



photo: alsharh

جزوه درس اقتصاد خرد 1

استاد دکتر ویدا ورهرامی

Vida.varahrami@gmail.com

<< بسمه تعالی >>

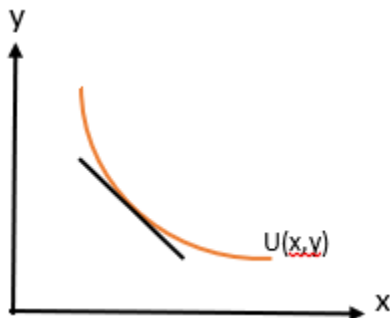
جزوات قسمت eco

در اقتصاد خرد به دنبال دستیابی به مقادیر بهینه تقاضا هستیم . دو اصل مهم وجود دارد اول اینکه همه کالاها خوب هستند و ما کالای بد نداریم .

کالای خوب ، کالایی است که افزایش مصرف آن مطلوبیت را افزایش می دهد . تابع مطلوبیت به صورت U بیان می گردد. در دنیای دو کالایی $U(x,y)$ هرچه مصرف بیشتر شود $\rightarrow$ مطلوبیت کل بیشتر می شود . از سویی $MU_x = \frac{\delta U}{\delta x}$ بیانگر مطلوبیت نهایی یا مطلوبیت آخرین واحد کالا است . که هرچه شما بیشتر از یک کالا مصرف کنید مطلوبیت نهایی کمتر می شود . جهت دستیابی به مقدار بهینه تقاضا از کالاها باید به حداکثرسازی مطلوبیت نسبت به خط بودجه بپردازیم .

در اقتصاد خرد مطلوبیت به صورت منحنی بی تفاوتی در نظر گرفته می شود . منحنی بی تفاوتی در حقیقت مکان هندسی ترکیباتی از دو کالای x و y است که همه نقاط روی آن سطح ثابتی در مطلوبیت را به همراه دارد .

هرچه به سمت منحنی بی تفاوتی و بالاتر می رویم ، سطح مطلوبیت بالاتر حاصل می شود . منحنی های بی تفاوتی دیگر را قطع نمی کنند و منحنی بالاتر بیانگر مطلوبیت بیشتر است.



$MRS =$ شیب منحنی بی تفاوتی

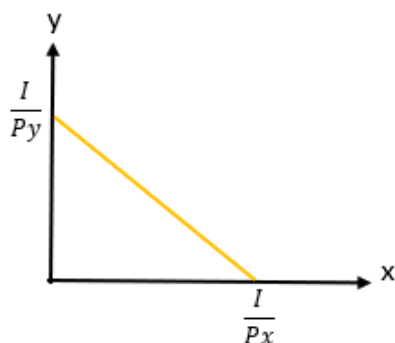
$(\text{Marginal Rate Substitution}) = MRS$

نرخ نهایی جایگزینی : $MRS_{(x,y)} = - \frac{MU_x}{MU_y}$

خط بودجه به صورت $I = x \cdot P_x + y \cdot P_y$ است.

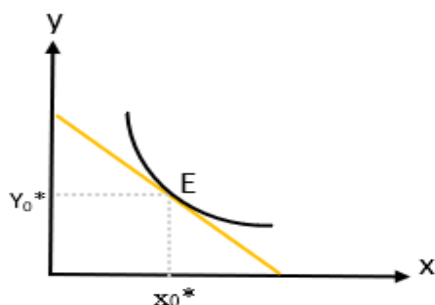
I و P_x بیانگر درآمد و قیمت کالای x و P_y قیمت کالای y است

شیب خط بودجه : $-\frac{P_x}{P_y}$



اگر به دنبال دستیابی به مقادیر بهینه تقاضای x و y باشیم ، در حقیقت باید سهمی بی تفاوتی به خط بودجه مماس باشد :

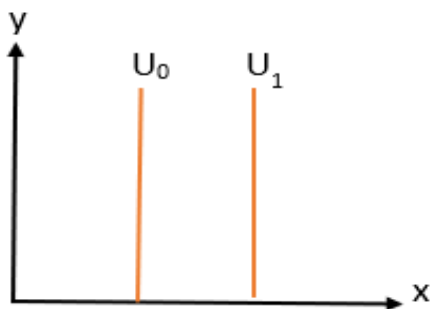
شرط تعادل : $MRS_{(x,y)} = -\frac{P_x}{P_y}$



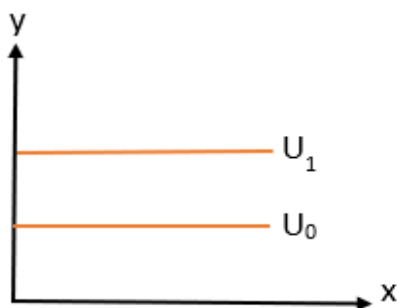
مثال) اگر تابع مطلوبیت $U = x^2 + y^2$ و خط بودجه $100 = 2x + 5y$ مقادیر تقاضای معمولی دو کالای x و y را بدست آورید ؟

$$\begin{aligned}
 MRS_{(x,y)} &= -\frac{P_x}{P_y} \quad , \quad -\frac{MU_x}{MU_y} = -\frac{P_x}{P_y} \\
 \rightarrow -\frac{2x}{2y} &= -\frac{2}{5} \quad \rightarrow 5x = 2y \quad \rightarrow x = \frac{2}{5}y \\
 \rightarrow 100 &= 2\left(\frac{2}{5}y\right) + 5y \quad \rightarrow 100 = \frac{29}{5}y \\
 \Rightarrow y^* &= \frac{500}{29} \quad , \quad x^* = \frac{2}{5} \times \frac{500}{29} \Rightarrow x^* = \frac{200}{29}
 \end{aligned}$$

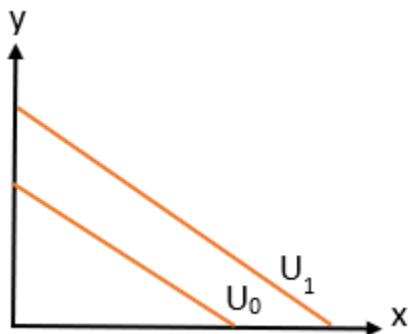
اگر تابع مطلوبیت به صورت $U = Ax$ باشد ، یعنی شکل منحنی بی تفاوتی به صورت خط عمودی است .



و اگر $U = By$ به صورت خطوط افقی است



اگر $U = Ax + By$ منحنی بی تفاوتی



مثال) اگر منحنی بی تفاوتی فردی $U = 5x + 10y$ و خط بودجه $50 = 2x + 4y$ باشد . مقادیر بهینه تقاضای معمولی x و y را بدست آورید ؟

$$\text{Max } 5x + 10y$$

$$\text{S.t } 50 = 2x + 4y$$

$$x^* \begin{cases} 0 & P_x > P_y \\ [12, 25] & P_x = P_y \\ 25 & P_x < P_y \end{cases}$$

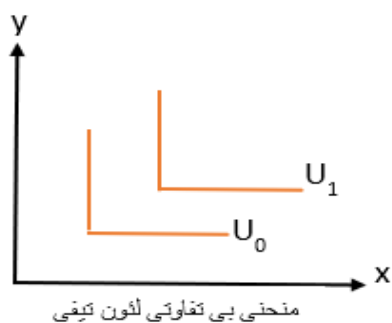
$$y^* \begin{cases} \frac{50}{4} = 12.5 & P_x > P_y \\ [12, 25] & P_x = P_y \\ 0 & P_x < P_y \end{cases}$$

الآن در مثال $50 = 2x + 4y$ و $P_x = 2, P_y = 4 \leftarrow 2 < 4$ و $P_x < P_y \leftarrow y^* = 0, x^* = 25$

مثال) اگر تابع مطلوبیت به صورت $U = \text{Min} [2x, y]$ (تابع مطلوبیت لئون تیف باشد) و $70 = 2x + 6y$. مقدار بهینه تقاضای x و y ؟

$$\text{جهت حل } \leftarrow 2x = y \leftarrow x = \frac{y}{2}$$

$$70 = 2\left(\frac{y}{2}\right) + 6y \rightarrow 70 = 7y \Rightarrow y^* = 10, x^* = \frac{10}{2} = 5$$



<< بسمه تعالی >>

تابع مطلوبیت هذلولی قائم

$$U = x \cdot y$$

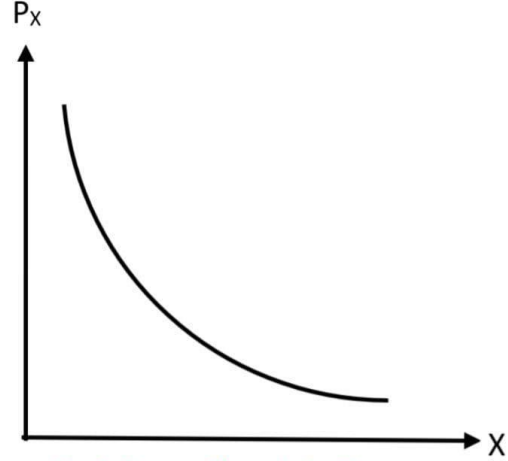
$$S.t \quad x \cdot P_x + y \cdot P_y = I$$

$$MRS_{(x,y)} = -\frac{P_x}{P_y} \rightarrow -\frac{y}{x} = -\frac{P_x}{P_y}$$

$$\rightarrow y \cdot P_y = x \cdot P_x \rightarrow y = \frac{x \cdot P_x}{P_y}$$

$$\rightarrow x = \frac{I}{2P_x}$$

$$\rightarrow y = \frac{I}{2P_x} \times \frac{P_x}{P_y} \rightarrow y = \frac{I}{2P_y}$$



منحنی تقاضا تابع مطلوبیت هذلولی قائم

$$\mathcal{E}_{x,I} = \frac{\delta x}{\delta I} \times \frac{I}{x} \Rightarrow \frac{1}{2P_x} \times \frac{I}{\frac{I}{2P_x}} = 1$$

$$\mathcal{E}_{y,I} = \frac{\delta y}{\delta I} \times \frac{I}{y} \Rightarrow \frac{1}{2P_y} \times \frac{I}{\frac{I}{2P_y}} = 1$$

$$\mathcal{E}_{x,P_x} = -\frac{\delta x}{\delta P_x} \times \frac{P_x}{x} \Rightarrow -\left(\frac{-I \times 4}{4P_x^2}\right) \times \frac{P_x}{\frac{I}{2P_x}} = +1$$

$$\mathcal{E}_{y,P_y} = -\frac{\delta y}{\delta P_y} \times \frac{P_y}{y} \Rightarrow -\left(\frac{-I \times 4}{4P_y^2}\right) \times \frac{P_y}{\frac{I}{2P_y}} = +1$$

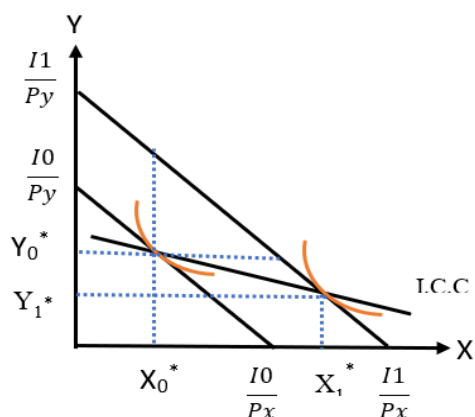
منحنی I.C.C و انگل

منحنی I.C.C درآمد و مصرف، مکان هندسی ترکیبات x و y که با فرض ثابت ماندن P_x و P_y ، تنها درآمد تغییر می کند.

(1) I.C.C برای کالاهای لوکس

$$(\epsilon_{x,I} > 1)$$

منحنی مصرف – درآمد کالای لوکس نزولی است.

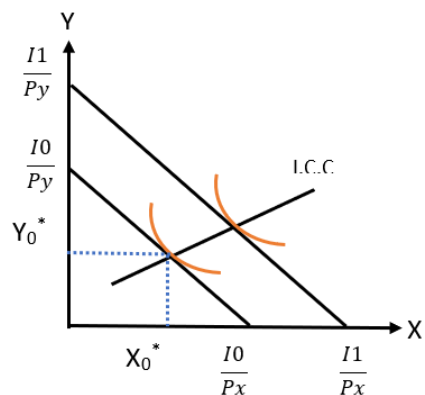


(2) I.C.C کالای ضروری

$$0 < \epsilon_{x,I} < 1$$

منحنی I.C.C کالای ضروری صعودی است. اگر در سببی کالای x دارای حالت زیر باشد:

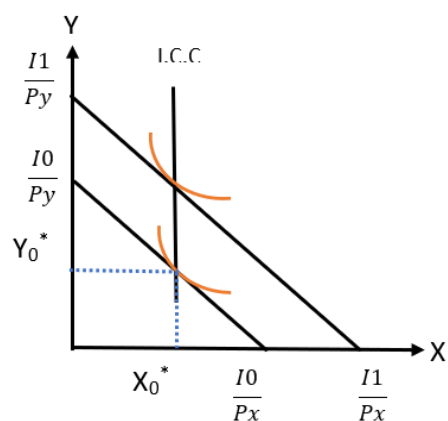
$$0 < \epsilon_{x,I} < 1 \Rightarrow 0 < \epsilon_{y,I} < 1$$



(3) I.C.C برای کالای

$$\mathcal{E}_x, I = 0$$

یک خط کاملاً عمودی است .



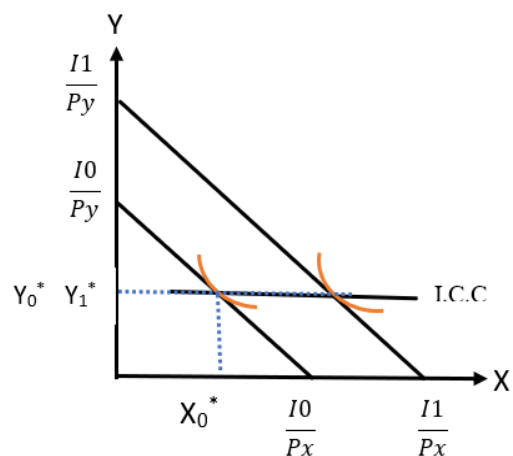
(4) I.C.C برای کالای

$$\mathcal{E}_x, I = 1$$

یعنی وقتی درآمد 1% بالا برود ، x به اندازه 1% افزایش می یابد. درصد تغییرات و جابه جایی
ا و x به یک اندازه است.

