بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه درس اقتصادسنجی ۲ :

Simultaneous Equation ( Instanteous Equation) :

* اقتصاد علم سیستمی است و پویا که در آن متغیرها هم بازخورد دارند و هم از متغیرهای دیگر بازخورد می گیرند.

با در نظر گرفتن اینکه اقتصاد پویا است تک معادله‌ای مانند x نمی تواند رفتار آنرا توضیح دهد. در اینجا x ، y را توضیح می‌دهد. ولی اینکه y نیز x را توضیح دهد بیان نشده است در رگرسیون k متغیره.

نکته ۱ : با تک معادلات نمی توان رفتار اقتصادی را توضیح داد.

$$C = \alpha + \beta y_t$$

$$y = C + G + I$$

$$I = \alpha_r \beta r + \beta_2 y$$

* وقتی این معادله نادیده گرفته شود $\Rightarrow$ Miss Information داریم.

در اقتصاد سنجی ا فرض می کردیم x داده شده و غیر تصادفی است اگر به صورت سیستمی در نظر گرفته شود مشاهده می شود که x نیز تصادفی است.

می خواهیم که ابزاری تهیه کنیم که بتوان چنین الگوها یا الگوهای پیچیده تر را از لحاظ تخمین ضرایب به طور همزمان و بررسی کرد که آیا ols بخوبی این کار را انجام می دهد یا نه. به این نتیجه می رسیم که ols در این تخمین مشکلاتی دارد و بخوبی تخمین نمی زند در اینصورت چه روش هایی باید استفاده کرد؟

اگر یک طبقه بندی منطقی از سیستم اقتصادی داشته باشیم می توان متغیرها را به ۳ گروه روبرو تفکیک کرد:

1- متغیرهای درون زا $\leftarrow$ endogenous Variable.

2- متغیرهای برون زا $\leftarrow$ exogenous Variable.

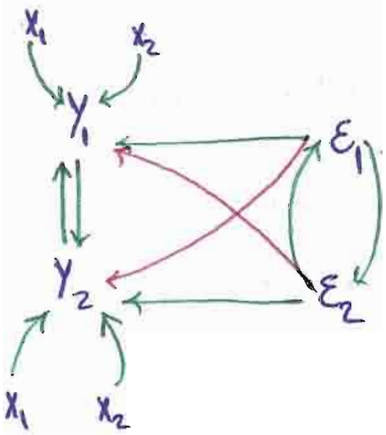
3- متغیرهای از قبل تعیین شده (وقفه‌ای) $\leftarrow$ Lag Variable.

نکته: تمامی تئوری های اقتصادی در تعادل بلندمدت نوشته می شوند ← steady state.

سیستم معادلات همزمان:

$$Y_{1t} = \alpha_1 Y_{2t} + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + \varepsilon_1 \rightarrow E(Y_2, \varepsilon_1) \neq 0$$

$$Y_{2t} = \alpha_4 Y_{1t} + \alpha_5 X_1 + \alpha_6 X_2 + \varepsilon_2 \rightarrow E(Y_1, \varepsilon_2) \neq 0$$




$Y_1$ و $Y_2$ ← متغیرهای درون زا.

$X_1$ و $X_2$ ← متغیرهای برون زا.

$Y_{1t-1}$ و $Y_{2t-1}$ ← متغیرهای وقفه‌ای (از قبل تعیین شده).

$\varepsilon_1$ و $\varepsilon_2$ ← متغیر تصادفی خطا.

نکته) $Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \dots + V_1 \Rightarrow cov(Y_2, V_1) \neq 0$

در اقتصاد بیشتر متغیرها درون زا می باشند و تعداد محدودی از آنها برون زا است. متغیرهای از قبل تعیین شده جزو متغیرهای برون زا است.

→ statistical Model:

فرض می کنیم متغیرهای از قبل تعیین شده وجود ندارد، در واقع جزو متغیرهای برون زا در نظر می گیریم.

$$Y_1 \gamma_{11} + Y_2 \gamma_{21} + Y_3 \gamma_{31} + \dots + Y_m \gamma_{m1} + X_1 B_{11} + X_2 B_{21} + \dots + X_K B_{K1} + \varepsilon_1 = 0$$

$$Y_1 \gamma_{12} + Y_2 \gamma_{22} + Y_3 \gamma_{32} + \dots + Y_m \gamma_{m2} + X_1 B_{12} + X_2 B_{22} + \dots + X_K B_{K2} + \varepsilon_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$Y_1 \gamma_{1m} + Y_2 \gamma_{2m} + Y_3 \gamma_{3m} + \dots + Y_m \gamma_{mm} + X_1 B_{1m} + X_2 B_{2m} + \dots + X_K B_{Km} + \varepsilon_m = 0$$

$Y_1$ تا $Y_m$ متغیرهای درون زا هستند و $X_1$ تا $X_K$ متغیرهای برون زا هستند.

* m تا معادله ساختار اقتصاد را بیان می کنند که به این معادلات، معادلات ساختاری گفته می شود.

↳ structural Model.

$$(y_1, \ldots, y_m)_{1\times m}\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ \gamma_{m1} & & \gamma_{mm}\end{bmatrix}_{m\times m} + (x_1, \ldots, x_k)_{1\times k}\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{k1} & & B_{km}\end{bmatrix}_{k\times m} + [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m]_{1\times m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y\Gamma + XB + E = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{structural Equations.}$$

نکته) به $\Gamma$ و $B$ پارامترهای ساختاری گویند و به $E$ جملات خطاهای ساختاری گویند یعنی structural Errors.

