



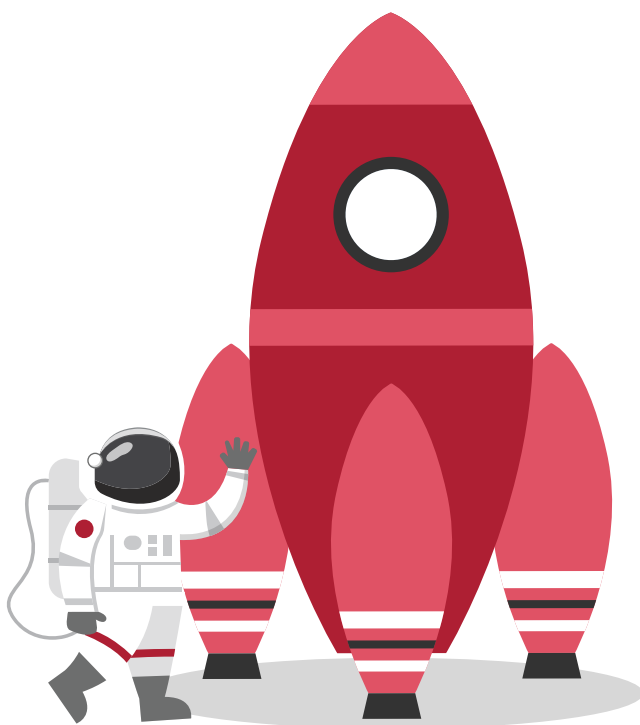
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

ریاضی و آمار ۱



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

ریاضی و آمار ۱ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان ریاضی : عارف بهرام‌نیا

فصل اول: معادله ی درجه ی دوم

معادله و حل مسئله به کمک آن

۱ در مثلثی، اندازه‌ی ضلع بزرگتر از ۲ برابر ضلع کوچکتر یک واحد کمتر و اندازه‌ی ضلع متوسط از ۳ برابر ضلع کوچکتر پنج واحد کمتر است. اگر محیط مثلث ۱۲ باشد. اندازه‌ی اضلاع مثلث را به دست آورید.

۲ علی از برادرش ۸ سال بزرگتر است، ۶ سال بعد سن برادر علی دو برابر می‌شود، در حال حاضر علی چند سال سن دارد؟

۳ جواب معادله $5x + \frac{1}{5} = 2x + \frac{1}{2}$ را به دست آورید.

۴ اگر به دو برابر یک‌سوم عددی ۵ واحد اضافه کنیم، برابر با نصف آن عدد منهای یک است. آن عدد را به دست آورید.

۵ هرکدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.
الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن بعلاوه دو مساوی با سه برابر آن عدد، منهای دو باشد.
ب) مربع عددی برابر با همان عدد بعلاوه عدد یک است.

۶ مجموع پنج عدد زوج متوالی ۷۰ است، بزرگترین عدد مسئله چند است؟

۷ معادله‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید و جواب آن‌ها را به دست آورید.

الف) $\frac{x-1}{4} + \frac{x+1}{3} = \frac{x+2}{5}$
ب) $3x+1 = (4x-3) - (2x-5)$

۸ عددی را بیابید که دو برابر آن به اضافه‌ی ۵ با سه برابر آن، منهای ۲ برابر باشد.

۹ اگر $x = 2$ جواب معادله $mx + m - 1 = 1 + \frac{x}{2}$ باشد، مقدار m را به دست آورید.

۱۰ عرض یک مستطیل، نصف طول آن است. اگر محیط مستطیل ۱۵ واحد باشد، اختلاف طول و عرض آن چند واحد است؟



۱۱) اگر در یک قالی با ابعاد $2,10\text{ m} \times 2,80\text{ m}$ (که عموماً 3×2 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $5,880,000$ عدد باشد:

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره 1 cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

پ) یک قالی‌باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند 600 گره قالی ببافد. اگر این قالی‌باف 5 روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

ت) اگر این قالی‌باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت 35 میلیون تومان بفروشد، این قالی‌باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟



۱۲) با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب‌آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در

پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف 64 هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

۱۳) در هر مورد جای خالی را با یک عدد مناسب کامل کنید.

الف) محیط مربعی که اندازه قطر آن برابر $2\sqrt{5}$ باشد، برابر است.

ب) معادله درجه دوم $(x-1)^2 =$ دارای ریشه مضاعف $x=1$ است.

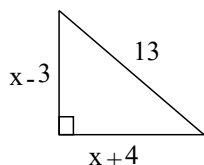
پ) مجموع ریشه‌های معادله $4x^2 + 3x - 7 = 0$ برابر است.

حل معادله درجه ۲ به روش تجزیه

۱۴) مقدار مساحت دایره‌ای، 4 برابر مقدار محیط همان دایره است. مساحت دایره را بیابید.

۱۵) علی یک عدد طبیعی را با مربع خودش جمع کرده است و حاصل برابر 42 شده است. آن عدد کدام است؟

۱۶) در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو مساحت مثلث را محاسبه کنید.



۱۷) معادله $9x^2 + 24x - 33 = 0$ را به روش تجزیه حل کنید.



۱۸) معادله درجه دومی را بنویسید که ریشه‌های آن ۷ و ۶- باشد.

۱۹) معادله درجه دومی بنویسید که $x = 2$ و $x = -3$ جواب‌های آن باشد.

۲۰) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف

$$2x^2 - 8 = 0$$

ب

$$(x + 2)(x - 3) = x - 3$$

پ

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

ت

$$x^2 = x - \frac{1}{4}$$

ث

$$2x^2 - 8x = 0$$

ج

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

چ

$$\frac{x^2}{3} = x$$

ح

$$x^2 = 5 - x^2$$

خ

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

د

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$



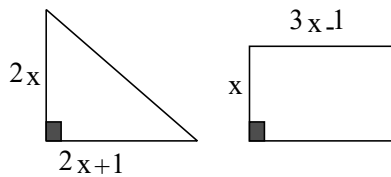
۵

$$(x - 3)^2 = 4$$

۲۱ دو ریشهٔ معادله $x^2 + (5n - 10)x - 25 = 0$ قرینهٔ هم هستند، مقدار n را به دست آورید.

۲۲ عدد طبیعی که مربع آن به اضافهٔ ۵ برابر آن، مساوی ۸۴ باشد.

۲۳ مربع عددی برابر با همان عدد به علاوهٔ عدد دو است آن عدد را پیدا کنید.

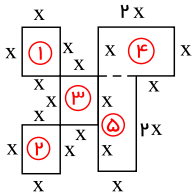


۲۴ اگر مساحت دو شکل روبه‌رو برابر باشد، مقدار x را محاسبه کنید.

۲۵ معادله‌ی درجه‌ی دومی بیابید که ریشه‌های آن $4 + \sqrt{7}$ و $4 - \sqrt{7}$ باشد.

۲۶ طول و عرض مستطیلی به محیط ۲۴ و مساحت ۳۵ را بیابید.

۲۷ اگر در شکل روبه‌رو محیط با مساحت برابر باشد، مطلوب است محاسبهٔ مقدار x :



۲۸ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۱ و ۲ باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۲۹ طرف دوم (جاهای خالی) زیر را به کمک اتحادهای خوانده‌شده کامل کنید.

الف

$$(2x + \frac{1}{2})^2 = \dots + \dots + \frac{1}{4}$$

ب $(2 + \dots)^2 = \dots + 12xy + \dots$

پ

$$(x - 2y)(\dots + \dots) = x^2 - 4y^2$$



ت

$$x^2 - \dots + 12 = (x - 6)(x - 2)$$

ث

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \dots - \dots + \frac{9}{4}$$

۳۰ با استفاده از اتحادها معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $x^2 + 3x - 4 = 0$

۲) $4x^2 - (2 - x)^2 = 0$

۳۱ آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

حل معادله درجه ۲ به روش مربع کامل

۳۲ معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ب

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

پ

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x$$

ت

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

۳۳ در حل معادلات زیر به روش مربع کامل کردن، جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف

$$x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 5x + \dots = -4 + \dots$$

$$(x - \dots)^2 = \dots \rightarrow x - \dots = \dots \begin{cases} \nearrow x = \dots \\ \searrow x = \dots \end{cases}$$



ب

$$3x^2 - 5x = 2$$

$$x^2 - \dots x = \frac{2}{\dots}$$

$$x^2 - \dots x + \dots = \frac{2}{\dots} + \dots$$

$$(x - \dots)^2 = \dots \rightarrow x - \dots = \dots \begin{cases} \nearrow x = \dots \\ \searrow x = \dots \end{cases}$$

حل معادله درجه ۲ به روش کلی یا دلتا

معادله زیر را حل کنید. (۳۴)

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

به ازای چه مقادیری برای m معادله $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$ دارای ریشه مضاعف است؟ (۳۵)

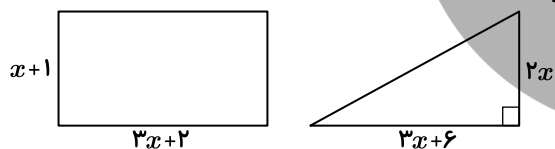
معادلات روبه‌رو را حل کنید. (۳۶)

الف) $x^2 - x + 5 = 0$ ب) $3x(x-3) = -x^2 - 2$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}x - 7 = 0$ کدام است؟ (۳۷)

به ازای چه مقداری از m معادله $2x^2 - 5x + (3m-1) = 0$ ریشه مضاعف دارد؟ (۳۸)

مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ (۳۹)



معادله زیر را به روش دلتا حل کنید. (۴۰)

$$7x^2 - 4x - 3 = 0$$

ثابت کنید معادله $2x^2 - ax - 5 = 0$ همواره دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است. (۴۱)

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش کلی (دلتا) حل کنید. (۴۲)

الف

$$x^2 - x = 0$$



ب

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

پ

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

ت

$$x^2 + 17x - 18 = 0$$

ث

$$3x^2 - x + 4 = 0$$

ج

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

۴۳ کدام یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای دو جواب حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$

ب) $x^2 - x + a = 0$

۴۴ اگر یکی از جواب‌های معادله $x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴۵ به ازای چه مقادیر m معادله $-\sqrt{3}x^2 + 2x + (2m - 8) = 0$ یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد؟

۴۶ به ازای چه مقداری از m مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - 6x - 1 = (m + 3)x^2$ برابر ۲ می‌شود؟

۴۷ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(2x + 3)(x - 5) = (2x - 2)^2$ ب) $x(6x - 4) = (3x + 5)(3x - 2)$

۴۸ چنانچه بدانیم $3k^2 + 6k - m = 0$ و $3k'^2 + 6k' - m = 0$ آنگاه حاصل $k + k'$ کدام است؟

۴۹ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ باشند، مقدار $x_1^2 + x_2^2$ را محاسبه کنید.

۵۰ در معادله درجه‌ی دوم $2x^2 - (m + 1)x + 2(m - 2) = 0$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها باهم برابر است. مقدار m را محاسبه کنید.



- ۵۱) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m+1)x^2 + (2m+1)x + (m+1) = 0$ ، m را به نحوی بیابید که:
 الف) دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد. ب) ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.
 ج) ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

- ۵۲) معادله‌های زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب b و a و c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ب)

$4x^2 + 3x - 7 = 0$

- ۵۳) اگر مجموع ریشه‌های معادله $x(1-x) - 6kx + 4 = 0$ نصف حاصل ضرب ریشه‌ها باشد، مقدار k را به دست آورید.

۵۴) ریشه‌های معادله $64x^2 - 50x - 14 = 0$ را به دست آورید.

۵۵) معادله درجه دوم $mx^2 - mx + n = 0$ تنها دارای یک ریشه است، مقدار $\frac{n}{m}$ را به دست آورید.

۵۶) معادله درجه دوم $x^2 - 5x + m + 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است محدوده m را به دست آورید.

۵۷) اگر یکی از ریشه‌های معادله $mx^2 - 3x - (2m+1) = 0$ برابر -1 باشد، حاصل تفاضل مقدار m از ریشه دیگر این معادله را به دست آورید.

۵۸) معادله درجه دوم $x(2x-5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه مضاعف دارد. مقدار ریشه مضاعف را به دست آورید.

۵۹) به ازای یک مقدار m ، ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ ، معکوس یکدیگرند. مجموع دو ریشه معادله را به دست آورید.

معادلات شامل عبارات گویا

۶۰) مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۶۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) (حل به روش تجزیه) $x^2 - 6x = 0$



ب) (حل به روش فرمول کلی) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

پ) (معادله عبارت گویا) $\frac{4}{2x-1} = \frac{5}{x+2}$

۶۲) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{3x-5}{x+3} = 1$$

ب

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

پ

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

ت

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

ث

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

ج

$$\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$

۶۳) علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه را محاسبه کنید.

۶۴) معادلات گویای زیر را حل کنید.

$$x^2 + 1 = \frac{x+3}{3} \quad \text{ب)} \quad \frac{-x}{x-1} + \frac{2}{1+x} = -1 \quad \text{الف)}$$



۶۵ استخری دو شیر آب A و B دارد. در صورتی که شیر A استخر را ۳ ساعت زودتر از شیر B پر کند و بدانیم اگر دو شیر آب باهم باز باشند استخر در ۲ ساعت پر می‌شود، شیر B به تنهایی استخر را در چند ساعت پر می‌کند؟

۶۶ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف

$$1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$$

ب

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

پ

$$\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

ت

$$\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

۶۷ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف

$$x^2 - 6x = 16 \quad (\text{به روش مربع کامل})$$

ب

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (\text{به روش فرمول کلی})$$

پ

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \quad (\text{معادله عبارت گویا})$$

۶۸ مجموع دو عدد که معکوس یکدیگرند $\frac{13}{6}$ است، قدرمطلق اختلاف دو عدد را به دست آورید.

۶۹ گلدانی نقره‌ای داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است.



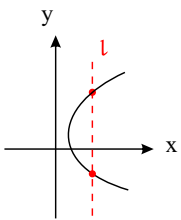
۷۰ به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x = 2$ است؟

۷۱ اگر $x = 3$ تنها جواب قابل قبول معادله $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - ax - 2} = 0$ باشد، مقدار a چقدر است؟

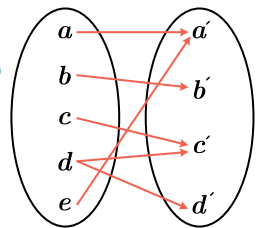
فصل دوم: تابع

مفهوم تابع و انواع نمایش آن

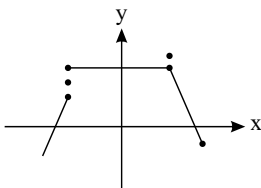
۷۲ آیا نمودار مقابل تابع است؟ چرا؟



۷۳ نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو (و فلش‌های مرتبط با آن)، این رابطه تابع خواهد شد؟



۷۴ حداقل چند نقطه از نمودار زیر را باید حذف کنیم تا در این نمودار، y بیانگر یک تابع بر حسب x باشد؟



۷۵ اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید).

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

۷۶ مشخص کنید کدامیک از روابط زیر یک تابع است.

الف) $\{(1, 5), (5, 5), (1, \sqrt{25})\}$

ب) $\{(2, 3), (3, 3), (2, \sqrt{6})\}$

۷۷ تابعی بنویسید که دامنه آن ۳ عضوی و برد آن ۲ عضوی باشد.



۷۸) مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که رابطه زیر تابع باشد.

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

۷۹) اگر دو زوج مرتب $(a, 3b-6)$ و $(2a-4, 3a)$ نمایش یک نقطه باشند. $2a-b$ کدام است؟

۸۰) الف) در نمودار مختصاتی یک تابع هر خط موازی محور نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) در نمایش مختصاتی تابع در زوج مرتب $(x, y), \dots, y, \dots, x$ نقطه را مشخص می‌کند.

۸۱) در نمایش پیکانی یک تابع از هر عضو دامنه پیکان خارج می‌شود.

۸۲) مشخص کنید کدامیک از روابط زیر تابع است و کدامیک تابع نیست. دلیل خود را توضیح دهید.

الف) $\{(2, 3), (4, 6), (2, 5)\}$

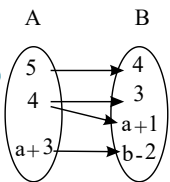
ب) $\{(1, 5), (2, 4), (5, 5)\}$

مربوط به یک تابع باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

x	۲	۲	a
y	a^2	$2a$	۵

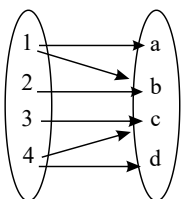
۸۳) اگر جدول

۸۴) اگر نمودار ون مقابل یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.



۸۵) اگر برد تابع $f(x) = 2x^2 + 1$ برابر $\{1, 9\}$ باشد، همه مقادیر ممکن در دامنه تابع را مشخص کنید.

۸۶) اگر بخواهیم نمودار ون روبه‌رو یک تابع باشد، چند فلش را باید حذف کنیم؟



۸۷) اگر رابطه $R = \{(1, 2a+b), (2, 5), (1, 4), (2, a-b)\}$ یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

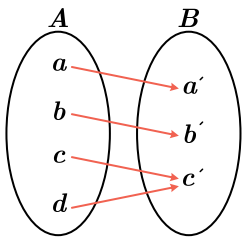
۸۸) رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 1\}$ را به صورت نمودار ون نشان دهید. آیا تابع است؟

۸۹) رابطه $y = x^2 + x - 1$ که در آن $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ است را به شکل مجموعه زوج مرتب‌ها بنویسید.

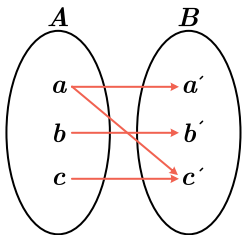
۹۰) اگر دو زوج مرتب $(5x+6, 7y-8)$ و $(3x+2, 6y+4)$ با هم برابر باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.



۹۱ کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



الف کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر نمودار مختصاتی را رسم کنید.



ب

$$f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$$

پ

$$g = \{(1, 1)\}$$

ت

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

ث

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

ج

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2$$

چ

۹۲ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به B) یک تابع نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو از مجموعه A را از مجموعه B بتوان متناظر کرد.



ب مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت (x, y) که در آن x متغیر مستقل است، در صورتی تابع است که

پ یک رابطه از مجموعه A به B در نمایش با نمودار پیکانی در صورتی تابع است که

ت اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود در صورتی این رابطه تابع است که

۹۳ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

الف رابطه بین افراد و کتاب‌های موردعلاقه‌شان یک تابع است.

ب جواب‌های معادله $x^2 - 11x + 24 = 0$ اعداد -3 و -8 است.

پ تابع سود از رابطه $P(x) = C(x) - R(x)$ به دست می‌آید.

ت با استفاده از کسر $\frac{c}{a}$ می‌توان مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم را بدون حل معادله به دست آورد.

۹۴ جمله‌های زیر را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف در معادله درجه دوم اگر $\Delta = 0$ باشد، آن‌گاه معادله دارای است.

ب در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع دو ریشه برابر است با

پ تابع درآمد هر کالا برابر است با: $(\dots\dots\dots) \times (\text{تعداد فروش هر کالا})$

۹۵ جمله‌های زیر را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف نقطه سر به سر نقطه‌ای است که در آن

ب رابطه‌ای که به هر مسلمان قبله او را نسبت می‌دهد، یک است.

پ رابطه $A = \{(\sqrt[3]{8}, 5), (\sqrt[4]{16}, 3)\}$ یک تابع

۹۶ اگر $A = \{2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ در این صورت؛

الف رابطه‌ای از A به B بنویسید که تابع باشد.



ب) رابطه‌ای از A به B بنویسید که تابع نباشد.

۹۷) تابع بودن هر مورد را بررسی کنید.

الف) رابطه بین شعاع دایره و مساحت آن

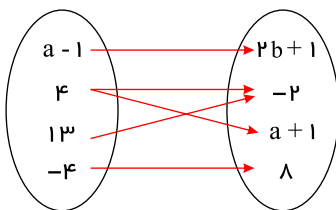
ب) رابطه بین هر فرد و اندازه قد او در یک زمان مشخص

ج) رابطه بین یک عدد طبیعی اول و مقسوم‌علیه‌های آن

د) رابطه بین هر داوطلب کنکور رشته‌ای خاص و رتبه کشوری اش در آن رشته

۹۸) در عبارت «میزان حقوق دریافتی کارگران متناسب با میزان ساعات کاری آنها است» متغیر مستقل و متغیر وابسته را مشخص کنید.

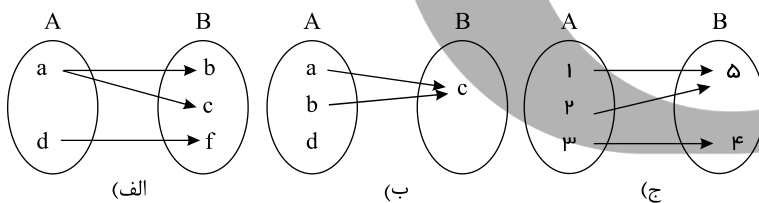
۹۹) اگر نمودار مقابل تابع باشد، مقدار a و b را به دست آورید.



۱۰۰) اگر جدول روبه‌رو بیانگر یک تابع باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

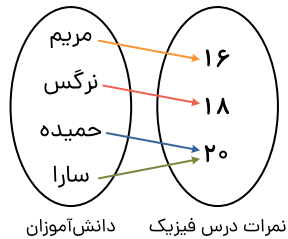
x	۴	۲	۳	۴	۲
y	$a+b$	$2a$	$4a$	$2a+4$	$6+a$

۱۰۱) تابع بودن هر مورد را بررسی کنید.



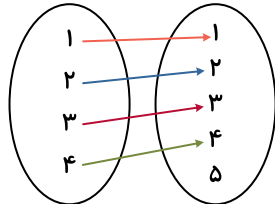


۱۰۲ کدامیک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟

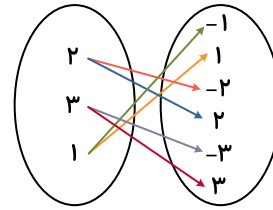


نمرات درس فیزیک دانش‌آموزان

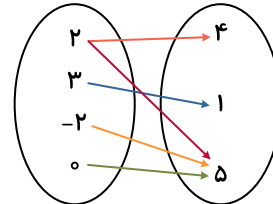
تابع زیرا



تابع زیرا



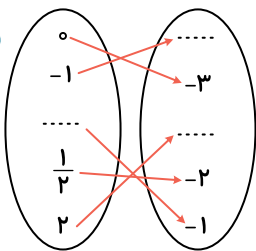
تابع زیرا



تابع زیرا

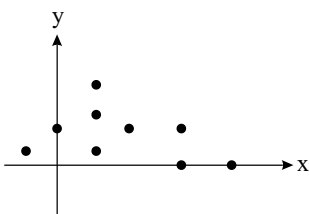
۱۰۳ برای رابطه $y = x^2$ و $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ است جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

۱۰۴ با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ اگر x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه $2, \frac{1}{2}, -1, 1, 0$ باشند. ابتدا جدول زیر را کامل کنید سپس نمودار پیکانی آن را کامل کنید.



x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$y = 2x - 3$
y	-5	...	...	...	...	
(x, y)	$(-1, -5)$	$(0, 0)$	...	...	...	

۱۰۵ نمودار یک رابطه به صورت مقابل است. حداقل چند نقطه باید حذف شود تا رابطه به یک تابع تبدیل شود؟



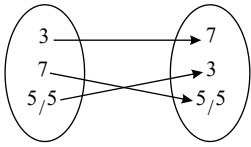


ضابطه جبری تابع

۱۰۶ با توجه به نمودار پیکانی زیر جا های خالی را کامل کنید.

$$f(3) = \dots$$

$$f(0.0) = 5.5$$



۱۰۷ اگر $f(x) = x^2 - 2x$ باشد، به ازای چه مقداری از x ، $f(x) = f(x+2)$ است؟

۱۰۸ اگر $f(x) = |x| - \sqrt{5}$ باشد، حاصل $f(2 - \sqrt{5})$ را محاسبه کنید.

۱۰۹ در تابع روبه‌رو متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید.

$$h(x) = x^2 + \sqrt{2x}$$

۱۱۰ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x} + 5$ و $g(x) = x + 4$ مفروض‌اند. مقدار $f(g(5))$ را محاسبه کنید.

۱۱۱ اگر $f(x) = |x+2|$ و $g(x) = 2x$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $f(2) + g(2)$ ب) $f(g(3))$ ج) $g(f(0))$

۱۱۲ تابع f به صورت زیر تعریف شده است.

$$f = \{\dots, (-2, 4), (-1, 2), (0, 0), (1, -2), \dots\}$$

الف دامنه و برد تابع f را مشخص کنید.

ب نمایش جبری تابع f را بنویسید.

پ حاصل $3f(-3) - \frac{f(5)}{2}$ را به دست آورید.

۱۱۳ تابع f به هر عدد حقیقی ریشه چهارم تفاضل ۴ از ۳ برابر مربع آن عدد را نسبت می‌دهد ضابطه تابع را نوشته و مقدار، $f(5)$ را به دست آورید.

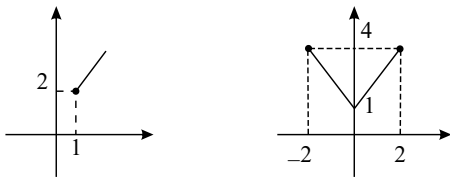
۱۱۴ اگر $g(x) = 3x - 5$ باشد، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.

$$g\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{g(x)}{g(3)}$$



دامنه و برد توابع

۱۱۵ دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.



ب)

الف)

۱۱۶ برد تابع $f(x) = x^2 - 1$ را با دامنه $\{1, 2, 3\}$ به دست آورید و تابع f را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

۱۱۷ دامنه تابع $g(x) = 2x^2 + 3$ ، مجموعه $A = \{-1, \sqrt{2}, 0\}$ است. برد آن را به دست آورید.

۱۱۸ تابعی با ضابطه اش را مثال بزنید که بردش زیر مجموعه دامنه آن باشد.

۱۱۹ برد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده به دست آورید.

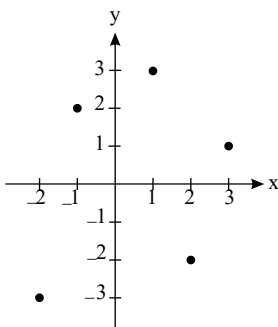
الف) $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-1)(x+3)(x^2-4) = 0\}$

ب) $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 2(x-3)^2 \end{cases} \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

۱۲۰ جدول زیر را کامل کنید.

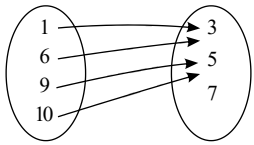
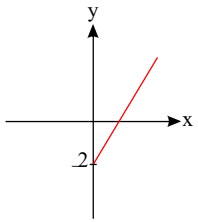
نمودار پیکانی	نمایش زوج مرتبی	نمودار مختصاتی

۱۲۱ مجموعه برد و دامنه تابع زیر را مشخص کنید.





۱۲۲ مجموعه دامنه و برد تابع را با مجموعه‌ای به زبان ریاضی نمایش دهید.



۱۲۳ مجموعه برد و دامنه تابع زیر را مشخص کنید.

۱۲۴ تابع f به صورت $\begin{cases} f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 + 5 \end{cases}$ تعریف شده است. برد تابع f را به دست آورید در صورتی که $A = \{-2, 0, \sqrt{5}\}$ باشد.

۱۲۵ برد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده به دست آورید.

الف) تابع f به صورت زیر تعریف شده است. برد تابع f را مشخص کنید.