اگر در یک سبدهی ، دو کالای x و y باشد:

$$\mathcal{E}_x, I = 1 \Rightarrow \mathcal{E}_y, I = 0$$

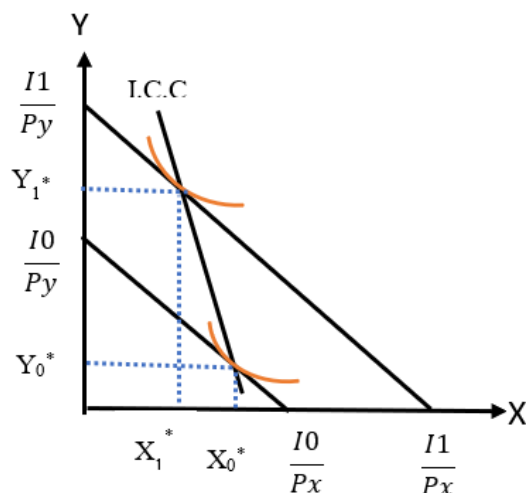


(5) درمورد کالای پست

$$\mathcal{E}_x, I < 0$$

یعنی وقتی درآمد 1% افزایش یابد، تقاضا 1% کاهش می یابد
 منحنی I.C.C کالای پست نزولی است.

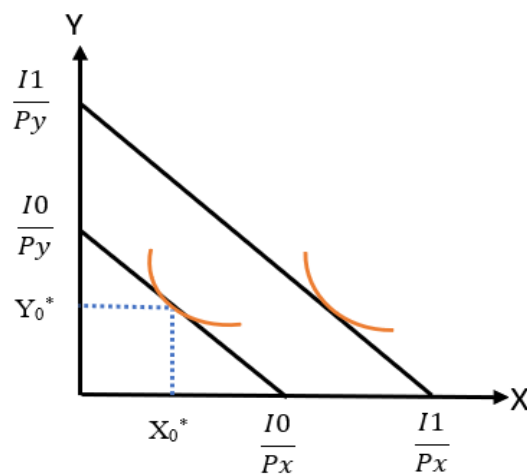
اگر در سبد کالای خرد، دو کالای x و y باشد، اگر x پست باشد، کالای y یک کالای لوکس است.

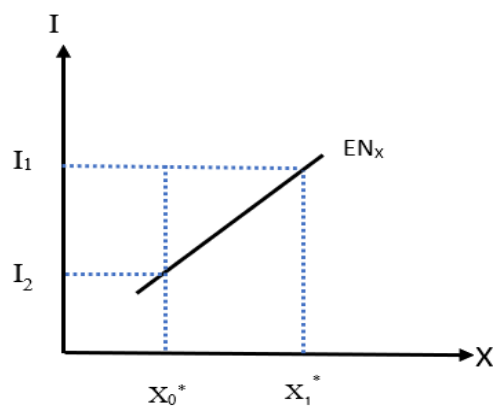


. استخراج منحنی انگل

مکان هندسی ترکیبات درآمد و مقدار تقاضای یک کالا را منحنی انگل می گویند.

$$\mathcal{E}_x, I > 1 \quad (1)$$

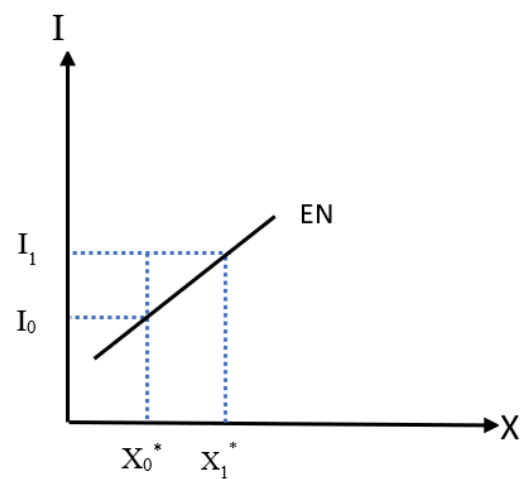
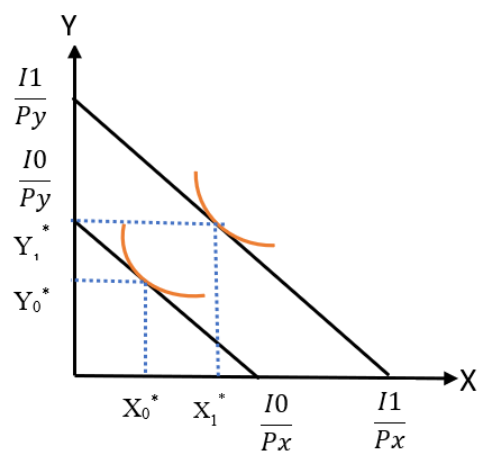




(2) کالای ضروری

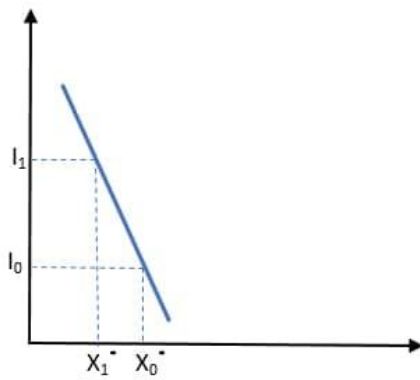
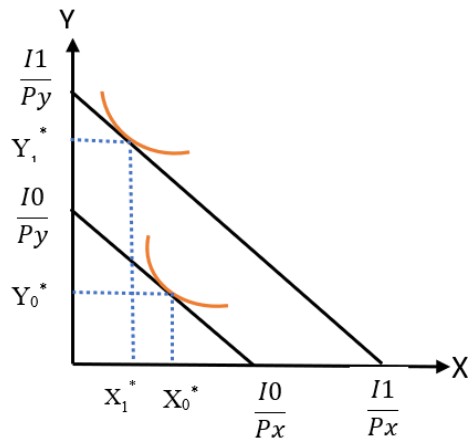
$$0 < \mathcal{E}_x, I < 1$$

منحنی انگل کالای لوکس کم شیب تر از انگل کالای ضروری است .



(3) انگل کالای پست

$$\mathcal{E}_x, I < 0$$



مثال) فرض کنید

$$P_y = 2, \quad P_x = 1$$

$$U_{(x,y)} = 9x - x^2 + 18y - 3y^2$$

منحنی درآمد مصرفی کالای x و منحنی انگل را بدست آورید .

$$MRS_{x,y} = -\frac{P_x}{P_y} \Rightarrow -\frac{9-2x}{18-6y} = -\frac{1}{2}$$

$$18 - 4x = 18 - 6y \rightarrow 4x = 6y \Rightarrow x = \frac{3}{2}y$$

$$I = x \cdot P_x + y \cdot P_y \rightarrow I = \frac{3}{2}y \times 1 + 2 \times y$$

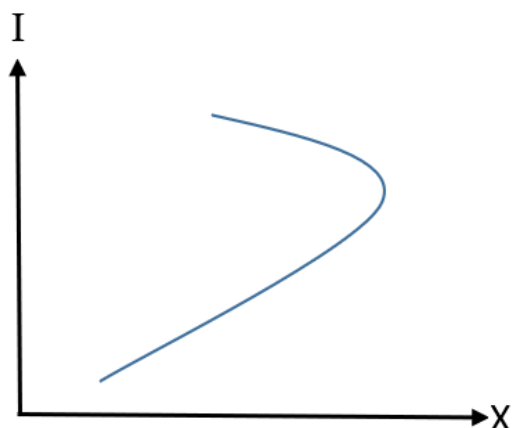
$$I = \frac{7}{2}y$$

منحنی انگل کالای y

$$MRS_{x,y} = -\frac{P_x}{P_y} \rightarrow -\frac{9-2x}{18-6y} = -\frac{1}{2}$$

$$18 - 4x = 18 - 6y \rightarrow x = \frac{3}{2}y \rightarrow I.C.C$$

. در نهایت میتوان گفت یک کالا طی زمان ، ابتدا لوکس بعد ضروری و بعد پست است .

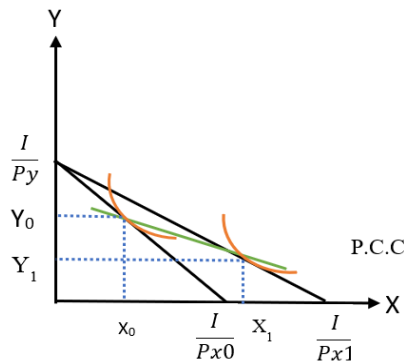


منحنی قیمت - مصرف P.C.C

P.P.C → Price Consumption Curve

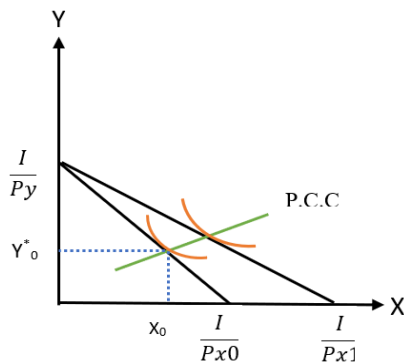
مکان هندسی ترکیبات مصرف x و y که در آن نقاط فقط P_x تغییر کند .

(1) اگر $|\epsilon_{x, P_x}| > 1$ باشد ، برای کالای با کشش بالا منحنی P.C.C نزولی است .



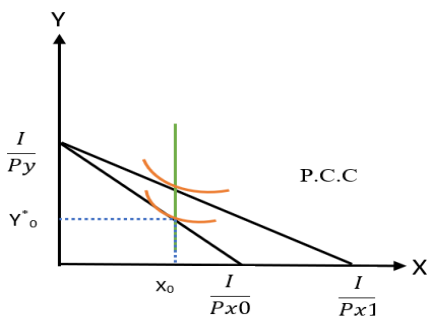
(2) برای کالای با کشش قیمتی تقاضا بین صفر و یک

منحنی P.C.C برای کالای با کشش (بی کشش) بین صفر و یک $0 < |\epsilon_{x, P_x}| < 1$



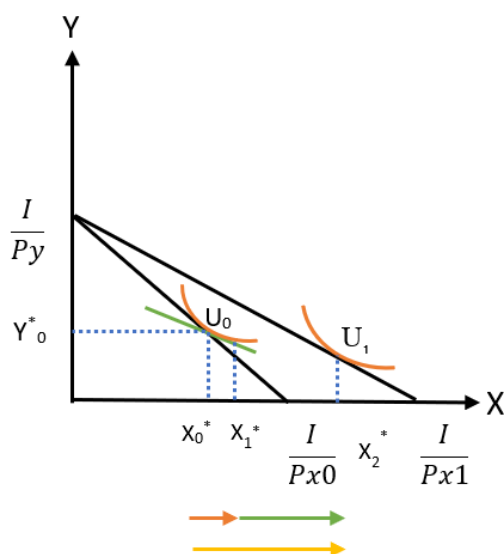
(3) منحنی P.C.C برای کالای با کشش قیمتی تقاضای صفر یا کاملاً بی کشش

P.C.C کالای کاملاً بی کشش عمودی است.



تفکیک اثر درآمدی و جانشینی

1) برای تفکیک آثار، مطلوبیت اولیه یا U_0 را در نظر می گیریم.
 وخطی موازی با خط بودجه جدید (خط صورتی) به منحنی U_0 مماس می کنیم .
 فاصله x_0^* تا x_1^* بیانگر اثر جانشینی و فاصله ی بین x_1^* تا x_2^* اثر درآمدی است



مجموع دو اثر جانشینی و درآمدی ، بیانگر اثر کل است.

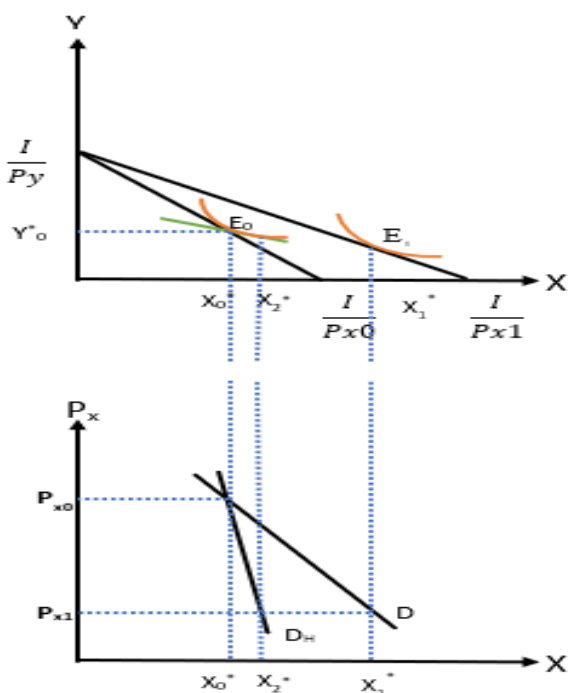
(اثر درآمدی یعنی وقتی P_x افت میکند I/P_x افزایش می یابد ← احساس پولدار شدن
 میکنید ← x بالا برود و زیاد شود و اثر جانشینی یعنی وقتی که P_x کم میشود ← شما ارزان
 را جایگزین می کنید یعنی x افزایش می یابد)

منحنی متقاضای معمولی بیانگر اثر کل در ازای تغییر قیمت کالای X و منحنی تقاضای
 جبرانی (هیکسی) کالا بیانگر اثر جانشینی در ازای تغییر جهت کالای X است.