$y_1$ به عنوان متغیر درون زا یک دوره زمانی دارد که در معادله با $y$ نوشته شده است. درصورتی که دوره زمانی لحاظ شود به صورت زیر است:

$$y = [y_1 \cdots y_m] = \begin{bmatrix}y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_{T1} & y_{T2} & \cdots & y_{Tm}\end{bmatrix}_{T\times m}$$

$$X = [x_1 \cdots x_k] = \begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k}\\ x_{21} & x_{22} & & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{T1} & x_{T2} & & x_{Tk}\end{bmatrix}_{T\times k}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m] = \begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1m}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & & \varepsilon_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varepsilon_{T1} & \varepsilon_{T2} & & \varepsilon_{Tm}\end{bmatrix}_{T\times m}$$

* می‌خواهیم ماتریس واریانس-کوواریانس خطاها را بدست آوریم.

$$E(\varepsilon'.\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_m \end{pmatrix} . (\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_m) \quad , \quad \varepsilon\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{T1} \end{pmatrix} . (\varepsilon'_{11} \dots \varepsilon'_{T1}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & & 0 \\ & \sigma_{11} & \\ 0 & & \ddots \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_{11} I$$

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon'_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon'_1\varepsilon_2) \dots & E(\varepsilon'_1\varepsilon_m) \\ E(\varepsilon'_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon'_2\varepsilon_2) \dots & E(\varepsilon'_2\varepsilon_m) \\ \vdots & & \\ E(\varepsilon'_m\varepsilon_T) & E(\varepsilon'_m\varepsilon_2) \dots & E(\varepsilon'_m.\varepsilon_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I & \sigma_{12} I \dots & \sigma_{1m} I \\ \sigma_{21} I & \sigma_{22} I \dots & \sigma_{2m} I \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} I & \sigma_{m2} I \dots & \sigma_{mm} I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E(\varepsilon'\varepsilon) = \underset{m \times m}{\Sigma} \otimes \underset{T \times T}{I} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

* ماتریس واریانس-کوواریانس خطاهای ساختاری

هدف بدست آوردن پارامترهای ساختاری است که از این طریق ساختار را بدست می‌آوریم.

$$Y\Gamma + XB + E = 0 \Rightarrow Y + XB\Gamma^{-1} + E\Gamma^{-1} = 0 \Rightarrow Y = X\Pi + V$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = -E\Gamma^{-1} \\ \Pi = -B\Gamma^{-1} \end{cases}$$

→ Reduced form equations

← $\Pi$ ترکیبی از ضرایب ساختاری است و $V$ ترکیبی از خطاهای ساختاری.

$\Gamma$ حتما باید دارای معکوس باشد در غیر اینصورت یک معادله به صورت ترکیب خطی از معادلات دیگر بدست می‌آید.

اگر با متغیرهای Reduced form کار کنیم نمی‌توانیم ساختار را بدست آوریم و تحلیل کنیم چون پارامترها تفکیک شده نیست.

$$E(U'U) = E(\Gamma^{-1'} E' E \Gamma^{-1}) = \Gamma^{-1'}(\Sigma \otimes I)\Gamma^{-1} = \Sigma_{R} \text{ reduced form}$$

$$(y_1 \cdots y_m) = (x_1, \dots, x_K) \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{K1} & \cdots & \pi_{Km} \end{pmatrix} + (\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_m)$$

نکته ← تمامی متغیرهای درون زای مدل تابعی از تمامی متغیرهای برون زای مدل هستند.

فلسفه Reduced form چیست و برای چه کاری استخراج شده است؟ چرا مدل ساختاری را تبدیل به Reduced form کردیم؟ اساس کار ما از اقتصاد را نشان می‌دهد.

* برای روشن شدن این قضیه عنوان شناسایی را باز می‌کنیم ← Identification →

نکته: در single equation، ماتریس واریانس - کوواریانس، $E(VV')$ بود، در واقع ماتریس واریانس - کوواریانس بین مشاهدات است. در سیستم معادلات ماتریس واریانس - کوواریانس هم بین مشاهدات و هم بین معادلات است.

Identification: هم در اقتصاد سنجی سنتی و هم نوین اساس کار از اقتصاد را مشخص می‌کند، کمک می‌کند تا سیستم معادلات را در اقتصاد تخمین بزنیم.

در واقع در فرم ماتریسی $Y\Gamma + XB + E = 0$ به دنبال تخمین ضرایب ساختاری ($B$ و $\Gamma$) هستیم که با کمک identification این کار را انجام می‌دهیم. در واقع reduced form به این شناسایی و تخمین کمک می‌کند و با تخمین این ضرایب می‌توان ساختار اقتصاد را شناسایی کرد. R.F به تخمین پارامترهای ساختاری کمک می‌کند.

نکته: هم ضرایب و هم ماتریس واریانس - کوواریانس Reduced form ترکیب خطی از مدل ساختاری می‌باشد.

بحثی که در اینجا مطرح می‌شود این است که اگر تخمین‌های Reduced form را داشته باشیم با کمک آنها بتوان تخمین از ضرایب ساختاری بدست آورد.

* برای این منظور باید تخمین از reduced form داشته باشیم زیرا پارامترهای آن پارامترهای جامعه اند در دسترس نیستند.

بحثی که مطرح می‌شود این است که با چه روشی reduced form را تخمین بزنیم که $\hat{\pi}$ را داشته باشیم و از آن برای استخراج پارامترهای ساختاری استفاده کنیم.

برای استخراج پارامترهای ساختاری با Reduced parameters نیاز داریم.

* m معادله موجود در Reduced form فقط تابعی از متغیرهای توضیحی می‌باشند و تمامی معادلات ظاهر شده اند. متغیر وابسته $Y_1$ تا $Y_m$ می‌باشد و متغیرهای توضیحی $X_{11}$ تا $X_{K1}$ هستند. (متغیرهای برون زا). Vها نیز متعلق به Reduced Form هستند.

نکته) برای تخمین معادلات سیستمی از SURE استفاده می‌کنیم، چون Vها دو به دو در این سیستم correlate اند.

نکته) اگر در تمامی معادلات متغیرهای سمت راست یکی باشد SURE دقیقاً همان خواص OLS را دارد.

$$Y_1 = X_1 \pi_{11} + \cdots + X_K \pi_{K1} + \varepsilon_1$$
$$\vdots$$
$$Y_m = X_1 \pi_{1m} + \cdots + X_K \pi_{Km} + \varepsilon_m$$
$$\Rightarrow \hat{\pi} = (X'X)^{-1} X'Y$$

چون پارامترهای Reduced form را داریم می‌توان ماتریس واریانس، کوواریانس را محاسبه کرد.

