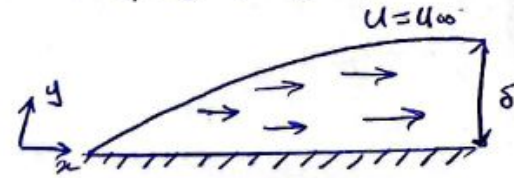


981311043

1. با توجه به شکل (حرکت سیلی برای یک صفحه) ثوابت توزیع سرعت سیال در معادله زیر را بدست آورید.



$$\frac{u}{u_{\infty}} = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + a_4 \eta^4$$

$$\eta = \frac{y}{\delta} \rightarrow (*)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{4\delta}$$

$$\text{شرایط مرزی: if } y=0 \Rightarrow \eta=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow \frac{\delta^2 (u/u_{\infty})}{\delta y^2}$$

$$0 = a_0 + \underbrace{(a_1)(0)}_0 + \underbrace{(a_2)(0)^2}_0 + \underbrace{(a_3)(0)^3}_0 + \underbrace{(a_4)(0)^4}_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 (u/u_{\infty})}{\delta y^2} = a_1 + 2a_2 \eta + 3a_3 \eta^2 + 4a_4 \eta^3$$

$$\frac{\delta^2 (u/u_{\infty})}{\delta y^2} = 2a_2 + 6a_3 \eta + 12a_4 \eta^2$$

$$u=0 \Rightarrow \frac{\delta^2 (u/u_{\infty})}{\delta y^2} = 0 \Rightarrow 0 = 2a_2 + 6a_3(0) + 12a_4(0) \Rightarrow a_2 = 0$$

$$y = \delta \Rightarrow \eta = 1 \Rightarrow \frac{\delta (u/u_{\infty})}{\delta y} = 0 \Rightarrow 0 = a_1 + 2a_2(1) + 3a_3(1) + 4a_4(1)$$

$$\Rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \xrightarrow{(a_2=0)} a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 0$$

$$y = \delta \Rightarrow u = u_{\infty} \Rightarrow \frac{u}{u_{\infty}} = 0 + a_1 + 0 + a_3 + a_4 \quad \left(\frac{u}{u_{\infty}} = 1 \right)$$

$$\Rightarrow a_1 + a_3 + a_4 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0$$

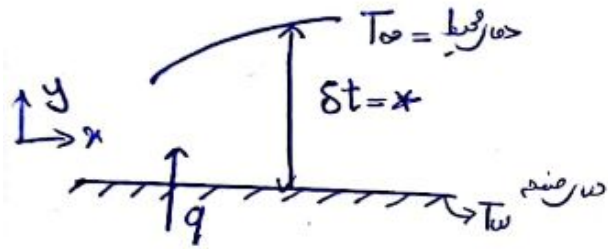
$$\begin{cases} a_3 + a_4 = 1 \\ 3a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -3a_3 - 4a_4 &= -3 \\ 3a_3 + 4a_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_4 = (-3)$$

$$a_3 = 1 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow a_3 = 4$$

2. تغییرهای سیال بر روی یک صفحه تخت خنثی است: $T = a + by + cy^2$ ، با بهره‌گیری از شرایط مرزی و فرین سطح حرارتی ثابت، لایه به لایه توزیع دما را بدست بیاورید.



$$\delta t = 43$$

$$T = a + by + cy^2$$

$$\text{شرایط مرزی} \Rightarrow y=0 \Rightarrow k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} + q = 0$$

$$y = \delta t \rightarrow T = T_\infty$$

$$\frac{\delta T}{\delta y} = 0$$

$$T_\infty = a + b \delta t + c \delta t^2$$

$$T_\infty = a + b(43) + c(43)^2$$

$$-b = \frac{q}{k} \rightarrow b = -\frac{q}{k}$$

$$\rightarrow T_\infty = a - \frac{q}{k} \delta t + \frac{q}{2k \delta t} (\delta t)^2$$