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}, A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$$

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x} \end{cases}, A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$$

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1} \end{cases}, A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$$

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x \end{cases}, A = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 0 \end{cases}, A = \mathbb{R}$$

۱۲۶ اگر $f = \{(-1, 1), (0, 2), (-2, 3), (2, 4), (3, -1)\}$ باشند، آنگاه:

الف) دامنه و برد تابع را بیابید.



ب مقدار عددی $\frac{2f(0) - 3\sqrt{f(-1)}}{f(-1+3)}$ را بیابید.

پ مقدار m را از تساوی مقابل بیابید.

$$f(m) = f(-2) - f(-1)$$

۱۲۷ دامنه و برد هر یک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

الف

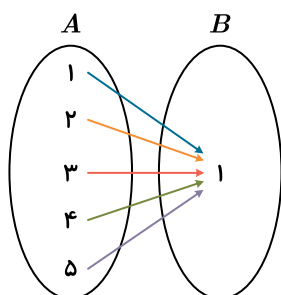
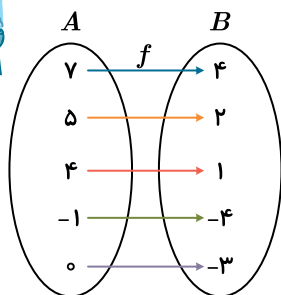
$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = x + 2$$

$$R_f = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$A = \{2, \dots, \dots, \dots\}$$

$$f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$$



$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0)\}$$



۱۲۸ کدام جمله دنباله $1 + 2n^2$ و a_n و $b_n = 4n + 7$ با هم برابر است؟

تابع خطی و نمودار آن

۱۲۹ یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۷۰ تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

۱۳۰ نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(1)$ و $f(-1)$ را به دست آورید.

۱۳۱ نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ و از نقطه $M(\frac{5}{2})$ بگذرد.

۱۳۲ در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$ ، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

۱۳۳ مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع خطی با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(2) = 4$ و $f(1) = 1$.

۱۳۴ در یک تابع خطی $f(0) = 2$ و $f(2) = 3$ است. ضابطه این تابع را بنویسید.

۱۳۵ نمودار تابع خطی f از مبدأ مختصات می‌گذرد و $f(2) = 3$. معادله این تابع را بنویسید.

۱۳۶ رابطه بین درجه دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم ۲۰ درجه سانتی‌گراد بالا

رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

۱۳۷ نمودار خط به معادله‌های زیر را رسم کنید.

الف) $2y = -4x + 1$

ب) $3x + \frac{2}{3} = 1$

۱۳۸ اگر $f(x)$ یک تابع خطی باشد به نحوی که $f(1) = 3$ و $f(-1) = -1$ باشد، معادله تابع را به دست آورید.

۱۳۹ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(4, 5)$ گذشته و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند.

۱۴۰ به ازای چه مقداری از k شیب خطی که از دو نقطه $A(k+2, 3k-2)$ و $B(3k-2, k+5)$ می‌گذرد برابر $\frac{1}{2}$ است؟

۱۴۱ مقادیر m و n را به گونه‌ای مشخص کنید که در تابع $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(1) = 4$ و $f(2) = 7$



۱۴۲) نمودار خطوط زیر را رسم کرده و برای هر خط نواحی را که از آنها می‌گذرد مشخص کنید.

الف) $x - 7 = 0$ ب) $y + 3 = 0$ ج) $y = x + 2$

۱۴۳) معادله خطی بنویسید که از نقاط $A(3, 5)$ و $B(1, 9)$ بگذرد.

۱۴۴) یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر می‌سوزد، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) نوع تابعی که ارتفاع شمع را در هر ساعت نشان می‌دهد، مشخص کنید.

ب) ضابطه تابع ارتفاع شمع برحسب زمان را بنویسید.

پ) بعد از ۲ ساعت شمع چند سانتی‌متر می‌شود؟

ت) شمع چند ساعت باید بسوزد تا تمام شود؟

۱۴۵) اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.

۱۴۶) ضابطه تابع محیط مستطیل‌هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، برحسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

- آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟

۱۴۷) در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیف می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به‌طور تقریبی برآورد کنید.

۱۴۸) در یک تابع خطی $f(0) = 2$ ، $f(2) = 3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m = \frac{3 - \dots}{\dots - 0} = 0$$



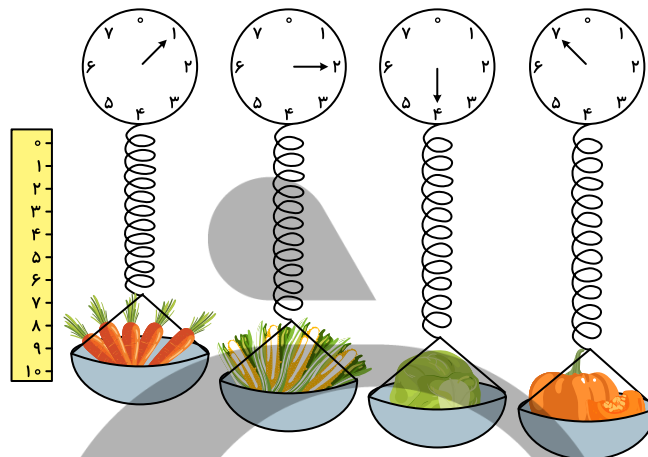
۱۴۹) یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی در هر ساعت ۳/۰ کیلومتر لوله تولید می‌کند.

اگر متراژ لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای $f(x)$ به‌ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.

x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$ بر حسب متر					

نقاط به‌دست‌آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

۱۵۰) الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به‌ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود. طول فنر را در شکل‌های زیر مشخص کنید.



ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلوگرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتی‌متر)						

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(1)$ ، $f(4)$ ، $f(8)$ و $f(10)$ (بر حسب سانتی‌متر) را محاسبه کنید.
ت) نقاط به‌دست‌آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

تابع درجه ۲ و سهمی

۱۵۱) اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیمم شود.

۱۵۲) درآمد یک شرکت تولیدی، از رابطه $y = \frac{-1}{2}x^2 + 30x$ و هزینه آن از رابطه $y = 18x + 40$ به دست می‌آید، بیشترین مقدار سود این شرکت را مشخص کنید.

۱۵۳) اگر بدانیم $x + 2y = 10$ ، بیشترین مقدار ممکن برای xy چه قدر است؟

۱۵۴) اگر بدانیم محیط مستطیلی برابر ۷۲ متر مربع است، بیشترین مساحتی که می‌توان برای آن در نظر گرفت چه قدر است؟

۱۵۵) مختصات رأس سهمی $y = -(x - 2)^2 + 5$ را به دست آورید.



۱۵۶ در یک کارخانه نوعی لامپ تولید می‌شود. اگر x متوسط تعداد لامپ‌های تولیدی در روز برای این کارخانه باشد، آنگاه تابع درآمد و هزینه روزانه آن به ترتیب $R(x) = 300x$ و $C(x) = x^2 + 200x + 300$ است.

الف) معادله سود این کارخانه را بنویسید.

ب) این کارخانه روزانه چند لامپ باید تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود این کارخانه را محاسبه کنید.

۱۵۷ تابع درآمد کارگاهی به صورت $R(x) = 200x - x^2$ و تابع هزینه آن به صورت $C(x) = 50 + 4x$ است.

الف) معادله سود این کارگاه را بنویسید.

ب) محاسبه کنید که چند واحد کالا باید تولید شود که کارگاه بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود (ماکسیمم) این کارگاه را تعیین کنید.

۱۵۸ نقطهٔ مینیمم تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 - 8x + c$ برابر $(2, -5)$ است. مقدار c را به دست آورید.

۱۵۹ مختصات رأس سهمی $y = -x^2 + 6x + 3$ برابر (m, n) است، حاصل mn را به دست آورید.

۱۶۰ طول رأس سهمی $y = \frac{4}{9}x^2 + 2x + \frac{2}{3}$ را به دست آورید.

۱۶۱ اگر $3x + 2y = 60$ باشد، ماکزیمم مقدار حاصل ضرب xy چقدر می‌شود؟

۱۶۲ اگر $x = \frac{5}{6}$ محور تقارن سهمی به معادله $y = (2k+1)x^2 - (3k+2)x + 7$ باشد، مقدار k را بیابید.

۱۶۳ نمودار سهمی‌های به معادله‌های $y = x^2 - 2x$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.

۱۶۴ نمودار سهمی $y = 4 - x^2$ را رسم کنید.

۱۶۵ نمودار سهمی به معادلهٔ زیر را رسم کنید.

$$y = 2(x-3)^2 - 4$$

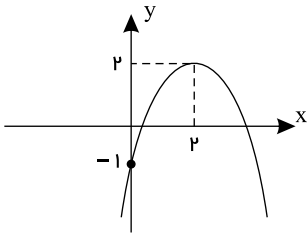
۱۶۶ برد تابع $y = x^2 - 2x + 5$ را مشخص کنید.



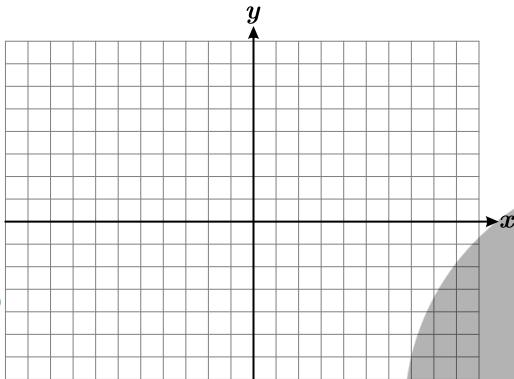
۱۶۷ در تابع $f(x) = ax^2 + bx + 3$ می‌دانیم $f(1) = 0$ و $f(2) = 1$ ، مقادیر a و b را بیابید.

۱۶۸ مقدار k را به نحوی بیابید که $(-1, 1)$ عضوی از تابع $f(x) = 3x^2 + kx + 3$ باشد.

۱۶۹ ضابطه سهمی شکل روبه‌رو را به دست آورید.

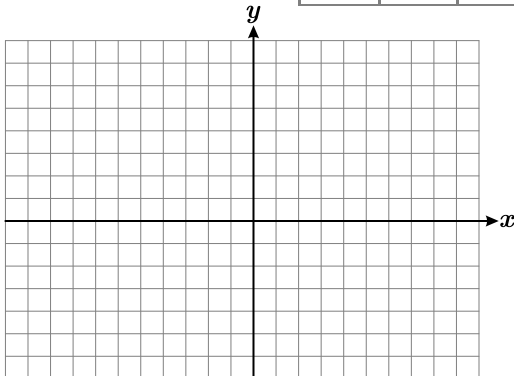


۱۷۰ نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 1$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



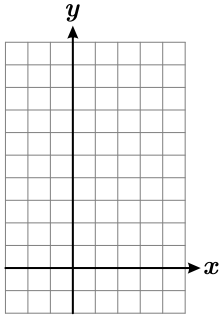
۱۷۱ جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...				5				...





۱۷۲ رأس سهمی به معادله $y = 2(x - 1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.

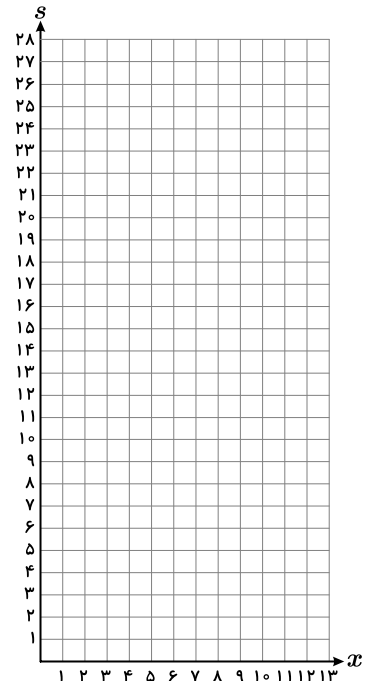


۱۷۳ برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربعی 1×1 ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت ۲۰ تهیه می‌کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می‌گیرد با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می‌دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می‌دهیم.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲			۶			۹
y	۹	۸	۷					
s	۹			۲۴			۱۶	
(x, s)	(۱, ۹)	(۲, ۱۶)			(۵, ۲۵)		(۸, ۱۶)	

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.





فصل سوم: داده های آماری

گرد آوری داده ها و آشنایی با مفاهیم آماری

۱۷۴ کدامیک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است. در هریک از واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.

- الف) با همهٔ مأموران یک پاسگاه پلیس برای آگاهی از نظرشان راجع به تخلفات مصاحبه شد.
 ب) با بچه‌هایی که وارد یک بازی می‌شدند، پنج‌درمیان مصاحبه شد تا وسیله بازی مورد علاقهٔ کودکان بررسی شود.
 پ) برای بررسی PH شامپوهای تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صددرمیان مورد آزمایش قرار دادیم.

۱۷۵ دو موضوع برای هریک از روش‌های گردآوری داده‌ها بیان کنید.

- الف) از طریق مصاحبه ب) از طریق مشاهده پ) از طریق دادگان ت) از طریق پرسش‌نامه

۱۷۶ نوع و مقیاس اندازه‌گیری هر متغیر را مشخص کنید.

- « مقدار مقاومت یک لامپ، تعداد ماشین‌های یک نمایشگاه، رتبهٔ کنکور دانش‌آموزان یک کلاس، جنسیت افراد یک گروه، اندازهٔ مساحت یک سری از شکل‌های هندسی، مزهٔ غذا (خوب، بد، متوسط) »

۱۷۷ برای تحقیقات و بررسی‌های زیر، جامعه را مشخص و روش نمونه‌گیری پیشنهاد کنید.

- الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران ب) مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می‌دهند؟

۱۷۸ برای تعیین میزان استفاده از کمربند ایمنی در هنگام رانندگی در یک محله، کدام روش گردآوری داده‌ها، مناسب‌تر است؟

۱۷۹ می‌خواهیم مدت زمانی را که دانش‌آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعهٔ کتاب‌های غیردرسی می‌کنند، آمارگیری کنیم.

- الف) برای این آمارگیری، جامعه را مشخص کنید.
 ب) یک روش نمونه‌گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید.
 پ) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می‌کنید؟
 ت) اندازهٔ (تعداد واحدهای) این جامعه چقدر است؟
 ث) اندازهٔ نمونهٔ مورد بررسی چقدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی موردنظر مناسب است؟ در صورت مناسب نبودن، روش نمونه‌گیری و نمونهٔ خود را اصلاح کنید.
 ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید.
 چ) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟



۱۸۰ مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بنویسید و آنها را شماره‌گذاری کنید. سپس یک نمونه ۴تایی از این جامعه انتخاب کنید.

موضوع‌های زیر را برای نظرخواهی از آنان در نظر بگیرید. درباره بهترین روش گردآوری داده‌ها برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:
الف) اکثر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت در بزرگراه‌ها باید تعیین شود».
ب) آبی، رنگ موردعلاقه بیشتر مردم برای ماشین است.
پ) گوش دادن به موسیقی کلاسیک در زمان مطالعه، به یادگیری کمک می‌کند.
ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال مرتکب می‌شوند.
ث) رژیم گرفتن، باعث کاهش هوش می‌شود.

۱۸۱ در موارد روبه‌رو مشخص کنید، چه روشی برای جمع‌آوری داده‌ها مناسب‌تر است؟
الف) میزان رضایت‌مندی مشتریان از کارمندان فروشگاه (ب) نحوه استفاده کودکان از اوقات فراغت

۱۸۲ درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

الف) هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روش مشخصی انتخاب شده باشد را آماره می‌نامند.

ب) نمونه‌ای را که در آن همه اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه داشته باشند را نمونه تصادفی می‌نامند.

پ) وقتی داده دوره افتاده در بین داده‌های یک مجموعه آماری وجود داشته باشد، میانه نسبت به میانگین، معیار مناسب‌تری است.

ت) تمام داده‌های یک مجموعه آماری برابر هستند، در این صورت واریانس آن داده‌ها برابر یک است.

۱۸۳ بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها، برای هر یک از موضوعات زیر را بنویسید.

الف) تعداد افراد استفاده‌کننده از پل عابر در یک روز و خیابان مشخص

ب) ساعات خواب دانش‌آموزان کلاس شما در شب گذشته

پ) سن همه دانش‌آموزان پایه دهم مدرسه شما برحسب ماه

۱۸۴ با توجه به موضوع زیر به سوالات داده شده، پاسخ کوتاه بدهید.

یک شبکه تلویزیونی، برای تعیین نسبت افراد ساکن شیراز که برنامه جدید را دنبال می‌کنند، هزار نفر را به طور تصادفی انتخاب و از آنها پیرامون این موضوع سوال کرد. در نهایت معلوم گردید که ۷۹ درصد از ساکنین این شهر، در طول هفته برنامه جدید را تماشا می‌کنند.

الف) جامعه آماری را مشخص کنید.

ب) در این موضوع مقدار عددی آمار چند است؟



پ در این موضوع، متغیر آماری چیست؟

۱۸۵ در هر مورد، بهترین روش برای جمع‌آوری داده‌ها، را مشخص کنید.

الف) تعداد دانشجویان ورودی رشته برق دانشگاه صنعتی شریف در ۱۰ سال اخیر

ب) میزان رضایت مردم از کیفیت غذاهای یک رستوران

پ) تعداد خودروهای عبوری از تقاطع یک چهارراه در تهران

۱۸۶ برای بررسی موضوع زیر ۱۰۰ دانش‌آموز سال دهم رشته انسانی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

«دانش‌آموزان سال دهم انسانی چرا در درس ریاضی ضعف دارند.»

در این بررسی جامعه آماری و نمونه آماری را مشخص کنید.

۱۸۷ می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش پرسش‌نامه، مشاهده، دادگان‌ها آمارگیری کنیم،

محدودیت‌های هر روش را چگونه می‌توان از بین برد؟

۱۸۸ روش‌های جمع‌آوری داده‌ها را بیان کنید. کدام روش جمع‌آوری برای داده‌های زیر مناسب‌تر است؟

الف. رضایت بیماران از نحوه خدمات و رسیدگی به درخواست آنها در یک بیمارستان

ب. میزان تحصیلات پدر و مادر دانش‌آموزان در یک مجتمع آموزشی

پ. تعداد خودروهای خروجی از شهر تهران در ایام تعطیلات

ت. استخدام تعداد محدودی کارمند برای شرکتی که قبلاً آزمون را برگزار کرده و قرار است از بین قبول‌شدگان عده‌ای را انتخاب کند.

مقیاس‌های اندازه‌گیری و بررسی انواع متغیر

۱۸۹ در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاه‌خوار، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) غذا سفارش

داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید.

ب) این متغیر کمی است یا کیفی؟

پ) جامعه آماری در اینجا چیست؟

۱۹۰ فرق بین آماره و پارامتر چیست؟

۱۹۱ نوع متغیرها را از لحاظ اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای، نسبتی در عبارتهای زیر مشخص کنید.

الف مراحل کاشت یک نهال

ب رنگ لباس‌های موجود در یک ورزشگاه

پ نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ نمره)



ت شدت زلزله در یک منطقه

ث RH خون

ج تغییرات توده سرطانی در عضو انسان در طی چند ماه

چ قد دانش‌آموزان

ح زمان اولین کلاس

خ ارتفاع شهر تهران از سطح دریا

د نماینده‌ای که در رأی‌گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی هفتمین نفری است که از آن حمایت می‌کند.

ذ ساعت شروع امتحان

ر مدت زمان امتحان

۱۹۲ نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید:

الف محسن، محمود، محمد و میثم همگی اسامی مذکر هستند.

ب در یک دبیرستان، ۳۱۹ دانش‌آموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم، صادق رتبه دهم و جواد رتبه چهارم را کسب کرده است و می‌دانیم که رتبه یک، بهترین است.

پ دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز (برحسب درجه سلسیوس).

ت طول ماهی‌های قزل‌آلا در رودخانه هراز.

۱۹۳ قد و گروه خونی دانش‌آموزان کلاس، به ترتیب دارای کدام مقیاس اندازه‌گیری هستند؟

۱) ترتیبی - اسمی ۲) فاصله‌ای - نسبتی ۳) نسبتی - ترتیبی ۴) نسبتی - اسمی

۱۹۴ نوع و مقیاس اندازه‌گیری متغیر «رشته‌های دو میدانی در المپیک» و «رکورد پرتاب نیزه شرکت‌کنندگان در المپیک» را تعیین کنید.



۱۹۵) نوع هریک از متغیرهای زیر را مشخص و بهترین مقیاس اندازه‌گیری آنها را ذکر کنید.

الف) رنگ اتومبیل‌های موجود در یک نمایشگاه اتومبیل

ب) درجهٔ حرارت کلاس شما در روزهای سال (برحسب درجهٔ سلسیوس)

پ) گنجایش آب یک باری مخزنی (تانکر)

ت) تعداد شکایات رسیده به یک پاسگاه پلیس

ث) درآمد دانشجویان شاغل به کار

ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت

چ) سن دانشجویان شرکت‌کننده در یک دورهٔ هنری

۱۹۶) مقیاس متغیرهای زیر را در چهار مقیاس: اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی مشخص کنید.

الف) مدت‌زمان پاسخ‌گویی به سؤالات یک امتحان

ب) زمان اولین کلاس

پ) رشتهٔ تحصیلی

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی و خوب

ث) نمرهٔ آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز)

ج) سن دانش‌آموز

۱۹۷) اگر بخواهیم تمامی اتاق‌های یک شرکت را شماره‌گذاری کنیم از چه نوع متغیری و با چه مقیاسی استفاده کرده‌ایم؟

۱۹۸) مقدار آلودگی هوای محیط چه نوع متغیری و با چه مقیاسی است؟

۱۹۹) نوع هریک از متغیرها (کمی، کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای، نسبتی) آنها را به‌طور کامل مشخص کنید.

الف) مدرک تحصیلی کارمندان

ب) وزن هندوانه‌های یک مزرعه

پ) گروه خونی کارمندان یک شرکت

۲۰۰) می‌خواهیم قد دانش‌آموزان یک شهر که تعدادشان ۲۰۰۰ نفر است را مورد مطالعه قرار دهیم. $\frac{2}{5}$ این دانش‌آموزان پسر هستند.

حالا یک نمونهٔ تصادفی با اندازهٔ ۴۰ نفر انتخاب می‌کنیم که ۶۰ درصد آنها پسر هستند، نسبت آماره تعداد دختران به کل دانش‌آموزان در نمونهٔ انتخابی به پارامتر تعداد دختران به کل دانش‌آموزان را به دست آورید.

۲۰۱) تفاوت بین آماره و پارامتر در این است که در نمونه و در جامعهٔ آماری کاربرد دارد و پارامتر همواره است.



معیارهای گرایش به مرکز

۲۰۲) نمره‌های درس فیزیک دانش‌آموزی در طول سال برابر است با:

۱۷	۱۹	۱۸	۷	۱۸	۱۹
----	----	----	---	----	----

الف) میانه و میانگین را برای نمره‌های این دانش‌آموز حساب کنید.

ب) کدامیک از شاخص‌های فوق، نشان‌دهنده وضع این دانش‌آموز در درس فیزیک است؟

پ) اگر معلم درس فیزیک این دانش‌آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای اینکه میانگین وی در این درس، بیشتر از ۱۸ شود، او چه نمره‌ای در این امتحان باید کسب کند؟

۲۰۳) اگر میانگین داده‌های ۴ و b و ۳ و ۲ برابر ۲ باشد، میانگین داده‌های ۴ و ۳ و $(100 + 6b)$ و ۲ را به دست آورید.

۲۰۴) میانگین داده‌های $(3x - 1)$ و $(7x + 6)$ و $(2 - 9x)$ برابر $\frac{1}{2}$ است. مقدار x چقدر است؟

۲۰۵) میانگین ۵ داده آماری برابر ۸ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده‌ها متوجه می‌شویم به‌جای عدد ۱۰، عدد ۱۵ استفاده شده است. میانگین واقعی چقدر بوده است؟

۲۰۶) اگر میانگین داده‌های ۴ و y و x برابر ۳ باشد. میانگین داده‌های آماری ۵، x, x, y, y را محاسبه کنید.

۲۰۷) میانگین سه عدد $2x + 2$ ، $x + 6$ ، $x - 15$ برابر ۱۱ است. مقدار x را بیابید.

۲۰۸) میانگین ۱۰ داده آماری برابر ۵ است. اگر داده‌های ۶ و ۴ را کنار بگذاریم، میانگین جدید را محاسبه کنید.

۲۰۹) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) آنچه اکثر مردم حد وسط می‌نامند نزد آمارشناسان به معروف است و برای محاسبه آن داده‌های آماری را با هم جمع می‌کنیم و بر تقسیم می‌کنیم.

ب) در واقع نقطه وسط فهرست اعداد مرتب‌شده است که نیمی از اعداد، مقادیر بالاتر از و نیمی دیگر مقادیر پایین‌تر از دارند.

پ) زمانی با مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند.

ت) شرط اینکه میانه از خود داده‌ها باشد آن است که تعداد داده‌ها باشد.

ث) در صورتی که بین داده‌ها، داده دورافتاده وجود داشته باشد از شاخص گرایش به مرکز به‌جای شاخص استفاده می‌کنیم.



۲۱۰ میانگین داده‌های زیر برابر ۲۲ است.

۲۰ و ۲۵ و ۳۰ و ۲۲ و a و ۲۵ و ۲۴ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۵

الف) مقدار a را به دست آورید.

ب) میانه داده‌ها را تعیین کنید.

۲۱۱ میانگین ۱۳ داده $۱۱, ۱۰, ۸, ۶, ۹, ۲, ۱۰, ۱۳, a, ۱۰, ۱۲, ۴, ۲a$ برابر ۹ است. مجموع میانه و مد داده‌های $۲a + ۲, ۱۲, a + ۳$ ، $۱۳, ۱۰, ۵$ را به دست آورید.

۲۱۲ اگر در داده‌های مرتب‌شده $۱, ۲, ۵, ۲a - ۱, ۷, a + ۵, ۱$ فراوانی عدد ۷، برابر ۲ باشد، چارک سوم داده‌ها چند واحد بیشتر از میانه داده‌ها است؟

۲۱۳ میانگین اعداد $۹۰, ۸۰, ۷۰, ۶۰, ۵۰$ چقدر است؟

۲۱۴ میانگین داده‌های $۵۰, ۴۰, ۳۰, ۲۰, ۱۰$ چقدر است؟

۲۱۵ میانه داده‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴۰۰ و ۴۰ برابر k است، میانه داده‌های ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۲۱ چقدر است؟

۲۱۶ در جدول زیر مقدار مد چقدر است؟

x_i داده‌ها	۳	۴	۵	۶
f_i فراوانی	۸	۱۰	۲	۱۳

۲۱۷ جاهای خالی را پر کنید؛

الف) وقتی با مواجه هستیم، معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا
ب) آنچه بیشتر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به معروف است.

۲۱۸ اگر در داده‌های مقابل مُد برابر ۶ باشد، میانگین را محاسبه کنید.

$۱, ۲, ۴, ۴, ۶, ۶, x, ۷$

۲۱۹ در داده‌های $۱, ۵, ۵, ۸, ۵, ۸, ۷, ۲, ۳, ۱$ اختلاف میانگین و مُد چقدر است؟

۲۲۰ در داده‌های $۱, ۴, ۷, ۷, x, ۹, ۱۰, ۱۱$ میانه برابر ۸ است. مقدار x را بیابید. (داده‌ها به ترتیب کوچک به بزرگ مرتب شده‌اند.)

۲۲۱ میانه داده‌های روبه‌رو را به دست آورید. $۱, ۳, ۵, ۸, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۳, ۱۷, ۱۸$



۲۲۲) نمرات روبه‌رو، مربوط به امتحان ریاضی یک کلاس است. میانه این نمرات را محاسبه کنید.