. استخراج منحنی های تقاضای معمولی و جبرانی (هیکسی) کالای X که با کشش درآمدی
 بیشتر از 1 است. (لوکس)

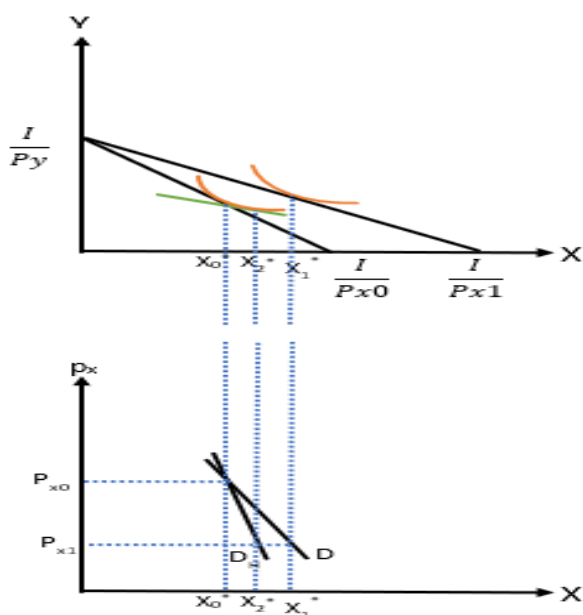
(1) اگر کالای x لوکس باشد $1 < \epsilon_{x,I}$

D ← تقاضای معمولی D_H ← تقاضای جبرانی



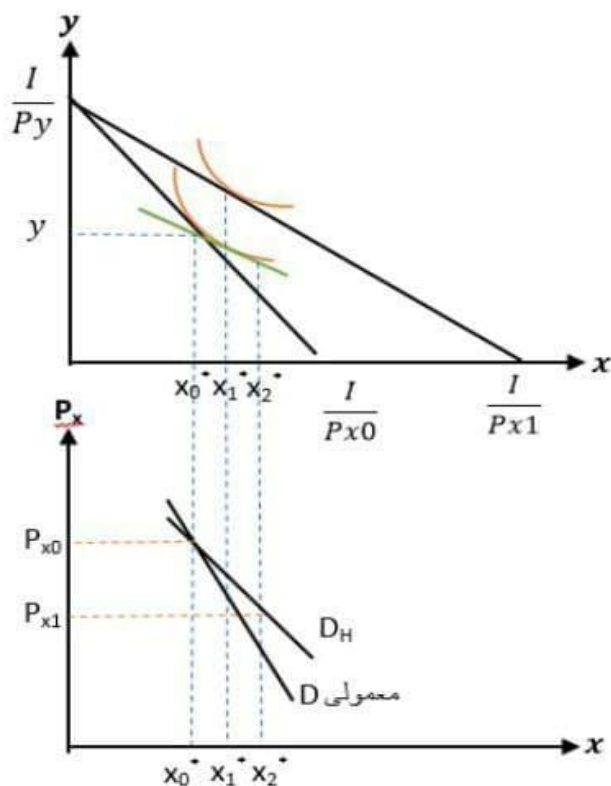
(2) اگر $0 < |\epsilon_{x,I}| < 1$ بی کشش باشد

شیب منفی تقاضای جبرانی در هر دو حالت یکسان است و شیب منفی تقاضای معمولی در حالت لوکس کمتر از ضروری است



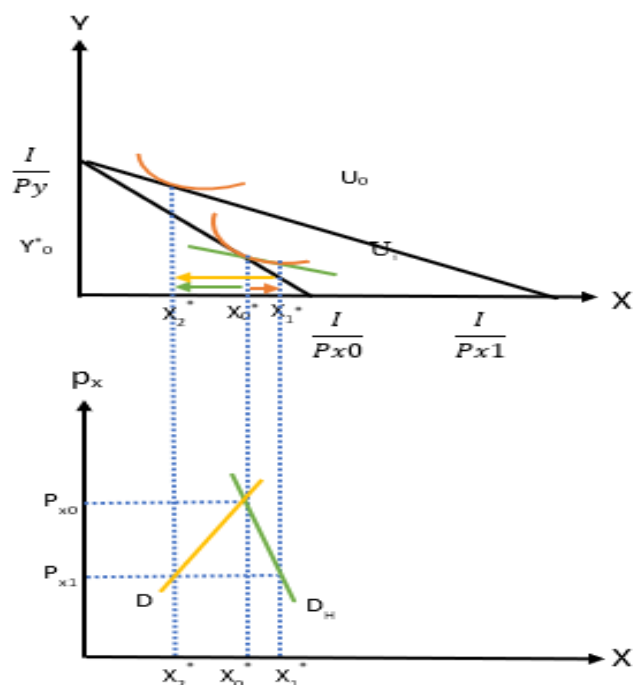
(3) اگر کالای X پست باشد $\mathcal{E}_x, I < 0$

منحنی های تقاضای معمولی و همی‌کسی هردو نزولی هستند .
شیب تقاضای معمولی کالای پست بیشتر از شیب تقاضای همی‌کسی کالای پست است .



(4) اگر کالای X گیفن باشد $\mathcal{E}_x, I < 0$

و اثر درآمدی کاهش قیمت بیشتر از اثر جانشینی آن است .
یعنی کالایی که منحنی تقاضای معمولی آن صعودی است وقتی ارزان می شود کمتر می خریم .
(میتوان گفت منحنی تقاضای همی‌کسی کالای X در حالت کاهش درآمدی مختلف مشابه است ولی منحنی های تقاضای معمولی متفاوت است .)



$$I = 100, \quad P_y = 2$$

مثال) اگر منحنی بی تفاوتی $U = 9x - x^2 + 18y - 3y^2$ باشد، منحنی P.C.C کالای x را بدست آورید. منحنی تقاضای کالای x را استخراج کنید.

$$\begin{aligned} MRS_{x,y} &= -\frac{P_x}{P_y} \\ \rightarrow I &= x \cdot P_x + y \cdot P_y, \quad 100 = x \cdot P_x + 2y \\ \Rightarrow P_x &= \frac{100 - 2y}{x} \\ \rightarrow \frac{9 - 2x}{18 - 6y} &= \frac{100 - 2y}{2x} \\ \rightarrow 18x - 4x^2 &= 1800 - 600y - 36y + 12y^2 \\ \Rightarrow 1800 - 600y - 36y + 12y^2 - 18x + 4x^2 &= 0 \rightarrow P.C.C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MRS_{x,y} &= -\frac{P_x}{P_y} \\ -\frac{9 - 2x}{18 - 6y} &= -\frac{P_x}{2} \rightarrow 100 = x \cdot P_x + 2y \\ \Rightarrow y &= \frac{100 - x \cdot P_x}{2} \\ \rightarrow \frac{9 - 2x}{18 - 6\left(\frac{100 - x \cdot P_x}{2}\right)} &= \frac{P_x}{2} \\ \Rightarrow 18 - 4x &= 18 P_x - 300 P_x + 3x \cdot (P_x)^2 \end{aligned}$$

اصل دوگانگی :

وقتی شما مطلوبیت را نسبت به خط بودجه حداکثر می کنید ، دوگان آن حداقل کردن خط بودجه نسبت به مطلوبیت مشخص است .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } U \\ \text{S.t } I = x \cdot P_x + y \cdot P_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } x \cdot P_x + y \cdot P_y \\ \text{S.t } U \end{array} \right\}$$

مقادیر تقاضای معمولی $\rightarrow$ مقادیر تقاضای جبرانی یا هیکس

$$U = 2x^2 + 8y^2$$

مثال) اگر تابع مطلوبیت $P_x = 8$, $P_y = 5$, $I = 200$ باشد . مقادیر تقاضای معمولی و جبرانی (هیکس) را بدست آورید ؟ ($U=100$ است)

$$\text{Max } (2x^2 + 8y^2)$$

$$\Rightarrow MRS_{x,y} = -\frac{P_x}{P_y} = -\frac{4x}{16y} = -\frac{8}{5}$$

$$\text{S.t } 200 = 8x + 5y \quad \rightarrow 20x = 32y \rightarrow x = \frac{8}{5}y$$

$$\rightarrow 200 = 8\left(\frac{8}{5}y\right) + 5y \rightarrow 200 = \left(\frac{64}{5} + \frac{25}{5}\right)y$$

$$\rightarrow y^* = \frac{1000}{89} , \quad x^* = \frac{8}{5} \times \frac{1000}{89}$$

دوگان (Duality)

$$\text{Min } 8x + 5y$$

$$\text{S.t } 2x^2 + 8y^2 = 100$$

$$MRS_{(x,y)} = -\frac{P_x}{P_y} \rightarrow -\frac{4x}{16y} = -\frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}y$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{8}{5}y\right)^2 + 8y^2 = 100 \rightarrow (132 + 200)y^2 = 2500$$

$$\rightarrow y^{h*} = \sqrt{\frac{2500}{332}} , \quad x^{h*} = \frac{8}{5} \sqrt{\frac{2500}{333}}$$

$$U = A x^{\alpha} y^{\beta}$$

مثال) اگر تابع مطلوبیت و درآمد فردی به صورت $I = 150$ ، $P_x = 2$ ، $P_y = 4$ باشد ، مقادیر بهینه ی تقاضای معمولی x و y و تقاضای بهینه جبرانی دوگان را بدست آورید ؟ ($U=80$) فرض کنید)

$$\text{Max } A x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$\text{S.t } 150 = 2x + 4y$$

$$MRS_{x,y} = -\frac{P_x}{P_y} \Rightarrow -\frac{A \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{A \beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = -\frac{2}{4}$$

$$\rightarrow \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{1}{2} \rightarrow 2\alpha y = \beta x \rightarrow y = \frac{\beta x}{2\alpha}$$

$$\rightarrow 150 = 2x + 4\left(\frac{\beta x}{2\alpha}\right) \rightarrow 300\alpha = 4x\alpha + 4\beta x$$

$$\Rightarrow x = \frac{300\alpha}{4\alpha + 4\beta} , y = \frac{\beta}{2\alpha} \times \frac{300\alpha}{4\alpha + 4\beta} \rightarrow y = \frac{150\beta}{4(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Min } 2x + 4y$$

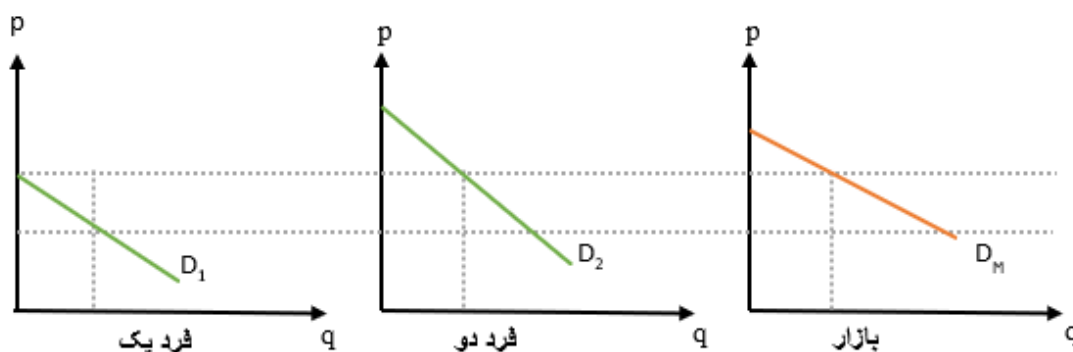
$$\text{S.t } 800 = A x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$MRS_{(x,y)} = -\frac{P_x}{P_y} \rightarrow -\frac{A \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{A \beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = -\frac{2}{4} \Rightarrow y = \frac{\beta x}{2}$$

$$\rightarrow 800 = A x^{\alpha} \left(\frac{\beta x}{2\alpha}\right)^{\beta} = A \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{\beta} x^{(\alpha+\beta)}$$

$$\rightarrow x^{h*} = \left[\frac{800}{A} \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right) \right]^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)} , y^{h*} = \frac{\beta}{2\alpha} \left[\frac{800}{A} \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{\beta} \right]^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)}$$

مثال) منحنی تقاضای بازار، جمع افقی منحنی تقاضای دو بنگاه، منحنی تقاضای بازار را بدست آورید ؟



$$D_M = q_1 + q_2$$

استخراج منحنی TR و MR (بازار انحصار کامل)

$$p = a - bq$$

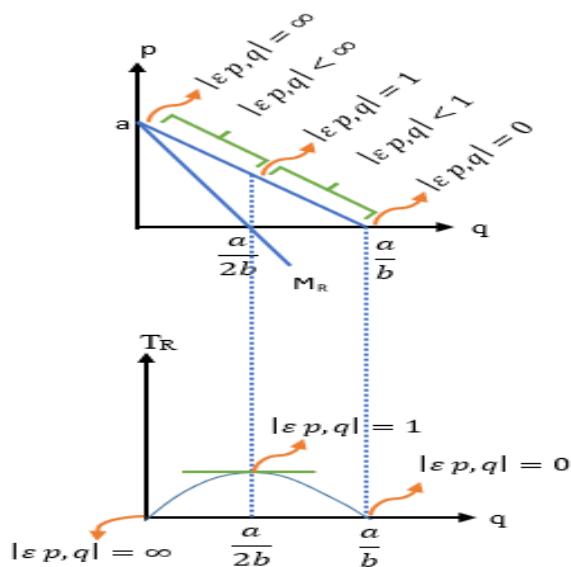
$$\text{if } p = 0 \rightarrow q = \frac{a}{b}, \quad \text{if } q = 0 \rightarrow p = a$$

$$\rightarrow TR = (a - bq) \times q = aq - bq^2$$

$$\rightarrow MR = \frac{\delta TR}{\delta q} = a - 2bq$$

$$\rightarrow \text{if } MR = 0 \Rightarrow q^* = \frac{a}{2b}, \quad \text{if } q = 0 \Rightarrow MR = a$$

q^* ← نقطه حداکثرکننده TR که مماس MR و یا مشتق TR در آن صفر است.



$$TR = p(q) \times q$$

$$MR = \frac{\delta TR}{\delta q} = \frac{\delta p}{\delta q} \times q + p(q) = p(q) \left[1 + \frac{\delta p}{\delta q} \times \frac{q}{p} \right]$$

$$MR = p(q) \left[1 - \frac{1}{\epsilon_{(p,q)}} \right]$$

$$\text{if } \epsilon_{(p,q)} = 0 \longrightarrow MR = p(q) \left[1 - \frac{1}{0} \right] = -\infty$$

$$\text{if } \epsilon_{(p,q)} = \infty \longrightarrow MR = p(q) \left[1 - \frac{1}{\infty} \right] = p(q)$$

$$\text{if } \epsilon_{(p,q)} = 1 \longrightarrow MR = p(q) \left[1 - \frac{1}{1} \right] = 0$$

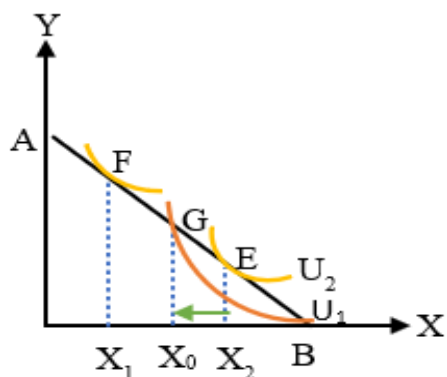
کاربرد خرد 1 (قبل تولید)

جیره بندی

بر اساس جیره بندی به هر فردی از جامعه به اندازه ی x_0 واحد از کالای x در قیمتی پایین تر از قیمت بازار از قبل جیره بندی تخصیص می یابد . و خرید و فروش کالای x ممنوع است.