نکته) بررسی کنیم آیا استفاده از Reduced form به تخمین و شناسایی پارامترهای ساختاری کمک می‌کند؟

در مدل ساختاری بررسی می‌کنیم چه پارامترهایی برای تخمین داریم ←

$$Y\Gamma + XB + E = 0$$

$$\Gamma_{m\times m} , B_{K\times m} , \Sigma_{m\times m} \rightsquigarrow S = m^2 + Km + \frac{m(m+1)}{2} - m$$

structral Model:

$$\begin{aligned}
&Y_1 \gamma_{11} + Y_2 \gamma_{21} + \cdots + Y_m \gamma_{m1} + \cdots + \varepsilon_1 = 0 \to Y_1 = \cdots \\
&Y_1 \gamma_{12} + Y_2 \gamma_{22} + \cdots + Y_m \gamma_{m2} + \cdots + \varepsilon_2 = 0 \to Y_2 = \cdots \Rightarrow \\
&\vdots \\
&Y_1 \gamma_{1m} + Y_2 \gamma_{2m} + \cdots + Y_m \gamma_{mm} + \cdots + \varepsilon_m = 0 \to Y_m = \cdots
\end{aligned}
\quad
\begin{pmatrix} \gamma_{11}=-1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22}=-1 & & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & & -1=\gamma_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m}$$

* در معادله اول، $Y_1$ را تابعی از بقیه عوامل می‌کنیم. در معادله دوم $Y_2$ را تابعی از بقیه عوامل می‌کنیم تا معادله m. به این عمل normalization می‌گویند. در هر یک از معادلات پارامتر را Normalize می‌کنیم.

در Reduced form چه پارامترهایی را تخمین می‌زنیم؟ $Y = X\pi + V \rightsquigarrow R = Km + \frac{m(m+1)}{2}$

$\Rightarrow S - R = m(m-1) \longrightarrow$ تفاوت پارامترهای ساختاری و پارامترهای R.F.

نکته) با Reduced form نمی‌توان تمام پارامترهای مدل ساختاری را بدست آورد و ساختار را شناسایی کرد.

نکته) برای شناسایی مدل آماری ← statistical Model ← تنها با استفاده از پارامترهای حاصل از تخمین Reduced form نمی‌توان عمل کرد. بلکه باید از تئوری اقتصادی استفاده کرد و تعدادی از پارامترها را که R.F تخمین نمی‌زند را با استفاده از تئوری اقتصاد تعیین کرد.

نکته) $m(m-1)$ پارامتر را که R.F تخمین نمی‌زند را با استفاده از تئوری اقتصاد بدست می‌آوریم.

نکته) از دو راه می توان اطلاعات اضافی بدست آورد؟ ۱- تئوری اقتصادی

۲- خود پارامترهای مدل تقلیل یافته.

مثال) اقتصادی را در نظر بگیرید که از متغیرهای زیر تشکیل شده است. $c_t, y_t, I_t, r_t, c_{t-1}$

که در این مدل، $c_t, y_t, I_t$ متغیرهای درون زا هستند و $r_t$ و $c_{t-1}$ متغیرهای برون زا می باشند.

$$y = f(c_t, r_t, I_t, c_{t-1})$$

$$c = f(y_t, I_t, r_t, c_{t-1}) \Rightarrow c_t = \overset{0}{B_1} I_t + B_2 y_t + \overset{0}{B_3} r_t + B_4 c_{t-1}$$

$$I_t = f(y_t, c_t, r_t, c_{t-1}) \qquad I_t = \overset{0}{B'_1} y_t + \overset{0}{B'_2} c_t + B'_3 r_t + \overset{0}{B'_4} c_{t-1}$$

c تابعی از ثروت و درآمد است (طبق تئوری اقتصادی) و بقیه عوامل ضریب صفر دارند. $B_1 = 0$, $B_3 = 0$

I تابعی از نرخ بهره است، طبق تئوری که اصل شتاب را در نظر می گیرد. $B'_1 = 0$, $B'_2 = 0$, $B'_4 = 0$

جایگاه Identification، ارتباط میان statistical Model و Economic Model چیست؟

ارتباط مدل ساده ریاضی و تئوری اقتصادی است که یک مدل اقتصادی را حاصل می کند. تمامی مدل های اقتصادی که می خواهیم یک مدل آماری است که براساس تئوری ها از یک معادلات همزمان براساس Identification بدست می آید.

تفاوت بین statistical Model با یک تئوری اقتصادی این است وجود محدودیت های معنی که از تئوری وارد می شوند و آن را تبدیل به Economic Model یا Theorical Model می کند.

* می خواهیم شروطی را بدست آوریم که بتوان یک مدل را identified کرد و تشخیص داد چه موقع سیستم j. identified

یا over. identified یا under identified یا un identified است.

برای این منظور اولین معادله این سیستم معادلات را در نظر می گیریم، بدون اینکه کلیت را از دست بدهیم این روند

را تا m معادله می توان ادامه داد.

$$Y\Gamma + XB + E = 0$$

* identification به صورت معادله به معادله صورت می گیرد.

← پارامترهای معادله اول

$$(y_1 \cdots y_m)\begin{pmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \vdots\\ \gamma_{m1}\end{pmatrix} + (x_1 \cdots x_k)\begin{pmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{k1}\end{pmatrix} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = 0$$

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} \Rightarrow \Pi\Gamma = -B \Rightarrow \Pi\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \vdots\\ \gamma_{m1}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{k1}\end{bmatrix}$$

محدودیت های صفر را اعمال می کنیم. با فرض اینکه تا $m_1$ پارامتر و بقیه صفر است و تا $K_1$ پارامتر و بقیه صفر است.

$$\Rightarrow \Pi\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \vdots\\ \gamma_{m_1 1}\\ \hline 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{K_1 1}\\ \hline 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m_1 & m-m_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} K_1 \\ K-K_1 \end{array} & \begin{bmatrix}\Pi_1 & \Pi_3\\ \Pi_2 & \Pi_4\end{bmatrix}_{K\times m} \end{array} \cdot \begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \vdots\\ \gamma_{m_1}\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{m\times 1} = -\begin{bmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{K_1 1}\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{K\times 1}$$

$$\Rightarrow \Pi_1\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \vdots\\ \gamma_{m_1 1}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\\ \vdots\\ \beta_{K_1 1}\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Pi_2\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \vdots\\ \gamma_{m_1 1}\end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \gamma_1 = -B_1 & \rightarrow \text{با جایگذاری } \gamma_1 \text{ ، } B_1 \text{ بدست می‌آید.} \\ \pi_2 \gamma_1 = 0 & \rightarrow \text{سیستم همگن نیست } \Rightarrow \gamma_1 \text{ بدست می‌آید.} \end{cases}$$

* $\hat{\pi}$ را از Reduced form بدست می‌آوریم.