۱۴, ۱۵, ۱۳, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۱۵, ۱۴, ۱۲, ۱۷, ۲۰

۲۲۳) در داده‌های مقابل مقدار مُد کدام است؟

x_i	۴	۵	۶	۷
f_i	۹	۱۱	۷	۱۴

۲۲۴) مد در داده‌های $۲x$, ۹, ۷, ۸, ۸, ۴, ۴, ۳ برابر ۸ است. میانگین داده‌های $x + ۱$ و $۳x$ و ۷ و ۸ را به دست آورید.

۲۲۵) با سه واژه: داده دورافتاده، میانه، و میانگین، ۵ جمله زیر را کامل کنید.

۱- آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به معروف است. برای محاسبه به داده‌های خود به‌عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را با هم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.

۲- در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتب‌شده است. نیمی از اعداد مقادیر بزرگ‌تر از و نیمی دیگر مقادیر کوچک‌تر از هستند.

۳- زمانی با مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند.

۴- وقتی با مواجه هستید، معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا

۵- به‌طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، بهتر از است.

۲۲۶) آیا می‌توانید سه قاعده کلی از تمرین‌های صفحه ۸۶ درباره خواص میانگین ذکر کنید؟

معیارهای پراکندگی (واریانس و انحراف معیار)

۲۲۷) اگر واریانس داده‌های $a - ۱$ و $a + ۶$ و $b + ۶$ و c و ۱۲ برابر صفر باشد، حاصل $a + b + c$ چقدر است؟

۲۲۸) اگر دامنه تغییرات داده‌های a و b و c و d برابر ۱۰ باشد، دامنه تغییرات داده‌های $۱ + \frac{a}{۲}$ و $۱ + \frac{b}{۲}$ و $۱ + \frac{c}{۲}$ و $۱ + \frac{d}{۲}$ چقدر

است؟

۲۲۹) یک نمونه ۲ تایی از اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه راهی را پیشنهاد می‌کنید. اگر

بخواهید واحدهای انتخابی این نمونه تصادفی، تکراری نباشند، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

۲۳۰) در یک سری از داده‌ها با دامنه تغییرات R همه داده‌ها را ۳ برابر کرده و از آنها ۵ واحد کم می‌کنیم، دامنه تغییرات داده‌های

جدید کدام است؟

۲۳۱) انحراف معیار داده‌های گروه A برابر ۳ و واریانس داده‌های گروه B برابر ۸ است. پراکندگی در کدام گروه از داده‌ها کمتر است؟

۲۳۲) واریانس داده‌های کمتر از میانه در داده‌های ۱۶, ۱۵, ۱۳, ۱۱, ۱۱, ۷, ۵, ۳, ۱ چقدر است؟



۲۳۳ با توجه به داده‌های مقابل تقریباً ۷۵٪ داده‌ها از کدام عدد بزرگ‌تر هستند؟ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲

۲۳۴ چه تعداد از داده‌های یک مجموعه ۱۲ عضوی با اعضای متمایز به صورت $(y_1, y_2, \dots, y_{12})$ بین چارک اول و سوم قرار دارند؟

۲۳۵ اگر میانگین ۳ داده $1, 4a - 1, 3a + 1$ برابر ۵ باشد، انحراف معیار این سه داده را محاسبه کنید.

۲۳۶ اگر تمام داده‌های یک مجموعه آماری ۶ برابر شود، دامنه تغییرات، چه تغییری می‌کند؟

۲۳۷ چنانچه بدانیم انحراف معیار داده‌های ۷، x_1, x_2, x_3, x_4 برابر صفر است. مجموع داده‌ها را محاسبه کنید.

۲۳۸ دامنه میان چارکی را برای اعداد صحیح -4 تا 4 محاسبه کنید.

۲۳۹ در یک متحنی نرمال چند درصد داده‌ها در فاصله $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ قرار دارند؟

۲۴۰ در یک مجموعه از داده‌های آماری می‌دانیم میانگین برابر ۱۴ و انحراف معیار برابر ۳ است. مشخص کنید ۹۵٪ داده‌ها در چه بازه‌ای قرار دارند؟

۲۴۱ اگر دامنه تغییرات داده‌های ۶، x_1, x_2, x_3 برابر صفر باشد، میانگین این داده‌ها برابر چه مقداری است؟

۲۴۲ یک مجموعه داده آماری در اختیار داریم. اگر به بزرگترین داده ۷ واحد اضافه کنیم و از کوچکترین داده ۶ واحد کم کنیم، دامنه تغییرات چه مقدار تغییر می‌کند؟

۲۴۳ در یک سری از داده‌های آماری، انحراف داده‌ها از میانگین عبارتند از $-20, m+1, 0, m-1, 0, -1$. مقدار واریانس داده‌ها را به‌طور تقریبی به دست آورید.

۲۴۴ انحراف معیار داده‌های ۲۰، x_1, x_2, x_3, x_4 برابر صفر است. در این صورت میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3 چقدر است؟

۲۴۵ اگر انحراف معیار داده‌های ۱۲ و $2 + c$ و $4 + b$ و $3 + a$ برابر صفر باشد، آنگاه واریانس داده‌های c و b و $2a$ را به‌طور تقریبی به دست آورید.

۲۴۶ درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

الف) زمانی که تعداد داده‌ها زیاد است از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به وجود داده دور افتاده پی می‌بریم.

ب) اگر داده دور افتاده داشته باشیم بهتر است از میانگین استفاده کنیم.

ج) نمودار جعبه‌ای فقط یک مجموعه داده را نشان می‌دهد، پس این نمودار برای مقایسه مناسب نیست.

د) نمودار جعبه‌ای دامنه میان چارکی و مد را نشان می‌دهد.



۲۴۷ در یک سری داده آماری که پراکندگی آنها به صورت منحنی نرمال است، تقریباً ۹۶ درصد از داده‌ها در فاصله‌ای قرار می‌گیرند که از ۲ بزرگتر و از ۱۰ کوچکتر است، واریانس داده‌ها چند برابر میانگین این داده‌ها است؟

۲۴۸ میانگین یک سری داده برابر ۸ و داده‌ها در منحنی نرمال قرار می‌گیرند. اگر ۶۸ درصد داده‌ها در فاصله بین ۱۱ و ۵ قرار بگیرند، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۲۴۹ می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل، بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم نزدیک است. اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که در آمد افراد آن انجمن، بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به صورت زیر محاسبه می‌شود.
الف) به کمک جدول زیر، این کار را انجام دهید.

مشاهدات		انحراف مشاهدات از میانگین		انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲	
قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر
۴۰	۴۰				
۱۲	۱۲				
۲۸	۲۸				
۳۲	۳۲				
۳۰	۳۰				
۲۲	۲۲				
۲۵	۲۵				
	۱۰۰۰				

ب) زمانی که میلیاردر وارد انجمن خیریه می‌شود؟ انحراف معیار داده‌ها برابر است با
این دو مقدار با هم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟
جدول زیر را برای مثال خیرین مدرسه تکمیل کنید. σ

σ	$IQR = Q_3 - Q_1$	Q_3	Q_2	Q_1	
انحراف معیار	دامنه میان چارکی	چارک سوم	میانه	چارک اول	
					درآمد ماهانه اعضای انجمن
					درآمد بعد از ورود میلیاردر



۲۵۰ انحراف معیار نمره‌های آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

الف) {۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵}

ب) {۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹}

پ) {۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱}

مشاهدات			انحراف مشاهدات از میانگین			انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲		

۲۵۱ اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیارشان برابر با صفر خواهد شد. چرا؟

۲۵۲ در داده‌های آماری ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۷, ۲۱, ۱۲, ۱۳, ۲۰, ۷, ۱۸, ۹, ۱۷, ۱۶, میانگین داده‌های داخل جعبه را به دست آورید.

۲۵۳ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

$A: ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹$ $B: ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۴, ۱۷, ۱۸$

فصل چهارم: نمایش داده ها

نمودارهای یک متغیره

۲۵۴ سن بازیکنان تیم ملی والیبال یک کشور به شرح زیر است.

۲۷, ۲۴, ۲۶, ۲۶, ۲۹, ۱۹, ۳۱, ۱۸, ۲۳, ۲۲, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۳, ۲۹, ۲۵, ۲۵, ۳۳, ۳۱, ۲۱, ۲۶, ۲۵

الف) نمودار نقطه‌ای سن بازیکنان را رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم را روی محور افقی نشان دهید.
ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟

۲۵۵ زاویه مرکزی مربوط به داده‌ای در نمودار دایره‌ای 30° است. اگر فراوانی کل داده‌ها $18x$ باشد، فراوانی متناظر با زاویه داده‌شده

چقدر است؟



۲۵۶ نمودار جعبه‌ای داده‌های ۲۵، ۱۱، ۷، ۱۳، ۲۰، ۳، ۱۰ را رسم کنید.

۲۵۷ سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۵، ۲۶، ۲۱، ۳۱، ۳۳، ۲۵، ۲۹، ۲۳، ۲۷، ۲۶، ۲۵، ۲۲، ۲۳، ۱۸، ۳۱، ۱۹، ۲۶، ۲۶، ۲۴، ۲۷

الف) نمودار نقطه‌ای آن را رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم را روی محور افقی نشان دهید.

ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) آیا تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانگین است؟

ت) آیا تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانه است؟ میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) سن چه تعدادی از بازیکنان، بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید به این سؤال پاسخ دهید؟

۲۵۸ نمودارهای میله‌ای افقی، درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند؛ با این تفاوت که محورهای چرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟

۲۵۹ نمودارهای میله‌ای، فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها استفاده کرد و چه زمانی از درصدها؟

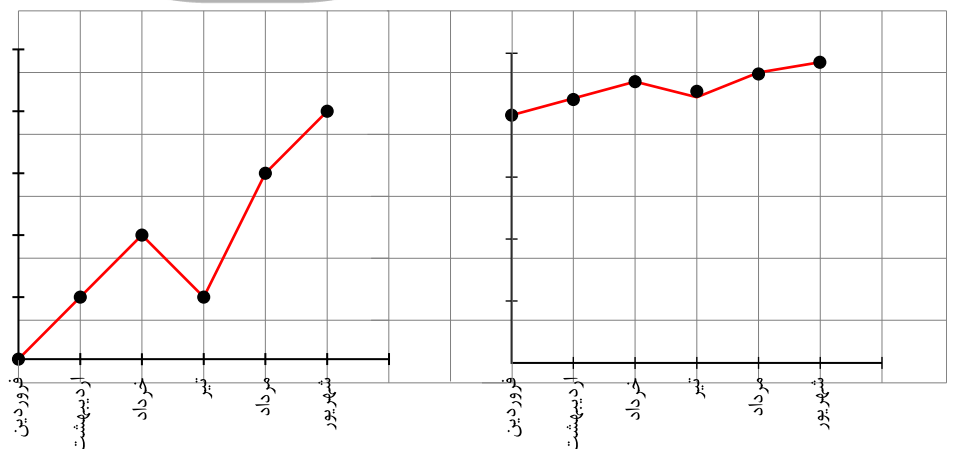
۲۶۰ رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟

۲۶۱ اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است یا نمودار دایره‌ای؟

۲۶۲ سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال برحسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۲٫۰	۲٫۱	۲٫۲	۲٫۱	۲٫۳	۲٫۴

خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورهای را مشخص کنید:



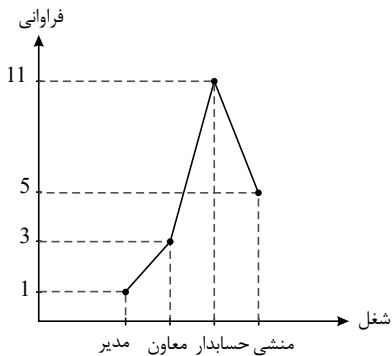
به نظر شما کدام یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟



۲۶۳ اگر داده‌های زیر را با نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱, ۱, ۳, ۵, ۷, ۱۰, ۱۲, ۱۸, ۲۰, ۲۵, ۲۷, ۳۰

۲۶۴ در نمودار خط شکسته مقابل، چند درصد افراد حسابدار هستند؟



۲۶۵ توزیع زاویه‌های مربوط به گروه‌های خونی در نمودار دایره‌ای تعدادی از افراد به صورت جدول زیر است. چند درصد افراد دارای گروه خونی AB هستند.

گروه خونی	A	B	AB	O
زاویه مرکزی	36°	54°	α	126°

۲۶۶ برای داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای رسم کنید.

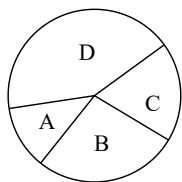
۲۷, ۲۴, ۲۶, ۲۶, ۲۹, ۱۹, ۳۱, ۱۸, ۲۳, ۲۲, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۳, ۲۹, ۲۵, ۲۵, ۳۳, ۳۱, ۲۱, ۲۶, ۲۵

۲۶۷ نمودار نقطه‌ای داده‌های زیر را رسم کنید و میانگین آنها را با تقریب دو رقم اعشار به دست آورید.

۲۹, ۱۳, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۳, ۲۵, ۲۸, ۲۸, ۱۴, ۱۲, ۳۰, ۳۰, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۵

۲۶۸ نمودار راداری درباره مشاهده‌ها و داده‌ها چه چیزی به ما می‌گوید؟

۲۶۹ آیا اعداد ۷۰, ۸۰, ۵۰, ۱۵۰, ۲۰ برای زوایای مرکزی یک نمودار دایره‌ای می‌توانند باشند؟

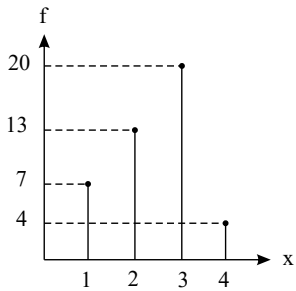


۲۷۰ در نمودار دایره‌ای مقابل تعداد افراد در دسته‌های A, B, C و D به ترتیب ۲, ۴ و ۵ برابر تعداد افرادی است که در دسته A قرار دارند. زاویه دسته C چند درجه است؟

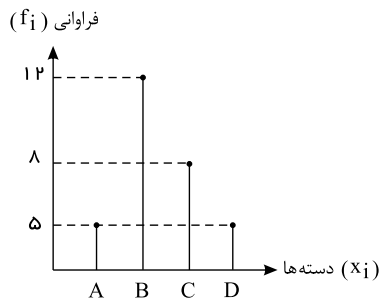
۲۷۱ یک جامعه آماری با ۵ دسته داریم. اگر تعداد اعضای هر دسته را ۲ برابر کنیم، زاویه مربوط به یک دسته مشخص در نمودار دایره‌ای چگونه تغییر می‌کند؟



۲۷۲ با توجه به نمودار میله‌ای مقابل میانه و مُد را به دست آورید.



۲۷۳ با توجه به نمودار میله‌ای مقابل، فراوانی نسبی گروه C چقدر از فراوانی نسبی گروه A بیشتر است؟

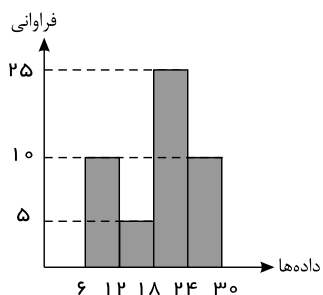


۲۷۴ توزیع رنگ پوست تعدادی از افراد به صورت زیر است. درصد مساحت مربوط به رنگ پوست سفید در نمودار دایره‌ای تقریباً چقدر است؟

رنگ پوست	زرد	سفید	سیاه	سرخ
فراوانی	۲۴	۱۰	۱۳	۱۳

۲۷۵ در المپیک دانش‌آموزی ۱۲۰۰ نفر شرکت کرده‌اند. اگر زاویه مربوط به تعداد شرکت‌کنندگان از یک شهر در نمودار دایره‌ای شهرها ۲۷° باشد، تعداد افراد شرکت‌کننده از این شهر چند نفر است؟

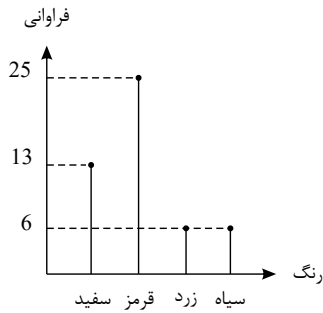
۲۷۶ در نمودار مستطیلی مقابل چند درصد داده کوچک‌تر مساوی ۱۸ هستند؟



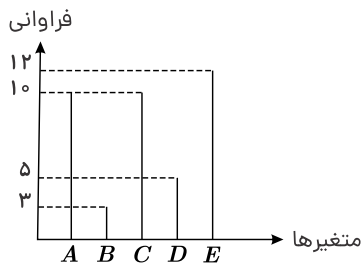
۲۷۷ تعداد دانش‌جویان چهار کلاس دانشگاهی ۱۰ و ۶۰ و ۳۰ و ۲۰ است. در نمودار دایره‌ای متناظر با جمعیت چهار کلاس زاویه مربوط به کلاس ۳۰ نفره چند درجه است؟



۲۷۸ مطابق نمودار میله‌ای مقابل چند درصد خودروها قرمز یا زرد هستند؟



۲۷۹ شکل مقابل، نمودار میله‌ای مربوط به پنج متغیر است. در نمودار دایره‌ای متناظر، زاویه مرکزی مربوط به دسته C چند درجه از زاویه مرکزی مربوط به دسته B بیشتر است؟



۲۸۰ در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۹، ۱۲، ۱۱، ۸، ۱۳، ۵، ۱۷ میانگین داده‌های داخل و روی جعبه را به دست آورید.

۲۸۱ نمودار جعبه‌ای داده‌های {۸، ۲۰، ۱۸، ۲۱، ۱۱، ۷، ۹، ۴، ۱} را رسم کنید.

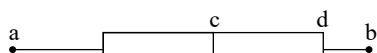
۲۸۲ الف) در کلاس درس قرار شد هر دانش‌آموز با توجه به داده‌های موجود در رسانه‌ها، درباره یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب‌دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟ به‌عنوان مثال، بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.



معلم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعب‌ها برحسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش‌آموزان درخواست کرد که اگر می‌توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می‌توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار ارائه کنید؟
 ب) نمودار میله‌ای انواع آسیب‌دیدگی را برحسب تعداد رسم کنید. مراحل رسم نمودار دایره‌ای را به یاد بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره‌ای درصد آسیب‌دیدگی‌ها را رسم کنید.



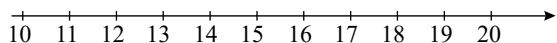
۲۸۳ شکل زیر نمودار جعبه‌ای داده‌های ۳٫۲ و ۳٫۱ و ۲٫۵ و ۱٫۵ و ۱٫۲۵ و ۴٫۱ و ۲٫۵ است.



الف. حاصل $\frac{b+a}{d+c}$ را به دست آورید.

ب. چند درصد داده‌ها بیشتر از چارک اول است؟

۲۸۴ نمودارهای زیر عملکرد سه کلاس A، B و C در درس ریاضی را نشان می‌دهند. با توجه به نمودارها به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف. کدام کلاس بیشترین پراکندگی را در نمرات درس ریاضی دارد؟

ب. ترتیب عملکرد این سه کلاس را از ضعیف به قوی بیان کنید.



نمودارهای چند متغیره

۲۸۵ داده‌های جدول زیر مربوط به دو مشاهده A و B می‌باشد. نمودار راداری آن را رسم کنید.

متغیر	A	B	بیشینه
x	۶	۴	۱۰
y	۲	۴	۸
z	۴	۲	۵

۲۸۶ اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری، ۴۰ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟

۲۸۷ کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟

۲۸۸ نمودار راداری چه چیزی را به ما می‌گوید؟

۲۸۹ نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمی به‌طور هم‌زمان به‌کار می‌رود؟

۲۹۰ نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟

الف) یک متغیر

ب) دو متغیر

پ) سه متغیر

ت) محدودیتی ندارند

۲۹۱ مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدامیک از موارد زیر است؟

الف) شعاع دایره‌ها

ب) قطر دایره‌ها

پ) محیط دایره‌ها

ت) مساحت دایره‌ها

۲۹۲ اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری ۴۰ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟



۲۹۳ زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۲۹۴ اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری 30° باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟

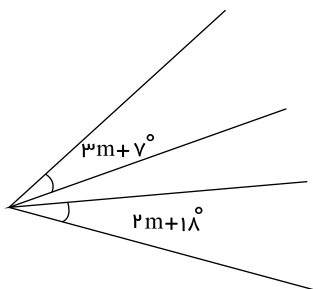
۲۹۵ در یک نمودار راداری برای ۶ متغیر چه تعداد نیم‌خط رسم شده و زاویه بین هر دو شعاع متوالی نمودار چند درجه است؟

۲۹۶ نمودار راداری روشی برای نمایش داده‌های چند متغیر در قالب نموداری است که در آن یا بیشتر بر روی محورهایی نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه آن است.

۲۹۷ برای رسم یک نمودار حبابی اطلاعات جدول زیر را داریم. شعاع مربوط به مشاهده B چند برابر شعاع مربوط به مشاهده D است؟

مشاهده	متغیر	A	B	C	D
		۱	۴٫۲	۳	۳٫۲
x_1		۲	۳	۴٫۵	۱٫۵
x_2		۴	۶	۲	۰٫۳۷۵
x_3					

۲۹۸ اگر شکل زیر قسمتی از یک نمودار راداری باشد، زاویه بین هر دو شعاع متوالی چقدر است و این نمودار چند متغیر را نشان می‌دهد؟ (زوايا برحسب درجه هستند.)



۲۹۹ درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

الف) نمودار حبابی برای نمایش حداقل ۳ متغیر عددی به کار می‌رود.

ب) متغیر سوم در نمودار حبابی همه مقادیر مثبت، منفی و صفر را اختیار می‌کند.

پ) مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی متناسب با جذر شعاع است.

ت) نمودارهای حبابی گونه خاصی از نمودار پراکنش نگاشت هستند.



۳۰۰ با توجه به جدول زیر نمودار راداری مناسب را رسم کنید. (در صورت نیاز تقریبی حساب کنید.)

نام درس	علی	امیر	رضا	بیشینه
ریاضی	۱۶	۱۸	۱۰	۲۰
معارف	۱۷	۱۷	۱۴	۱۸
ادبیات	۲۰	۱۳	۱۵	۲۰
فلسفه	۱۲	۱۴	۱۶	۱۷





پاسخنامه تشریحی

۱ اگر طول ضلع کوچک مثلث را x در نظر بگیریم؛ بنابراین طول دو ضلع دیگر $2x - 1$ و $3x - 5$ است.

$$\rightarrow x + (2x - 1) + (3x - 5) = 12 \rightarrow 6x - 6 = 12 \rightarrow x = 3$$

$$\rightarrow \{ \boxed{3}, 3 \times 3 - 5 = \boxed{4}, 3 \times 2 - 1 = \boxed{5} \}$$

۲ فرض می‌کنیم سن علی x و سن برادرش y باشد، در این صورت داریم:

$$x - y = 8 \quad (1)$$

$$6y = y + 6 \Rightarrow y = 6$$

پس سن برادر علی ۶ سال است. حال از معادله (۱) سن علی برابر است با:

$$x - 6 = 8 \Rightarrow x = 14$$

۳

برای حل معادله ابتدا جملات شامل x را به یک طرف تساوی و اعداد ثابت را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم:

$$5x + \frac{1}{5} = 2x + \frac{1}{2} \Rightarrow 5x - 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \Rightarrow 3x = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10} \Rightarrow 3x = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

۴

نصف عدد منهای یک، نصف عدد، واحد اضافه می‌کنیم، ۲ برابر $\frac{1}{3}$ عددی، $\frac{1}{3}$ عددی

$$\rightarrow \frac{1}{3}x \rightarrow 2 \times \frac{1}{3}x \rightarrow 2 \times \frac{1}{3}x + 5 \rightarrow \frac{1}{2}x \rightarrow \frac{1}{2}x - 1$$

$$2 \times \frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{2}x - 1 \xrightarrow{\times 6} 4x + 30 = 3x - 6 \Rightarrow 4x - 3x = -6 - 30 \Rightarrow x = -36$$

۵ الف) عدد مورد نظر را a در نظر می‌گیریم، داریم:

$$5a + 2 = 3a - 2 \Rightarrow 5a - 3a = -2 - 2 \Rightarrow 2a = -4$$

$$a^2 = a + 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

ب) عدد مورد نظر را a در نظر می‌گیریم:

۶ مانند مسائل قبل ابتدا حالت ریاضی مسئله را می‌نویسیم.

$$\left. \begin{array}{l} 2n \\ 2n + 2 \\ 2n + 4 \\ 2n + 6 \\ 2n + 8 \end{array} \right\}$$

اگر کوچک‌ترین عدد زوج را $2n$ بگیریم، ۵ عدد متوالی آن به‌ترتیب می‌شود

$$2n + 2n + 2 + 2n + 4 + 2n + 6 + 2n + 8 = 70$$

$$10n + 20 = 70 \xrightarrow{\text{از ۱۰ فاکتور می‌گیریم}} 10(n + 2) = 70 \rightarrow n + 2 = 7 \rightarrow n = 5$$

بزرگ‌ترین عدد مسئله $2n + 8 = 18 \leftarrow 2 \times 5 + 8 = 18$

۷ با توجه به کسری بودن معادله ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم که مخرج مشترک بین سه عدد ۳ و ۴ و ۵ عدد ۶۰ می‌شود و برای از بین رفتن عدد ۶۰ در مخرج همه عبارت‌ها را در ۶۰ ضرب می‌کنیم.

$$60 \times \left(\frac{x-1}{4} + \frac{x+1}{3} \right) = 60 \times \frac{x+2}{5}$$

$$15(x-1) + 20(x+1) = 12(x+2) \Rightarrow 15x - 15 + 20x + 20 = 12x + 24$$

$$15x + 20x - 12x = 24 + 15 - 20 \Rightarrow 23x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{23}$$

ب)

جملات شامل x را در یک طرف تساوی و عددهای معلوم را در طرف دیگر قرار می‌دهیم:

$$3x + 1 = 4x - 3 - 2x + 5$$

$$\Rightarrow 3x - 4x + 2x = -3 + 5 - 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

۸ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم:

$$2x + 5 = 3x - 2 \rightarrow \boxed{x = 7}$$



۹ به‌طور طبیعی جواب معادله در معادله صدق می‌کند.

$$mx + m - 1 = 1 + \frac{x}{2} \xrightarrow{x=2} 2m + m - 1 = 1 + 1 \rightarrow 3m = 3 \rightarrow m = 1$$

۱۰ اگر طول مستطیل را x بگیریم، بنابراین عرض آن برابر $\frac{x}{2}$ است. در نتیجه:

$$\text{محیط مستطیل} = 2\left(x + \frac{x}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2}x = 3x$$

$$15 = \text{محیط مستطیل} \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow \text{طول مستطیل} = 5$$

$$\text{عرض مستطیل} = \frac{x}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\text{طول} - \text{عرض} = 5 - 2,5 = 2,5$$

۱۱

الف) می‌دانیم رج قالی عبارت است از تعداد گره‌های قالی در $7cm$ طول یا عرض قالی.

$$\frac{2,8 \times 2,1}{0,07 \times 0,07} = \frac{5,88}{0,0049} = 1200$$

$$1200x = 5,880,000 \Rightarrow x = \frac{5,880,000}{1200} = 4900 \Rightarrow \sqrt{4900} = 70 \text{ رج}$$

ب) $5,880,000 \times 1cm = 5,880,000 \div 100 = 58,800$ (متر)

↑
برای تبدیل به متر

پ) $\frac{5,880,000}{6000} = 980 \Rightarrow \frac{980}{5} = 196$ (هفته)

روز در هفته

ت) $35,000,000 - 5,600,000 = 29,400,000$ (سود)

$$\frac{29,400,000}{196} = 150,000 \text{ (تومان برای هر هفته)}$$

۱۲

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
x	$2x$	$4x$	$8x$	$16x$

$$16x = 64000 \Rightarrow x = 4000 \text{ تن}$$

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x = 31x = 31 \times (4000) = 124000 \text{ تن}$$

۱۳

الف

$$4\sqrt{10}$$

ب) صفر

پ) $-\frac{3}{4}$

۱۴ اگر شعاع دایره R باشد،

$$\text{مساحت دایره} = 4 \text{ (محیط دایره)} \Rightarrow \pi R^2 = 4(2\pi R) \rightarrow \cancel{\pi} R^2 = 8\cancel{\pi} R$$

$$\Rightarrow R^2 - 8R = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور می‌گیریم}} R(R - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 0 \rightarrow \text{غ ق ق} \\ R = 8 \rightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \pi(8)^2 = 64\pi$$

۱۵ عدد طبیعی مورد نظر را x در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + x = 42 \rightarrow x^2 + x - 42 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه جمله مشترک}} (x + 7)(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ ق ق} \\ x = -7 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۱۶ براساس قضیه فیثاغورس ابتدا مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 13^2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 = 169$$



$$\Rightarrow 2x^2 + 2x = 144 \Rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه جمله مشترک}} (x-8)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -9 \end{cases} \text{ غ ق}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{(x-3)(x+4)}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = \boxed{30}$$

$$9x^2 + 24x - 33 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 8(3x) - 3 \times 11 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + (11-3)(3x) - 3 \times 11 = 0$$

$$\Rightarrow (3x+11)(3x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+11=0 \rightarrow x = \frac{-11}{3} \\ 3x-3=0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 \rightarrow x+6=0 \\ x = 7 \rightarrow x-7=0 \end{cases} \xrightarrow{\times} (x+6)(x-7) = 0 \rightarrow x^2 - x - 42 = 0$$

۱۹ معادله درجه دومی می‌خواهیم که $x = -3$ و $x = 2$ جواب‌های آن باشد بنابراین داریم:

$$(x-2)(x+3) = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$(x+2)(x-3) = (x-3) \xrightarrow[\text{به شرط } x \neq 3]{\text{طرفین را بر } (x-3) \text{ تقسیم می‌کنیم.}} \frac{(x+2)(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})} = \frac{(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})} \rightarrow (x+2) = 1 \rightarrow x = 1-2 = -1$$

$$x^2 - 2x^2 = 0 \xrightarrow{\text{از فاکتور می‌گیریم.}} x^2(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 8x = 0 \xrightarrow{\text{از } 2x \text{ فاکتور می‌گیریم.}} 2x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x-4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x-3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{3} = x \xrightarrow{\times 3} x^2 = 3x \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$x^2 = 5 - x^2 \rightarrow x^2 + x^2 = 5 \rightarrow 2x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x+2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (3x+2)(3x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x+2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x-1 = 0 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(x-3)^2 = 4 \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم.}} \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{4} \rightarrow x-3 = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} x-3 = 2 \rightarrow x = 5 \\ x-3 = -2 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۲۱ می‌دانیم در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی دو ریشه قرینه‌اند که دو شرط زیر برقرار باشد:

اول: a و c مختلف‌العلامه باشند، دوم: $b = 0$ باشد.



