{1+t^2}y = \mu(t)\cancel{\frac{dy}{dt}} + \frac{d\mu(t)}{dt}y \Rightarrow \frac{d\mu(t)}{dt} = -\mu(t)\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt} = e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

حل: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{1+t^2}\,y\right) = \dfrac{1}{1+t^2} \implies \dfrac{1}{1+t^2}\,y = \displaystyle\int \dfrac{1}{1+t^2}\,dt + c$

$$\implies y(t) = (1+t^2)\left(\tan^{-1} t + c\right)$$

مثال: $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t \ , \ y(1) = 2$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)\,2ty = \mu(t)\,t \implies \frac{d}{dt}\left(\mu(t)\,y(t)\right) = \mu(t)\,t$$

$$\implies \cancel{\mu(t)\frac{dy}{dt}} + \mu(t)\,2ty = \cancel{\mu(t)\frac{dy}{dt}} + \frac{d\mu(t)}{dt}\,y \implies \frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = 2t \xrightarrow{\mu(t) = e^{\int 2t\,dt} = e^{t^2}} \frac{d}{dt}\left(e^{t^2} y\right) = e^{t^2} t$$

$$\xrightarrow{\int_1^t} e^{t^2} y(t)\Big|_1^t = \int_1^t s\,e^{s^2}\,ds \implies e^{t^2} y - 2e = \frac{e^{t^2}}{2}\Bigg|_1^t = \frac{e^{t^2}}{2} - \frac{e^1}{2}$$

$$\implies e^{t^2} y = \frac{e^{t^2}}{2} + \frac{3}{2}e \implies$$ جواب نهایی: $y(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}e^{1-t^2}$

مثالی از معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه اول (معادله برنولی)

* $\dfrac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)\,y^n \qquad n \neq 0,1$ $\quad$ $b(t), a(t)$ توابعی پیوسته

حل: $u = y^{1-n} \longrightarrow \dfrac{du}{dt} = (1-n)\,y^{-n}\,\dfrac{dy}{dt}$

$$\xrightarrow[y^{-n}\text{ در}]{\text{طرفین * ضرب}} y^{-n}\frac{dy}{dt} + a(t)\,y^{1-n} = b(t) \xrightarrow{\text{تغییر متغیر میدهیم}} (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dt} + (1-n)\,a(t)\,y^{1-n} = (1-n)\,b(t)$$

$$\frac{du}{dt} + \underbrace{(1-n)\,a(t)}_{a'(t)}\,u = \underbrace{(1-n)\,b(t)}_{b'(t)}$$