$$\Rightarrow T_\infty = a - \frac{q \delta t}{k} + \frac{q \delta t}{2k} + T_\infty$$

$$T_\infty = a - \frac{q}{k} \delta t + c \delta t^2 \Rightarrow 0 = -\frac{q}{k} + 2c \delta t$$

$$\Rightarrow c = \frac{q}{2k \delta t}$$

$$\text{در صورت استفاده از شرایط مرزی می‌توانیم} \Rightarrow T = T_\infty + \frac{q \delta t}{2k} - \frac{q}{k} y + \frac{q}{2k \delta t} y^2$$

$$\delta t = 43 \Rightarrow T = T_\infty + \frac{q(43)}{2k} - \frac{q}{k} y + \frac{q}{2k(43)} y^2$$

$$\Rightarrow T = T_\infty = 21.5 \frac{q}{k} - \frac{q}{k} y + \frac{q}{86k} y^2$$

$$\Rightarrow T = T_\infty + \left(\frac{q}{k} \right) \left(21.5 - y + \frac{y^2}{86} \right)$$

3. گاز هیدروژن در دو طرف غشایی با ضخامت (δ) با غلظت های متفاوت وجود دارد. با توجه به نفوذ هیدروژن از غشاء، معادله دینامیک توزیع غلظت در دیواره را بدست آوریم.

تجمع جرم = جرم مصرفی - جرم تولیدی + جرم خروجی - جرم ورودی : خوانده

$$N_A \Delta y \Delta z|_x - N_A \Delta y \Delta z|_{x+\Delta x} + 0 - 0 = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\delta C_A}{\delta t}$$

$$\div \Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow \frac{N_A|_x - N_A|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\delta C_A}{\delta t} \quad (I) \Rightarrow -\frac{\delta N_A}{\delta x} = \frac{\delta C_A}{\delta t}$$

$$N_A = J_A + C_A U = -D_{AB} \frac{\delta C_A}{\delta x} + C_A U \quad (II)$$

$$J_A = -D_{AB} \nabla C_A \quad (\text{بفرض آنکه غلظت مولی کل ثابت باشد})$$

$$(I), (II) \Rightarrow D_{AB} \frac{\delta^2 C_A}{\delta x^2} = \frac{\delta C_A}{\delta t} + C_A \frac{\delta U}{\delta x} + U \frac{\delta C_A}{\delta x}$$

4. در یک دانه کاتالیزور کروی شکل به شعاع R واکنش درجه $(*)$ ، $A \xrightarrow{K} B$ اتفاق می افتد. اگر غلظت ماده A روی سطح کاتالیزور برابر C_A باشد، معادله دینامیک غلظت A در داخل دانه کروی را بدست آورید.

واکنش درجه 43 است. [981311043]
غلظت A روی سطح کاتالیزور C_{A0}

حجم دانه $\Rightarrow V = 4\pi r^2 \Delta r$
سطح همان (دایره) $S_r = 4\pi r^2$

تجمع = جرم موزنی - جرم تولیدی + جرم خربوبی - جرم ورودی : موازنه
 $N_A = -D_{AB} \frac{\delta C_A}{\delta r}$

$$r_A = K C_A^{43}$$

$$\Rightarrow N_A S_r|_r - N_A S_r|_{r+\Delta r} + 0 - r_A V = \frac{\delta n}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{-\delta}{\delta r} (N_A S_r) \Delta r - K C_A^{43} V = V \frac{\delta C_A}{\delta t}$$

تجمع V $\rightarrow \frac{-\delta}{V \delta r} (N_A \cdot S_r) \Delta r - K C_A^{43} = \frac{\delta C_A}{\delta t}$

$$\Rightarrow \frac{-\delta}{r^2 \delta r} (r^2 N_A) - K C_A^{43} = \frac{\delta C_A}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left(r^2 \frac{\delta C_A}{\delta r} \right) - K C_A^{43} = \frac{\delta C_A}{\delta t}$$