نکته) اگر سیستم $\pi_2 \gamma_1 = 0$ همگن باشد، دارای جواب صفر است که در نتیجه این جواب به درد نمی‌خورد.

اما در اصل این معادله همگن نیست. $\pi_2 \gamma_1 = 0$ به این دلیل همگن نیست که در هنگام normalization، $\gamma_{11}$ given است و سیستم قابل حل است و $\gamma$ ها بدست می‌آید و $B$ ها نیز بدست می‌آید.

* سیستم معادلات اول وابسته به سیستم معادلات دومی است و حل سیستم معادلات دومی وابسته به $\pi_2$ می‌باشد.

باید شروطی اعمال کنیم که بتوان شروطی بدست آورد که در مورد شناسایی بتوان قضاوت کرد.

← $K-K_1$ معادله داریم و $m_1$ پارامتر داریم که چون یکی از پارامترها نرمالایز شده است. $(m_1-1)$. $\pi_{2\,(K-K_1)\cdot m_1}$

شرط اینکه سیستم معادلات جواب داشته باشد این است که: $\rho(\pi_2) = m_1 - 1$ conditional Rank

شرط لازم داشتن جواب برای سیستم معادلات، باید تعداد پارامترها کوچکتر یا مساوی تعداد معادلات باشد $K-K_1 \geq m_1 - 1$

در سیستم معادلات همزمان، باید تک‌تک معادلات را بررسی کرد حتی اگر یکی از معادلات را نتوان Identified کرد

سیستم همزمان قابل شناسایی نیست. باید Identified و یا over-identified باشد.

نکته) در اقتصاد عموماً زمانی سیستم قابل تست است که over identified باشد.

اگر شرط $K-K_1 \geq m_1-1$ برقرار نباشد (شرط لازم) نمی‌توان سیستم را حل کرد و under identified است.

← شرط کافی → ← شرط لازم →

$$
\begin{cases}
\rho(\Pi_2) = m_1-1 \,, & K-K_1 > m_1-1 \Rightarrow \text{over identified} \\
\rho(\Pi_2) = m_1-1 \,, & K-K_1 = m_1-1 \Rightarrow \text{just identified} \\
\rho(\Pi_2) = m_1-1 \,, & K-K_1 < m_1-1 \Rightarrow \text{under identified} \\
\rho(\Pi_2) \not= m_1-1 \,, & K-K_1 \geq m_1-1 \Rightarrow \text{un identified}
\end{cases}
$$

رویکرد دیگر شناسایی:

دنبال رویکرد دیگری هستیم که بتوان به راحتی مساله را آزمون کرد. می‌خواهیم شرط رنک کلی استخراج کنیم که براساس آن این کار را انجام دهیم.

ابتدا ضرایب ساختاری را در نظر می‌گیریم.

$$
\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & & \gamma_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & & \gamma_{mm} \end{bmatrix}
\qquad
B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1K} \\ B_{21} & & B_{2K} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{K1} & & B_{KK} \end{bmatrix}
$$

برای رسیدن به این شرط و شناسایی سیستم ماتریس ماتر زیر در نظر می‌گیریم.

$$A = \left( \frac{\Gamma}{B} \right)$$

ماتریس ماتر $A$ در نظر می‌گیریم که از ادغام ماتریس ($\Gamma$ و $B$) بدست می‌آید.

چون محدودیت‌های معادله هستند انتظار می‌رود فول رنک باشد. حتماً باید براساس $m$ فول رنک ستونی باشد و نتوان ترکیب خطی از هم نوشت. $A$ باید حتماً فول رنک ستونی باشد. اگر نباشد $\Gamma$ معکوس‌پذیر نیست.

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mm} \\ \hline \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{km} \end{bmatrix}_{(m+k)\times m} = (a_1, \ldots, a_m)$$

برای استخراج شرط رتبه ماتریسی مانند $\varphi$ را تشکیل می‌دهیم، $\varphi$ ماتریسی با ستون‌های $m+k$ و ردیف‌های اختیاری به تعداد محدودیت‌هایی که می‌تواند اختیار کند. ماتریس تعداد ردیف‌های $R$.

$\rho(\varphi A) = m-1$ → شرط لازم و کافی

↳ تعداد متغیرهای درون‌زای کل مدل

در رویکرد اول شرط لازم به تعداد $k$ها بستگی داشت. اما در این رویکرد همه چیز به ماتریس محدودیت بستگی دارد.

$m_1$: براساس معادله اول و محدودیت‌های $k$، محدودیت‌هایی که در سیستم براساس $k$ اعمال شده است، تعداد $m_1$ را برای معادله مشخص می‌کند.

$m$: تمام ضرایب بدون محدودیت است ولی محدودیت‌های سیستم معادلات براساس ماتریس $\varphi$ مشخص می‌شود.

نکته) در حالتی که از شرط $\rho(\Pi_2)$ استفاده می‌کردیم ابتدا از مدل ساختاری R.F را بدست می‌آوردیم و سپس $\rho(\Pi_2)$ را بدست می‌آوردیم، اما در اینجا حالت نیازی به R.F نیست بلکه با استفاده از ماتریس محدودیت $\varphi$ حل می‌شود.