حال در معادله $x^2 + (5n - 10)x - 25 = 0$ و a و c مختلف‌العلامه هستند، یعنی $(c = -25, a = 1)$ بنابراین باید $b = 0$ باشد.

$$5n - 10 = 0 \Rightarrow 5n = 10 \Rightarrow n = 2$$

بنابه فرضیات معادله را تشکیل می‌دهیم. (۲۲)

$$n^2 + 5n = 14 \Rightarrow n^2 + 5n - 14 = 0$$

$$\Rightarrow (n + 12)(n - 7) \Rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = -12 \end{cases} \text{ غ ق قی}$$

عدد $x =$ (۲۳)

و مربع آن $x^2 =$

طبق فرض مسئله

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow \underbrace{x^2 - x - 2 = 0}_{\text{اتحاد یک دو جمله‌ای مشترک}} \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

(۲۴)

$$\frac{\text{مساحت مثلث} \times \text{ارتفاع}}{2} = \text{مساحت مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض}$$

$$\rightarrow x(3x - 1) = \frac{2x(2x + 1)}{2} \rightarrow 3x^2 - x = 2x^2 + x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ غ ق قی}$$

(۲۵)

$$(x - (4 - \sqrt{7}))(x - (4 + \sqrt{7})) = 0 \Rightarrow x^2 + (-4 + \sqrt{7} - 4 - \sqrt{7})x + (16 - 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 9 = 0$$

اگر اندازه‌ی طول مستطیل را a و عرض مستطیل را b بنامیم داریم:

$$(a + b) \times 2 = 24 \rightarrow a + b = 12 \rightarrow b = 12 - a$$

$$a \cdot b = 35 \xrightarrow{b=12-a} a(12 - a) = 35 \rightarrow 12a - a^2 = 35 \rightarrow a^2 - 12a + 35 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه‌ی جمله‌ی مشترک}} (a - 7)(a - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \xrightarrow{b=12-a} b = 5 \\ a = 5 \rightarrow b = 7 \end{cases}$$

(۲۷)

$$\text{محیط} = 4x + x + 5x + 4x + x + 4x + x = 20x$$

$$\text{مساحت} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

$$\rightarrow 20x = 25 \xrightarrow{\div 5} 4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

(۲۸)

$$(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

خیر منحصر به فرد نیست. هر مضربی از معادله را می‌توان نوشت. مثلاً معادله $2x^2 - 6x + 4 = 0$ نیز همان جواب‌ها را دارد.

(۲۹)

الف

$$(2x + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

ب

$$(2 + 3xy)^2 = 4 + 12xy + 9x^2y^2$$

پ

$$(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$$

ت

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$$

ث

$$(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$



۳۰ به کمک اتحاد جمله مشترک داریم:

$$1) (x-1)(x+4) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$2) (2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \\ \Rightarrow (2x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$1) x^2 + 5 = 0$$

$$2) x^2 + x + 1 = 0$$

۳۱

۳۲

الف

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x = -6 \xrightarrow{+(\frac{5}{2})^2} x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} \rightarrow (x - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

ب

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow 9x^2 + 3x = 2 \xrightarrow{\div 9} \frac{9x^2}{9} + \frac{3x}{9} = \frac{2}{9} \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9} \xrightarrow{+(\frac{1}{6})^2} x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \rightarrow (x + \frac{1}{6})^2 = \frac{1}{4}$$

از طرفین جذر می‌گیریم.

$$\rightarrow (x + \frac{1}{6}) = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

پ

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \rightarrow x^2 + x = -\frac{1}{4} \xrightarrow{+(\frac{1}{2})^2} x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ت

در حل اتحادها به روش مربع کامل $(\frac{1}{2}b)^2$ را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x^2 + 6x = -9 \xrightarrow{+(\frac{1}{2}b)^2} x^2 + 6x + 9 = -9 + 9 \\ (x+3)^2 = 0 \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3$$

۳۳

الف در روش مربع کامل کردن، نصف ضریب x را به دست می‌آوریم و به توان دو می‌رسانیم و به طرفین اضافه می‌کنیم. عبارات را به صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌نویسیم سپس از طرفین ریشه‌گیری می‌کنیم.

$$x^2 - 5x = -4 \\ x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$$

حال عدد $\frac{25}{4}$ را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4} \\ (x - \frac{5}{2})^2 = \frac{-16 + 25}{4} = \frac{9}{4}$$

سپس ریشه‌گیری می‌کنیم:

$$\rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2} \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

ب ابتدا باید ضریب x^2 ، ۱ شود پس طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و سپس مراحل بعدی را ادامه می‌دهیم.



$$3x^2 - 5x = 2 \rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{2}{3}$$

$$x - \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} \frac{25}{36} \rightarrow \text{نصف ضرب } x = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{2}{3} + \frac{25}{36} \rightarrow (x - \frac{5}{6})^2 = \frac{2}{3} + \frac{25}{36} = \frac{24 + 25}{36} = \frac{49}{36} \rightarrow x - \frac{5}{6} = \pm \frac{7}{6}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \rightarrow x = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6} \rightarrow x = -\frac{7}{6} + \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

۳۴ ابتدا ضرایب معادله را مشخص می‌کنیم.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

• $\Delta > 0$ ← بنابراین ۲ جواب دارد.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm 5}{2 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۳۵ هنگامی معادله دارای دو ریشه مضاعف است که $\Delta = 0$ باشد :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$(-2(m+1))^2 - 4(m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m-2) = 0$$

$$4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 12m - 8 = 0 \Rightarrow 20m - 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{5}$$

۳۶

معادله ریشه حقیقی ندارد $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \times (1) \times (5) = 1 - 20 = -19 < 0$

ب) $3x^2 - 9x = -x^2 - 2 \rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times (4) \times (2) = 81 - 32 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-9) + \sqrt{49}}{2(4)} = \frac{9+7}{8} = \frac{16}{8} = 2 \\ x_2 = \frac{-(-9) - \sqrt{49}}{2(4)} = \frac{9-7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

۳۷

$$\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}x - 7 = 0 \xrightarrow{\text{فرم استاندارد}} \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = \sqrt{3} \\ c = -7 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{\sqrt{5}} = \frac{-7 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{-7\sqrt{5}}{5}$$

۳۸

$$2x^2 - 5x + (3m - 1) = 0 \xrightarrow{\text{شرط ریشه مضاعف}} \Delta = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \times (2) \times (3m - 1) = 0 \rightarrow 25 - 24m + 8 = 0 \rightarrow -24m = -33 \rightarrow m = \frac{33}{24}$$

۳۹

مساحت مثلث = مساحت مستطیل

$$\text{مساحت مستطیل} \Rightarrow (3x + 2)(x + 1) = 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x^2 + 5x + 2$$

$$\text{مساحت مثلث} \Rightarrow \frac{1}{2}(3x + 6)(2x) = 3x^2 + 6x$$



$$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$$

$$\text{طول مستطیل} = 3x + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8$$

$$\text{عرض مستطیل} = x + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \quad \text{ابتدا هریک از ضرایب معادله را تعیین می‌کنیم.} \quad (40)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 16 - 4(7)(-3) = 16 + 84 = 100$$

چون $\Delta > 0$ بنابراین معادله دو ریشه دارد.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2(7)} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+10}{14} = \frac{14}{14} = 1 \\ x_2 = \frac{4-10}{14} = \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

(41) می‌دانیم شرطی که برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز وجود دارد، $\Delta > 0$ است از طرفی $\Delta = b^2 - 4ac$ است که در این معادله $\Delta = (-a)^2 - 4 \times (2) \times (-5) = a^2 + 40$ است که $a^2 + 40$ هر دو مثبت هستند پس همواره $\Delta > 0$ است.

(42)

الف

$$x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{1 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(4) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف دارد}} x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \times 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 17x - 18 = 0 \rightarrow \Delta = (17)^2 - 4(-18) = 289 + 72 = 361$$

$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{361}}{2} = \begin{cases} \frac{-17+19}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-17-19}{2} = \frac{-36}{2} = -18 \end{cases}$$

$$3x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(3)(4) = 1 - 48 = -47 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{جواب ندارد.}$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(-1) = 3 + 4 = 7$$

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

(43)

$$\text{الف) نامساوی همواره برقرار است. } x^2 + ax - 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-1) \rightarrow \Delta = a^2 + 4 > 0$$

بهازی تمام مقادیر a دارای جواب حقیقی است.

$$\text{ب) } x^2 - x + a = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a$$

$$1 - 4a > 0 \rightarrow 4a < 1 \xrightarrow{\text{طرفین } (\div 4)} a < \frac{1}{4} \quad \text{بهازی } a < \frac{1}{4} \text{ معادله همواره دارای دو جواب حقیقی متمایز است.}$$



۴۴

اگر یکی از جوابها ۴- باشد $2x^2 - ax + 28 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow 2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \rightarrow a = -15$

$$2x^2 + 15x + 28 = 0 \rightarrow \Delta = 1 > 0$$

$$x = \frac{-15 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -7 \end{cases} \text{ ریشه مطلوب}$$

۴۵ حاصل ضرب دو ریشه منفی می‌شود یعنی $\frac{c}{a} < 0$

$$-\sqrt{3}x^2 + 2x + (2m - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{3} \\ b = 2 \\ c = 2m - 8 \end{cases}$$

$$\frac{2m - 8}{-\sqrt{3}} < 0$$

$$2m - 8 > 0 \text{ دو طرف در } (-\sqrt{3}) \text{ ضرب} \rightarrow 2m > 8 \rightarrow m > 4$$

۴۶ مجموع ریشه‌ها در معادله درجه دو مساوی $-\frac{b}{a}$ است؛

$$2 = \frac{-(-6)}{m+3} \rightarrow 2m+6=6 \rightarrow \boxed{m=0}$$

۴۷

$$\text{الف)} 2x^2 - 10x + 3x - 15 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 2x^2 - x + 19 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 19 = -151 < 0 \text{ معادله جواب حقیقی ندارد.}$$

$$\text{ب)} \cancel{6x^2} - 4x + 15x - 10 = \cancel{6x^2} - 4x \rightarrow 11x - 10 = -4x \rightarrow 15x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{15} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

۴۸ با کمی دقت متوجه می‌شویم که k و k' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + 6x - a = 0$ هستند. بنابراین: $k + k' = -\frac{b}{a} = \frac{-6}{3} = \boxed{-2}$

۴۹ ابتدا حاصل جمع و ضرب دو ریشه را به دست می‌آوریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2 \times 2 = 9 - 4 = \boxed{5}$$

۵۰

$$\left. \begin{aligned} \text{مجموع ریشه‌ها} &= -\frac{b}{a} = \frac{-(-(m+1))}{2} = \frac{m+1}{2} \\ \text{ضرب ریشه‌ها} &= \frac{c}{a} = \frac{2(m-2)}{2} = m-2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{m+1}{2} = m-2 \rightarrow m+1 = 2m-4 \rightarrow \boxed{m=5}$$

اما به ازای $m = \Delta$ معادله به صورت $2x^2 - 6x + 6 = 0$ تبدیل می‌شود و مقدار Δ منفی است، پس هیچ مقدار قابل قبولی برای m وجود ندارد.

$$\Delta = 36 - 48 = -12$$

۵۱

$$\text{الف)} a \neq 0 \Rightarrow m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

$$\Delta > 0 \rightarrow (2m+1)^2 - 4(m+1)(m+1) > 0$$

$$\rightarrow (4m^2 + 4m + 1) - (4m^2 + 8m + 4) > 0$$

$$\rightarrow \underbrace{-4m - 3}_{\Delta} > 0 \rightarrow -4m > 3 \rightarrow \boxed{m < -\frac{3}{4}, m \neq -1}$$

$$\text{ب)} \Delta < 0 \rightarrow -4m - 3 < 0 \rightarrow \boxed{m > -\frac{3}{4}}$$

$$\text{ج)} \Delta = 0 \rightarrow -4m - 3 = 0 \rightarrow \boxed{m = -\frac{3}{4}}$$

۵۲

الف



$$a = 3, b = 5, c = -2$$

$$\Rightarrow \Delta = 25 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{3} - 2 = \frac{-5}{3}, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3}$$

در معادله درجه دوم داده شده مجموع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ است.

ب

$$a = 4, b = 3, c = -7$$

$$\Delta = 9 - 4(4)(-7) = 9 + 112 = 121$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{-3 + 11}{8} = 1 \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{-3 - 11}{8} = \frac{-14}{8} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 1 - \frac{7}{4} = \frac{-3}{4}, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$$

در معادله درجه دوم داده شده مجموع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ است.

۵۳

$$x(1-x) - 6kx + 4 = 0 \Rightarrow x - x^2 - 6kx + 4 = 0$$

$$-x^2 + (1-6k)x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد } ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a = -1 \\ b = 1-6k \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{طبق صورت سوال} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{4}{-1} = -4 \quad S = \frac{P}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2 \\ S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-1+6k}{-1} = -2 \Rightarrow -1+6k = 2 \Rightarrow 6k = 3 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۵۴

روش اول:

$$64x^2 - 50x - 14 = 0 \xrightarrow{\div 2} 32x^2 - 25x - 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 625 - 4 \times (32) \times (-7) = 625 + 896 = 1521 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{25 + 39}{64} = 1, \quad x_2 = \frac{25 - 39}{64} = -\frac{7}{32}$$

توجه کنید $\sqrt{1521} = 39$ است.

روش دوم: هر گاه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد یک ریشه معادله $x' = 1$ و ریشه دیگر $x'' = \frac{c}{a}$ است.

$$64x^2 - 50x - 14 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} = \frac{-14}{64} = -\frac{7}{32} \end{cases}$$

۵۵

معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ زمانی دارای ریشه مضاعف است که $\Delta = 0$ باشد و در این حالت ریشه مضاعف معادله از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید:

$$mx^2 - mx + n = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد } ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a = m \\ b = -m \\ c = n \end{cases}$$

$$\text{ریشه مضاعف: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-m)}{2m} = \frac{1}{2}$$

از طرفی ریشه معادله در خود معادله صدق می کند، حال داریم:

$$m\left(\frac{1}{2}\right)^2 - m \times \left(\frac{1}{2}\right) + n = 0 \Rightarrow \frac{m}{4} - \frac{m}{2} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{m}{4} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1}{4}$$



۵۶

معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است پس $\Delta > 0$ است.

$$x^2 - 5x + m + 2 = 0 \xrightarrow[\text{فرم استاندارد}]{ax^2 + bx + c = 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = m + 2 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(1)(m + 2) > 0 \rightarrow 25 - 4m - 8 > 0 \rightarrow 17 > 4m \rightarrow m < \frac{17}{4}$$

۵۷

$$mx^2 - 3x - (2m + 1) = 0 \xrightarrow[x = -1]{\text{یک ریشه}} m(-1)^2 - 3(-1) - 2m - 1 = 0$$

$$m + 3 - 2m - 1 = 0 \rightarrow -m + 2 = 0 \rightarrow -m = -2 \rightarrow m = 2$$

$$\left. \begin{matrix} mx^2 - 3x - (2m + 1) = 0 \\ m = 2 \end{matrix} \right\} \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ریشه دیگر}$$

$$x_2 - m = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \text{ تفاضل } m \text{ از ریشه دیگر}$$

۵۸

ابتدا معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$x(2x - 5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = x^2 \text{ ضریب} = 2 \\ b = x \text{ ضریب} = -5 \\ c = \text{عدد ثابت} = -a \end{cases}$$

$$\text{ریشه مضاعف معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ از رابطه } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \text{ به دست می‌آید. پس } x_1 = x_2 = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

۵۹

اگر دو ریشه معادله را x' و x'' بنامیم، در صورتی معکوس یکدیگرند که حاصل ضرب آنها برابر یک شود. (با شرط $\Delta > 0$)

$$x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2m + 6}{2} = 1 \Rightarrow 2m + 6 = 2 \Rightarrow 2m = 2 - 6 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2 \quad (1)$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} \Rightarrow x' + x'' = \frac{-3m}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{-3(-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۶۰ k عدد زوج اول و $k + 2$ عدد زوج دوم است.

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} = \frac{5}{12} \rightarrow \frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} - \frac{5}{12} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1 \times 12(k+2)}{k \times 12(k+2)} + \frac{1 \times 12k}{(k+2) \times 12k} - \frac{5 \times k(k+2)}{12 \times k(k+2)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{12k + 24 + 12k - 5k^2 - 10k}{12k(k+2)} = 0 \rightarrow -5k^2 + 14k + 24 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 14^2 - 4(-5)(24) = 676 > 0 \text{ معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$k = \frac{-14 \pm \sqrt{676}}{-10} \rightarrow \begin{cases} k = 4 \rightarrow 4, 4+2=6 \\ k = -\frac{6}{5} \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

۶۱

الف $x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 6$

ب

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49} \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 7}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ب



$$\frac{4}{2x-1} = \frac{5}{x+2} \rightarrow 4(x+2) = 5(2x-1) \rightarrow 4x+8 = 10x-5 \rightarrow 6x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{6}$$

۶۲

الف

$$\frac{3x-5}{x+3} = 1 \rightarrow \frac{3x-5}{x+3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{(3x-5) - (x+3)}{x+3} = 0 \rightarrow \frac{2x-8}{x+3} = 0 \rightarrow 2x-8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$$

چون $x = 4$ ریشهٔ مخرج نیست قابل قبول است.

ب

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \Rightarrow \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم.}} \frac{(3x-2) \times (x+3)}{x \times (x+3)} + \frac{(2x+5) \times x}{(x+3) \times x} - \frac{5 \times x \times (x+3)}{1 \times x \times (x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 9x - 2x - 6 + 2x^2 + 5x - 5x^2 - 15x}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow -3x-6 = 0 \rightarrow x = -2$$

چون $x = -2$ ریشهٔ مخرج نیست پس قابل قبول است.

پ

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \rightarrow \frac{2+x}{x+2} = x+3 \rightarrow x+3 = 1 \rightarrow x = -2$$

چون $x = -2$ ریشهٔ مخرج است پس قابل قبول نیست.

ت

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم.}} \frac{(x^2-2x+2) \times 1}{x(x-2)} - \frac{(1+x) \times (x-2)}{x \times (x-2)} - \frac{(x-1) \times x}{(x-2) \times x} = 0$$

$$\frac{x^2-2x+2-x^2+x+2-x^2+x}{x(x-2)} = 0 \rightarrow \frac{-x^2+4}{x(x-2)} = 0 \rightarrow -x^2+4 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = -2 \text{ یا } x = +2$$

 $x = 2$ ریشهٔ مخرج است پس قابل قبول نیست ولی $x = -2$ ریشهٔ مخرج نیست پس قابل قبول است.

ث

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2} \rightarrow \frac{3 \times (x+3) - 2(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{4}{x-2}$$

$$\rightarrow \frac{3x+9-2x+2}{(x-1)(x+3)} = \frac{4}{(x-2)} \rightarrow \frac{x+11}{(x-1)(x+3)} = \frac{4}{(x-2)}$$

$$\rightarrow \frac{x+11}{(x-1)(x+3)} - \frac{4}{x-2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم.}} \frac{x^2-2x+11x-22-4x^2-8x+12}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{-3x^2+x-10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \rightarrow -3x^2+x-10 = 0 \text{ یا } 3x^2-x+10 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(10) = 1 - 120 = -119 < 0 \text{ معادله جواب ندارد.}$$

ج

$$\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2} \rightarrow \frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+3}{(x-2)} - \frac{(2x-3)}{(x+2)} = 0$$



$$\rightarrow \frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \rightarrow \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\rightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \rightarrow \Delta = -8 < 0$$

پس معادله جواب ندارد.

۶۳) دستور محاسبه سرعت متوسط $V = \frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی شده و t مدت زمان سپری شده است.

۲۵۰۰ متر = ۲٫۵ کیلومتر

$$\text{سرعت متوسط} = ۱۵ \frac{\text{کیلومتر}}{\text{ساعت}} \Rightarrow \frac{۲٫۵}{t} = ۱۵ \Rightarrow t = \frac{۲٫۵}{۱۵} = \frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۱}{۶} = \frac{x}{۶۰} \Rightarrow x = ۱۰ \text{ دقیقه}$$

(زمان طی مسیر منزل تا مدرسه) دقیقه ۱۴ = ۴ + ۱۰

$$\text{الف)} \frac{-x(1+x) + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -1 \rightarrow \frac{-x - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1} = -1 \rightarrow \frac{-x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = -1$$

$$\rightarrow \cancel{-x^2} + x - 2 = 1 \cancel{-x^2}$$

$$\rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

چون $x = 3$ مخرج کسرها را منفر نمی‌کند، قابل قبول است.

$$\text{ب)} 3x^2 + \cancel{1} = x + \cancel{1} \rightarrow 3x^2 - x = 0 \rightarrow x(3x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \text{ ق ق} \\ \boxed{x = \frac{1}{3}} \text{ ق ق} \end{cases}$$

۶۵) اگر شیر B استخر را در t ساعت پر کند، شیر A استخر را در $3 - t$ ساعت پر می‌کند بنابراین داریم:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{t-3+t}{t(t-3)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2t-3}{t^2-3t} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow t^2 - 3t = 4t - 6 \rightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه جملی مشترک}} (t-1)(t-6) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \boxed{t = 6} \end{cases} \quad \text{(زیرا ساعت منفی نمی‌تواند باشد) ق ق}$$

$$\begin{array}{l} \times x^2 \\ \hline x^2 + 8 = 4x \\ x \neq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0, \Delta = (-4)^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16 < 0$$

معادله جواب ندارد.

ب

$$(x-2)(x+3) = (x+1)(x-4)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

چون $x = \frac{1}{2}$ ریشه هیچ مخرجی نیست، پس قابل قبول است.

پ

$$\frac{24 + 10 + m}{10 + m} = \frac{24}{10 - m}$$

$$\Rightarrow \frac{24 + m}{10 + m} = \frac{24}{10 - m} \Rightarrow 240 + 10m - 24m - m^2 = 240 + 24m$$

$$\Rightarrow -m^2 - 14m + 100 = 0 \Rightarrow m^2 + 14m - 100 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+50) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \text{ ق ق} \\ m+50=0 \Rightarrow m=-50 \text{ ق ق} \end{cases}$$

ت



$$\frac{y+2}{y+3} + \frac{y-1}{3-y} = \frac{y^2}{y^2-9} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{y+2}{y+3} + \frac{1-y}{y-3} = \frac{y^2+y^2-9}{y^2-9}$$

$$\Rightarrow \frac{(y+2)(y-3) + (y+3)(1-y)}{y^2-9} = \frac{2y^2-9}{y^2-9}$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 6 + y - 3y - y^2 + 3 = 2y^2 - 9$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 3y - 6 = 0, \Delta = 9 - 4(2)(-6) = 9 + 48 = 57$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4} \text{ ق ق} \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$x^2 - 6x + (-3)^2 = 16 + (-3)^2$$

$$(x-3)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=5 \Rightarrow x=8 \\ x-3=-5 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

طرفین - وسطین

$$\xrightarrow{\text{ب}} (x-2)(x+3) = (x+1)(x-4)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow x + 3x = -4 + 6$$

$$\Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{13}{6} \Rightarrow 6x^2 + 6 = 13x \Rightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-13 \\ c=6 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-13)^2 - 4(6 \times 6) = 169 - 144 = 25$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13+5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{13-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{قدر مطلق اختلاف دو عدد} = \left| \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{9-4}{6} \right| = \frac{5}{6}$$

۶۹ $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با x در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با $8x + x = 9$ است.

اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $9x + 100$ است. از آنجا که $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$

داریم:

$$\frac{8x}{9x + 100} = \frac{4}{5}$$

جواب معادله فوق $x = 100$ و از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن $9x$ است، در نتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با ۹۰۰ گرم است.

۷۰



$$\begin{aligned} x=2 &\rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \\ \Rightarrow \frac{2}{a-2} &= \frac{a}{2} - \frac{a-2}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} = 1 \\ \Rightarrow a-2 &= 2 \Rightarrow a=4 \end{aligned}$$

۷۱) می‌دانیم جواب یک معادله گویا فقط وقتی قابل قبول است که ریشهٔ مخرج نباشد. از طرفی اگر جواب‌های معادلهٔ بالا را که همان جواب‌های صورت کسر است بیابیم، خواهیم داشت:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

با توجه به توضیحات بالا $x=2$ باید ریشهٔ مخرج باشد.

$$2^2 - 2(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۷۲) خیر؛ زیرا اگر خط l را که موازی محور y است رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

۷۳) باید d' یا d حذف شود تا نمودار پیکانی، نمودار یک تابع شود.