5. حل مسئله

$$y'' + 2y' - 3y = (x + \sqrt{x})e^x \rightarrow (\text{در رتبه آخر شماره باشد مجرب})$$

$$y'' + 2y' - 3y = (x + 43)e^x \quad \begin{cases} P = 2 \\ q = (-3) \\ R(x) = (x + 43)e^x \end{cases} \quad y = y_g + y_p$$

$$\text{معادله مشخصه: } m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+3) = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = (-3) \end{cases}$$

$$R(x) = (x + 43)e^x = xe^x + 43e^x$$

$$e^{\alpha x} (A_0 + A_1 x + \dots + A_n) x^s \quad (\alpha = 1 \rightarrow \text{در رتبه اول} \rightarrow s = 1 \rightarrow y_p = Ae^x)$$

$$y_p = Ae^x \xrightarrow{(\text{فرض اول})} y_p = x Ae^x$$

جواب خصوصی با عمومی اشتراک دارد.

$$y_p' = Ae^x + x Ae^x = Ae^x (1 + x)$$

$$y_p'' = Ae^x (1 + x) + Ae^x = Ae^x (1 + x + 1)$$

$$\text{جایگذاری} \Rightarrow Ae^x (2 + x) + 2Ae^x (1 + x) - 3x Ae^x = e^x (x + 43)$$

$$\Rightarrow 3Ae^x - 3x Ae^x = x e^x + 43 e^x$$

$$\Rightarrow Ae^x (3 - 3x) = e^x (x + 43) \Rightarrow A(3 - 3x) = x + 43$$

$$\Rightarrow A = \frac{43}{3}x \Rightarrow y_p = \frac{43}{3} x^2 e^x$$

→

انامہ حل سؤال (5) :

$$y_p = (A_0 + A_1 x) e^x$$

$$y'_p = A_1 e^x + e^x (A_0 + A_1 x)$$

$$y''_p = A_1 e^x + e^x (A_0 + A_1 x) + A_1 e^x$$

جائزہ : $2A_1 e^x + e^x (A_0 + A_1 x) + 2A_1 e^x + 2e^x (A_0 + A_1 x) - 3e^x (A_0 + A_1 x)$

$$= (x + 43) e^x$$

$$\rightarrow 4A_1 e^x = (x + 43) e^x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A_1 = \frac{43}{4} = 10.75 \\ A_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_p = (10.75)x e^x$$

$$y_p = \frac{43x^2}{3} e^x + (10.75)x e^x$$

$$y = y_g + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + x e^x \left(\frac{43}{3} x + 4 \right)$$

6. توزیع دما در جسم زیر اگر انرژی $\dot{q}(x)$ در واحد حجم آن تولید شود، بدست آورده.

$$\dot{q}(x) = k (\cos^3 x - \cos x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (\text{فرض: steady state})$$

$$T(0, y) = T_\infty \quad (\text{شرایط مرزی همگن})$$

$$\dot{q} \text{ جابجایی} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{k(\cos^3 x - \cos x)}{k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + (\cos^3 x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -(\cos^3 x - \cos x)$$

$$\nabla^2 T = g(x) \quad \text{معادله پواسن}$$

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T(x) \quad \text{تفکیک متغیر}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = -(\cos^3 x - \cos x) = \frac{d^2 T_2}{dx^2}$$

$$\text{جدا شده} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{d^2 T_2}{dx^2} = -(\cos^3 x - \cos x) \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} = -(\cos^3 x - \cos x) \xrightarrow{\int} \frac{dT_2}{dx} = -\int (\cos^3 x - \cos x) dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dT_2}{dx} = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x - \sin x + C$$

$$T_2 = \int \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \int \frac{2}{3} \sin x - \int \sin x + \int C$$

$$\Rightarrow T_2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \cos^3 x - \frac{2}{3} \cos x - \cos x + C_1 x + C_2$$