شرط لازم: $\rho(\varphi) \geq m-1$ order condition

در رویکرد اول $m_1$ تعداد متغیرهای درون‌زای معادله اول است، در رویکرد دوم $m$ تعداد متغیرهای درون‌زای کل سیستم است.

Priori information: $\underset{r\times m+k}{\varphi} \cdot a_1 = 0$

Posterior information: $\Pi = -B\Gamma^{-1} \Rightarrow \Pi\Gamma + B = 0 \Rightarrow \underbrace{[\Pi \;\vdots\; I]}_{W}\underbrace{\begin{bmatrix}\Gamma \\ B\end{bmatrix}}_{A} = 0 \Rightarrow WA = 0$

$Wa_1 = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\varphi \\ W\end{pmatrix} \cdot a_1 = 0 \Rightarrow \rho\begin{pmatrix}\varphi \\ W\end{pmatrix} = m+k-1$ ✓ $\Rightarrow \rho(\varphi A) = \rho(\Pi_2) = m_1 - 1$

اگر $\rho(\phi)=m-1$ و $\rho(\phi A)=m-1$ سیستم just. identified است.

اگر $\rho(\phi)>m-1$ و $\rho(\phi A)=m-1$ سیستم over. identified است.

اگر $\rho(\phi)<m-1$ و شرط رتبه هم نخواهد داشت، سیستم under. identified است.

اگر $\rho(\phi)>m-1$ و $\rho(\phi A)\neq m-1$ سیستم un identified است.

مثال)

$$
\begin{cases}
y_1\gamma_{11}+y_2\gamma_{21}+y_3\overset{\circ}{\gamma}_{31}+y_4\gamma_{41}+x_1B_{11}+\cdots+x_4B_{41}+\varepsilon_1=0\\
y_1\gamma_{12}+y_2\gamma_{22}+\cdots+x_1B_{12}+x_2B_{22}+\cdots+\varepsilon_2=0\\
y_1\gamma_{13}+y_2\gamma_{23}+y_3\gamma_{33}+y_4\gamma_{43}+x_1B_{13}+\cdots+x_4B_{43}+\varepsilon_3=0\\
y_4\gamma_{44}+x_1B_{14}+x_2B_{24}+x_3B_{34}+x_4B_{44}+\varepsilon_4=0
\end{cases}
$$

$$
A=\begin{bmatrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0\\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0\\
0 & 0 & \gamma_{33} & 0\\
\gamma_{41} & 0 & \gamma_{43} & \gamma_{44}\\
B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14}\\
0 & B_{22} & B & B_{24}\\
0 & 0 & 0 & B_{34}\\
B_{41} & 0 & B_{43} & B_{44}
\end{bmatrix}_{8\times 4}
$$

نکته) لا حتماً باید به تعداد معادلات باشد وگرنه ترکیب خطی از هم می‌باشند ولی در مورد B ها چنین محدودیتی وجود ندارد.

هر محدودیت یک ردیف به خودش اختصاص می‌دهد که ممکن است این محدودیت‌های صفر براساس تئوری اعمال شده باشد که در ماتریس $\phi$ وارد می‌کنیم.

معادله اول:
$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 8}$$

$\rho(\phi) = 3 = m-1 \rightarrow$ شرط لازم برقرار

$$\phi A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{33} & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 & \beta_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{34} \end{bmatrix}_{3\times 4} \rightarrow \rho(\phi A) = 3 = m-1 = 3$$ شرط رتبه هم برقرار

این سیستم یک سیستم just identified است.

معادله دوم:
$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 8}$$

$\rho(\phi) = 4 > m-1 = 3$ over identified

$$\phi A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & \gamma_{34} & \gamma_{44} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{34} \\ \beta_{41} & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix}_{4\times 4} \rightarrow \rho(\phi A) = 3 = m-1 = 3$$

معادله سوم:
$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 8} \rightarrow \rho(\phi) = 2 < m-1 = 3$$

این سیستم under identified است.

معادله چهارم: $\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 8} \rightarrow \rho(\phi) = 3 = m-1$

$$\phi A = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(\phi A) = 3 = m-1$$

* این سیستم just-identified است.

$\Pi \Gamma = -B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{12} & \hat{\pi}_{13} & \hat{\pi}_{14} \\ \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} & \hat{\pi}_{23} & \hat{\pi}_{24} \\ \hat{\pi}_{31} & \hat{\pi}_{32} & \hat{\pi}_{33} & \hat{\pi}_{34} \\ \hat{\pi}_{41} & \hat{\pi}_{42} & \hat{\pi}_{43} & \hat{\pi}_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix} = -B$$

پارامترهای $B$ و $\gamma$ را نداریم ولی $\hat{\pi}$ ضرایب R.F هستند که از این روش تخمین زده می‌شوند. $y = X\Pi + V$

$$\hat{\pi} = (X'X)^{-1}X'y$$

تمام سطرهای ماتریس $\Pi$ را در ستون اول ماتریس $\Gamma$ ضرب می‌کنیم داریم:

معادله اول:
$$\begin{cases} \hat{\pi}_{11}\gamma_{11} + \hat{\pi}_{12}\gamma_{21} + \hat{\pi}_{14}\gamma_{41} = -B_{11} \\ \hat{\pi}_{21}\gamma_{11} + \hat{\pi}_{22}\gamma_{21} + \hat{\pi}_{24}\gamma_{41} = 0 \\ \hat{\pi}_{31}\gamma_{11} + \hat{\pi}_{32}\gamma_{21} + \hat{\pi}_{34}\gamma_{41} = 0 \\ \hat{\pi}_{41}\gamma_{11} + \hat{\pi}_{42}\gamma_{21} + \hat{\pi}_{44}\gamma_{41} = -B_{41} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \hat{\pi}_{22}\gamma_{21} + \hat{\pi}_{24}\gamma_{41} &= \hat{\pi}_{21} \\ \hat{\pi}_{32}\gamma_{21} + \hat{\pi}_{34}\gamma_{41} &= \hat{\pi}_{31} \end{aligned}$$

از اینجا $\gamma_{21}$ و $\gamma_{41}$ بدست می‌آید.