۷۴) نموداری تابع است که هر خط موازی محور y ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. پس در نمودار داده‌شده حداقل ۳ نقطه باید حذف شود تا نمودار به تابع تبدیل شود.

۷۵)

برای اینکه رابطهٔ f تابع باشد باید زوج مرتب‌ها عضو اول تکراری نداشته باشند. اگر در دو زوج مرتب عضو اول تکراری باشند دوم هم تکراری باشند. پس داریم:

$$\begin{aligned} f &= \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\} \\ \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} &\Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \\ x=3 &\rightarrow y=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow f = \{(2, 4), (5, 2), (3, 4)\}$$

۷۶) الف) تابع است. توجه کنید که دو زوج مرتب $(1, \sqrt{25})$ ، $(1, 5)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر است.

$$\sqrt{25} = 5$$

ب) تابع نیست. زیرا دو زوج مرتب $(2, \sqrt{6})$ ، $(2, 3)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند در حالیکه مؤلفه‌های دومشان با هم برابر نیست.

$$f = (2, 8), (4, 1), (5, 8) \quad ۷۷)$$

۷۸) در صورتی f تابع است که اگر در دو زوج مرتب مؤلفه‌های اول برابر باشند، آنگاه مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند:

$$(2, x+y), (2, 4) \Rightarrow x+y=4$$

$$(5, 2), (5, x-y) \Rightarrow x-y=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

$$3-y=2 \Rightarrow -y=2-3=-1 \Rightarrow y=1$$

۷۹) از آنجایی که گفته شده نمایش یک نقطه است، بنابراین این دو زوج مرتب با هم برابر بوده یعنی مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان با هم برابر است.

$$2a-4=a \Rightarrow a=4$$

$$3a=3b-6 \xrightarrow{a=4} 3 \times (4) = 3b-6 \Rightarrow 12+6=3b \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2a-b=2 \times (4)-6=2$$

۸۰) الف) عرض‌ها ب) x طول و y عرض

۸۱) دقیقاً یک.

۸۲) الف) تابع نیست. چون دو زوج مرتب $(2, 5)$ ، $(2, 3)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند ولی مؤلفه‌های دومشان متفاوت است.

ب) تابع است. چون هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نیستند.

۸۳) چون که مقدار y نظیر $x=2$ هم a^2 و هم $2a$ است پس این دو مقدار باید با یکدیگر برابر باشند.

$$a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

این جواب غ ق است، زیرا در این صورت به ازای $x=2$ مقدار $y=5$ را به دست می‌آید که این

مخالف شرط تابع بودن جدول است.

$$a+1=3 \Rightarrow a=2 \quad ۸۴)$$

از ۴ دو فلش خارج است پس؛ $a+3$ برابر ۵ می‌شود پس چون ۵ به ۴ وصل شده و از طرفی ۵ به ۲ وصل شده است؛ پس:

$$b-2=4 \Rightarrow b=6$$

۸۵)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f(x) &= 9 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow D_f = \{0, -2, 2\}$$



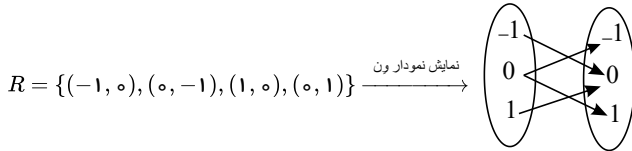
۸۶ برای اینکه یک نمودار ون تابع را نشان دهید باید از هر عضو دامنه دقیقاً ۱ فلش به اعضای مجموعهٔ دوم وصل شده باشد.

در نمودار بالا از ۱ و ۴ دو فلش خارج شده است پس با حذف یک فلش از هر کدام از آن‌ها نمودار یک تابع را نشان خواهد داد پس باید ۲ فلش را حذف کنیم.

۸۷

$$\left. \begin{aligned} (1, 2a+b) &= (1, 4) \Rightarrow 2a+b=4 \\ (2, 5) &= (2, a-b) \Rightarrow a-b=5 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\oplus} 3a=9 \Rightarrow a=3 \xrightarrow[a=3]{a-b=5} b=-2$$

۸۸ ابتدا رابطه را به صورت زوج مرتب می‌نویسیم. باید توجه داشته باشیم که x, y ها باید عضو اعداد صحیح باشند و حاصل جمع قدرمطلق آنها برابر یک باشد.



خیر تابع نیست.

۸۹

$$\left. \begin{aligned} x=-2 &\Rightarrow y=(-2)^2+(-2)-1=4-2-1=1 \\ x=-1 &\Rightarrow y=(-1)^2+(-1)-1=1-1-1=-1 \\ x=0 &\Rightarrow y=0^2+0-1=-1 \\ x=1 &\Rightarrow y=1^2+1-1=1 \\ x=2 &\Rightarrow y=2^2+2-1=6-1=5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R=\{(-2, 1), (-1, -1), (0, -1), (1, 1), (2, 5)\}$$

۹۰ دو زوج مرتب برابرند اگر مؤلفه‌ها نظیر به نظیر برابر باشند.

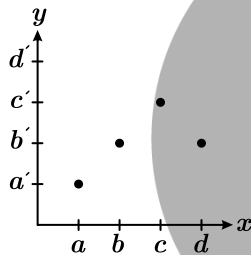
برابری عضوهای اول: $3x+2=5x+6 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$

برابری عضوهای دوم: $6y+4=7y-8 \Rightarrow y=12$

۹۱

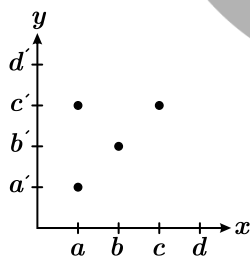
الف

تابع است. زیرا از هر عضو یک پیکان خارج شده است. نمودار مختصاتی آن را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.



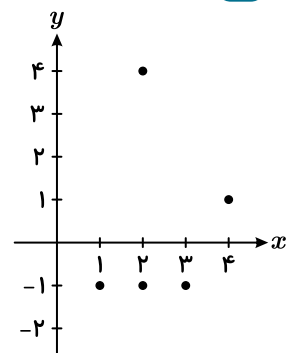
ب

تابع نیست. زیرا از عضو a ، دو پیکان خارج شده است. می‌توان نمودار مختصاتی زیر را برای رابطه رسم کرد.



پ

$f = \{(\underline{2}, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (\underline{2}, 4)\} \Rightarrow$ تابع نیست

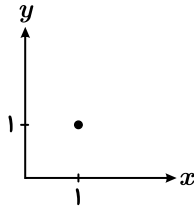


تابع نیست. زیرا دو زوج مرتب $(2, -1)$ و $(2, 4)$ دارای عضوهای اول تکراری هستند ولی عضوهای دوم آن‌ها متفاوت است.

ت

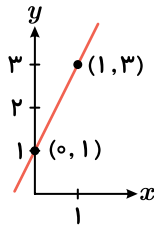


تابع است. رابطه تک‌عضوی همواره تابع است.



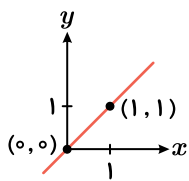
ث

تابع است. زیرا هر خط موازی محور y ها نمودار را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.



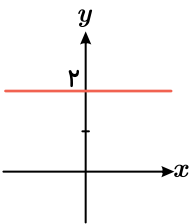
ج

تابع است. زیرا در نمودار رسم‌شده رابطه هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



چ

تابع است. زیرا در نمودار رسم‌شده رابطه هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



۹۲

الف دقیقاً با یک عضو

ب هیچ دو زوج متمایزی، مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشند.

پ از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ت هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور y ها باشد قرار نگیرند.

۹۳

الف نادرست، زیرا ممکن است یک نفر به بیشتر از یک کتاب علاقه‌مند باشد.

ب نادرست

پ نادرست، $P(x) = R(x) - C(x)$

ت نادرست

۹۴

الف ریشه مضاعف

ب $\frac{-b}{a}$ است.

پ (قیمت هر کالا) $\times$ (تعداد فروش هر کالا)

۹۵

الف هزینه و درآمد باهم برابرند.

ب تابع

پ نیست - چون $\sqrt[3]{8} = \sqrt[4]{16} = 2$ و $A = \{(2, 5), (2, 3)\}$ پس A تابع نیست.

۹۶

الف برای نمونه $\{(2, 4), (3, 5)\}$

ب برای نمونه $\{(2, 4), (3, 5), (3, 6)\}$



۹۷ الف) تابع است چون می‌دانیم برای هر دایره با شعاع مشخص، فقط یک عدد به‌عنوان مساحت به‌دست می‌آید.

ب) تابع است چون هر فرد در یک زمان مشخص فقط دارای یک عدد برای قدش است.

پ) تابع نیست چون هر عدد طبیعی اول دو مقسوم‌علیه دارد.

ت) تابع است چون هر داوطلب کنکور، فقط یک رتبه‌کشوری در رشته‌اش دارد. اما هر عدد اول دارای ۲ مقسوم‌علیه است، خودش و یک.

۹۸ میزان حقوق وابسته به میزان ساعات کاری کارگران است. پس میزان ساعات کاری: متغیر مستقل و میزان حقوق دریافتی: متغیر وابسته

میزان حقوق دریافتی کارگران (متغیر وابسته) متناسب با میزان ساعات کاری (متغیر مستقل) آنها است.

۹۹ چون از عدد ۴ دو پیکان خارج شده، پس مولفه‌های دوم باید با هم برابر باشند:

$$a + 1 = -2 \Rightarrow a = -3$$

حال اگر $a = -3$ را در $a - 1$ قرار دهیم، جواب ۴- می‌شود. از طرفی ۴- قبلاً به ۸ وصل شده پس:

$$2b + 1 = +8 \Rightarrow 2b = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$$

۱۰۰ با توجه به تعریف تابع داریم:

$$(4, a + b) = (4, 2a + 4) \Rightarrow a + b = 2a + 4 \Rightarrow b - a = 4 \quad (I)$$

از طرفی:

$$(2, 2a) = (2, 6 + a) \Rightarrow 2a = 6 + a \Rightarrow a = 6$$

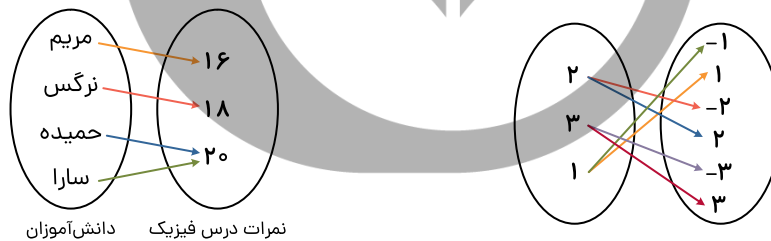
در نتیجه بنابر رابطه (I) داریم:

$$b - a = 4 \xrightarrow{a=6} b - 6 = 4 \Rightarrow b = 10$$

۱۰۱ الف) تابع نیست، چون شرط تابع بودن این است که هر عضو مجموعه اول (A) دقیقاً به یک عضو از مجموعه دوم (B) متصل باشد (دقیقاً یک فلش از هر عضو A خارج شود).

ب) تابع نیست، چون در نمودار «ب» عضوی از مجموعه A وجود دارد که به هیچ‌یک از اعضای مجموعه B متصل نشده است. ج) تابع است.

۱۰۲



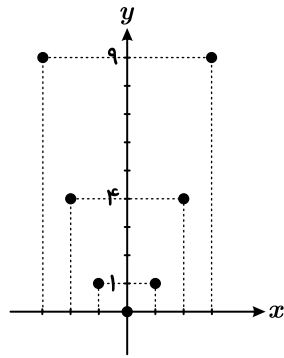
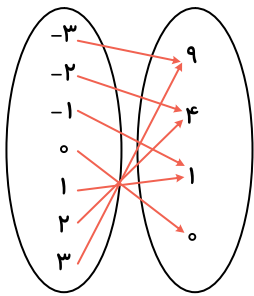
تابع نیست زیرا از هر عضو مجموعه اول ۲ پیکان خارج شده است. تابع است زیرا هر دانش‌آموز دقیقاً یک نمره دارد (یک پیکان خارج شده)



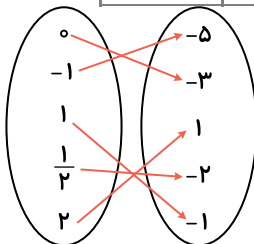
تابع نیست زیرا از عدد ۲ دو پیکان خارج و یکی به ۴ و دیگری به ۵ تابع است زیرا از هر عدد مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج وارد شده است.

۱۰۳

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
(x, y)	(-۳, ۹)	(-۲, ۴)	(-۱, ۱)	(۰, ۰)	(۱, ۱)	(۲, ۴)	(۳, ۹)

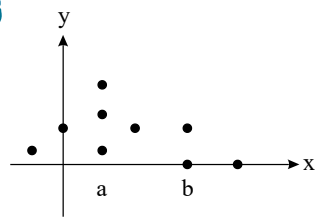


x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$y = 2x - 3$
y	-5	-3	-2	-1	1	
(x, y)	$(-1, -5)$	$(0, -3)$	$(\frac{1}{2}, -2)$	$(1, -1)$	$(2, 1)$	



۱۰۴

۱۰۵ با توجه به شکل در نقاط به طول a باید حداقل دو نقطه حذف شود و در نقاط به طول b باید حداقل یک نقطه حذف شود تا تابع شود. پس در مجموع باید حداقل سه نقطه حذف شود تا تابع شود.



۱۰۶ با توجه به نمودار پیکانی عضو ۳ از دامنه به ۷ وصل شده است پس:

عضو ۷ از دامنه به ۵٫۵ در برد متصل شده است در نتیجه:

$$f(3) = 7$$

$$f(7) = 5.5$$

$$\left. \begin{aligned} f(x+2) &= (x+2)^2 - 2(x+2) = x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 = x^2 + 2x \\ f(x) &= x^2 - 2x \end{aligned} \right\} \rightarrow \cancel{x^2} + 2x = \cancel{x^2} - 2x \rightarrow 4x = -2x \rightarrow x = 0$$

۱۰۸ از آنجا که $2 = \sqrt{4} > \sqrt{5}$ است، پس $2 - \sqrt{5}$ عددی منفی است بنابراین داریم:

$$f(2 - \sqrt{5}) = |2 - \sqrt{5}| - \sqrt{5} = -(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{5} = -2 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = -2$$

۱۰۹ متغیر مستقل x متغیر وابسته $h(x)$

$$g(5) = 5 + 4 = 9 \Rightarrow f(g(5)) = f(9) = \sqrt{9} + 5 = 3 + 5 = 8$$

الف $f(2) = |2 + 2| = 4$, $g(2) = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow f(2) + g(2) = 4 + 4 = 8$

ب $g(3) = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow f(g(3)) = f(6) = |6 + 2| = 8$

ج $f(0) = |0 + 2| = 2 \Rightarrow g(f(0)) = g(2) = 2 \times 2 = 4$

$$D = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\} = \mathbb{Z}$$

۱۰۷

۱۰۸

۱۰۹

۱۱۰

۱۱۱

۱۱۲

الف



$$R = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$\begin{cases} f: Z \rightarrow R \\ f(x) = -2x \end{cases}$$

$$f(-3) = -2 \times (-3) = 6 \quad f(5) = -2 \times (5) = -10$$

$$3f(-3) - \frac{f(5)}{2} = 3 \times 6 - \frac{-10}{2} = 18 + 5 = 23$$

۱۱۳ ابتدا عبارت کلامی سوال را به زبان ریاضی می‌نویسیم و سپس مقدار آن را به ازای $x = 5$ حساب می‌کنیم:

با توجه به عبارت کلامی ۳ برابر مربع عدد را $3x^2$ و ریشه چهارم تفاضل ۴ از آن به صورت $\sqrt[4]{3x^2 - 4}$ است و $f(x)$ است و $f(5)$ برابر است با:

$$f(5) = \sqrt[4]{3 \times 25 - 4} = \sqrt[4]{71}$$

۱۱۴ نادرست است، زیرا:

$$\left. \begin{aligned} g\left(\frac{x}{3}\right) &= 3\left(\frac{x}{3}\right) - 5 = x - 5 \\ g(3) &= 3(3) - 5 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x - 5 \neq \frac{3x - 5}{4}$$

۱۱۵ الف) مجموعه طول نقاط نمودار برابر دامنه تابع و مجموعه عرض نقاط نمودار برابر برد تابع است.

$$D_f: -2 \leq x \leq 2, \quad R_f: 1 \leq y \leq 4$$

$$D_f: 1 \leq x \quad R_f: 2 \leq y \quad (\text{ب})$$

۱۱۶ با قراردادن اعضای دامنه در ضابطه تابع f داریم:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0, \quad f(2) = 2^2 - 1 = 3, \quad f(3) = 3^2 - 1 = 8$$

$$R_f = \{0, 3, 8\}$$

و نمایش زوج‌مرتبی تابع f به صورت $\{(1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$ خواهد بود.

$$117 \quad x = -1 \xrightarrow{g(x)=2x^2+3} g(-1) = 2(-1)^2 + 3 = 5$$

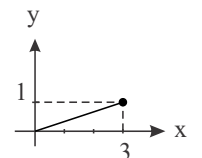
$$x = \sqrt{2} \xrightarrow{g(x)=2x^2+3} g(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 3 = 7 \quad \rightarrow R_f = \{5, 7, 3\}$$

$$x = 0 \xrightarrow{g(x)=2x^2+3} g(0) = 2(0)^2 + 3 = 3$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

$$R = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

۱۱۸ نمودار مقابل یک تابع است.



می‌بینید که $R \subset D$ (برد زیر مجموعه دامنه) است.

$$\begin{cases} f: D \rightarrow R \\ f(x) = \frac{1}{3}x \end{cases} \quad \text{که ضابطه آن برابر است با:}$$

۱۱۹ ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم

$$\text{الف) } (x-1)(x+3)(x^2-4)(x^2-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2-2^2=0 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow A = \{1, -3, -2, 2\}$$

اکنون اعضای مجموعه A را در ضابطه قرار می‌دهیم تا اعضای برد تابع به دست آید

$$f(1) = 4, \quad f(-3) = 4, \quad f(2) = 9, \quad f(-2) = 1$$

$$\Rightarrow R = \{4, 9, 1\} \quad \text{بنابراین برای برد داریم}$$

(ب) با توجه به دامنه تابع و ضابطه تابع یا محاسبه هر مقدار از دامنه برد تابع را به دست آوریم.

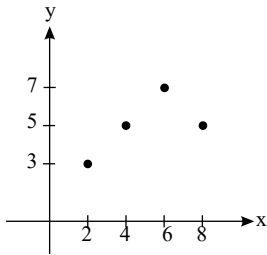
$$f(-2) = 50, \quad f(-1) = 32, \quad f(0) = 18, \quad f(1) = 8, \quad f(2) = 2$$

$$\text{برد: } R = \{2, 8, 18, 32, 50\}$$

۱۲۰ نمایش زوج‌مرتبی این تابع به صورت زیر است.

$$\{(2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 5)\}$$

برای نمایش مختصاتی این تابع کفایت زوج‌مرتبی‌های این تابع را در صفحه محورهای مختصات نمایش دهیم.



در نمودار مختصاتی محور طول‌ها محل قرار گرفتن اعضای دامنه و محور عرض‌ها محل قرار گرفتن اعضای برد تابع است در نتیجه داریم:

$$D_f = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$$

$$R_f = \{-3, 2, 3, -2, 1\}$$

مجموعه طول نقاط را اعضای دامنه و مجموعه عرض نقاط را برد تابع می‌گویند. بنابراین:

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$$R_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -2\}$$

دامنه تابع به صورت $\{1, 6, 9, 10\}$ و برد تابع به صورت $\{3, 5\}$ است توجه داشته باشید که به عضو ۷ پیکانی وارد نشده است پس عضو برد این تابع نیست.

$$f(x) = x^r + 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^r + 5 = 9 \\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^r + 5 = 5 \\ x = \sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^r + 5 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow R_f = \{5, 9, 10\}$$

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1, \quad f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 4 + 2 + 1 = 7, \quad f(-2) = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow R_f = \{1, 3, 7\}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad f(-1) = \frac{-1 + 1}{-1} = 0$$

$$f(2) = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}, \quad f(-2) = \frac{-2 + 1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_f = \left\{3, 2, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

پ

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \sqrt{2}, \quad f(2) = \sqrt{3}, \quad f(3) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(4) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \quad f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow R_f = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3\}$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad \dots$$

$$\Rightarrow R_f = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(-100) = 0, \quad f(500) = 0$$

$$\Rightarrow R_f = \{0\}$$

$$D = \{-2, -1, 0, 2, 3\}, \quad R = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$$



$$\left. \begin{array}{l} (0, 2) \in f \Rightarrow f(0) = 2 \\ (-1, 1) \in f \Rightarrow f(-1) = 1 \\ f(-1 + 3) = f(2) \xrightarrow{(2, 4) \in f} f(2) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2 \times 2 - 3\sqrt{1}}{4} = \frac{1}{4}$$

پ

از آنجا که $f(-2) = 3$ و $f(-1) = 1$ است در نتیجه:

$$f(m) = 3 - 1 \Rightarrow f(m) = 2$$

حال برای یافتن مقدار m باید در زوج مرتب‌های تابع f ، مؤلفهٔ دومی که ۲ شده را یافته و در نتیجه مؤلفهٔ اول آن برابر m می‌شود، پس: $m = 0$.

۱۲۷

الف

$$f(2) = 2 + 4 = 6 \Rightarrow R_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f(x) = 2 \Rightarrow x = -2$$

$$f(x) = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$f(x) = 4 \Rightarrow x = 0$$

$$f(x) = 5 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow D_f = \{2, 0, 1, -1, -2\}$$

ب

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, \sqrt{2}\}, R_f = \{-1, -2, -3, -4, -\sqrt{2}\}$$

پ

$$D_f = \{7, 5, 4, -1, 0\}, R_f = \{4, 2, 1, -4, 3\}$$

ت

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R = \{1\}$$

ث

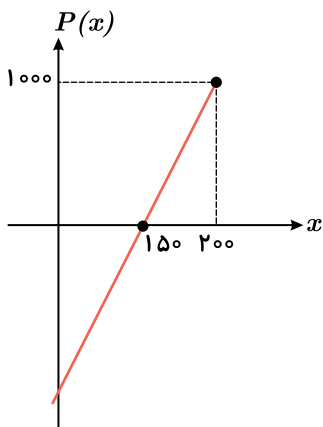
$$D_f = \left\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0\right\}$$

$$R_f = \left\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0\right\}$$

۱۲۸

$$a_n = b_n \Rightarrow 2n^2 + 1 = 4n + 7 \Rightarrow 2n^2 - 4n - 6 = 0 \Rightarrow 2(n^2 - 2n - 3) = 0 \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n - 3)(n + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 & \text{ق ق} \\ n = -1 & \text{غ ق} \end{cases}$$

۱۲۹ (الف)



$$\text{درآمد } R(x) = 70x \Rightarrow \text{سود } P(x) = R(x) - C(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = 70x - (3000 + 50x)$$

$$\Rightarrow P(x) = 20x - 3000$$

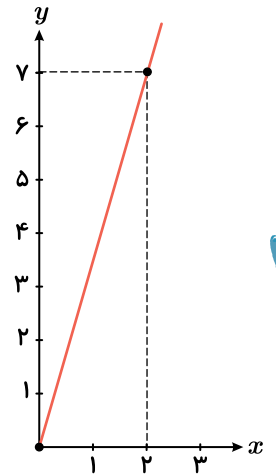
x	150	200
$P(x)$	0	1000

(ب)

$$P(x) = 0 \Rightarrow 20x - 3000 = 0 \Rightarrow 20x = 3000 \Rightarrow x = 150$$

پس باید حداقل یکی بیشتر از ۱۵۰۰، یعنی ۱۵۱۰ کالا بفروشد تا سوددهی آغاز شود.

۱۳۰



$$f(2) = 7$$

$$f(0) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{7 - 0}{2 - 0} = \frac{7}{2}$$

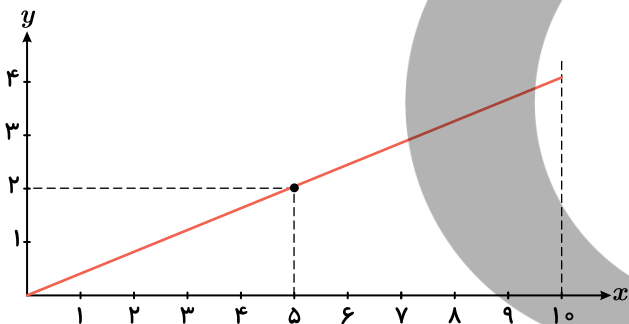
$$y = mx + h \Rightarrow 0 = 0 + h \Rightarrow \boxed{h = 0}$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{2}x \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{7}{2}x}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0.7) = \frac{0.7 \times 7}{2} \\ f(-0.7) = \frac{-0.7 \times 7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0.7 \times 7}{2} - \left(\frac{-0.7 \times 7}{2} \right) = \frac{0.7 \times 7}{2} + \frac{0.7 \times 7}{2} = 2 \left(\frac{0.7 \times 7}{2} \right) = 0.7 \times 7$$

۱۳۱

برای این سؤال بی‌شمار جواب می‌توان نوشت که یکی از آنها به صورت زیر است:



۱۳۲

ابتدا به کمک دو نقطه $(2, 8)$ و $(5, 2)$ ضابطه تابع خطی را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط: } m = \frac{8 - 2}{2 - 5} = -2, \quad f(x) = mx + h \xrightarrow[m=-2]{f(1)=8} 8 = -2 \times 1 + h \Rightarrow h = 10 \Rightarrow \boxed{h = 10}$$

$$\text{معادله خط: } y = f(x) = -2x + 10$$

$$\Rightarrow f(-3) = -2(-3) + 10 = 6 + 10 = 16$$

$$\Rightarrow f(5) = -2(5) + 10 = -10 + 10 = 0$$

۱۳۳

$$\text{شیب خط: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{4 - 1}{2 - 1} = \boxed{3}$$

$$f(x) = mx + n \xrightarrow[m=3]{f(1)=1} 1 = 3 \times 1 + n \Rightarrow n = 1 - 3 \Rightarrow \boxed{n = -2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x - 2$$

۱۳۴



$$f(0) = 2 \text{ و } f(2) = 3 \rightarrow m = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2} \text{ شیب خط}$$

$$y = mx + n \xrightarrow{(0,2)} 2 = \frac{1}{2}(0) + n \rightarrow n = 2$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \text{ معادله خط}$$

$$m = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \text{ شیب خط}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x \text{ معادله خط}$$

$$y = mx + n \xrightarrow{(0,0)} 0 = 3(0) + n \rightarrow n = 0$$

$$\begin{cases} F_7 = \frac{9}{5}C_7 + 32 \\ F_1 = \frac{9}{5}C_1 + 32 \end{cases} \Rightarrow F_7 - F_1 = \frac{9}{5}C_7 - \frac{9}{5}C_1 = \frac{9}{5}(C_7 - C_1)$$

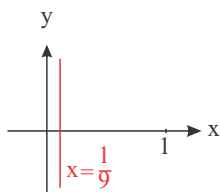
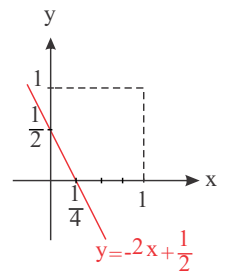
$$\Rightarrow F_7 - F_1 = \frac{9}{5} \times \frac{4}{9} = 36$$

پس دما ۳۶ فارنهایت افزایش یافته است.

$$2y = -4x + 1 \Rightarrow \frac{2y}{2} = -\frac{4x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -2x + \frac{1}{2} \text{ الف (۱۳۷)}$$

دو نقطه دلخواه از خط را به دست می‌آوریم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c} x & \frac{1}{4} \\ \hline y & 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & -\frac{1}{2} \\ \hline y & 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{array}$$



$$3x + \frac{2}{3} = 1 \rightarrow 3x = 1 - \frac{2}{3} \rightarrow 3x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ ب (۱۳۸)}$$

برای رسم نمودار این خط، از نقطه $\frac{1}{9}$ روی محور x ها، خطی موازی محور y ها رسم می‌کنیم.