در این حالت مصرف کننده ای که به طور معمول x_1 مصرف می کند اصلاً در جیره بندی متاثر نمی شود ولی قبل از جیره بندی در F بوده است که $x_0 > x_1$

ولی فردی که در E بوده و x_2 را مصرف می کرده ، باید مصرف خود را به x_0 کم کند و روی a است ← با جیره بندی مطلوبیت او کم می شود.



حال فرض کنید کالای جیره بندی بین افراد خرید و فروش شود و برای کالای جیره بندی بازار سیاه است .

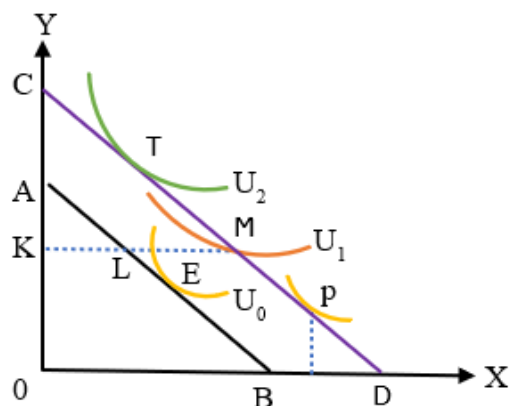
مصرف کننده ای که در F است میزان x_0 را با قیمت پایینتر میخرد و به قیمت بازار سیاه می فروشد .

$$P_r = \text{قیمت جیره بندی} \quad \text{و} \quad P_m = \text{قیمت بازار سیاه} \quad \leftarrow x_0(p_m - p_r) \text{ درآمد}$$

قبلاً خط بودجه وی محور y را در I_0 قطع می کرد. الان خط بودجه جدید خط بودجه قدیم را در a قطع می کند. $I_1 = I_0 + x_0(p_m - p_r)$ ← مطلوبیت فرد افزایش می یابد و از F به L منتقل می شود.

فردی که در x_2 بود الان در k است ، روی بی تفاوتی بالاتر ولی k قابل دسترسی نیست چون با a جیره بندی شده است.

درست هر ماه تعدادی بلیط را ارزانتر به کارمندان خود می دهد. ابتدا کارمند در نقطه ی اول هر ماه کارمند دولت OA حقوق می گیرد و AK را بلیط اتوبوس می خرد و km بلیط اتوبوس دارد . در واقعیت با AK فقط میتوانست KL بلیط اتوبوس بخرد.



چون فروش بلیط غیرقانونی است ← فرد در نقطه M می ماند و روی U_1 است . اگر می فروخت به T می رفت ولی الان در نقطه M و کاهش مطلوبیت دارد

23

تولید (Production)

نهاده (Input) - ستاده (Output)



کالا → بازار → فرایند تولید

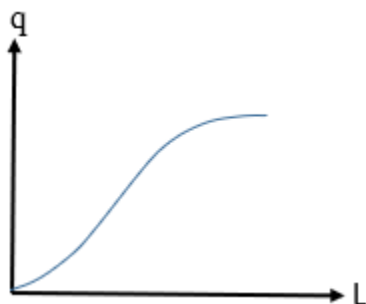
$$q = f(k, L)$$

در کوتاه مدت k ثابت و $q = f(k, L)$ است ولی در بلند مدت هر دو تغییر می کنند.

$$MP_L = \frac{\partial q}{\partial L} \quad \text{تولید نهایی نیروی کار (تولید آخرین واحد نیروی کار است)}$$

$$MP_K = \frac{\partial q}{\partial k} \quad \text{تولید نهایی سرمایه}$$

$$AP_L = \frac{q}{L} \quad \text{تولید متوسط نیروی کار (تولید سرانه)}$$

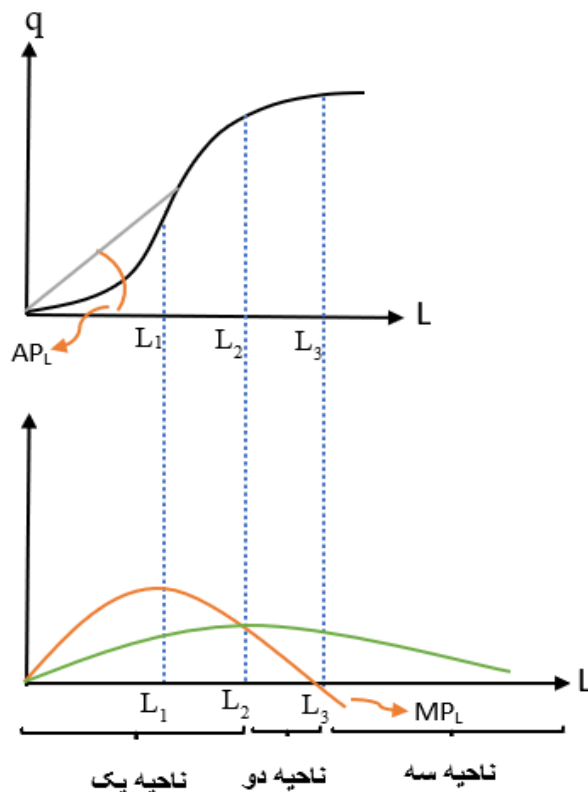


استخراج مراحل تولید

منحنی MP_L در حقیقت در هر سطح L خطی مماس بر منحنی تولید ترسیم میکند و شیب آن بیانگر تولید نهایی است.

درمورد AP_L خطی از مبدا مختصات به هر نقطه روی منحنی تولید رسم می شود و شیب این خط AP_L یا تولید سرانه است .

(استخراج منطقه اقتصادی ، مربوط به کوتاه مدت است یعنی K)



ناحیه 1 : از صفر تا L_2 (جاییکه AP_L به حداکثر میرسد) در این ناحیه استخدام انجام بشود

ناحیه 2 : از L_2 تا L_3 نه استخدام بکن و نه اخراج (منطقه اقتصادی)

ناحیه 3 : از L_3 به بعد چون MP_L منفی است ← اخراج کن

. چرا MP_L از حداکثر AP_L می گذرد ؟

$$\rightarrow AP_L = \frac{q}{L}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial L} = MP_L \quad , \quad \frac{q}{L} = AP_L \right)$$

$$Max \ AP_L = \frac{\frac{\partial q}{\partial L} \times L - q}{L^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{MP_L - \frac{q}{L}}{L} = 0 \Rightarrow MP_L = AP_L$$

در نتیجه حداکثر AP_L یعنی جاییکه مشتق AP_L صفر است $\leftarrow MP_L = AP_L$

مثال) اگر $q = 8L^3 - 4L^2 - 6L$ باشد، مراحل تولید را استخراج نموده و کشش تولیدی نیروی کار را حساب کنید ؟

$$MP_L = \frac{\delta q}{\delta L} = 24L^2 - 8L - 6$$

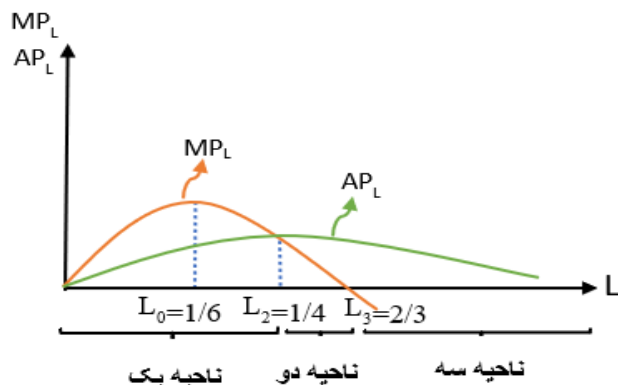
$$L_0 = \frac{\delta MP_L}{\delta L} = 48L - 8 = 0 \rightarrow L_0 = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

$$Max \ AP_L : \quad AP_L = \frac{8L^3 - 4L^2 - 6L}{L} = 8L^2 - 4L - 6$$

$$Max \ AP_L : \quad 16L - 4 = 0 \rightarrow L_1 = \frac{1}{4}$$

$$MP_L = 0 \rightarrow 24L^2 - 8L - 6 = 0$$

$$\rightarrow L_2 = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 24(-6)}}{2 \times 24} \Rightarrow L_2 = \frac{2}{3} \checkmark , \quad -\frac{16}{48} \otimes$$

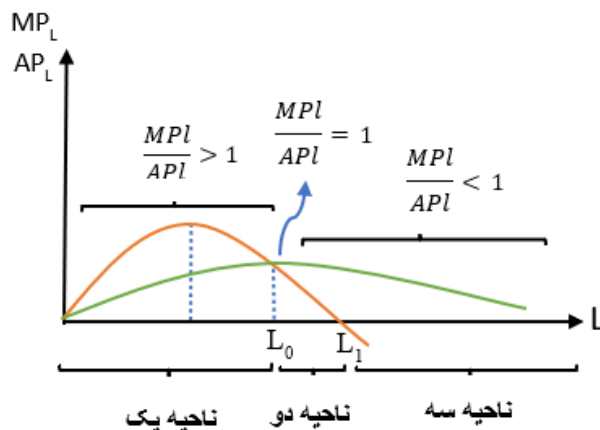


$\varepsilon_{q,L} = \text{کشش تولیدی نیروی کار}$

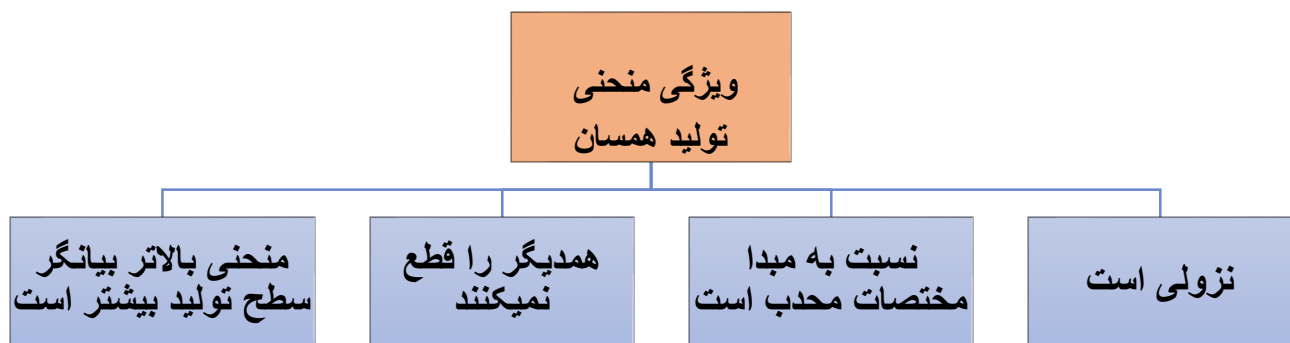
$$\frac{L}{q} = \frac{1}{AP_L}$$

$$\varepsilon_{q,L} = \frac{\delta q}{\delta L} \times \frac{L}{q} = \frac{MP_L}{AP_L}$$

$$\varepsilon_{q,L} = \frac{24L^2 - 8L - 6}{8L^2 - 4L - 6} = \frac{12L^2 - 4L - 3}{4L^2 - L - 3}$$

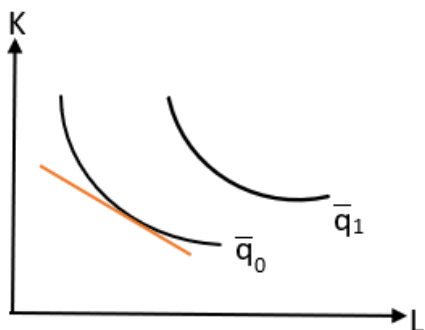


در بلند مدت $q = f(k, L)$ و k ثابت نیست. منحنی تولید همسان، مکان هندسی ترکیبات L و k که روی همه ی نقاط آن سطح تولید یکسان است.



شیب منحنی تولید همسان :

$$(MRTS)_{L,K} = - \frac{MP_L}{MP_K}$$



اثبات : برای بدست آوردن شیب دیفرانسیل می گیریم .

$$q = f(L, k) \Rightarrow dq = \frac{\partial f}{\partial k} \times dk + \frac{\partial f}{\partial L} \times dL$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} \times (dk) = - \frac{\partial f}{\partial L} \times (dL) \Rightarrow \frac{dk}{dL} = - \frac{MP_L}{MP_k} = MRTS_{(L,k)}$$

نرخ نهایی جایگزینی منحنی

. خط هزینه یکسان : ترکیبات L و k که روی همه نقاط آن هزینه یکسان است.

$$C = W \times L + r \times k$$

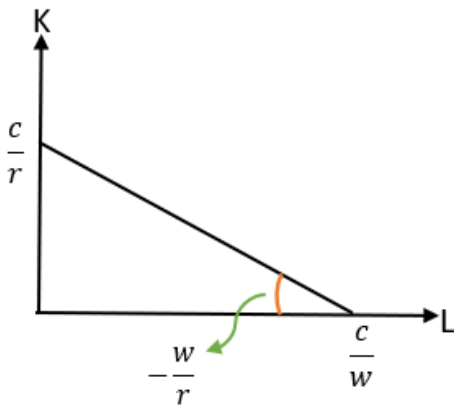
$$\frac{dk}{dL} = - \frac{W}{r}$$

$$if \quad L = 0 \quad , \quad k = \frac{C}{r}$$

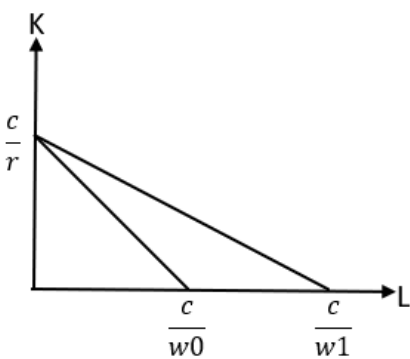
$$if \quad L = \frac{C}{r} \quad , \quad k = 0$$

دستمزد = W و r = نرخ بهره

ما زیریا روی خط هزینه یکسان هستیم .