با جایگذاری $\gamma_{21}$ و $\gamma_{41}$ در معادله‌های 1 و 4، $B_{41}$ و $B_{11}$ بدست می‌آید.

سیستم عطفی : Recursive System :

در Vecto Auto regressive ، (VAR) بحث سیستم عطفی بسیار نقش کلیدی و مهمی در مورد identification دارد.

$$Y\Gamma + XB + E = 0 \quad \rightarrow \quad \text{structral Model}$$

$$Y = X\Pi + U \quad \rightarrow \quad \text{Reduced form}$$

در سیستم معادلات همزمان متغیرهای درون زا با هم Corrolate بودند.

نوعی از معادلات همزمان را می‌توان به صورت سیستم عطفی نوشت . (معادلات عطفی).

$$Y_1\gamma_{11} + X_1B_1 + \dots + X_KB_{K1} + E_1 = 0 \rightarrow$$ اولی فقط تابعی از متغیرهای برون زا

$$Y_1\gamma_{12} + Y_2\gamma_{22} + X_1B_{12} + \dots + X_KB_{K2} + E_2 = 0 \rightarrow$$ دومی فقط تابعی از $Y_1$ و متغیرهای برون زا

$$Y_1\gamma_{13} + Y_2\gamma_{23} + Y_3\gamma_{33} + X_1B_{13} + \dots + X_KB_{K3} + E_3 = 0 \rightarrow$$ سومی فقط تابعی از $Y_1$ و $Y_2$ و متغیرهای برون زا

$$\vdots$$

$$Y_1\gamma_{1m} + \dots + Y_m\gamma_{mm} + X_1B_{1m} + \dots + X_KB_{Km} + E_m = 0$$

همیشه در سیستم هایی که ماتریس ضرایب پایین مثلثی یا بالا مثلثی است، سیستم عطفی است.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1m} \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2m} \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & & \gamma_{3m} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix}$$

$$E(e'e) = \Sigma \otimes I \quad \rightarrow \quad \Sigma_{m\times m} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{m1} & & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

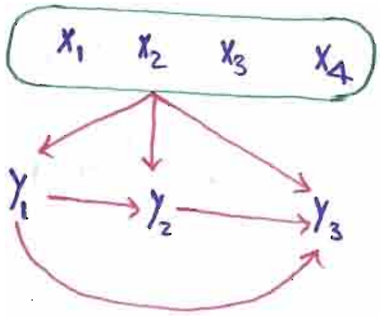
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & & 0 \\ & \sigma_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

نکته۲) وقتی سیستم عطفی می‌گردد ماتریس $\Sigma$ تبدیل به یک ماتریس قطری می‌گردد.

✓ چون در این سیستم همبستگی وجود دارد.

Example →

یک سیستم عطفی در قالب ۳ متغیر درون‌زا:




نکته ← تعداد پارامترهای مدل ساختاری و فرم نهایی:

ماتریس واریانس کوواریانس ←

$$R = \frac{m(m+1)}{2} + mK$$

$$\Rightarrow R = S$$

$$S = \underbrace{m}_{\text{واریانس کوواریانس}} + \underbrace{\frac{m(m+1)}{2}}_{\Pi} + \underbrace{mk}_{B} - \underbrace{m}_{\text{تعداد پارامترهایی که قبلاً برآورد شده‌اند}}$$

نکته سوم: سیستم معادلات عطفی همواره just - identified است. (دقیقاً قابل شناسایی است.)

تخمین معادلات همزمان:

$Y\Gamma + XB + E = 0 \rightarrow$ structral Model : Estimation

$Y = X\Pi + V \rightarrow$ Reduced form

برای تخمین سیستم معادلات همزمان ابتدا فرم ساختاری سیستم تغییرات ایجاد می‌کنیم، برای اینکه به راحتی بتوان تخمین زد. بدین منظور ماتریس Y را افراز می‌کنیم.

$$\underset{T\times m}{Y} = (\underset{T\times 1}{y_1} \vdots \underset{T\times(m_1-1)}{Y_1} \vdots \underset{T\times(m-m_1)}{Y_2})_{T\times(m)}$$

$y_1 \rightarrow$ متغیر وابسته

$Y_1 \rightarrow$ متغیرهای درون‌زایی که در معادله هستند

$Y_2 \rightarrow$ متغیرهای درون‌زایی که در معادله نیستند

Example $\rightarrow y_1 = \gamma_{21} y_2 + \gamma_{41} y_4 + x_1 B_{11} + x_4 B_{41} + \varepsilon$

$y_1 \leftarrow$ نرمالایز شده معادله اول.

$Y_1 \leftarrow$ تحت عنوان ماتریس، تعداد متغیرهای درون زا در معادله اول بجز $y_1$ را نشان می‌دهد ← در مثال بالا $y_2$ و $y_4$.

$Y_2 \leftarrow$ تعداد متغیرهای درون زای کل سیستم منهای متغیرهای درون زای معادله اول ← $(y_3)$

← X را هم به صورت روبرو افراز می‌کنیم:

$$\underset{T\times K}{X} = (\underset{T\times K_1}{X_1} \vdots \underset{T\times(K-K_1)}{X_2})$$

$X_1 \leftarrow$ تعداد متغیرهایی که در معادله اول هستند. ($\underset{T\times 2}{x_1 \text{ و } x_4}$ در مثال بالا).

$X_2 \leftarrow$ تعداد متغیرهای برون زایی که در معادله اول نیستند. ($\underset{T\times 2}{x_2 \text{ و } x_3}$ در مثال بالا).

معادله اول یک سیستم معادلات همزمان ←  $y_1 = Y_1 \gamma_1 + X_1 B_1 + e_1$

$$\Rightarrow (y_1 \vdots Y_1 \vdots Y_2) \begin{pmatrix} -1 & \vdots & \\ \gamma_1 & \vdots & \\ 0 & \vdots & \end{pmatrix} + (X_1 \vdots X_2) \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_1 = 0$$

$$\Rightarrow -y_1 + Y_1 \gamma_1 + X_1 B_1 + e_1 = 0 \Rightarrow \boxed{y_1 = Y_1 \gamma_1 + X_1 B_1 + e_1}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + e_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_1 = Z_1 \delta_1 + e_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{1\,(ols)} = (Z_1' Z_1)^{-1} Z_1' y_1}$$

* اولین معادله این سیستم معادلات را به روش ols تخمین زدیم. می‌توان از این روش تمامی معادلات سیستم معادلات همزمان را به روش ols تخمین زد و پارامترهای ساختاری را با روش ols بدست آورد. البته اگر سیستم قابل شناسایی باشد.