با توجه به صورت سؤال متوجه می‌شویم $A \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ دو نقطه روی تابع خطی $f(x)$ می‌باشند.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{-1 - 1} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow (y - y_A) = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$A \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 5}{0 - 4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$m = \frac{y_7 - y_1}{x_7 - x_1} = \frac{(k + 5) - (3k - 2)}{(3k - 2) - (k + 2)} = \frac{-2k + 7}{2k - 4} \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2k + 7}{2k - 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow -4k + 14 = 2k - 4 \Rightarrow 6k = 18 \Rightarrow k = 3$$



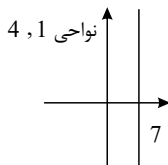
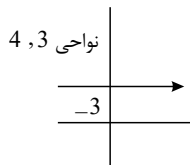
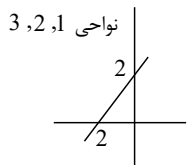
$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 4 \Rightarrow m \times 1 + n = 4 \Rightarrow m + n = 4 \\ f(2) &= 7 \Rightarrow m \times 2 + n = 7 \Rightarrow 2m + n = 7 \end{aligned} \right\} \xrightarrow[m=3]{m+n=4} m=3 \xrightarrow{m=3} n=1$$

۱۴۲

$$y = x + 2 \quad \text{ج}$$

$$y + 3 = 0 \quad \text{ب}$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{الف}$$



۱۴۳

ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$A \begin{cases} 3 \rightarrow x_2 \\ 5 \rightarrow y_2 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 \\ 9 \rightarrow y_1 \end{cases}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{5 - 9}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 9 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 9 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 11$$

۱۴۴

الف تابع خطی است.

ب

$$h(x) = mx + b$$

۴ سانتی‌متر می‌سوزد. $\rightarrow$ ۱ ساعت $h = 20$: ارتفاع شمع

ساعت	۰	۱	۲	۳
ارتفاع	۲۰	۱۶	۱۲	۸

$$\Rightarrow m = \frac{20 - 16}{0 - 1} = -4 \Rightarrow h(x) = -4x + 20$$

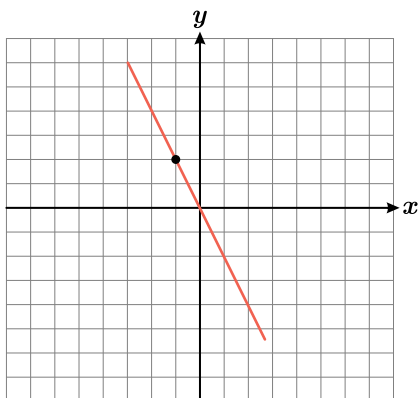
$$x = 2 \Rightarrow f(2) = -4 \times 2 + 20 = -8 + 20 = 12 \text{ سانتی‌متر}$$

ت

$$f(x) = 0 \Rightarrow -4x + 20 = 0 \Rightarrow -4x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{-4} \Rightarrow x = 5$$

پ

بعد از ۵ ساعت شمع می‌سوزد و تمام می‌شود.

۱۴۵ تابع از نقطه‌های $(0, 0)$ و $(-1, 2)$ می‌گذرد، پس:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{-1 - 0} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$y = mx + h, (0, 0) \in f \Rightarrow 0 = -2(0) + h \Rightarrow h = 0$$

$$y = mx + h, m = -2, h = 0 \Rightarrow y = -2x \text{ تابع خطی}$$

۱۴۶ اگر عرض مستطیل را x در نظر بگیریم، طول آن $x + 4$ است.

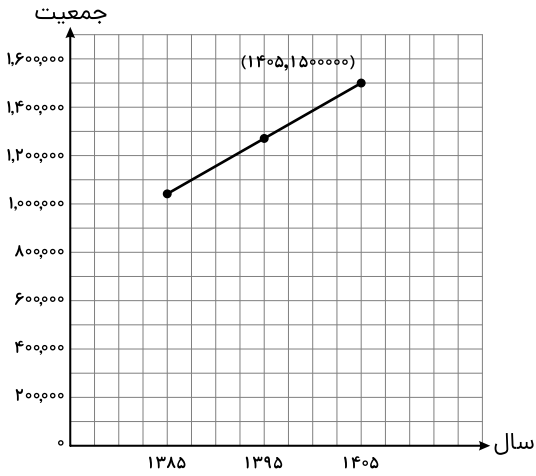
$$\text{محیط مستطیل} = 2(\text{عرض} + \text{طول}) = 2(x + 4 + x) = 2(2x + 4) = 4x + 8$$

خیر، تابع مساحت، خطی نیست، زیرا جمله x^2 در آن وجود دارد.



مساحت مستطیل = (عرض × طول) = $(x + ۴)x = x^2 + ۴x$

۱۴۷

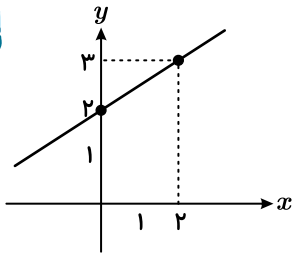


۱۴۸

$$m = \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۳ - ۲}{۲ - ۰} = \frac{۱}{۲}$$

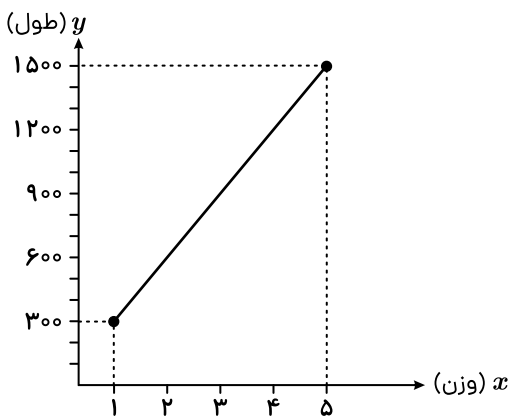
$$f(x) - f(۰) = m(x - ۰) \Rightarrow f(x) - ۲ = \frac{۱}{۲}(x - ۰)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۲$$



x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$ بر حسب متر	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۹	۱٫۲	۱٫۵

۱۴۹



(الف) ۱۵۰

$$۵ + (۱ \times ۰٫۵) = ۵٫۵ \text{ Cm}$$

$$۵ + (۲ \times ۰٫۵) = ۶ \text{ Cm}$$

$$۵ + (۴ \times ۰٫۵) = ۷ \text{ Cm}$$

$$۵ + (۷ \times ۰٫۵) = ۸٫۵ \text{ Cm}$$

(ب)

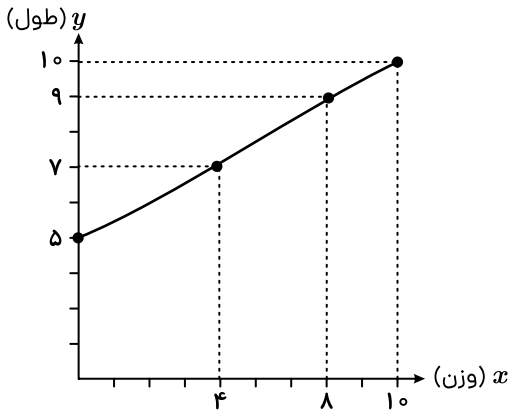


اندازه وزنه (بر حسب کیلوگرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتی‌متر)	۵٫۵	۶	۷٫۵	۸٫۵	۱۵	$۵ + \frac{a}{۲}$

(پ)

$$\begin{aligned} f(1) &= 5 + (1 \times 0.5) = 5.5 \\ f(4) &= 5 + (4 \times 0.5) = 7 \\ f(8) &= 5 + (8 \times 0.5) = 9 \\ f(10) &= 5 + (10 \times 0.5) = 10 \end{aligned}$$

(ت)



۱۵۱ ابتدا a را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$2x + a = 100 \rightarrow a = 100 - 2x$$

$$y = xa = x(100 - 2x) \Rightarrow y = 100x - 2x^2 \Rightarrow y = -2x^2 + 100x$$

ماکسیم مقدار در رأس تابع درجه دوم اتفاق می‌افتد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} \Rightarrow x = 25 \Rightarrow a = 100 - 2(25) \Rightarrow a = 50$$

$$\Rightarrow y_{\max} = x \times a = 25 \times 50 = 1250$$

۱۵۲ ابتدا تابع سود را به دست می‌آوریم:

هزینه - درآمد = سود

$$\text{سود} : P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 30x - (18x + 40)$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 12x - 40$$

تابع سود یک تابع درجه دوم است و بیشترین مقدار تابع سود در رأس سهمی اتفاق می‌افتد. بنابراین:

$$\text{طول رأس سهمی} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = -\frac{12}{2(-\frac{1}{2})} = 12$$

$$x = 12 \Rightarrow y = -(\frac{1}{2})(12)^2 + 12(12) - 40 = 32 \quad \text{بیشترین سود}$$

۱۵۳ ابتدا x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$x + 2y = 10 \Rightarrow x = 10 - 2y$$

$$\xrightarrow[\text{می‌نویسیم}]{\text{حاصل ضرب را بر حسب}} xy = (10 - 2y)y = 10y - 2y^2 = -2y^2 + 10y \Rightarrow y_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \times (-2)} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 10 - 2y \Rightarrow x = 10 - 5 = 5$$

$$\Rightarrow \max xy = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$$

۱۵۴ طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض می‌کنیم. بنابراین:

$$\text{محیط مستطیل} = (x + y) \times 2 = 72 \Rightarrow x + y = 36 \Rightarrow y = 36 - x$$

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = x(36 - x) = 36x - x^2 \Rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{2 \times (-1)} = 18 \Rightarrow y = 36 - x \Rightarrow y = 18$$

$$\Rightarrow \text{ماکزیم مساحت} = 18 \times 18 = 324$$



۱۵۵

طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $\frac{-b}{2a}$ است و برای به دست آوردن عرض آن به جای x در معادله سهمی مقدار $\frac{-b}{2a}$ را جایگذاری می‌کنیم و مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$y = -(x^2 - 4x + 4) + 5 = -x^2 + 4x - 4 + 5 = -x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{رأس سهمی} = (2, 5)$$

$$\Rightarrow \text{عرض رأس سهمی} y = -(2 - 2)^2 + 5 = 5$$

راه دوم: در سهمی به معادله $y = a(x - h)^2 + k$ نقطه (h, k) رأس سهمی است. بنابراین:

$$\text{رأس سهمی} = (2, 5)$$

۱۵۶

الف

$$P(x) = R(x) - C(x) = 300x - (x^2 + 200x + 30) = -x^2 + 100x - 30$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{-2} = 50$$

$$p(50) = -(50)^2 + 100(50) - 30 = 2470$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = (20x - x^2) - (50 + 4x) = -x^2 + 16x - 50$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-2} = 8$$

$$P(8) = (-8)^2 + 16(8) - 50 = 14$$

۱۵۸

تابع درجه دوم (سهمی) $y = ax^2 + bx + c$ به شرط $a > 0$ در نقطه به طول $x = \frac{-b}{2a}$ می‌تیمم دارد. بنابراین:

$$S \Big|_{-5}^2 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{8}{2a} = 2 \Rightarrow 4a = 8 \rightarrow a = 2$$

$$-5 = 2(2)^2 - 8(2) + c \rightarrow -5 = 8 - 16 + c \rightarrow 3 = c$$

رأس سهمی را در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$\Rightarrow x_{\text{رأس}} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y_{\text{رأس}} = -(3)^2 + 6 \times 3 + 3 = -9 + 18 + 3 = 12$$

$$\Rightarrow (m, n) = (3, 12) \Rightarrow m \times n = 36$$

$$y = \frac{4}{9}x^2 + 2x + \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{y = ax^2 + bx + c} \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = 2 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{طول رأس سهمی} : x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times (\frac{4}{9})} = \frac{-2}{\frac{8}{9}} = \frac{-2 \times 9}{8} = -\frac{9}{4}$$

ابتدا y را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$3x + 2y = 60 \Rightarrow 2y = 60 - 3x \Rightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$$

$$S = xy = x(30 - \frac{3}{2}x) = -\frac{3}{2}x^2 + 30x$$

بیشترین مقدار تابع S (سهمی) در نقطه رأس سهمی به دست می‌آید:



$$x_S = \frac{-30}{2(-\frac{3}{2})} = \frac{30}{3} = 10 \Rightarrow y_S = 30 - \frac{3}{2} \times 10 = 15$$

$$S_{max} = 10 \times 15 = 150$$

۱۶۲

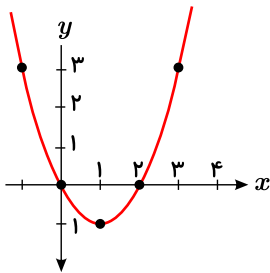
محور تقارن سهمی همان طول رأس است:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{-(-(3k+2))}{2(2k+1)} = \frac{3k+2}{4k+2} \Rightarrow 20k+10 = 18k+12$$

$$\Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

۱۶۳ برای رسم سهمی ابتدا نقطه رأس سهمی را به دست می‌آوریم، سپس یک یا دو نقطه با طول بیشتر و کمتر از طول رأس را در جدول نقطه‌یابی به دست می‌آوریم، سپس

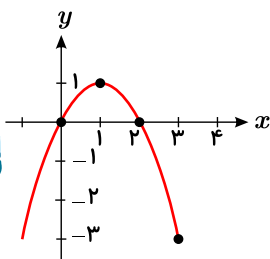
با نقاط به دست آمده نمودار را رسم می‌کنیم:



$$y = x^2 - 2x \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

جدول نقطه‌یابی :

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3



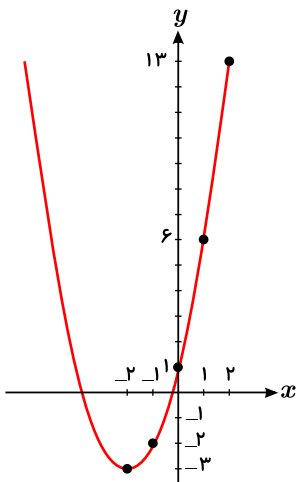
$$y = -(x-1)^2 + 1$$

$$y = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -x^2 + 2x$$

طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = 1$

جدول نقطه‌یابی :

x	0	1	2	3
y	0	1	0	-3



$$y = x^2 + 4x + 1$$

رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

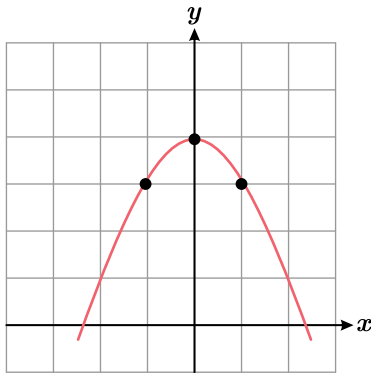
جدول نقطه‌یابی :

x	0	1	2	-1	-2
y	1	6	13	-2	-3

۱۶۴

$$y = 4 - x^2$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0 \rightarrow y = 4 - (0)^2 = 4 \quad S(0, 4)$$

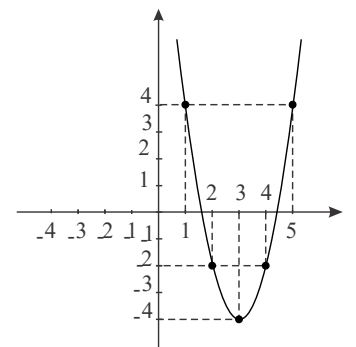


x	-1	0	1
y	3	4	3

۱۶۵ در سهمی به معادله $y = a(x - h)^2 + k$ نقطه رأس سهمی است.

با توجه به معادله سهمی $S(3, -4)$ رأس سهمی و چون $a = 2 > 0$ پس نمودار روبه بالا است. با توجه به جدول نقطه‌یابی نمودار سهمی را رسم می‌کنیم.

x	1	2	3	4	5
y	4	-2	-4	-2	4



۱۶۶ ابتدا نمودار سهمی را رسم می‌کنیم:

بنابراین:

$$y = x^2 - 2x + 5$$

$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 4$$

$$A = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 4\} \text{ برد تابع}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) = 0 &\Rightarrow a \times 1^2 + b \times 1 + 3 = 0 \Rightarrow a + b = -3 \xrightarrow{\times -2} -2a - 2b = 6 \\ f(2) = 1 &\Rightarrow a \times 2^2 + b \times 2 + 3 = 1 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\oplus} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow[a=2]{a+b=-3} b = -5$$

۱۶۸ با توجه به صورت سؤال $f(-1) = 1$ است، بنابراین:

$$3 \times (-1)^2 + k(-1) + 3 = 1 \Rightarrow 3 - k + 3 = 1 \Rightarrow k = 5$$

۱۶۹ معادله سهمی به صورت روبه رو است:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\xrightarrow{(0, -1)} -1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -1$$

$$\left. \begin{aligned} 2 &= 4a + 2b - 1 \\ -\frac{b}{2a} &= 2 \Rightarrow -b = 4a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a - 4a - 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow b = -4a = -4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 3$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 1$$

۱۷۰



$$y = -x^2 + 6x - 10 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -10 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -(1)^2 + 6(1) - 10 = -1 + 6 - 10 = -5$$

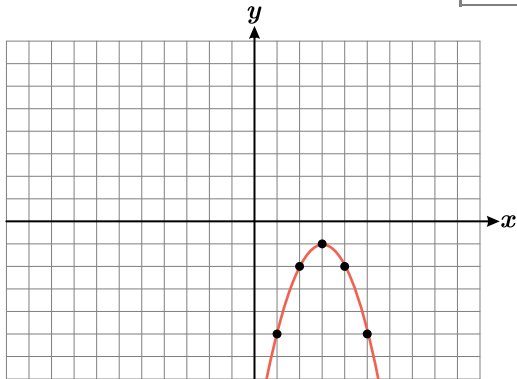
$$x = 2 \Rightarrow y = -(2)^2 + 6(2) - 10 = -4 + 12 - 10 = -2$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -(3)^2 + 6(3) - 10 = -9 + 18 - 10 = -1$$

$$x = 4 \Rightarrow y = -(4)^2 + 6(4) - 10 = -16 + 24 - 10 = -2$$

$$x = 5 \Rightarrow y = -(5)^2 + 6(5) - 10 = -25 + 30 - 10 = -5$$

x	1	2	3	4	5
y	-5	-2	-1	-2	-5



$$y = 2x^2 + 5x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(2)} = \frac{-5}{4} = -1.25$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 + 5(1) + 1 = 2 + 5 + 1 = 8$$

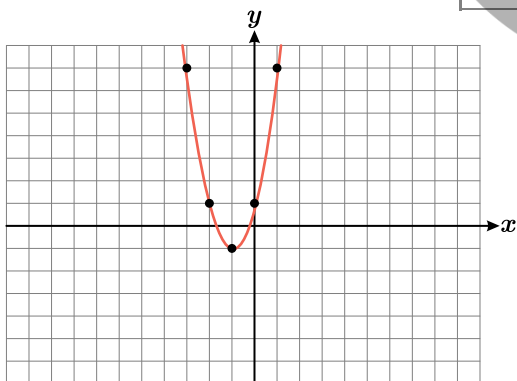
$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0)^2 + 5(0) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

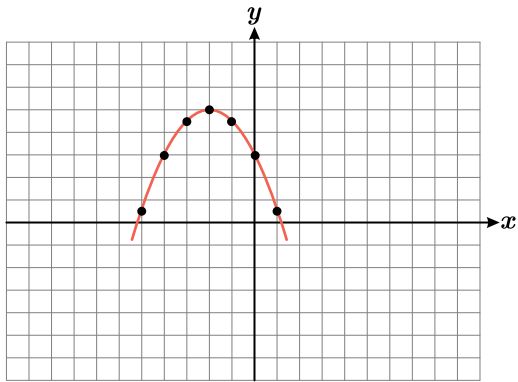
$$x = -1 \Rightarrow y = 2(-1)^2 + 5(-1) + 1 = 2 - 5 + 1 = -2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 2(-2)^2 + 5(-2) + 1 = 8 - 10 + 1 = -1$$

$$x = -3 \Rightarrow y = 2(-3)^2 + 5(-3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$$

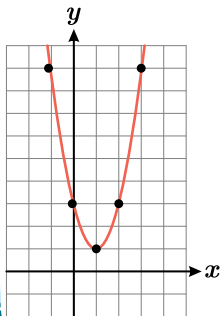
x	-3	-2	-1	0	1
y	4	-1	-2	1	8





x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	...

۱۷۲ با توجه به معادله سهمی $y = 2(x - 1)^2 + 1$ و نکته بالا نقطه $(1, 1)$ رأس سهمی است.

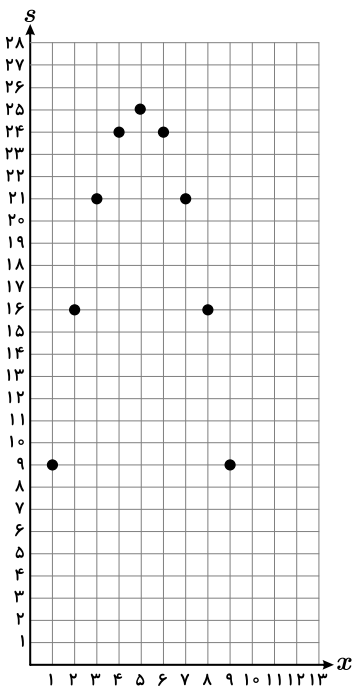


x	-1	0	1	2	3
y	9	3	1	3	9

۱۷۳ الف

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1
s	9	16	21	24	25	24	21	16	9
(x, s)	(1, 9)	(2, 16)	(3, 21)	(4, 24)	(5, 25)	(6, 24)	(7, 21)	(8, 16)	(9, 9)

ب





- ۱۷۴ (الف) جامعه: پلیس‌های این پاسگاه هستند. چون با تمام آنها مصاحبه شده نمونه‌گیری تصادفی نیست و سرشماری انجام شده است.
(ب) جامعه: کودکانی که وارد پارک بازی می‌شوند. نمونه: کودکان پنج‌درمیانی که مصاحبه می‌شوند. این یک نمونه‌گیری تصادفی است.
(پ) جامعه: شامپوهای تولیدی کارخانه و نمونه: شامپوهای صددرمیان آزمایش‌شده که یک نمونه‌گیری تصادفی است.

۱۷۵ (الف) از طریق مصاحبه

- ۱- برنامه تلویزیونی مورد علاقه دانش‌آموزان
۲- میزان رضایت مردم از یک برنامه تلویزیونی

(ب) از طریق مشاهده

- ۱- چه تعداد افراد در یک روز از پل عابر پیاده در یک خیابان استفاده می‌کنند؟
۲- چه تعداد از کودکان واردشده به یک پارک در یک روز از وسایل بازی استفاده می‌کنند؟

(پ) از طریق دادگان

- ۱- مقایسه پیشرفت نمرات دانش‌آموزان در دو ترم سال گذشته
۲- میزان بارندگی در مازندران در ماه‌های فصل بهار سال گذشته

(ث) از طریق پرسش‌نامه

- ۱- دانش‌آموزان اوقات فراغت را چگونه می‌گذرانند؟
۲- زمان و نحوه برگزاری آزمون‌های پایان‌ترم از دانش‌آموزان نظرخواهی شود.

۱۷۶ رتبه در کنکور ← کمی نسبی

جنسیت افراد ← کیفی اسمی

مزه غذا ← کیفی ترتیبی

مقدار مقاومت لامپ ← کمی نسبی

تعداد ماشین‌های نمایشگاه ← کمی نسبی

اندازه‌ی مساحت شکل‌های هندسی ← کمی نسبی

- ۱۷۷ (الف) جامعه: کسانی که در استان مازندران مستعد و آماده کار کردن هستند. برای نمونه تصادفی، از چندین ناحیه استان مازندران به تصادف افرادی را انتخاب می‌کنیم.
(ب) جامعه: مردانی که شامپو مصرف می‌کنند انتخاب به صورت تصادفی از این افراد (با دادن شماره و انتخاب تعدادی از آن شماره‌ها)

۱۷۸ مشاهده

۱۷۹ (الف) دانش‌آموزان کلاس جامعه هستند.

(ب) با توجه به لیست شماره‌گذاری‌شده دانش‌آموزان در دفتر کلاس اعداد را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

(پ) پرسش‌نامه

(ت) برابر با تعداد دانش‌آموزان کلاس است.

(ث) اندازه نمونه همان تعداد دانش‌آموزان انتخاب‌شده است و اگر تعداد مناسب نباشد نمونه و اندازه آن را مجدداً انتخاب می‌کنیم.

(ج) متغیر مورد مطالعه: مدت زمانی که صرف مطالعه کتاب‌های غیردرسی توسط دانش‌آموزان کلاس می‌شود، است.

(چ) کمی نسبی

- ۱۸۰ پس از لیست کردن اسامی فامیل و شماره دادن به آنها، شماره‌ها را روی گوی یا کاغذ نوشته و بدون جایگذاری ۴ تا از آنها را انتخاب می‌کنیم.

(الف) مصاحبه

(ب) مصاحبه

(پ) مشاهده

(ت) دادگان‌ها

(ث) مشاهده

۱۸۱ (الف) پرسش‌نامه (ب) مصاحبه

الف نادرست

ب درست

پ درست

ت نادرست

۱۸۳

الف مشاهده

ب مصاحبه



پ دادگان‌ها

۱۸۴

الف ساکنین شیراز

ب ۷۹ درصد

پ تماشا کردن برنامه جدید یا عدم تماشا کردن آن

۱۸۵ برای جمع‌آوری داده‌ها مورد (الف) دادگان‌ها، مورد (ب) پرسش‌نامه و مورد (پ) مشاهده مناسب‌تر است.

۱۸۶ جامعه آماری کل دانش‌آموزان پایه دهم انسانی می‌باشند که نمونه آماری که انتخاب شده است ۱۰۰ دانش‌آموز مورد مطالعه می‌باشند.

۱۸۷ راه پیشگیری از محدودیت‌های پرسش‌نامه: از طریق نمونه‌گیری می‌توان زمان را کاهش داد. یا اینکه فرم‌ها را از قبل آماده کنیم و در وبسایت مدرسه قرار دهیم و از دانش‌آموزان بخواهیم آنها را پر کنند و سپس آنها را تحلیل کنیم.

راه پیشگیری از محدودیت‌های مشاهده: از طریق تقسیم‌بندی به سه دسته قد کوتاه، قد بلند و قد متوسط و انتخاب چند نفر از هر دسته می‌توان این مشکل را تا حدودی برطرف کرد.

راه پیشگیری از محدودیت‌های دادگان: می‌توان با اخذ مجوز و تأییدیه‌های لازم به اطلاعات ثبت شده، دست پیدا کرد.

۱۸۸ روش‌های جمع‌آوری داده‌ها عبارتند از مشاهده، مصاحبه، پرسش‌نامه و دادگان‌ها

الف. پرسش‌نامه
ب. دادگان‌ها (اطلاعات ثبت‌شده در پرونده دانش‌آموزان)

پ. دادگان‌ها (اطلاعات ثبت شده در دوربین‌های خروجی)
ت. مصاحبه

۱۸۹ الف) متغیر وعده غذایی است که مقیاس آن اسمی است.