اگر دستمزد کم شود، معنی خط هزینه ی یکسان به سمت بیرون منتقل می شود و بالعکس.

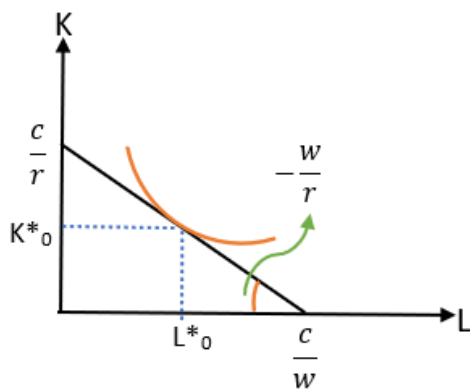


شرط تعادل در بازار نهاده ها

$$MRTS_{(L,k)} = - \frac{W}{r}$$

(L* و K*)

مقادیر تقاضای معمولی نیروی کار و سرمایه



مثال) اگر $q = 8L^2 + 4k^2$ و خط هزینه یکسان $200 = 5L + 7k$ باشد ، مقادیر هزینه ی تقاضای نیروی کار و سرمایه را بدست آورید؟

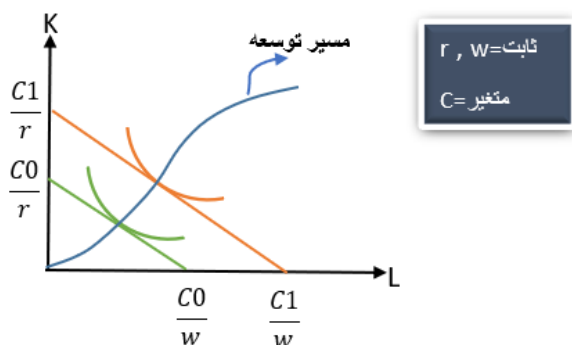
شرط تعادل

$$\begin{aligned} MRTS_{(L,k)} &= -\frac{W}{r} \rightarrow -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{W}{r} \\ \rightarrow -\frac{16L}{8L} &= -\frac{5}{7} \rightarrow 14L = 5k \Rightarrow L = \frac{5}{14}k \\ \rightarrow 200 &= 5 \times \frac{5}{14}k + 7k \rightarrow 2800 = 25k + 98k \\ \rightarrow 2800 &= 123k \Rightarrow k^* = \frac{2800}{123}, \therefore L^* = \frac{5}{14} \times \frac{2800}{13} \end{aligned}$$

$L =$ مسیر توسعه

مسیر توسعه : مکان هندسی ترکیبیات بهینه k و L که تنها C آن ها افزایش یافته است ، در تمام نقاط روی مسیر توسعه ، شرط تعادل $MRTS_{(L,k)} = -\frac{W}{r}$ برقرار است .

شکل مسیر توسعه در بلندمدت مشابه به نمودار تابع تولید است.

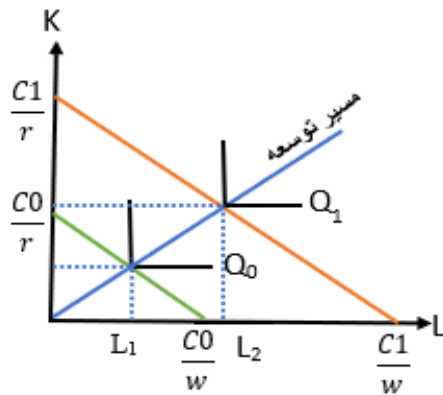


انواع توابع تولید :

1 - تابع تولید لئون تیف ($MRTS_{(L,K)} = 0$) دو کالا مکمل کامل اند .

$$Q = \text{Min}[\alpha L, \beta k]$$

یعنی برای افزایش به سطوح تولید بالاتر هر دو نهاده باید افزایش یابند .



مقادیر تقاضای بهینه ی نیروی کار و سرمایه در حالت تابع تولید لئون تیف (از قاعده لئون تیف بدست می آید).

$$Q = \text{Min}[\alpha L, \beta k]$$

$$\alpha L = \beta k \rightarrow L = \frac{\beta}{\alpha} k \rightarrow \text{مسیر توسعه}$$

$$, \bar{C} = W \times L + rk \Rightarrow \bar{C} = W \left[\frac{\beta}{\alpha} k \right] + rk \Rightarrow \bar{C} = k \left[\frac{W\beta}{\alpha} + r \right]$$

$$, \rightarrow k^* = \frac{\alpha \bar{C}}{W\beta + r\alpha} , \rightarrow L^* = \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{\alpha \bar{C}}{W\beta + r\alpha} \right] = \frac{\beta \bar{C}}{W\beta + r\alpha}$$

مثال) اگر $Q = \text{Min} [10L, 6k]$ باشد، و $100 = 4k + 5L$ مقادیر بهینه تقاضای معمولی سرمایه و نیروی کار را بدست آورید؟

$$\text{Max } \text{Min} [10L, 6k]$$

$$\text{S.t } 100 = 4k + 5L$$

قائده لئون تیف
 ، $\xrightarrow{\text{مسیر توسعه}} 10L = 6k \rightarrow L = \frac{6}{10}k$

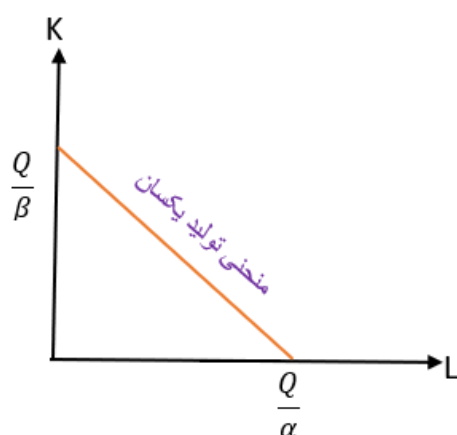
$$, 100 = 4k + 5 \times 0.6k \rightarrow 100 = 7k \rightarrow k^* = \frac{100}{7},$$

$$\rightarrow L^* = 0.6 \times \frac{100}{7} = \frac{60}{7}$$

$$, \Rightarrow Q^* = \text{Min} \left[10 \times \frac{60}{7}, 6 \times \frac{100}{7} \right] = \frac{600}{7} \text{ مقدار بهینه تولید}$$

2- تابع تولید خطی: دو کالا جانشین کامل اند . $MRTS_{(L,k)} = \infty$

$$Q = \alpha L + \beta k : \text{تابع تولید}$$



دستیابی به مقادیر بهینه تقاضای معمولی نهاده ها در تابع تولید خطی :

$$\text{Max } \alpha L + \beta k$$

$$\text{S.t } \bar{C} = WL + rk$$

$$L^* \begin{cases} 0 & W > r \\ \left[\frac{C}{W}, \frac{C}{r} \right] & \text{فرقی ندارد } W = r \\ \frac{C}{W} & W < r \end{cases}$$

$$K^* \begin{cases} \frac{C}{r} & W > r \\ \left[\frac{C}{W}, \frac{C}{r} \right] & \text{فرقی دارد } W = r \\ 0 & W < r \end{cases}$$

مثال) اگر منحنی تولید یکسان فردی $Q=12L+17k$ و خط هزینه یکسان $100=10L+14k$ باشد ،
مقادیر بهینه تقاضای L و k ؟

در مثال ما $10 \rightarrow w$ و $14 \rightarrow r$

$$Q^* = 12L + 0 = 12L \quad \text{و} \quad k^* = 0 \quad \text{و} \quad L^* = 10 \leftarrow \frac{W}{10} < \frac{r}{14}$$

$$L^* \begin{cases} 0 & W > r \\ \left[\frac{100}{14}, \frac{10}{1} \right] & W = r \\ \frac{100}{10} & W < r \end{cases}$$

$$K^* \begin{cases} \frac{100}{14} & W > r \\ \left[\frac{100}{14}, \frac{10}{1} \right] & W = r \\ 0 & W < r \end{cases}$$

تابع تولید کاب داگلاس (Cob – Douglas)

A = ضریب تکنولوژی α = کشش تولیدی نیروی کار $\varepsilon_{q,L}$ $Q = AL^\alpha k^\beta$

$$\varepsilon_{q,L} = \alpha AL^{(\alpha-1)} k^\beta \times \frac{L}{AL^\alpha k^\beta} = \alpha$$

$$\varepsilon_{q,k} = \frac{\partial q}{\partial k} \times \frac{k}{q} = A\beta L^\alpha k^{(\beta-1)} \times \frac{k}{AL^\alpha k^\beta} = \beta$$

مثال) اگر منحنی تولید همسان $q = 2k^\alpha L^\beta$ و $15 = 2L + 4k$ خط هزینه یکسان باشد مقادیر بهینه هزینه تقاضای معمولی L^* و k^* را بدست آورید ؟

$$MRTS_{(L,k)} = -\frac{W}{r} \rightarrow \frac{2\beta k^\alpha L^{\beta-1}}{2\alpha k^{\alpha-1} L^\beta} = -\frac{2}{4}$$

$$\frac{\beta k}{\alpha L} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{مسیر توسعه}} 2\beta k = \alpha L \rightarrow L = \frac{2\beta k}{\alpha}$$

$$15 = 2 \left[\frac{2\beta k}{\alpha} \right] + 4k \rightarrow 15\alpha = 4\beta k + 4k\alpha$$

$$K^* = \frac{15}{4(\alpha+\beta)}, \quad L^* = \frac{2\beta}{\alpha} \left[\frac{15\alpha}{4(\alpha+\beta)} \right] = \frac{15\beta}{2(\beta+\alpha)}$$

بازده نسبت به مقیاس :

. اگر همه نهاده ها t برابر شوند ، آنگاه تولید t برابر شود ، بازده ثابت نسبت به مقیاس است.

. اگر همه نهاده ها t برابر شوند ، آنگاه تولید بیشتر از t برابر شود ، بازده فزاینده نسبت به مقیاس است.

. اگر همه نهاده ها t برابر شوند ، آنگاه تولید کمتر از t برابر شود ، بازده کاهنده نسبت به مقیاس است.

اگر $q = Ak^\alpha L^\beta$ و نهاده ها t برابر شود :

$$q = A(tk)^\alpha (tL)^\beta = Ak^\alpha L^\beta (t^{(\alpha+\beta)})$$

$(\alpha+\beta) \leftarrow$ درجه همگنی

$$1) (\alpha + \beta) > 1 \rightarrow \text{بازده فزاینده نسبت به مقیاس} \quad (\varepsilon_{(q,k)} + \varepsilon_{(q,L)} > 1)$$

$$2) (\alpha + \beta) = 1 \rightarrow \text{بازده ثابت نسبت به مقیاس} \quad (\varepsilon_{(q,k)} + \varepsilon_{(q,L)} = 1)$$

$$3) (\alpha + \beta) < 1 \rightarrow \text{بازده کاهنده نسبت به مقیاس} \quad (\varepsilon_{(q,k)} + \varepsilon_{(q,L)} < 1)$$

مثال) اگر $q = 4k^{\frac{1}{5}}L^{\beta}$ و $MP_L = 6$ باشد. AP_L را بدست آورید. (بازده ثابت نسبت به مقیاس است)

$$\frac{1}{5} + \beta = 1 \rightarrow \beta = \frac{4}{5}$$

$$\beta = \varepsilon_{(q,L)} = \frac{MP_L}{AP_L} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{6}{AP_L} \rightarrow AP_L = \frac{30}{4} = 7.5$$

کشش جانشینی بین نهاده های نیروی کار و سرمایه :

$$\delta = - \frac{\frac{\Delta(\frac{k}{L})}{\frac{k}{L}}}{\frac{\Delta(MRTS)}{MRTS}} = - \frac{\frac{\Delta(\frac{k}{L})}{\frac{k}{L}}}{\frac{\Delta(-\frac{W}{r})}{(-\frac{W}{r})}}$$

δ : حساسیت نسبت تغییرات نسبت سرمایه به نیروی کار به نسبت تغییرات MRTS

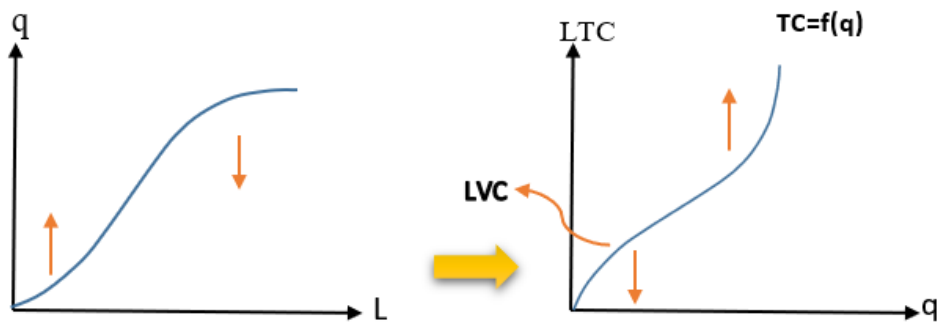
یعنی اگر نسبت دستمزد به نرخ بهره 1 درصد تغییر کند، در این حالت به چه میزان نیروی کار جایگزین سرمایه می شود. (δ اگر نسبت $\frac{W}{r}$ 1 درصد افزایش یابد نسبت به کارگیری $\frac{k}{L}$ چند درصد تغییر می کند؟)

هزینه ها : هزینه ضمنی (هزینه فرصت) + هزینه صریح (w,r)

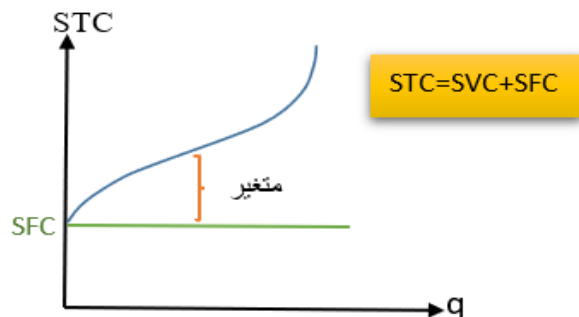


در کوتاه مدت هزینه ی ثابت و متغیر داریم ولی در بلندمدت همه هزینه ها متغیر است.