بحث این است که تخمین‌های بدست آمده از ols تا چه حد قابل استفاده و قابل اعتماد است؟ بدین منظور به بررسی خواص تخمین ols می‌پردازیم.

۱- بررسی نااریب بودن $\hat{\delta}_{ols}$ (طبق نمونه‌های کوچک):

$$\hat{\delta}_{ols} = \begin{pmatrix} Y_1'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1' \\ X_1' \end{pmatrix} y_1$$

$$\rightarrow \hat{\delta}_{ols} = (Z_1'Z_1)^{-1} Z_1' y_1 = (Z_1'Z_1)^{-1} Z_1' (Z_1 \delta_1 + e_1) \Rightarrow \hat{\delta}_{ols} = \delta_1 + (Z_1'Z_1)^{-1} Z_1' e_1$$

$$E(\hat{\delta}_{ols}) = \delta_1 + E\left\{(Z_1'Z_1)^{-1} Z_1' e_1\right\} = \delta_1 + E\left\{(Z_1'Z_1)^{-1} \begin{bmatrix} Y_1' e_1 \\ X_1' e_1 \end{bmatrix}\right\}$$

* چون $Y_1$ متغیر درون‌زا و تصادفی است در نتیجه Expectation از آن نمی‌گذرد، از طرفی چون $y_1$ با $e_1$ correlate است مجدداً Expectation از آن نمی‌گذرد ← نااریب نیست.

نکته ← هر Estimator وقتی متغیر توضیح دهنده آن (مستقل) درون‌زا باشد، اگر این متغیر با جمله اخلال correlate باشد، حتماً این Estimator اریب است. اگر متغیر توضیحی با جمله اخلال قطعاً وابسته نباشد می‌تواند نااریب باشد.

$$Y = XB + U$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(XB+U) = B + (X'X)^{-1}X'U$$

$\rightarrow E(\hat{B}) = B$ if $X$ given

$\rightarrow E(\hat{B}) = B$ if $X$ stochastic & uncorrelate.

$\rightarrow E(X'U) \neq 0$ if $X$ stochastic & correlate.

نکته ← اکثر تخمین زننده‌ها زمانی که متغیر توضیح دهنده تصادفی است آن و جمله خطا وابستگی وجود دارد، اریب است.

* وقتی در مورد اریب یا نااریب بودن و یا کارایی صحبت می‌کنیم، نمونه‌های کوچک مد نظر می‌باشد.

استفاده از نمونه‌های کوچک برای یک تخمین زننده نمی‌تواند روش مناسبی برای ارزیابی خواص تخمین زننده باشد، مگر آنکه بتوانیم خواص نمونه‌های بزرگ تخمین زننده‌ها را بررسی می‌کنیم.

از این به بعد دنبال مفهوم سازگاری consistency هستیم چون همواره تمامی تخمین زننده‌ها اریب هستند.

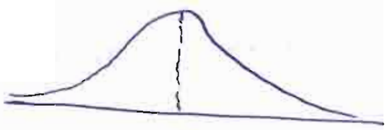
بررسی سازگاری مربوط به نمونه‌های بزرگ است.

دو رویکرد برای همگرایی داریم: ۱- همگرایی در احتمال ← Converge in Probability.

2- همگرایی در توزیع ← Converge in distribution.

## همگرایی در احتمال :

فرض می کنیم که یک توزیع داریم و شروع به افزایش مشاهدات می کنیم. در این حالت واریانس تخمین زننده به سمت صفر میل می کند



$\theta$

که سبب می شود توزیع در نقطه‌ای مثل $\theta$ تباهیده شود.

در این شرایط انتظار داریم، اریب از بین رود و به سمت صفر میل کند.

$$\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\theta}) \to 0$$

در واقع وقتی $T\to\infty$ ⇐ $Var(\hat{\theta})\to 0$ گفته می شود سیستم سازگار است. که تعریف دقیقی از consistency است.

نکته) سازگاری یعنی وقتی $T\to\infty$ هم واریانس و هم اریب به صفر میل می کند. ← Converge in mean square

مفهوم سازگاری: اگر $\hat{\theta}$ یک تخمین زننده $\theta$ باشد، زمانی $\hat{\theta}$ یک برآوردگر سازگار از $\theta$ است که همگرایی براساس

مجذور خطاها رخ داده باشد ←

$$\lim_{T\to\infty} |\hat{\theta}-\theta|^2 \to 0$$

$$\lim \left[ (\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta) \right]^2 = \lim_{T\to\infty} (\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + \lim_{T\to\infty} (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$$= \lim Var(\hat{\theta}) + (biase\ \hat{\theta})^2 = \lim_{T\to\infty} MSE \to 0$$

* همگرایی در احتمال یعنی هم اریب و هم واریانس از بین می رود. همگرایی در احتمال مفهوم دقیقا سازگاری را بیان می کند.

نکته) همگرایی در MSE مفهوم سازگاری است.

$$\lim_{T\to\infty} MSE \Leftrightarrow p\lim \hat{\theta} = \theta$$

در دنیای واقعی به خواص نمونه‌های کوچک دسترسی نداریم و در نتیجه باید از خواص نمونه‌های بزرگ استفاده کنیم و صحبتی از اریب نمی‌کنیم بلکه در مورد سازگاری آن بحث می‌کنیم و بررسی می‌کنیم خواص نمونه‌های بزرگ را دارد یا نه. اگر خواص نمونه‌های بزرگ را داشته باشد، تخمین زننده قدرتمندی است که در موارد مختلف متفاوت است.