عمل شرط ہرری $\Rightarrow \frac{\delta T_2(\pi)}{\delta x} = 0 \Rightarrow T_2 = \left(-\frac{1}{9}\right) \cos^3 x - \frac{2}{3} \cos x - \cos x + C_1 x + C_2$

$$\Rightarrow T_2' = \left(-\frac{1}{9}\right) (3 \cos^2 x (-\sin x) + \frac{2}{3} \sin x + \sin x + C_1 + \frac{1}{3} \cos^2(\pi) - \sin(\pi) + \frac{2}{3} \sin(\pi) + \sin(\pi) + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

عمل شرط ہرری: $T_2(0) = T_\infty \Rightarrow \left(-\frac{1}{9}\right) \cos^3(0) - \frac{2}{3} \cos^2(0) - \cos(0) + C_2 = T_\infty$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + (-1) + C_2 = T_\infty \Rightarrow C_2 = T_\infty + \frac{39}{27}$$

جائز $\rightarrow T_2 = \left(-\frac{1}{9}\right) \cos^3 x - \frac{2}{3} \cos x - \cos x + T_\infty + \frac{39}{27}$

$$\frac{\delta^2 T_1}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T_1}{\delta y^2} = 0 \quad \text{فرض} = T(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$X''Y + Y''X = 0 \xrightarrow{\text{جدا سازی}} \frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \begin{cases} Y'' - \lambda^2 Y = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(x) = C_3 \sin(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x)$$

$$Y(y) = C_5 \sinh(\lambda y) + C_6 \cosh(\lambda y)$$

عمل شرط ہرری $\Rightarrow \frac{\delta T(\pi, y)}{\delta x} = 0 \Rightarrow X'(x) = \lambda C_3 \cos(\lambda x) - C_4 \lambda \sin(\lambda x)$

$$\Rightarrow C_3 \lambda \cos(\lambda \pi) - C_4 \lambda \sin(\lambda \pi) = 0 \Rightarrow C_3 \lambda \cos(\lambda \pi) = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$$

$$\cos(\lambda \pi) = 0 \Rightarrow \lambda \pi = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2n+1}{2}$$

$$Y'(y) = C_5 \lambda \cosh(\lambda y) + C_6 \lambda \sinh(\lambda y) \rightarrow Y(y) = C_6 \cosh(\lambda y)$$

$$\frac{\delta T(x, 0)}{\delta y} = 0 \Rightarrow C_5 = 0$$

$$T_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\lambda x) \cdot \cosh(\lambda y)$$



ادامہ باغ سوال 6 -

$$T = T_1 + T_2 \rightarrow T = \left(-\frac{1}{9}\right) \cos^3 x - \frac{2}{3} \cos x + T_\infty + \frac{39}{27} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda x) - \cosh(\lambda y) \quad \text{***}$$

اعمال شرطی $\Rightarrow T(0, y) = T_\infty$

استفادہ از خاصیت بقا $\cos x$: $T(0, y) = \left(-\frac{1}{9}\right) \cos^3(0) - \frac{2}{3} \cos(0) - \cos(0) +$
 $+ T_\infty + \frac{39}{27} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda x) - \cosh(\lambda y)$

$$\rightarrow T(0, y) = \left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) + (1) + (T_\infty) + \left(\frac{39}{27}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda(0)) \cosh(\lambda y)$$

$$\Rightarrow T(0, y) = 2.89 + T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh(\lambda y)$$

$$\rightarrow \int_0^\pi T_\infty \cos \lambda_n x dx = 2.89 + T_\infty A_n \int_0^\pi \cos(\lambda y) \cosh(\lambda y) dx$$

$$A_n = \frac{\int_0^\pi T_\infty \cos \lambda_n x dx - (2.89 + T_\infty)}{\int_0^\pi \cos(\lambda y) \cosh(\lambda y) dx}$$