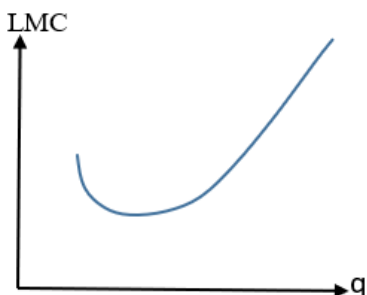
در حقیقت : $TC = f(q)$



در کوتاه مدت هزینه ثابت نیز داریم :

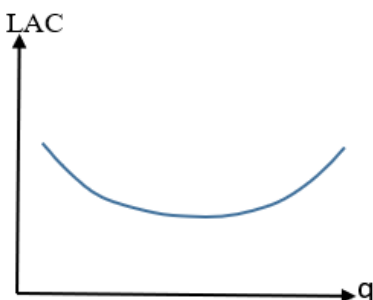


LMC شیب منحنی LTC است. یعنی اگر یک واحد تولید زیاد شود، هزینه کل چقدر زیاد می کند. (شیب بالای خط مماس بر منحنی هزینه LTC را LMC می گویند)
SMC شیب منحنی STC است .



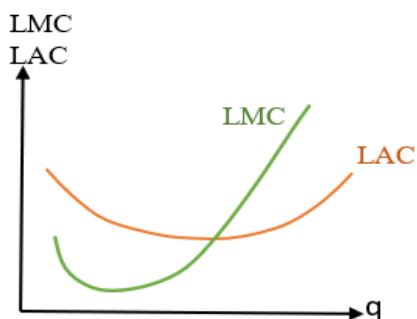
$TC = WL$
 $AC = \frac{TC}{q} = \frac{WL}{q} = \frac{W}{AP_L}$
 اگر تقعر AP_L به پایین است ، تقعر AC رو به بالا است . برای MC و MP_L نیز به همین صورت است.

LAC در حقیقت یک خط از مبدا مختصات به هر نقطه ی روی LTC رسم می شود و شیب آن LAC است .



LMC از حداقل LAC می گذرد .

$Min \ LAC :$
 $LAC = \frac{LTC}{q} , \quad \frac{\delta LTC}{\delta q} = LMC$



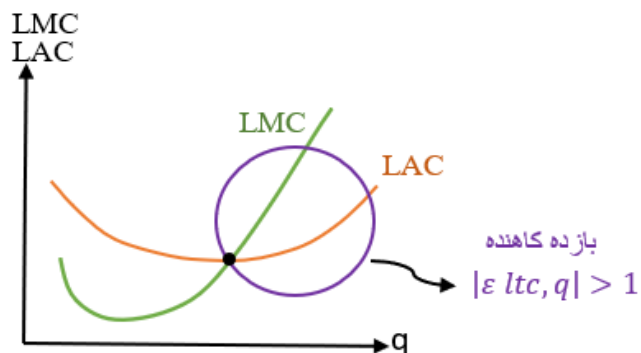
برای حداقل سازی مشتق می گیریم و مساوی صفر می گذاریم .

$$\frac{\partial LAC}{\partial q} = 0 \rightarrow \frac{\frac{\partial LTC}{\partial q} \times q - LTC}{q^2} = 0 \Rightarrow LMC = LAC$$

$$\mathcal{E}_{(LTC,q)} = \frac{\partial LTC}{\partial q} \times \frac{q}{LTC} = \frac{LMC}{LAC}$$

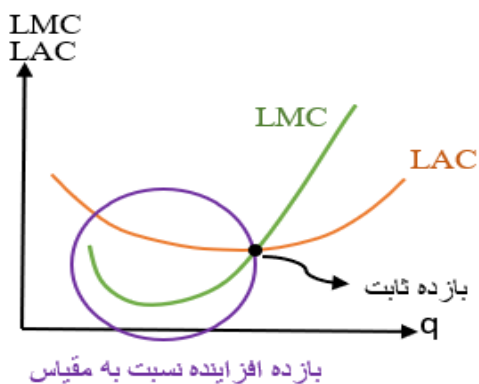
کشش تولیدی هزینه : اگر تولید 1% افزایش یابد ، هزینه چند درصد تغییر میکند

1) if $\mathcal{E}_{(LTC,q)} = \frac{LMC}{LAC} > 1$ بازده کاهنده نسبت به مقیاس



2) if $\mathcal{E}_{(LTC,q)} = \frac{LMC}{LAC} = 1$ بازده ثابت نسبت به مقیاس

3) if $\mathcal{E}_{(LTC,q)} = \frac{LMC}{LAC} < 1$ بازده فزاینده نسبت به مقیاس



مثال) اگر تابع هزینه بنگاهی به صورت $LTC = 8q^2 + 5q$ باشد، $\mathcal{E}_{(LTC,q)}$ را بدست آورید.

$$LMC = 16q + 5, \quad LAC = \frac{8q^2 + 5q}{q} = 8q + 5$$

$$\mathcal{E}_{(LTC,q)} = \frac{LMC}{LAC} = \frac{16q + 5}{8q + 5}$$

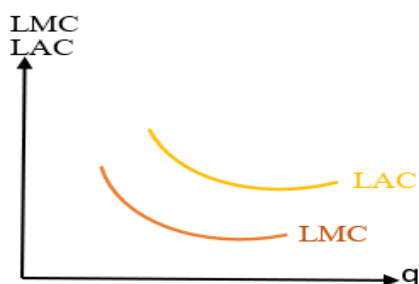
$$q \geq 0 \rightarrow \mathcal{E}_{(LTC,q)} \geq 1$$

ثابت و کاهنده نسبت به مقیاس

انواع صنایع بر پایه هزینه :

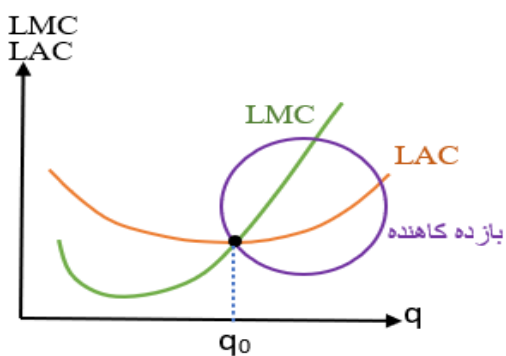
(1) صنعتی که انحصار طبیعی است . (برق - گاز)

در مقیاس زیادی بازده فزاینده نسبت به مقیاس است .

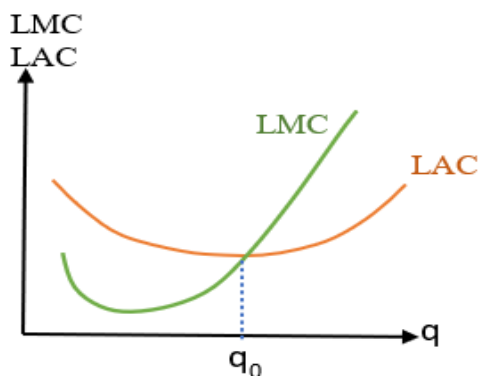


(2) آموزش و پرورش (صنایع خدماتی)

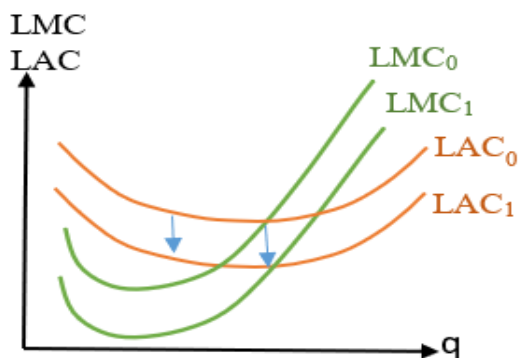
سریعا به بازده ثابت رسیده و در مقیاس زیادی بازده نسبت به مقیاس کاهشده است .



(3) صنایع نساجی (حالت عرف)

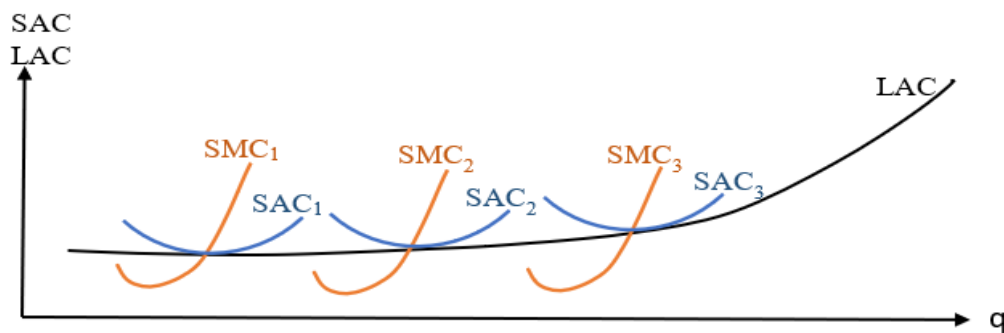


. اگر در اقتصادی بهبود تکنولوژی روی دهد ، منحنی های هزینه به پایین منتقل می شوند.

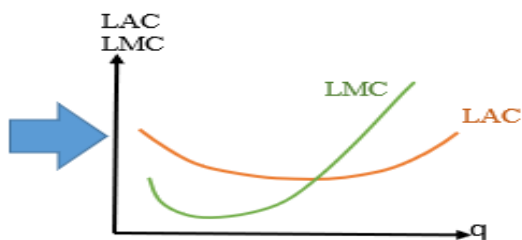
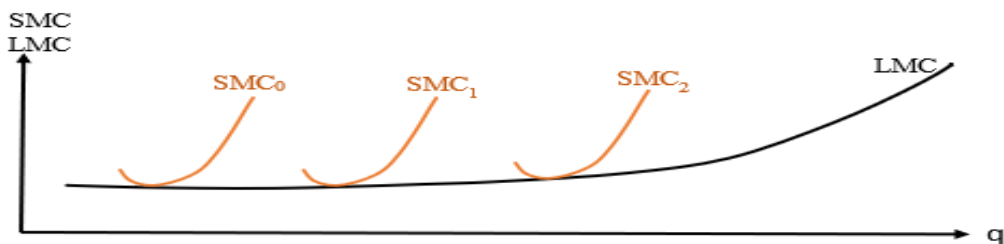


سوال) چگونه از هزینه های کوتاه مدت به بلند مدت برسیم ؟

درحقیقت از بهم چسباندن نقاط حداقل منحنی SAC که از آن SMC می گذرد به LAC می رسمیم



برای LMC نیز از حداقل های SMC بدست می آید.



بازار رقابت کامل :

ویژگی های بازار رقابت کامل

اطلاعات متقارن است

کالا همگن است

آزادی ورود و خروج به بازار

تعداد زیاد خریدار و فروشنده

استخراج منحنی عرضه بنگاه :

در بازار رقابت کامل ، قیمت در بازار تعیین شده و برای بنگاه داده شده است ← سود بنگاه دار

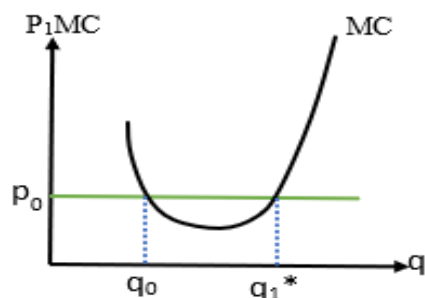
$$\pi = TR - TC$$

$$Max \pi = P \times q - TC(q) \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial q} = P - MC = 0 \Rightarrow P = MC$$

$$P = MC \rightarrow q^* \quad \text{شرط تعادل}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -\frac{\partial MC}{\partial q} < 0 \rightarrow \frac{\partial MC}{\partial q} > 0$$

برای اینکه ، به نقطه بهینه برسیم باید در قسمت صعودی MC باشیم.

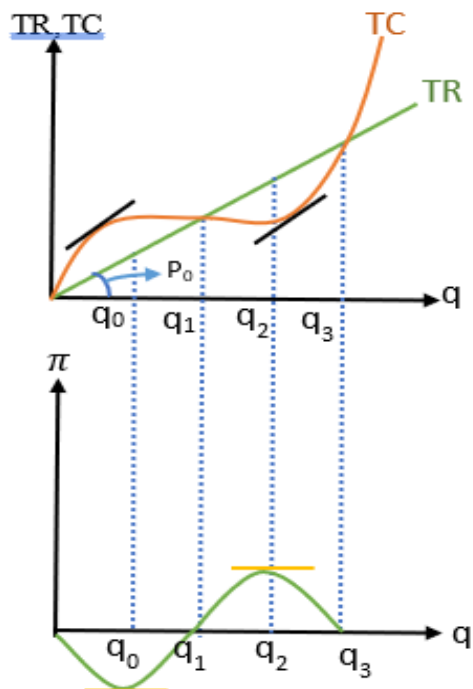


الان نقطه بهینه q_1^* که شرط $P=MC$ و در قسمت صعودی MC صدق می کند.