ب) کیفی

پ) کل مشتریان غذاخوری‌هایی که گیاه‌خوار هستند.

۱۹۰ هر مشخصه عددی توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص در مورد کل جامعه را پارامتر (در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند) می‌گویند و هر مشخصه عددی توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص در مورد نمونه را آماره می‌نامند.

۱۹۱

الف ترتیبی

ب اسمی

پ نسبتی

ت نسبتی

ث اسمی

ج ترتیبی

چ نسبتی

ح فاصله‌ای

خ فاصله‌ای

د ترتیبی

ذ فاصله‌ای

ر نسبتی

۱۹۲

الف متغیر کیفی اسمی

ب متغیر کیفی ترتیبی

پ متغیر کمی فاصله‌ای

ت متغیر کمی نسبتی

۱۹۳ گزینه ۴

نسبتی - اسمی

۱۹۴ نوع متغیر رشته‌های دو میدانی در المپیک کیفی اسمی است و نوع متغیر رکورد پرتاب نیزه شرکت‌کنندگان در المپیک کمی فاصله‌ای است.

۱۹۵

الف) کیفی اسمی

ب) کمی فاصله‌ای (بر حسب سلسیوس)

پ) کمی نسبتی

ت) کمی نسبتی

ث) کمی نسبتی

ج) کیفی اسمی

چ) کمی نسبتی



پ) اسمی
ج) نسبی

ب) فاصله‌ای
ث) فاصله‌ای

الف) نسبی
ت) ترتیبی

کیفی - ترتیبی؛ توجه داشته باشیم که چون اختلاف دو شماره اتاق بی‌معنی است با اینکه عدد هستند، ولی متغیر کمی نیستند. ۱۹۷

کمی - نسبی ۱۹۸

۱۹۹

الف) کیفی ترتیبی

ب) کمی نسبی

پ) کیفی اسمی

۲۰۰ با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان گفت:

$$\text{پارامتر دختران} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{آماره دختران} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\% \Rightarrow \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\text{آماره دختران}}{\text{پارامتر دختران}} = \frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

۲۰۱ آماره در نمونه و پارامتر در جامعه آماری کاربرد دارد و پارامتر همواره ثابت است.

۲۰۲ الف) برای تعیین میانه داده‌ها را مرتب کرده (از کوچک به بزرگ) چون تعداد آنها شش‌تاست، پس میانگین داده سوم و چهارم میانه است.

۷, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۱۹

$$\bar{x} = \frac{7 + 17 + 18 + 18 + 19 + 19}{6} = \frac{98}{6} \approx 16.33 \quad \text{میانه این داده‌ها ۱۸ است.}$$

ب) به دلیل وجود داده دورافتاده (۷) میانه شاخص بهتری از وضع دانش‌آموز را بیان می‌کند.

پ) برای اینکه میانگین بیشتر از ۱۸ شود باید به جای ۷ عددی را پیدا کنیم که این امر حاصل شود. به جای آن x قرار می‌دهیم؛ بنابراین باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$\frac{x + 17 + 18 + 18 + 19 + 19}{6} > 18 \Rightarrow x + 91 > 6 \times 18 \Rightarrow x > 108 - 91 \Rightarrow x > 17$$

پس دانش‌آموز باید در آزمون مجدد نمره بالاتر از ۱۷ کسب کند.

۲۰۳ با توجه به فرمول میانگین داریم:

$$2 = \frac{4 + b + 4 + 3 + 2}{5} \Rightarrow 2 = \frac{13 + b}{5} \Rightarrow 13 + b = 10 \Rightarrow b = 10 - 13 = -3$$

$$\text{داده‌های جدید: } 2, (100 + 6(-3)), 3, 4, 4 \Rightarrow \bar{x} = \frac{2 + 82 + 3 + 4 + 4}{5} = \frac{95}{5} = 19$$

۲۰۴ با توجه به فرمول میانگین داریم:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3x - 1 + 7x + 6 + 2 - 9x}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x + 7}{3}$$

$$\Rightarrow 2(x + 7) = 3 \Rightarrow 2x + 14 = 3 \Rightarrow 2x = 3 - 14 \Rightarrow 2x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{2} = -5.5$$

۲۰۵

$$\text{تعداد داده‌ها} \times \text{میانگین اشتباه داده‌ها} = \text{مجموع اشتباه داده‌ها} \Rightarrow 8 \times 5 = 40$$

$$15 + 10 = 40 - 15 + 10 = 35$$

$$\Rightarrow \text{میانگین واقعی} = \frac{\text{مجموع واقعی داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{35}{5} = 7$$

۲۰۶

$$\bar{x}_{\text{اولیه}} = 3 \Rightarrow \frac{x + y + 4}{3} = 3 \Rightarrow x + y + 4 = 9 \Rightarrow x + y = 5$$

$$\bar{x}_{\text{ثانویه}} = \frac{x + x + y + y + 5}{5} = \frac{2(x + y) + 5}{5} = \frac{2 \times 5 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

۲۰۷

$$\bar{x} = 11 \Rightarrow \frac{2x + 2 + x + 6 + 15 - x}{3} = 11 \Rightarrow \frac{2x + 23}{3} = 11 \Rightarrow 2x + 23 = 33 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

۲۰۸

$$\text{تعداد داده‌ها} \times \text{میانگین} = \text{مجموع داده‌ها} \Rightarrow 5 \times 10 = 50$$

$$50 - 6 - 4 = 40 \Rightarrow \text{میانگین جدید} = \frac{\text{مجموع جدید}}{\text{تعداد جدید}} = \frac{40}{8} = 5$$



۲۰۹

الف) میانگین - تعدادشان

ب) میانه - میانه - میانه

پ) داده‌ دور افتاده

ت) فرد

ث) میانه - میانگین

۲۱۰

الف) $\bar{x} = \frac{202 + a}{10} \xrightarrow{\bar{x}=22} \frac{202 + a}{10} = 22 \rightarrow 202 + a = 220 \rightarrow a = 18$

۱۵ و ۱۸ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۴ و ۲۵ و ۲۵ و ۳۰

ب) ابتدا داده را مرتب می‌کنیم.

چون تعداد داده زوج است، لذا میانه برابر میانگین دو عدد وسط است. از این رو می‌توان نوشت:

$$\tilde{x} = \frac{21 + 22}{2} = 21,5$$

۲۱۱

$$\frac{2a + 4 + 12 + 10 + a + 13 + 10 + 2 + a + 2 + 9 + 6 + 8 + 10 + 11}{13} = 9$$

$$\Rightarrow 97 + 4a = 13 \times 9 \Rightarrow 4a = 117 - 97 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5$$

داده‌ها را مرتب می‌کنیم
 $a = 5 \Rightarrow 5 + 3, 12, 2 \times 5 + 2, 5, 10, 13 \rightarrow 5, 8, 10, 12, 12, 13$

مد = ۱۲ ، میانه = $\frac{10 + 12}{2} = 11$

$$\text{میانه} + \text{مد} = 11 + 12 = 23$$

$$2a - 1 = 7 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

۱, ۲, ۵, ۷, ۷, ۹, ۱۰
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3$

$$\text{میان} - \text{چارک سوم} = 9 - 7 = 2$$

دقت کنید اگر $a + 5 = 7$ ، آنگاه $a = 2$ می‌باشد که در این صورت داده‌ها دیگر مرتب نیستند. (۱, ۲, ۵, ۳, ۷, ۷, ۱۰)

۲۱۳

$$\bar{x} = \frac{50 + 60 + 70 + 80 + 90}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

۲۱۴

$$\bar{x} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = \frac{150}{5} = 30$$

۲۱۵) باید ببینیم اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴۰ چگونه به اعداد ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۲۱ تبدیل شده‌اند. با کمی دقت می‌فهمیم که هر داده اولیه ابتدا در عدد ۳ ضرب و سپس با عدد ۱ جمع شده است، مثلاً عدد ۴۰ ابتدا در ۳ ضرب شده و حاصل ۱۲۰ شده، سپس با ۱ جمع شده و عدد ۱۲۱ به دست آمده است. لذا همین عملیات را برای میانه هم انجام می‌دهیم.

$$\text{میان جدید} = 3 \times (\text{میان قدیم}) + 1 = 3 \times k + 1 = 3k + 1$$

۲۱۶) این جدول نشان می‌دهد که عدد ۳ هشت بار، ۴ ده بار، ۵ دو بار و عدد ۶ سیزده بار تکرار شده، لذا مد برابر ۶ است. (چون فراوانی داده ۶ برابر ۱۳ بوده که از بقیه فراوانی‌ها بیشتر است.)

۲۱۷) الف) داده‌های دور افتاده - میانه - میانگین ب) میانگین

۲۱۸) چون مد برابر ۶ است بنابراین فراوانی عدد ۶ باید از همه داده‌ها بیشتر باشد که برای تحقق شدن آن چون در ابتدا فراوانی ۶ با ۴ یکسان است، پس $x = 6$ باید باشد.

$$\text{میانگین} = \frac{1 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 7}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4,5$$

۲۱۹) فراوانی داده ۵ برابر ۳ است که فراوانی آن از همه داده‌ها بیشتر است. بنابراین مد برابر ۵ است و میانگین برابر است با:



$$\bar{x} = \frac{1 + 5 + 5 + 8 + 5 + 8 + 7 + 2 + 3 + 1}{10} = \frac{45}{10} = 4,5 \Rightarrow \text{اختلاف میانگین و مُد} = 5 - 4,5 = 0,5$$

۲۲۰ داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب هستند و تعداد آنها ۸ تا است، بنابراین میانه برابر است با: $\frac{x_4 + x_5}{2}$

$$8 = \frac{x_4 + x_5}{2} \xrightarrow{x_4=7} 8 = \frac{7 + x_5}{2} \Rightarrow 16 = 7 + x_5 \Rightarrow x_5 = 9$$

۲۲۱ داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب هستند و تعداد آنها ۱۰ تا است، پس برای به دست آوردن میانه باید میانگین داده‌های پنجم و ششم را حساب کنیم.

$$\text{میانه} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{9 + 11}{2} = 10$$

۲۲۲ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۵، ۱۷، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰

تعداد داده‌ها ۱۱ تا است، پس چون تعداد فرد است دادهٔ وسط که دادهٔ ششم است همان میانه است؛ یعنی:

$$\text{میانه} = x_6 = 15$$

۲۲۳ عدد ۷، ۱۴ بار تکرار شده است و بیشترین فراوانی را دارد پس مُد برابر ۷ است.

۲۲۴ مد، داده با بیشترین فراوانی است. پس دادهٔ $2x$ را برابر ۸ قرار می‌دهیم:

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{داده‌ها } 8, 7, 12, 5 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{8 + 7 + 12 + 5}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

۲۲۵ ۱- آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به میانگین معروف است. برای محاسبهٔ میانگین، به داده‌های خود به‌عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همهٔ اعداد را با هم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.

۲- میانه در واقع نقطهٔ وسطی فهرست اعداد مرتب‌شده است. نیمی از اعداد مقادیر بزرگ‌تر از میانه و نیمی دیگر مقادیر کوچک‌تر از میانه هستند.

۳- زمانی با دادهٔ دورافتاده مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند.

۴- وقتی با دادهٔ دورافتاده مواجه هستید، میانه معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا میانگین.

۵- به‌طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، میانگین بهتر از میانه است.

۲۲۶ اگر داده‌های آماری را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و مشاهده کنیم که فاصلهٔ هر دو داده آماری متوالی مقدار ثابتی باشد، در این صورت اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانگین آنها همان دادهٔ وسطی است و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین آنها همان میانگین دو داده‌ای است که در وسط قرار می‌گیرند. (به سؤالات ۱ و ۳ و ۵ و ۶ صفحهٔ ۸۶ توجه کنید.) همچنین اگر همهٔ داده‌ها در عدد k ضرب شوند، میانگین داده‌های به‌دست‌آمده از ضرب کردن میانگین داده‌های قبلی در k به دست می‌آید. (به سؤالات ۱ و ۳ توجه کنید. همچنین به سؤالات ۵ و ۶ توجه کنید.) اگر به داده‌های آماری عدد ثابت k اضافه شود، به میانگین آنها هم عدد k اضافه می‌شود. (به سؤالات ۳ و ۵ دقت کنید.)

۲۲۷ واریانس صفر است، پس همهٔ داده‌ها باهم مساوی هستند یکی از داده‌ها ۱۲ است، پس بقیه هم باید ۱۲ باشند.

$$\begin{cases} a - 1 = 12 \Rightarrow a = 13 \\ b + 6 = 12 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b + c = 13 + 6 + 6 = 25 \\ 3c = 12 \Rightarrow c = 4 \end{cases}$$

۲۲۸ اگر داده‌های اولیه (قدیم) را با داده‌های جدید مقایسه کنیم می‌فهمیم که هر داده مثل a ابتدا بر ۲ تقسیم شده و $\frac{a}{2}$ به دست آمده، سپس با ۱ جمع شده و $(\frac{a}{2} + 1)$ حاصل شده است $(a \rightarrow (\frac{a}{2} + 1))$. ولی می‌دانیم جمع و تفریق، هیچ تأثیری روی R ندارد و فقط ضرب و تقسیم است که روی R اثر دارد، بنابراین:

$$\text{جدید } R = \frac{R_{\text{اولیه}}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

۲۲۹ با پرتاب یک تاس سالم در دو مرحله و نوشتن اعداد، نمونه به دست می‌آید و یا می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را روی شش کارت یکسان نوشته و دو کارت را بدون جایگزینی انتخاب کرد. در این حالت نمونهٔ تصادفی تکراری نخواهد شد (به‌جای کارت می‌توان از شش گوی نیز استفاده کرد).

۲۳۰

پاسخ: M را بزرگ‌ترین داده و m را کوچک‌ترین داده در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$$R = M - m \text{ دامنهٔ تغییرات اولیه}$$

$$R \text{ دامنهٔ تغییرات جدید} = (3M - 5) - (3m - 5) = 3M - 5 - 3m + 5 = 3M - 3m = 3(M - m) = 3R$$

۲۳۱

$$\left. \begin{matrix} \sigma_A = 3 \Rightarrow \sigma_A^2 = 9 \\ \sigma_B = 8 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sigma_A^2 < \sigma_B^2 \Rightarrow \text{پراکندگی داده‌های } B \text{ از داده‌های } A \text{ کمتر است}$$

۲۳۲ داده‌ها مرتب شده‌اند و تعداد آنها برابر ۹ تا است، پس میانهٔ دادهٔ پنجم یعنی ۱۱ است، پس باید واریانس داده‌های ۱، ۳، ۵، ۷ را به دست آوریم.

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 5 + 7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{4} \\ &= \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2}{4} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = \frac{20}{4} = 5 \end{aligned}$$



ابتدا برای داده‌ها چارک‌ها را به دست می‌آوریم؛

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1, 2, \textcircled{3}, 4, 5 & \textcircled{6} & 7, 8, \textcircled{9}, 10, 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array}$$
و می‌دانیم ۷۵ درصد داده‌ها از Q_1 بزرگتر هستند، لذا جواب

برابر ۳ است.

ابتدا چارک‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y_1, y_2, y_3 & y_4, y_5, y_6 & y_7, y_8, y_9 & y_{10}, y_{11}, y_{12} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q_1 = \frac{y_3 + y_4}{2} & Q_1 = \frac{y_6 + y_7}{2} & Q_3 = \frac{y_9 + y_{10}}{2} \end{array}$$

بنابراین داده‌های $y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$ بین چارک‌های اول و سوم قرار دارند که ۶ داده هستند.

۲۳۳

$$\bar{x} = 5 \Rightarrow \frac{a + 1 + 3a - 1 + 4a - 1}{3} = 5 \Rightarrow \frac{8a - 1}{3} = 5 \Rightarrow 8a - 1 = 15 \Rightarrow 8a = 16 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین داده‌ها عبارتند از: ۳ و ۵ و ۷

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

اگر تمام داده‌ها ۶ برابر شود پس max و min داده‌ها نیز ۶ برابر می‌شوند، بنابراین اگر داشته باشیم $R_{\text{اولیه}} = max - min$ ؛

$$R_{\text{جدید}} = 6 \times max - 6 \times min = 6 \times (max - min) \rightarrow \text{دامنه تغییرات ۶ برابر می‌شود}$$

می‌دانیم اگر انحراف معیار چندین داده برابر صفر باشد، آنگاه تمام داده‌ها با یکدیگر برابر هستند، پس در این سؤال هر ۶ داده برابر ۷ هستند. در نتیجه:

$$\Rightarrow \text{مجموع داده‌ها} = 6 \times 7 = 42$$

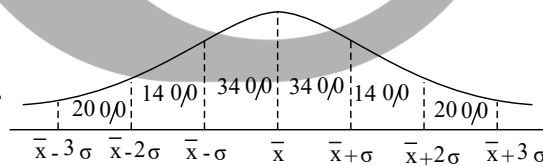
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -4, -3, -2, -1 & \textcircled{0} & 1, 2, 3, 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q_1 = \frac{-2 + -3}{2} = -2.5 & Q_2 & Q_3 = \frac{2 + 3}{2} = 2.5 \end{array}$$

ابتدا چارک‌ها را به دست می‌آوریم؛

$$\rightarrow \text{دامنه میان چارکی} = Q_3 - Q_1 = 2.5 - (-2.5) = -2.5 + 2.5 = 5$$

با توجه به منحنی نرمال که به شکل



درمدهای بین نقطه‌های $\bar{x} - 3\sigma$ ، $\bar{x} - \sigma$ ، $\bar{x}$ و $\bar{x} + \sigma$ را با هم جمع

می‌کنیم.

$$\text{درصد} = 34 + 34 + 14 + 2 = 84\%$$

می‌دانیم تقریباً ۹۵٪ داده‌ها در فاصله $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ قرار دارند؛

$$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (14 - 2 \times 3, 14 + 2 \times 3) = (8, 20)$$

با توجه به این که دامنه تغییرات برابر صفر است، پس ۴ داده با یکدیگر برابر و برابر ۶ هستند، بنابراین میانگین آنها نیز برابر ۶ خواهد بود.

۲۴۱

۲۴۲

$$R_{\text{اولیه}} = max - min$$

$$R_{\text{جدید}} = (max + 7) - (min - 6) = max + 7 - min + 6 = (max - min) + 13 = R_{\text{اولیه}} + 13$$

بنابراین به دامنه تغییرات ۱۳ واحد اضافه می‌شود.

ابتدا باید مقدار m را به دست آوریم. می‌دانیم مجموع انحراف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است:

$$-1 + 0 + 2m - 1 + 0 + m + 1 - 20 = 0 \Rightarrow 3m = 21 \Rightarrow m = 7$$

انحراف داده‌ها از میانگین

$$\rightarrow -1, 0, 13, 0, 8, -20 \Rightarrow \sigma^2$$

$$= \frac{(-1)^2 + 0^2 + 13^2 + 0^2 + 8^2 + (-20)^2}{6} = \frac{1 + 0 + 169 + 0 + 64 + 400}{6} = \frac{634}{6} \approx 105.6$$



۲۴۴ وقتی انحراف معیار صفر باشد، یعنی داده‌ها با هم برابرند.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ میانگین} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{20 + 20 + 20}{3} = 20$$

۲۴۵ چون انحراف معیار داده‌های اولیه برابر صفر است، پس داده‌ها با هم برابرند.

$$\Rightarrow a + 3 = b + 4 = c + 2 = 12$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c &= 10 \\ \Rightarrow b &= 8 \\ \Rightarrow a &= 9 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{۲} a, b, c \end{array} \right. \rightarrow 18, 8, 10$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 + 8 + 18}{3} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(10 - 12)^2 + (8 - 12)^2 + (18 - 12)^2}{3} = \frac{4 + 16 + 36}{3} = \frac{56}{3} \approx 18,6$$

۲۴۶ به بررسی گزینه‌های نادرست می‌پردازیم:

الف) درست

ب) نادرست؛ زیرا اگر داده دور افتاده داشته باشیم بهتر است از میانه (و در نتیجه دامنه میان‌چارگی) به جای میانگین استفاده کنیم.

پ) نادرست؛ زیرا در یک نمودار جعبه‌ای می‌توان بیش از یک مجموعه داده را نشان داد. پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

ت) نادرست؛ زیرا نمودار جعبه‌ای برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌ها داده‌هاست که مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنه میان‌چارگی را نشان می‌دهد و میانه داده‌ها را نشان می‌دهد، ولی مد را نشان نمی‌دهد.

۲۴۷ می‌دانیم که در متحنی نرمال، ۹۶ درصد از داده‌ها در فاصله «دو انحراف معیار از میانگین» قرار می‌گیرند، یعنی:

$$\begin{cases} \bar{x} - 2\sigma = 2 \\ \bar{x} + 2\sigma = 10 \end{cases} \Rightarrow 2\bar{x} = 12 \Rightarrow \bar{x} = 6$$

$$\bar{x} + 2\sigma = 10 \Rightarrow 6 + 2\sigma = 10 \Rightarrow 2\sigma = 4 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4 \Rightarrow \text{نسبت خواسته شده سوال} : \frac{\sigma^2}{\bar{x}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۲۴۸ می‌دانیم که ۶۸ درصد داده‌ها در متحنی نرمال در فاصله $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ قرار می‌گیرند. پس $\bar{x} - \sigma = 5$ با توجه به $\bar{x} = 8$ داریم $\sigma = 3$ و واریانس داده‌ها برابر

است با $\sigma^2 = 9$.

۲۴۹ الف)

مشاهدات		انحراف مشاهدات از میانگین		انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲	
قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر
۴۰	۴۰	$40 - 27 = 13$	$40 - 148,625 = -108,625$	۱۶۹	۱۱۷۹۹,۳۹۰۶۳
۱۲	۱۲	$12 - 27 = -15$	$12 - 148,625 = -136,625$	۲۲۵	۱۸۶۶۶,۳۹۰۶۳
۲۸	۲۸	$28 - 27 = 1$	$28 - 148,625 = -120,625$	۱	۱۴۵۵۰,۳۹۰۶۳
۳۲	۳۲	$32 - 27 = 5$	$32 - 148,625 = -116,625$	۲۵	۱۳۶۰۱,۳۹۰۶۳
۳۰	۳۰	$30 - 27 = 3$	$30 - 148,625 = -118,625$	۹	۱۴۰۷۱,۸۹۰۶۳
۲۲	۲۲	$22 - 27 = -5$	$22 - 148,625 = -126,625$	۲۵	۱۶۰۳۳,۸۹۰۶۳
۲۵	۲۵	$25 - 27 = -2$	$25 - 148,625 = -123,625$	۴	۱۵۲۸۳,۱۴۰۶۳
	۱۰۰۰		$1000 - 148,625 = 851,375$		۷۲۴۸۳۹,۳۹۰۶۳



$$\text{میانگین قبل از ورود میلیارد} = \frac{۴۰ + ۱۲ + ۲۸ + ۳۲ + ۳۰ + ۲۲ + ۲۵}{۷} = ۲۷$$

$$\text{میانگین بعد از ورود میلیارد} = \frac{۴۰ + ۱۲ + ۲۸ + ۳۲ + ۳۰ + ۲۲ + ۲۵ + ۱۰۰۰}{۸} = ۱۴۸,۶۲۵$$

$$\text{واریانس قبل از ورود میلیارد} = \frac{۴۵۸}{۷} = ۶۵,۴۲ \Rightarrow \text{انحراف معیار قبل از ورود میلیارد} \approx ۸,۰۸۸$$

$$\text{واریانس بعد از ورود میلیارد} = \frac{۸۲۸۸۴۵,۸۷۵۰۴}{۸} = ۱۰۳۶۰۵,۷۳۴۴ \Rightarrow \text{انحراف معیار بعد از ورود میلیارد} \approx ۳۲۱,۸۷۸,۴۴۶$$

(ب) زمانی که میلیارد وارد انجمن خیریه می‌شود؟ انحراف معیار داده‌ها برابر است با ۳۲۱,۸۷۸,۴۴۶
میلیارد داده دور افتاده است و با ورود او انحراف از میانگین زیاد می‌شود. (در فاصله زیادی از میانگین سایر داده‌ها قرار دارد.) برای این کار از دامنه میان چارکی که آن را با نماد IQR نشان می‌دهیم، استفاده می‌کنیم.
قبل از تکمیل جدول ابتدا داده‌های هر دو مشاهده را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم:

مشاهدات قبل از ورود میلیارد: ۱۲, ۲۲, ۲۵, ۲۸, ۳۰, ۳۲, ۴۰

مشاهدات بعد از ورود میلیارد: ۱۲, ۲۲, ۲۵, ۲۸, ۳۰, ۳۲, ۴۰, ۱۰۰۰

σ انحراف معیار	$IQR = Q_3 - Q_1$ دامنه میان چارکی	Q_3 چارک سوم	Q_2 میانه	Q_1 چارک اول	
۸,۰۸	$۳۲ - ۲۲ = ۱۰$	۳۲	۲۸	۲۲	درآمد ماهانه اعضای انجمن
۳۲۱,۸۸	$۳۶ - ۲۳,۵ = ۱۲,۵$	۳۶	۲۹	۲۳,۵	درآمد بعد از ورود میلیارد

۲۵۰

مشاهدات			انحراف مشاهدات از میانگین			انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲		
۶۵	۸۵	۴۳	$۶۵ - ۶۷ = -۲$	$۸۵ - ۶۷ = ۱۸$	$۴۳ - ۶۷ = -۲۴$	۴	۳۲۴	۵۷۶
۷۵	۷۹	۵۱	$۷۵ - ۶۷ = ۸$	$۷۹ - ۶۷ = ۱۲$	$۵۱ - ۶۷ = -۱۶$	۶۴	۱۴۴	۲۵۶
۷۳	۵۷	۵۳	$۷۳ - ۶۷ = ۶$	$۵۷ - ۶۷ = -۱۰$	$۵۳ - ۶۷ = -۱۴$	۳۶	۱۰۰	۱۹۶
۵۰	۳۹	۱۱۰	$۵۰ - ۶۷ = -۱۷$	$۳۹ - ۶۷ = -۲۸$	$۱۱۰ - ۶۷ = ۴۳$	۲۸۹	۷۸۴	۱۸۴۹
۶۰	۴۵	۵۰	$۶۰ - ۶۷ = -۷$	$۴۵ - ۶۷ = -۲۲$	$۵۰ - ۶۷ = -۱۷$	۴۹	۴۸۴	۲۸۹
۶۴	۷۱	۴۸	$۶۴ - ۶۷ = -۳$	$۷۱ - ۶۷ = ۴$	$۴۸ - ۶۷ = -۱۹$	۹	۱۶	۳۶۱
۶۹	۶۷	۸۷	$۶۹ - ۶۷ = ۲$	$۶۷ - ۶۷ = ۰$	$۸۷ - ۶۷ = ۲۰$	۴	۰	۴۰۰
۶۲	۸۷	۶۹	$۶۲ - ۶۷ = -۵$	$۸۷ - ۶۷ = ۲۰$	$۶۹ - ۶۷ = ۲$	۲۵	۴۰۰	۴
۶۷	۹۱	۶۸	$۶۷ - ۶۷ = ۰$	$۹۱ - ۶۷ = ۲۴$	$۶۸ - ۶۷ = ۱$	۰	۵۷۶	۱
۸۵	۴۹	۹۱	$۸۵ - ۶۷ = ۱۸$	$۴۹ - ۶۷ = -۱۸$	$۹۱ - ۶۷ = ۲۴$	۳۲۴	۳۲۴	۵۷۶

بنابراین در رابطه $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$ هر یک از پرانتزها برابر صفر خواهد بود و در نتیجه انحراف معیار صفر می‌شود. ۲۵۱

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: ۲۵۲

$$۷, ۹, \quad \underbrace{۱۰, ۱۱}, \quad ۱۲, ۱۲, \quad \underbrace{۱۳}, \quad ۱۶, ۱۷, \quad \underbrace{۱۷, ۱۸}, \quad ۲۰, ۲۱$$

$$Q_1 = \frac{۱۰+۱۱}{۲} = ۱۰,۵ \quad Q_2 = \text{میانه} = \text{چارک دوم} \quad Q_3 = \frac{۱۷+۱۸}{۲} = ۱۷,۵$$

چارک اول چارک سوم

اعداد داخل جعبه : ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷

$$\bar{x} = \frac{۱۱ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۷}{۷} = \frac{۹۸}{۷} = ۱۴$$

کافی است انحراف معیار را به دست آوریم. فردی که انحراف معیار کمتری دارد دقت بالاتری دارد. ۲۵۳



$$\bar{x}_A = \frac{15 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{(15-16)^2 + (14-16)^2 + (15-16)^2 + (16-16)^2 + (17-16)^2 + (19-16)^2}{6}} \Rightarrow \sigma_A = \sqrt{\frac{1+4+1+0+1+9}{6}} = \sqrt{2.6} \approx 1.61$$

$$\bar{x}_B = \frac{16 + 14 + 17 + 14 + 17 + 18}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{(16-16)^2 + (14-16)^2 + (17-16)^2 + (14-16)^2 + (17-16)^2 + (18-16)^2}{6}}$$

$$\Rightarrow \sigma_B = \sqrt{\frac{0+4+1+4+1+4}{6}} = \sqrt{\frac{14}{6}} = \sqrt{2.3} \approx 1.51$$

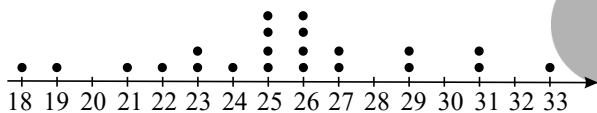
دقت عمل کارگر B بهتر است.