پس بهینه جایی است که در آن $P=MC$ و در قسمت صعودی MC است.

$$\begin{aligned} & \text{TR} = P_0 \times q_0 \\ & P_0 \times q_1 \\ & P_0 \times q_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{خطی با شیب } P_0$$

$$\text{TR} - \text{TC} = \pi$$



مثال) فرض کنید در بازار رقابت کامل $P=150$ باشد و $\text{TC}=8q^2+5q-3$ مقدار بهینه و سود بهینه را بدست آورید؟

$$\text{Max } \pi = 150q - 8q^2 - 5q - 3$$

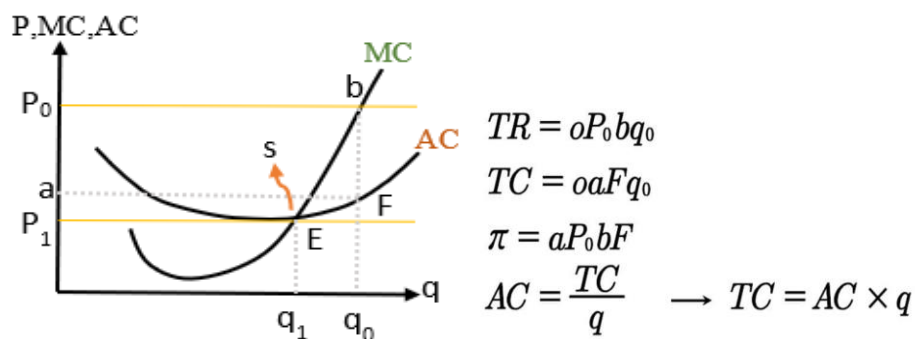
$$\frac{\delta \pi}{\delta q} = 150 - 16q - 5 = 0 \rightarrow 145 = 16q \Rightarrow q^* = \frac{145}{16}$$

$$\frac{\delta^2 \pi}{\delta q^2} = -16 < 0$$

$$\pi^* = 15 \times \frac{145}{16} - 8 \left(\frac{145}{16} \right)^2 - 5 \times \frac{145}{16} - 3$$

منحنی عرضه بنگاه :

مکان هندسی ترکیبات قیمت و مقدار که در آن نقطه شرط $P=MC$ باشد و در قسمت صعودی MC و بالاتر از AC قرار داشته باشد (سطح زیر AC)



(سطح زیر AC)

وقتی در کوتاه مدت سایر بنگاه ها این سود را در این بازار در قیمت P_0 می بینند به بازار حمله میکنند. با ورود سایر بنگاه ها و افزایش عرضه ، قیمت از P_0 کاهش می یابد تا به P_1 برسد

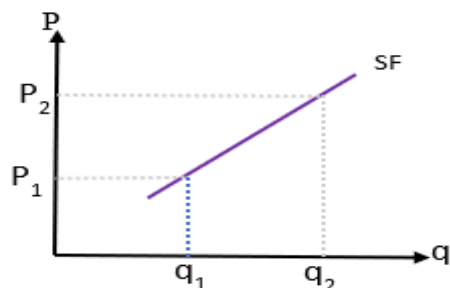
در بازار رقابت کامل در **کوتاه مدت** سود داریم ولی در بلند مدت سود نداریم. ←

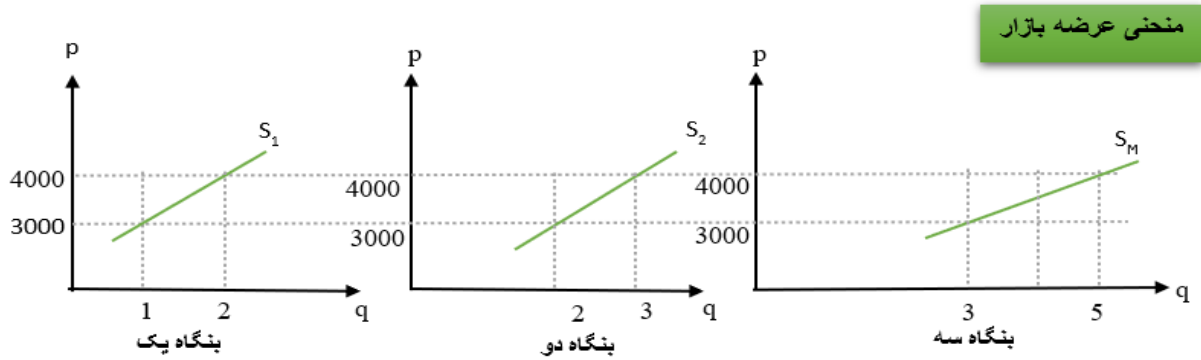
$$TR = oP_1Eq_1, \quad TC = oP_1Eq_1$$

$$\pi = 0 \rightarrow q_1$$

تعداد بلندمدت است. در این نقطه بنگاهی انگیزه ای برای ورود به بازار را ندارد. اگر قیمت از P_1 کمتر شود ، چون بنگاه ضرر می کند از بازار خارج می شود. در نتیجه عرضه بنگاه نقاط روی MC است که بالاتر از نقطه E هستند . (q_1)

در تمام نقاط روی منحنی عرضه بنگاه شرط کارایی تخصی ($P=MC$) و کارایی فنی بالاتر از AC باشیم ، برقرار است.





از جمع افقی منحنی عرضه دو دستگاه ، منحنی عرضه بازار حاصل می شود .

$$q_1 + q_2 = Q \rightarrow Q = q_M$$

منحنی عرضه صنعت

مجموعه ای از بنگاه ها که در صنف خاصی فعالیت می کنند .

انواع صنعت

DCI

(Decreasing Cost Industry)

صنعت با هزینه کاهنده

CCI

(Constant Cost Industry)

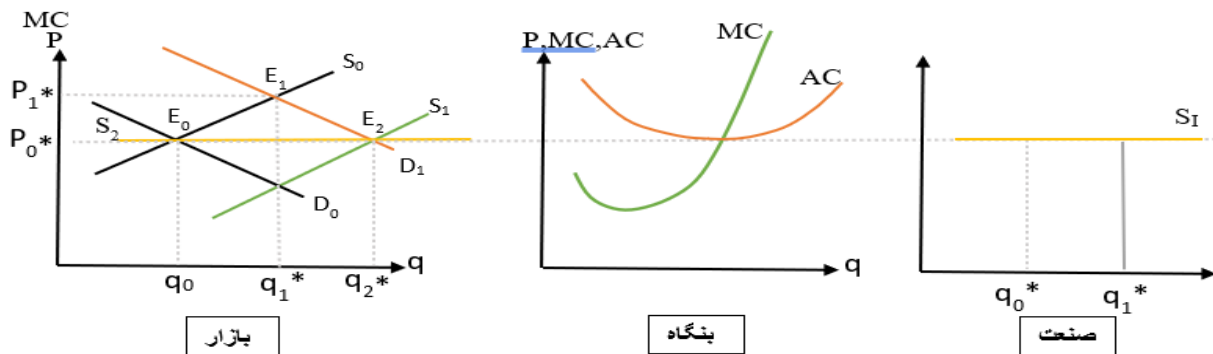
صنعت با هزینه ثابت

ICI

(Increasing Cost Industry)

صنعت با هزینه فزاینده

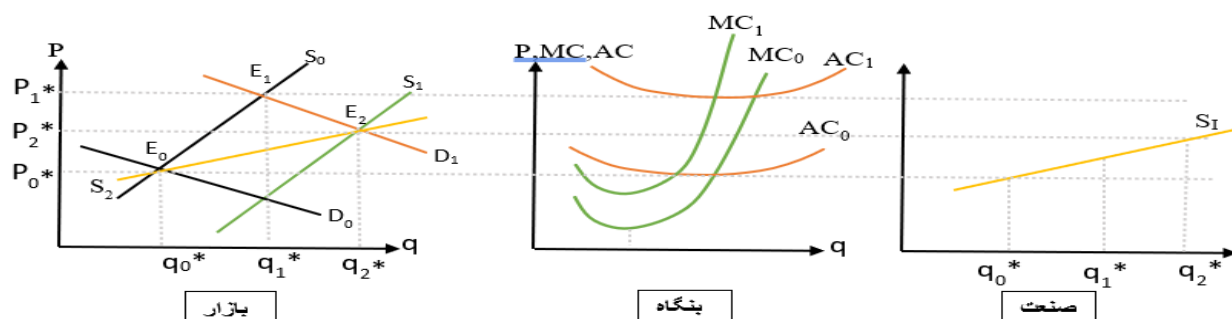
(1) استخراج منحنی عرضه صنعت CCI



ابتدا در نقطه E_0 هستیم ، بعد تقاضا افزایش می یابد و به D_1 می رویم و قیمت به P_1^* افزایش می یابد . بنگاه می بیند و میزان عرضه خود را افزایش می دهد . چون صنعت CCI است.

MC و AC منتقل نمی شود به خاطر افزایش عرضه بنگاه ها ، منحنی S_0 به S_1 منتقل می شود تا نقطه تعادل جدید E_2 حاصل شود. نقاط E_0 و E_2 را بهم وصل می کنیم و عرضه صنعت حاصل می شود .

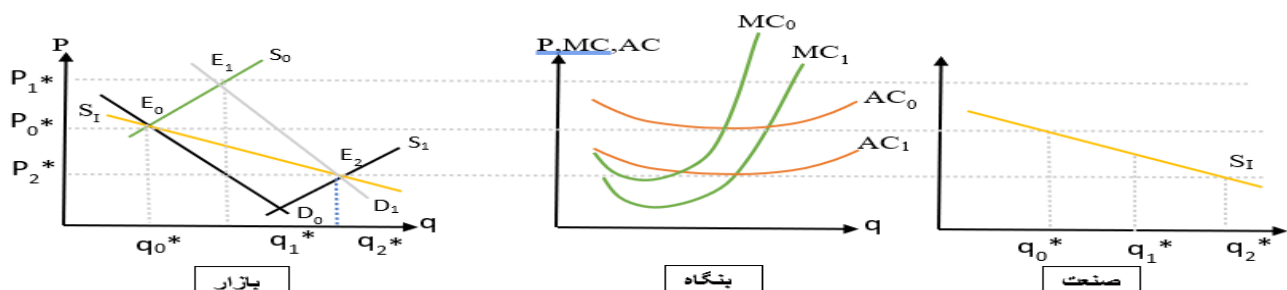
(2) صنعت ICI



به علت افزایش تقاضا ، بنگاه میزان تولید خود را افزایش می دهد تا سود بیشتری بدست آورد در نتیجه چون صنعت ICI است ، منحنی های AC و MC بنگاه به بالا منتقل می شود لذا به خاطر افزایش تولید منحنی عرضه به راست منتقل شده و از E_1 به E_2 می رسمیم ← نقطه تعادل صنعت از الصاق E_0 و E_2 بدست می آید .

(3) صنعت DCI

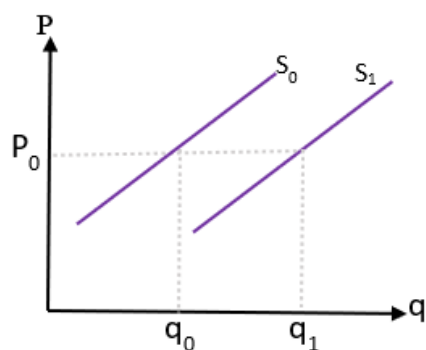
مثل زمان هاییکه با افزایش تولید ، حرقه مقیاس ایجاد شده و هزینه ها کاسته می شود و AC و MC به پایین منتقل می شوند.



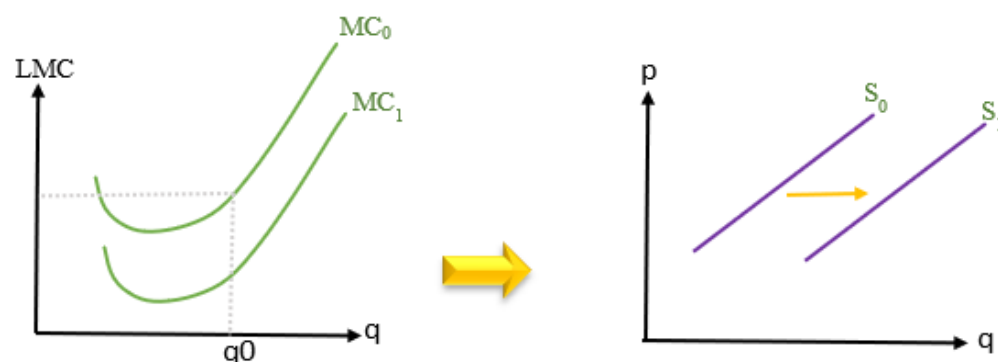
با افزایش تقاضا و قیمت ، هزینه های بنگاه چون صنعت DCI است به پایین منتقل می شود.
 ← با افزایش عرضه در بازار، منحنی عرضه بازار به پایین منتقل می گردد ← عرضه صنعت نزولی است.

عوامل موثر بر انتقال منحنی عرضه دستگاه :

- (1) اگر قیمت کالا تغییر کند ، روی منحنی عرضه بنگاه به بالا و پایین حرکت می کنیم.
- (2) اگر تکنولوژی بهبود پیدا کند ، عرضه افزایش می یابد و منحنی عرضه به راست منتقل می شود .



- (3) با افزایش معافیت های مالیاتی نیز هزینه ها و منحنی MC به پایین منتقل شده ← منحنی عرضه نیز به پایین منتقل می شود . چون منحنی عرضه در حقیقت قسمت صعودی منحنی MC است .



پاسخ تمارین اقتصاد خرد ۱

سری اول

(1) در سال ۹۰ قیمت یک کالایی ۵ هزار تومان بود. مقدار مصرف ۶ کیلو بوده. در سال ۹۹ قیمت آن ۱۵ هزار تومان و مقدار مصرف مردم ۳ کیلو شده است. کشش قیمتی تقاضا را حساب کنید.

$$\varepsilon_{q,p} = \frac{-\Delta q}{\Delta p} = \frac{P_0}{q_0}$$

$$\Delta q = q_{99} - q_{90} = 3 - 6 = -3$$

$$\Delta p = p_{99} - p_{90} = 15 - 5 = 10$$

$$\varepsilon_{q,p} = \frac{-(-3)}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{4} < 1$$

کالای بی کشش (کم کشش)

(2) در سال ۹۰ درآمد یک فرد ۸۰۰ هزار تومان بوده و q آن کالا ۸ بوده است. در سال ۹۹ درآمد آن فرد یک میلیون و q آن کالا ۶ شده است. این کالا چگونه است و کشش قیمتی تقاضا را بدست آورید.

$$\varepsilon_{q,I} = \frac{\Delta q}{\Delta I} = \frac{I_0}{q_0}$$

$$\Delta q = q_{99} - q_{90} = 6 - 8 = -2$$

$$\Delta I = I_{99} - I_{90} = 1000000 - 800000 = 200000$$

$$\varepsilon_{q,I} = \frac{-2}{200} \times \frac{800}{8} = -1 < 0$$

کالای پست

(3) در سال ۹۰ قیمت y ، ۵ هزار تومان و تقاضا x ، ۶ بوده است و در سال ۹۹ قیمت y ، ۸ هزار تومان و تقاضای x ، ۹ بوده است. وضعیت کالا ها نسبت به هم را بنویسید.

$$\varepsilon_{x_{99}p_y} = \frac{\Delta x}{\Delta p_y} = \frac{p_{y0}}{x_0} = \frac{9-6}{8-5} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

چون بزرگتر از 1 شده است ← کالای دوم جانشین کالای اول شده است

سری دوم

(1) اگر $P_y = 4$ و $P_x = 6$ و $i = 200$ و $U = 3x^2 + 5y^2$ مقدار تقاضای تعادل x^* و y^* را بدست آورید .

$$MRS(x,y) = \frac{-P_x}{P_y} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

$$U = 3x^2 + 5y^2$$

$$200 = 6x + 4y$$

$$\frac{-6x}{10y} = \frac{-6}{4} \rightarrow x = \frac{5}{2}y$$

$$200 = 6\left(\frac{5}{2}\right)y + 4y \rightarrow 200 = 19y \rightarrow y = \frac{200}{19}$$

$$x = \left(\frac{200}{19}\right)\frac{5}{2} = \frac{500}{19}$$

(2) $U=6x+10y$ ← بدست آوردن مقدار بهینه ی تقاضای معمولی ؟

$$max = 6x + 10y$$

$$S.T = 150 = 3x + 5y$$

دو کالا جانشین کامل همدیگرند

$$x = \begin{cases} 0 & P_x > P_y \\ [30,50] & P_x = P_y \\ 50 & P_y > P_x \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 30 & P_x > P_y \\ [30,50] & P_x = P_y \\ 0 & P_y > P_x \end{cases}$$

$$P_y = 5 \rightarrow P_x = 3$$

$$x = 50 \quad y = 0$$

(3) $U = \text{Min}[5x, 3y]$, $80 = 5x + 8y$ ← بدست آوردن مقدار بهینه تقاضای x و y ؟

$$x = \frac{3}{5}y \rightarrow 80 = 5\left(\frac{3}{5}\right)y + 8y \rightarrow y = \frac{80}{11} \rightarrow x = \frac{48}{11}$$

(4) تابع مطلوبیت هذلولی قائم ($i=120$, $P_x=2$, $P_y=6$, $u=xy$)

$$U = x \cdot y$$

$$S.T = x \cdot P_x + y \cdot P_y = 1$$

$$MRS(x, y) = \frac{-P_x}{P_y} = -\frac{y}{x} \rightarrow y \cdot P_y = x \cdot P_x \rightarrow y = \frac{x P_x}{P_y} \rightarrow I = x \cdot P_x + \left(\frac{x \cdot P_x}{P_y}\right) \cdot P_y$$

$$\frac{-y}{x} = -\frac{2}{6} \rightarrow y = \frac{x}{3} \rightarrow I = 2x + 2x = 120 \rightarrow x = 30 \rightarrow y = 10$$

سری سوم

1) فرض کنید $U(x,y)=18x-2x^2+36y-6y^2$, $P_x=3$, $P_y=6$, منحنی درآمد مصرفی کالای x و منحنی انگل را بدست آورید .

$$MRS(x,y) = \frac{-P_x}{P_y} \rightarrow \frac{18-4x}{36-12y} = \frac{3}{6} \rightarrow 8x = 36y \rightarrow x = \frac{9}{4}y$$

$$I = x.P_x + y.P_y = 3\left(\frac{9}{4}y\right) + 6y = \frac{51}{4}y$$

$$I = 3x + 6\left(\frac{4}{9}\right)x = \frac{17}{3}x \rightarrow x = \frac{9}{17}y \rightarrow I.C.C$$

2) فرض کنید $U(x,y)=-4x^2 + 2x + 9y^2 + 3y$, $P_y=3$, $P_x=2$

$$MRS(x,y) = \frac{-P_x}{P_y} \rightarrow \frac{-2-8x}{18y+3} = -\frac{2}{3} \rightarrow \frac{-1-4x}{6y+1} = -1 \rightarrow x = \frac{3}{2}y$$

$$I = x.P_x + y.P_y = 2x + 3y = \frac{3}{2}y.2 + y.3 = 6y$$

$$I = 6\left(\frac{2}{3}x\right) = 4x$$

سری چهارم

(1) اطلاعات مسئله $\leftarrow P_y=4$, $I=80$, $U=7x-2x^2+15y-2y^2$ $\leftarrow$ خواسته های مسئله
P.C.C و P_x یا dx

$$MRS(x, y) = \frac{-P_x}{P_y}$$

$$I = x \cdot P_x + y \cdot P_y = xP_x + 4y = 80 \rightarrow P_y = \frac{80 - 4y}{x} \rightarrow \frac{7 - 4x}{15 - 4y} = \frac{\frac{80 - 4y}{x}}{4}$$

$$28x - 16x^2 = 1200 - 320y - 60y + 16y^2$$

$$1200 - 380y + 16y^2 + 16x^2 - 28x = 0$$

$$300 - 95y + 4y^2 + 4x^2 - 7x = 0$$

$$-\frac{7-4x}{15-4y} = -\frac{P_x}{4} \rightarrow 80 = x \cdot P_x + 4y \quad \text{شرط تعادل:}$$

$$y = \frac{80 - x \cdot P_x}{4} \rightarrow \frac{7 - 4x}{15 - 4\left(\frac{80 - x \cdot P_x}{4}\right)} = \frac{P_x}{4} \rightarrow$$

$$28 - 16x = 15P_x - 80P_x + (P_x)^2 \cdot x$$

2) اطلاعات مسئله ← $P_x=3$, $P_y=7$, $u=90$, $i=80$, $U=4x^2 + 6y^2$
 خواسته ها ← تقاضای جبرانی و تقاضای معمولی

$$Max = (4x^2 + 6y^2)$$

$$S.T: 80 = 3x + 7y$$

$$MRS(x, y) = \frac{-P_x}{P_y} = \frac{-8x}{12y} = \frac{-3}{7}$$

$$14x=9y \rightarrow x = \frac{9}{14}y$$

$$80 = 3\left(\frac{9}{14}y\right) + 7y \rightarrow y = \frac{224}{25} \rightarrow x = \left(\frac{144}{25}\right)$$

دوگان:

$$Min = (3x + 7y)$$

$$S.T: 90 = 4x^2 + 6y^2$$

$$MRS(x, y) = \frac{-P_x}{P_y} = \frac{-8x}{12y} = \frac{-3}{7}$$

$$x = \frac{9}{14}y$$

$$90 = 4\left(\frac{9}{14}y\right)^2 + 6y^2$$

$$y^{h*} \rightarrow = \sqrt{\frac{882}{75}} = \frac{7\sqrt{6}}{5}$$

$$x^{h*} = \frac{9}{14}\left(\frac{7\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{9\sqrt{6}}{10}$$

سری پنجم

(1) اگر $q = 9L^3 - 5L^2 - 7L$ باشد ، مراحل استخراج را استخراج نموده و کشش تولیدی نیروی کار را حساب کنید .

$$mP_L = \frac{\delta q}{\delta L} = 27L^2 - 10L - 7$$

$$L0 = \frac{\delta MP_L}{\delta L} = 54L0 - 10 = 0 \rightarrow L0 = \frac{5}{27}$$

$$Max AP_L: AP_L = \frac{9L^3 - 5L^2 - 7L}{L} = 9L^2 - 5L - 7$$

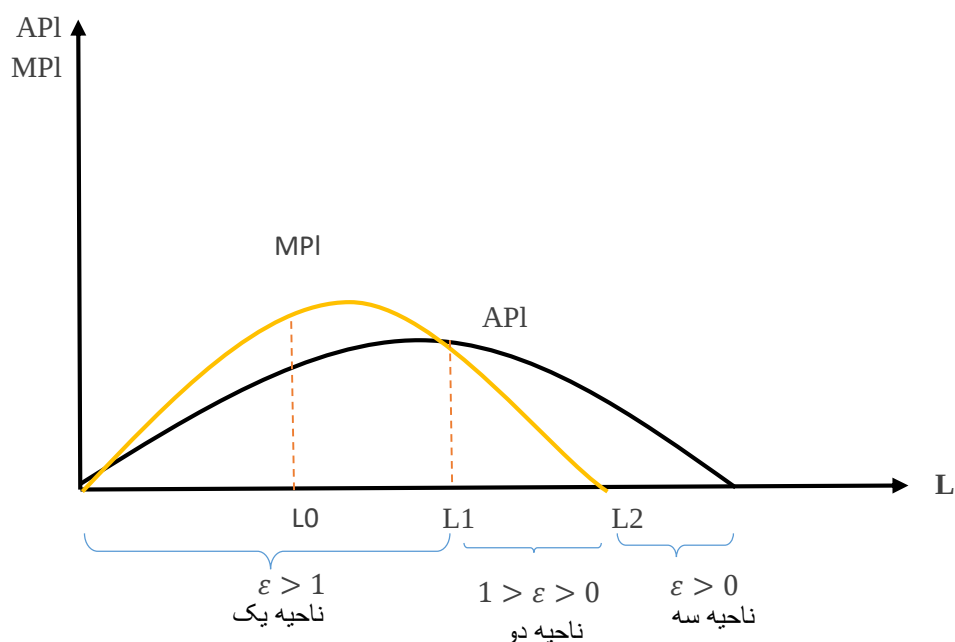
$$L1 = \frac{5}{18}$$

$$L2 = \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4(-7)(27)}}{2(27)}$$

$$L2 = \frac{5 + \sqrt{214}}{27} \quad \text{درست}$$

$$\varepsilon_{q,L} = \frac{\delta q}{\delta L} = \frac{L}{q} = \frac{MP_L}{Ap_L} = \frac{27L^2 - 10L - 7}{9L^2 - 5L - 7}$$

$$\begin{cases} L = 0 \rightarrow \varepsilon = 1 \\ L > 0 \rightarrow \varepsilon > 1 \end{cases}$$



2) اگر $q = 3K^2 + 5L^2$ و خط هزینه یکسان $120 = 4K + 6L$ باشد، مقادیر بهینه تقاضای نیروی کار و سرمایه را بدست آورید. (ضریب $k = r$ و ضریب $L = W$)

$$MRTS(L, K) = \frac{-W}{r} \rightarrow \frac{-MPL}{MPK} = \frac{-W}{r}$$

$$\frac{-10L}{6K} = \frac{-6}{4} \rightarrow \frac{5L}{3K} = \frac{3}{2} \rightarrow K = \frac{10}{9}L \rightarrow L = \frac{9}{10}K$$

$$120 = 6\left(\frac{9}{10}K\right) + 4K \rightarrow K = \frac{600}{47} \rightarrow L = \frac{540}{47}$$

سری ششم

(1) اگر $Q = \text{Min} [4L, 7k]$ باشد و $6k + 8L = 70$ مقادیر بهینه ی معمولی سرمایه و نیروی کار را بدست آورید .

$$4L = 7K \rightarrow l = \frac{7}{4}k \rightarrow (\text{مسیر توسعه})$$

$$70 = 6k + 8\left(\frac{7}{4}\right)k \rightarrow k = \frac{7}{2} \rightarrow L = \frac{7}{4}\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{8}$$

$$Q = \text{Min} \left[4\left(\frac{49}{8}\right), 7\left(\frac{7}{2}\right) \right] = \frac{49}{2} \rightarrow \text{مقدار بهینه تولید}$$

(2) اگر منحنی تولید یکسان فردی $Q = 10L + 15k$ و خط هزینه ی یکسان $80 = 4k + 6L$ مقادیر بهینه تقاضای L و K را بدست آورید ؟

$$\begin{cases} 6 \rightarrow w \\ 4 \rightarrow r \end{cases} \rightarrow \frac{w}{6} > \frac{r}{4} \rightarrow k = 20, L = 0 \rightarrow Q = 15k \rightarrow Q = 300$$

$$\begin{aligned} K \begin{cases} \frac{80}{4} = 20 \\ \left[\frac{80}{6}, \frac{80}{4} \right] \\ 0 \end{cases} & \begin{aligned} w &> r \\ w &= r \\ w &< r \end{aligned} \\ L \begin{cases} 0 \\ \left[\frac{80}{6}, \frac{80}{4} \right] \\ \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \end{cases} & \begin{aligned} w &> r \\ w &= r \\ w &< r \end{aligned} \end{aligned}$$

3) اگر منحنی تولید همسان $q = 3k^2L^4$ و $3k + 6L = 20$ خط هزینه ی یکسان باشد . مقادیر بهینه ی تقاضای معمولی L^* و k^* را بدست آورید .

$$MRTS_{(L,k)} = \frac{-w}{r}$$

$$\frac{-3(4)K^2L^3}{3(2)kL^4} = -2\frac{K}{L} = -\frac{6}{3} = -2 \rightarrow K = L$$

$$20=(3+6)L \rightarrow L = K = \frac{20}{9}$$

4) اگر تابع هزینه ی بنگاهی به صورت $LTC=4q^2 + 2$ باشد $\varepsilon(LTC, q)$ را بدست آورید؟

$$LTC=4q^2 + 2q$$

$$LMC=8q+2$$

$$LAC=\frac{4q^2+2q}{q} = 4q + 2$$

$$\varepsilon(LTC, q) = \frac{8q + 2}{4q + 2} \rightarrow q \geq 0 \rightarrow \varepsilon(LTC, q) \geq 1$$

ثابت و کاهنده

5) فرض کنید در بازار رقابت کامل $P=10$, $TC=5q^2 - 6q$ ، مقدار بهینه و سود بهینه را بدست آورید .

$$\max \pi = 10q - 5q^2 + 6q$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = -10q + 16 = 0 \rightarrow q = \frac{16}{10}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 q} = -10 < 0 \rightarrow \text{در قسمت صعودی MC} \rightarrow \text{تقعر به پایین}$$

$$\pi = 16 \left(\frac{16}{10} \right) - 5 \left(\frac{16}{10} \right)^2 = \frac{1280}{100} = 12.8$$