۲۵۴ الف) ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۷، ۲۹، ۲۹، ۳۱، ۳۱، ۳۳

با توجه به داده‌ها، مد دو عدد ۲۵ و ۲۶ با تکرار چهار بار هستند و چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه برابر میانگین دو داده وسط است.

$$Q = \frac{25 + 26}{2} = 25.5, \quad \bar{x} = \frac{18 + 19 + \dots + 33}{22} = \frac{561}{22} = 25.5$$

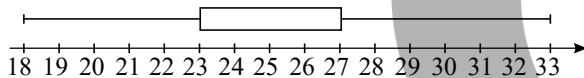


(ب)

۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۷، ۲۹، ۲۹، ۳۱، ۳۱، ۳۳

$$Q_1 = 23, \quad Q_3 = \frac{25+26}{2} = 25.5$$

کوچکترین داده = ۱۸، بزرگترین داده = ۳۳، $Q_1 = ۲۳$ ، چارک اول
 دامنه میان چارکی = $۲۷ - ۲۳ = ۴$ ، $Q_3 = ۲۷$ ، چارک سوم، $Q = ۲۵.۵$ میانه



پ) ۱۰ نفر از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار می‌گیرد.

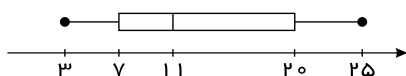
۲۵۵ طبق فرمول زاویه مرکزی در نمودار دایره‌ای داریم:

$$\sigma = \frac{f}{N} \times 360^\circ \Rightarrow 30^\circ = \frac{f}{18x} \times 360^\circ \Rightarrow f = \frac{360^\circ \times 18x}{360^\circ} = \frac{18}{12}x = \frac{3}{2}x$$

۲۵۶

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و چارک‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 3 \text{ و } 7 \text{ و } 10 \text{ و } 11 \text{ و } 13 \text{ و } 20 \text{ و } 25 \Rightarrow & \begin{cases} \text{میانه} = 11 \\ \text{کمترین داده} = 3 \\ \text{بیشترین داده} = 25 \\ \text{چارک اول} = 7 \\ \text{چارک سوم} = 20 \end{cases} \\ \downarrow Q_1 \quad \downarrow Q_3 \end{aligned}$$



۲۵۷ الف) ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

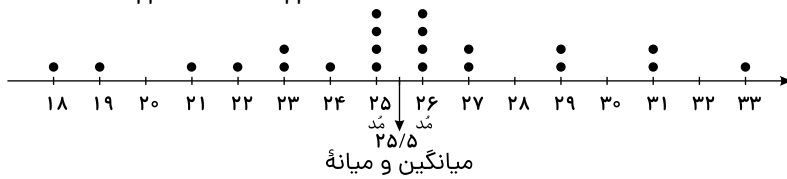
۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۷، ۲۹، ۲۹، ۳۱، ۳۱، ۳۳

با توجه به داده‌ها، مد دو عدد ۲۵ و ۲۶ با تکرار چهار بار هستند و از آنجایی که تعداد داده‌ها زوج است میانگین دو داده وسط برابر میانه است.

$$Q_{\text{میانه}} = \frac{25 + 26}{2} = 25.5$$



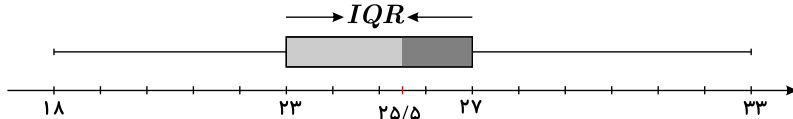
$$\bar{x} = \frac{18 + 19 + \dots + 33}{22} = \frac{561}{22} = 25,5$$



18, 19, 21, 22, 23, 23, 24, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 26, 27, 27, 29, 29, 31, 31, 33

Q_1 $Q_3 = 25,5$ Q_3

ب) $Q_1 = 23$ = چارک اول و $Q_3 = 27$ = بزرگترین داده و 18 = کوچکترین داده
 $IQR = 27 - 23 = 4$ = دامنه میان چارکی و $Q_3 = 27$ چارک سوم و $Q = 25,5$ میانه

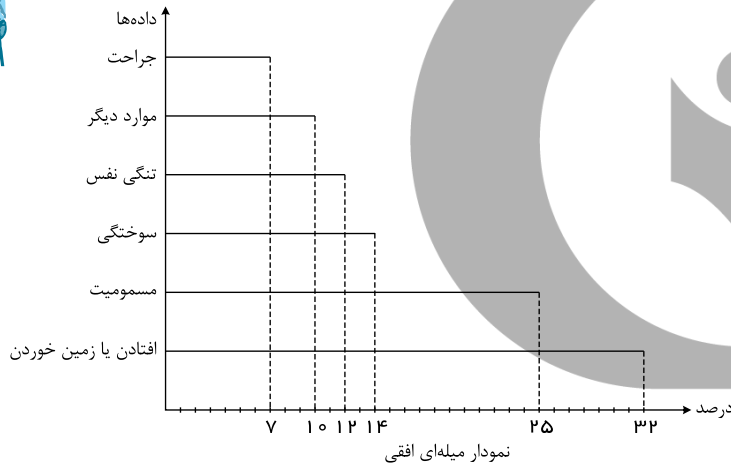


پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین و تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانگین است برابر است و 11 نفر در هر قسمت هستند.
 ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانه و تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانه باشد، برابر است. در این مثال میانه و میانگین با هم برابر هستند.
 ث) 10 نفر از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار می‌گیرد.

با توجه به اینکه بین چارک اول و سوم هر دسته داده همیشه تقریباً 50 درصد داده‌ها قرار می‌گیرد؛ بدون داشتن چارک‌ها می‌توانیم تعداد را مطرح کنیم.

$$22 \times \frac{50}{100} = 11, \quad 11 - 1 = 10$$

۲۵۸) زمانی که اسم طبقات (متغیر کیفی) طولانی باشند نمودار میله‌ای افقی مفیدتر است و برای نمایش اسامی هر طبقه نیاز نیست به پهلو نوشته شود. به عنوان نمونه، مثال اول درس را در اینجا رسم می‌کنیم.



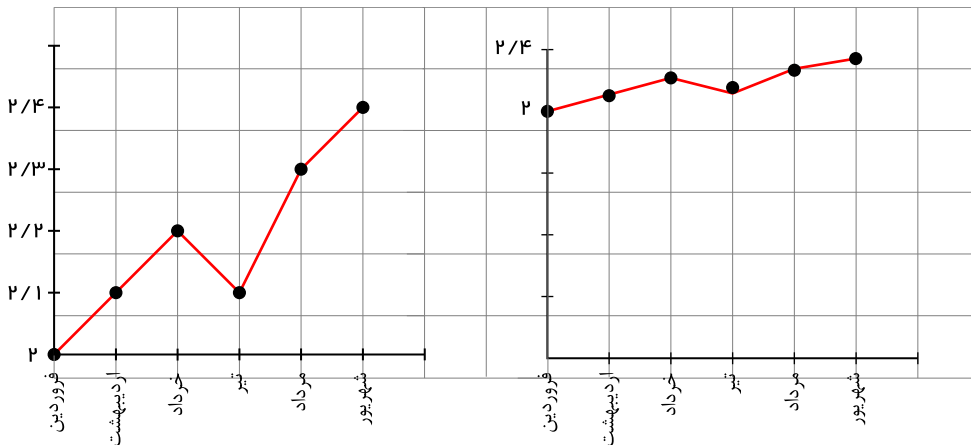
۲۵۹) در صورت مقایسه چند دسته داده از نمودار میله‌ای با درصد استفاده کنیم بهتر است و اگر بررسی یک دسته داده باشد از نمودار میله‌ای با فراوانی استفاده می‌شود.

۲۶۰) داده‌های کیفی

۲۶۱) در این صورت هر دو مناسب است اما نمودار دایره‌ای بهتر است.

۲۶۲) اگر سودی که به دست می‌آید زیاد نباشد نمودار از دید خریدار و در غیر این صورت نمودار از دید فروشنده منطقی‌تر است.

برای رسم نمودار بهتر می‌توان واحد محورها را بزرگتر در نظر گرفت.



نمودار از دید فروشنده

نمودار از دید خریدار

۲۶۳

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

Q_1 میانه نیمه اول و Q_3 میانه نیمه دوم را به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$Q_3 = \frac{20+25}{2} = 22.5$$

$$1, 1, 3, 5, 7, 10, 12, 18, 20, 25, 27, 30$$

$$Q_2 = \frac{10+12}{2} = 11$$

داده‌های بین Q_1 و Q_3 داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای قرار می‌گیرند:

$$5, 7, 10, 12, 18, 20 \Rightarrow \bar{x} = \frac{5+7+10+12+18+20}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

۲۶۴ با توجه به نقاط شکستگی داریم:

$$f = 11 \text{ : تعداد حسابداران}$$

$$N = 1 + 3 + 5 + 11 = 20 \text{ : تعداد کل افراد}$$

$$\text{درصد مطلوب} = \frac{f}{N} \times 100 = \frac{11}{20} \times 100 = 11 \times 5 = 55\%$$

$$\alpha = 360^\circ - (36^\circ + 54^\circ + 126^\circ) = 144^\circ$$

$$x = \frac{100 \times 144}{360} = 40\%$$

۲۶۵ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم؛ داریم: چون داده‌ها زوج است میانگین دو داده وسط برابر میانه است. تعداد داده‌ها در نیمه اول و دوم فرد است،

میانه نیمه اول Q_1 و میانه نیمه دوم Q_3 را به دست می‌آوریم.

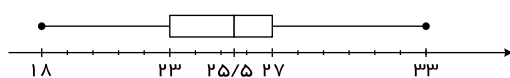
$$18, 19, 21, 22, 23, 23, 24, 25, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 27, 27, 29, 29, 31, 31, 33$$

$$Q_1 = \frac{23+23}{2} = 23$$

$$Q_3 = \frac{25+26}{2} = 25.5$$

$$18 = \text{کمترین داده}, 33 = \text{بیشترین داده}, 25.5 = \text{میانه}$$

$$Q_1 = 23 \text{ چارک سوم}, Q_3 = 27 \text{ چارک اول}$$



۲۶۷ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$11, 11, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 17, 18, 25, 28, 28, 29, 30, 30$$





$$\bar{x} = \frac{2 \times (11) + 12 + 2 \times (13) + 2 \times (14) + 2 \times (15) + 16 + 17 + 18 + 25 + 2 \times (28) + 29 + 2 \times (30)}{18} = \frac{339}{18} \approx 18,83$$

نمودار راداری به ما می‌گوید: (۲۶۸)

– کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگر هستند؟

– آیا داده دور افتاده‌ای وجود دارد؟

– مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟

– مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

(۲۶۹) خیر؛ زیرا جمع این زوایا برابر $370^\circ = 20^\circ + 150^\circ + 50^\circ + 80^\circ + 70^\circ$ است از طرفی می‌دانیم، جمع این زوایا باید برابر 360° باشد.

(۲۷۰) با توجه به نسبت فراوانی دسته‌ها، همان نسبت بین زاویه مرکزی متناظر با هر دسته و زاویه متناظر با دسته A برقرار است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{A} + 4\hat{A} + 5\hat{A} = 360^\circ \Rightarrow 12\hat{A} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 4\hat{A} = 4 \times 30^\circ = 120^\circ$$

(۲۷۱) اگر فراوانی اولیه دسته مورد نظر را f و تعداد کل داده‌های اولیه را N فرض کنیم، آنگاه:

$$\alpha_{\text{جدید}} = \frac{f_{\text{جدید}}}{N_{\text{جدید}}} \times 360^\circ = \frac{2f}{2N} \times 360^\circ = \frac{f}{N} \times 360^\circ$$

در نتیجه: زاویه مربوط به آن دسته تغییری نمی‌کند.

(۲۷۲) عدد ۳ از همه داده‌ها بیشتر تکرار شده است (۲۰ بار)، بنابراین $\hat{m}$ برابر ۳ است.

برای به دست آوردن میانه ابتدا تعداد داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$N = 7 + 13 + 20 + 4 = 44$$

چون تعداد داده‌ها زوج است بنابراین میانه برابر است با میانگین دو داده وسط (داده‌های x_{22} و x_{23}):

$$\text{میانه} = \frac{x_{22} + x_{23}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

(۲۷۳) با توجه به ارتفاع میله‌ها داریم:

$$\text{مجموع فراوانی‌ها} = 5 + 12 + 8 + 5 = 30$$

$$\left. \begin{array}{l} C \text{ فراوانی نسبی گروه } C = \frac{f_C}{N} = \frac{8}{30} \\ A \text{ فراوانی نسبی گروه } A = \frac{f_A}{N} = \frac{5}{30} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{اختلاف} = \frac{8}{30} - \frac{5}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

(۲۷۴) ابتدا تعداد کل و سپس درصد افراد سفیدپوست را به دست می‌آوریم که این درصد برابر با درصد مساحت متناظر با سفیدپوست در نمودار دایره‌ای است.

$$N = 24 + 10 + 13 + 13 = 60 \Rightarrow \text{درصد مساحت} = \frac{f}{N} \times 100 = \frac{10}{60} \times 100 = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \approx 16,7$$

(۲۷۵) طبق فرمول زاویه مرکزی در نمودار دایره‌ای داریم:

$$\alpha = \frac{f}{N} \times 360^\circ \Rightarrow 27^\circ = \frac{f}{1200} \times 360^\circ \Rightarrow f = \frac{1200 \times 27}{360} = 90$$

(۲۷۶) ابتدا با توجه به بلندی مستطیل‌ها تعداد کل و فراوانی داده‌های کوچکتر از ۱۸ را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} N = 10 + 5 + 25 + 10 = 50 \\ f = 1 \text{ فراوانی مستطیل } 2 + \text{فراوانی مستطیل } 1 = 10 + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{درصد داده‌های کوچکتر از } 18 = \frac{f}{N} \times 100 = \frac{15}{50} \times 100 = 30$$

(۲۷۷) ابتدا مجموع چهار کلاس را به دست می‌آوریم:

$$N = 10 + 60 + 30 + 20 = 120 \text{ و } \alpha = \frac{f}{N} \times 360^\circ = \frac{30}{120} \times 360^\circ = 90^\circ$$

(۲۷۸) تعداد کل خودروها و تعداد خودروهای زرد و قرمز را به دست می‌آوریم.

$$f = 25 + 6 = 31 = \text{تعداد خودروهایی که قرمز یا زرد هستند}$$

$$N = 13 + 25 + 6 + 6 = 50 = \text{تعداد کل خودروها}$$

$$\rightarrow \text{درصد خودروهای زرد یا قرمز} = \frac{f}{N} \times 100 = \frac{31}{50} \times 100 = 62$$

(۲۷۹)

$$N = \text{مجموع فراوانی‌ها} = 10 + 3 + 10 + 5 + 12 = 40$$

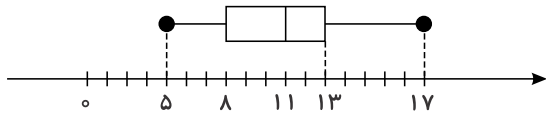
$$\alpha = \frac{f}{N} \times 360^\circ \left\{ \begin{array}{l} f_C = 10 \Rightarrow \alpha_C = \frac{10}{40} \times 360^\circ = 90^\circ \\ f_B = 3 \Rightarrow \alpha_B = \frac{3}{40} \times 360^\circ = 27^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_C - \alpha_B = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$$

(۲۸۰) ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$5, 8, 9, 11, 12, 13, 17$$

چارک اول، چارک سوم، میانه، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده را مشخص می‌کنیم و نمودار جعبه‌ای را رسم می‌کنیم.

$$Q_1 = 8, Q_3 = 12, \text{ میانه} = 11$$



$$\text{میانگین داده‌های داخل و روی جعبه} = \frac{8 + 9 + 11 + 12 + 13}{5} = \frac{53}{5} = 10,6$$

۱, ۴, ۷, ۸, ۹, ۱۱, ۱۸, ۲۰, ۲۱

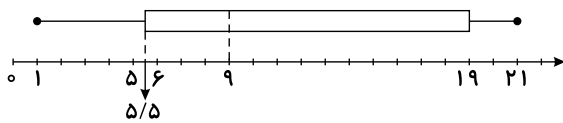
ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

از آنجایی که تعداد داده‌ها فرد است دادهٔ وسطی (دادهٔ پنجم) ۹ برابر میانه است.

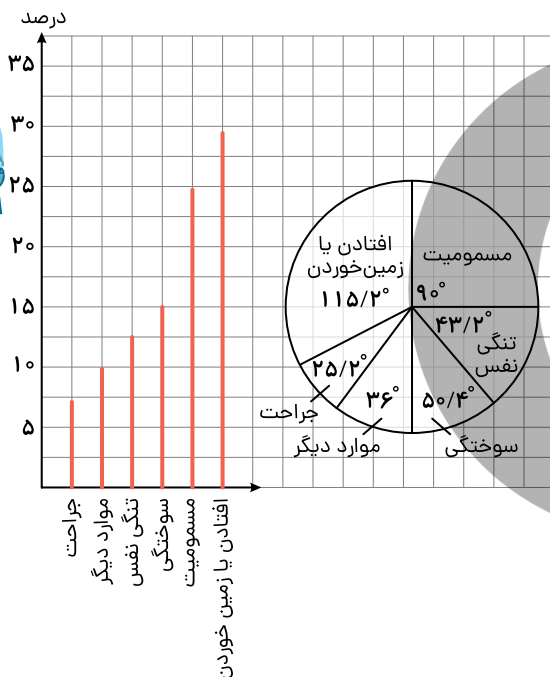
۲۱: بیشترین داده و ۱: کمترین داده

$$Q_1 : \frac{4 + 7}{2} = 5,5 \quad , \quad Q_3 : \frac{18 + 20}{2} = 19$$

در نتیجه نمودار جعبه‌ای برابر است با:



الف) می‌توان از نمودار دایره‌ای یا میله‌ای استفاده کرد.



ب) برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا نسبت هر قسمت را به کل مساحت دایره (یعنی ۳۶۰ درجه) محاسبه می‌کنیم. با حل این تناسب زاویهٔ مربوط به هر متغیر به دست می‌آید. با توجه به آنها نمودار دایره‌ای را رسم می‌کنیم.

$$\text{افتادن یا زمین خوردن} : \frac{32}{100} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = \frac{360 \times 32}{100} = 115,2^\circ$$

$$\text{سوخستگی} : \frac{25}{100} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = \frac{360 \times 25}{100} = 90^\circ$$

$$\text{موارد دیگر} : \frac{1}{100} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = \frac{360 \times 1}{100} = 3,6^\circ$$

$$\text{مسمومیت} : \frac{12}{100} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = \frac{360 \times 12}{100} = 43,2^\circ$$

$$\text{تنگی نفس} : \frac{7}{100} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = \frac{360 \times 7}{100} = 25,2^\circ$$

$$\text{جراحت} : \frac{4}{100} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = \frac{360 \times 4}{100} = 14,4^\circ$$

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.



۱,۲۵ و ۱,۵ و ۲,۵ و ۳,۱ و ۳,۲ و ۴,۱
 Q_1 میانه Q_3

کمترین داده‌ها: $a = ۱,۲۵$ میانه: $c = ۲,۵$

بیشترین داده‌ها: $b = ۴,۱$ چارک سوم: $d = ۳,۲$

$$\frac{b-a}{d+c} = \frac{۴,۱-۱,۲۵}{۳,۲+۲,۵} = \frac{۲,۸۵}{۵,۷}$$

(الف)

(ب) ۷۵٪ داده‌ها بیشتر از چارک اول هستند.

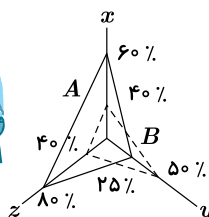
(۲۸۴) الف. کلاس B چون دامنه تغییرات بزرگ‌تری دارد.

ب. از چپ به راست A، B، C، یعنی: عملکرد $A < B < C$ عملکرد

چون بیشترین مقدار در کلاس C قرار دارد و کمترین مقدار آن هم از کمترین مقدار A و C بیشتر است. همچنین کمترین مقدار A از کمترین مقدار B بیشتر است.

(۲۸۵) چون تعداد متغیرها ۳ تا می‌باشد پس نمودار دارای سه شعاع می‌باشد و با توجه به جدول، مقدار هر متغیر مشاهده را بر بیشینه آن تقسیم می‌کنیم تا مقدار شعاع مربوط به هر مشاهده روی هر محور به دست آید.

متغیر	شعاع	
	A	B
x	$\frac{۶}{۱۰} = ۶۰\%$	$\frac{۴}{۱۰} = ۴۰\%$
y	$\frac{۲}{۸} = ۲۵\%$	$\frac{۴}{۸} = ۵۰\%$
z	$\frac{۴}{۵} = ۸۰\%$	$\frac{۲}{۵} = ۴۰\%$



(۲۸۶) چون زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری ۴۰ درجه است، اگر بین تمام شعاع این زاویه رعایت شده باشد یکسان باشند در این صورت تعداد متغیرها، ۹ تا است

زیرا: $۳۶۰ \div ۴۰ = ۹$

(۲۸۷) از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت وضعیت بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود.

(۲۸۸) نمودار راداری به ما می‌گوید:

– کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگر هستند؟

– آیا داده دور افتاده‌ای وجود دارد؟

– مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟

– مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

(۲۸۹) درست است

(۲۹۰) گزینه «ت» یعنی محدودیتی ندارند.

(۲۹۱) مساحت دایره (قسمت ت)

(۲۹۲) چون زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری ۴۰ درجه است در این صورت تعداد متغیرها ۹ است، زیرا داریم:

$$\frac{۳۶۰^\circ}{\text{تعداد متغیرها}} = \text{زاویه بین دو شعاع متوالی}$$

$$\Rightarrow ۳۶۰ \div ۴۰ = ۹$$

(۲۹۳) زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری یکسان هستند و می‌توان از روی آن، تعداد متغیرها را تعیین کرد و اطلاعات دیگری نمی‌دهد.

(۲۹۴)

$$\frac{۳۶۰}{۳} = ۱۲ \rightarrow \text{نمودار از ۱۲ متغیر تشکیل شده است}$$

(۲۹۵)

تعداد نیم‌خط همان تعداد متغیرها است و زاویه بین نیم‌خطها برابر است با:

$$\text{بنابراین } ۶ \text{ نیم‌خط داریم و زاویه بین نیم‌خطها } \alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ \text{ است.}$$

(۲۹۶) نمودار راداری برای نمایش متغیرها از نمودار دایره‌ای استفاده می‌کند که در آن سه متغیر کمی یا بیش‌تر روی محورهای نشان داده می‌شوند که نقطه‌ی شروع همه‌ی آن یکسان است. بنابراین (دایره‌ای – سه متغیر کمی – یکسان)



۲۹۷ در نمودار حبابی شعاع دایره‌ها متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم است. بنابراین شعاع مربوط به مشاهده B به شعاع مشاهده D برابر است با:

$$\frac{r_B}{r_D} = \sqrt{\frac{x_p(B)}{x_p(D)}} \\ = \sqrt{\frac{6}{0.375}} = \sqrt{16} = 4$$

۲۹۸ در نمودار راداری زاویه بین هر دو شعاع متوالی، عدد ثابتی است. در نتیجه داریم:

$$2m + 18^\circ = 3m + 7^\circ \Rightarrow 3m - 2m = 18^\circ - 7^\circ \Rightarrow m = 11^\circ \\ 3m + 7^\circ \xrightarrow{m=11^\circ} 3(11^\circ) + 7^\circ = 40^\circ$$

برای به دست آوردن تعداد متغیرها داریم:

$$\text{تعداد متغیر} = \frac{36^\circ}{40^\circ} = 9$$

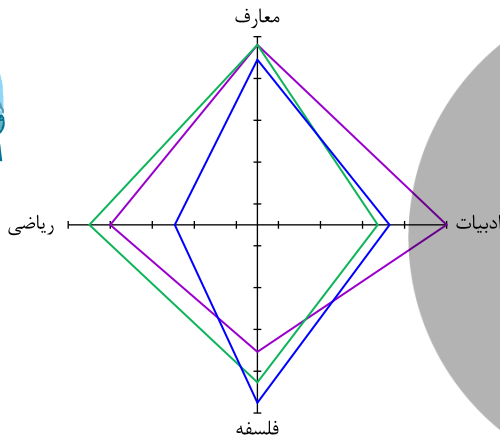
۲۹۹ بررسی موارد:

الف) نمودار حبابی برای نمایش تعداد بیشتری از ۳ متغیر عددی به کار می‌رود و برای نمایش متغیرها محدودیتی ندارد. (می‌توان دایره‌های نمودار حبابی را مانند نمودار دایره‌ای در نظر گرفت و بیش از ۳ متغیر را نیز نمایش داد.) $\Leftarrow$ «الف» درست است.

ب) متغیر سوم در نمودار حبابی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد و فقط مقادیر مثبت را می‌پذیرد. $\Leftarrow$ «ب» نادرست است.
پ) مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی متناسب با توان دوم شعاع (مجذور شعاع) یا مساحت دایره‌ها است. $\Leftarrow$ «پ» نادرست است.
ت) نمودارهای حبابی گونه خاصی از نمودار پراکنش نگاشت هستند. $\Leftarrow$ «ت» درست است.

۳۰۰

پاسخ: مقدار هر متغیر را از رابطه $100 \times \frac{\text{مقدار واقعی}}{\text{بیشینه}}$ به دست می‌آوریم:



	علی	امیر	رضا
ریاضی	۸۰	۹۰	۵۰
معارف	۹۵	۹۵	۷۸
ادبیات	۱۰۰	۶۵	۷۵
فلسفه	۷۰	۸۲	۹۴