در اینجا نمی‌توان در مورد توزیع و استنباط آماری حاصل از آن صحبت کرد چون در نقطه $\theta$ توزیع تباهیده شده است، توزیع نداریم. لذا باید درباره مفهوم همگرایی در توزیع استفاده کرد.

قضیه حد مرکزی: اگر جامعه‌ای را در نظر بگیریم که پارامتر آن $\theta$ است و $\hat{\theta}$ تخمین زننده‌ای از $\theta$ باشد، این قضیه بیان می‌کند که توزیع تخمین زننده $\hat{\theta}$ زمانی که تعداد مشاهدات به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر توزیع نرمال می‌شود.

* نکته) زمانی که همگرایی در احتمال صورت می‌گیرد سعی می‌کنیم قبل از فروپاشی توزیع نگاه کنیم که پارامترها چقدر است که برای استنباط از آنها استفاده کرد و عملاً به صورت زیر نشان داده می‌شود.

سرعت تعدیل همگرایی به توزیع $\leftarrow \sqrt{T}\,(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2)$

✓ همگرایی در توزیع

$\downarrow$

به صورت حدی توزیع به سمت نرمال می‌رود.

$\text{plim}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{P} 0 \quad \lim MSE(\hat{\theta}) \to 0 \quad \leftarrow$ ✓ همگرایی در احتمال

نکته) بررسی کردیم که کدام تخمین زننده‌ای اریب است و هر تخمین زننده دیگری هم در سیستم معادلات همزمان به کار ببریم اریب است. به همین دلیل دنبال خواص نمونه‌های بزرگ هستیم.

* آیا ols خواص نمونه‌های بزرگ را دارد؟ اگر ols، consistant باشد از آن در تخمین معادلات همزمان می‌توان استفاده کرد و اگر نه از تخمین زننده‌های دیگر استفاده می‌کنیم که خواص سازگاری را به ما بدهد. بررسی می‌کنیم که اگر I.d و یا O.I باشد از چه روشی استفاده کنیم و چه تخمین زننده‌ای را به کار ببریم.

* می‌خواهیم شرط سازگاری را برای ols بررسی کنیم: $\text{plim}(\hat{\delta}) = \delta$ ؟ آیا ols برآوردگری سازگار است؟

هر وقت با سیستم معادلات همزمان مواجه هستیم ols ناریب نیست به همین جهت سراغ سازگاری می‌رویم.

$$\hat{\delta}_{1\,ols} = \delta_1 + (Z_1'Z_1)^{-1} Z_1' e_1 \Rightarrow \hat{\delta}_{1\,ols} = \delta_1 + \left(\frac{Z_1'Z_1}{T}\right)^{-1} \cdot \frac{Z_1'e_1}{T}$$

$$\text{plim}(\hat{\delta}_1) = \delta_1 + \text{plim}\left(\frac{Z_1'Z_1}{T}\right)^{-1} \cdot \text{plim}\left(\frac{Z_1'e_1}{T}\right)$$

باید بررسی کنیم $\text{plim}(Z_1'Z_1)$ در طول زمان چگونه است؟

$$Y = XB + V$$

$$\hat{B} = B + \frac{(X'X)^{-1}}{(T)^{-1}} \cdot \frac{X'V}{T} \Rightarrow \text{plim}\,\hat{B} = B + \text{plim}\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \cdot \text{plim}\left(\frac{X'V}{T}\right)$$

اگر ۲ متغیره باشد $\Rightarrow \frac{X'X}{T} = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} T & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sum x_i}{T} \\ \frac{\sum x_i}{T} & \frac{\sum x_i^2}{T} \end{bmatrix}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{X'X}{T} = \lim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sum x_i}{T} \\ \frac{\sum x_i}{T} & \frac{\sum x_i^2}{T} \end{bmatrix} \rightarrow Q$$

* چون هم صورت زیاد می‌شود و هم مخرج و با توجه به سرعت همگرایی به یک عدد میل می‌کند ماتریس $Q$ نامنفرد است.

Example $\rightarrow$ $Y_t = \alpha + \beta t + V_t \rightarrow \lim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sum t_i}{T} \\ \frac{\sum t_i}{T} & \frac{\sum t_i^2}{T} \end{bmatrix} = \lim \begin{bmatrix} 1 & \frac{T+1}{2} \\ \frac{T+1}{2} & \frac{(T+1)(2T+1)}{6} \end{bmatrix}$

$$= \lim \begin{bmatrix} 1 & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ به خاطر non-stationary بودن است در واقع سرعت همگرایی در این حالت متفاوت با حالتی است که متغیرها stationary هستند، سرعت همگرایی $\frac{3\sqrt{T}}{2}$ است.

* چون Xها با Vها correlate نمی‌باشند پس $\text{plim}\left(\frac{X'V}{T}\right)=0$ است.

$$\Rightarrow \text{plim}(\hat{B}) = B + Q^{-1}\,\text{plim}\left(\frac{X'V}{T}\right)$$

سازگاری در شرایط K متغیره برای OLS برقرار شد و نااریب نیز هست.

$$E(X'V)=0$$

قضیه: اگر $\hat{\theta}$ برآوردگری از $\theta$ باشد و نااریب باشد، مجانباً نیز نااریب است.

$$E(\hat{\theta})=\theta \longrightarrow \lim E(\hat{\theta})=\theta$$

اگر $\hat{\theta}$ اریب باشد در نمونه‌های کوچک می‌تواند در طول زمان با افزایش نمونه‌ها به یک برآوردگر نااریب تبدیل شود و اریب از بین برود.

قضایای مربوط به plim (همگرایی در احتمال) سه:

1. $\text{plim}(\hat{\theta}\cdot\hat{\gamma}) = \text{plim}(\hat{\theta})\cdot\text{plim}(\hat{\gamma})$

2. $\text{plim}\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\gamma}}\right) = \frac{\text{plim}\,\hat{\theta}}{\text{plim}\,\hat{\gamma}}$

3. $\text{plim}(\hat{\theta}\pm\hat{\gamma}) = \text{plim}(\hat{\gamma}) \pm \text{plim}(\hat{\theta})$

4. اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردگر از $\theta$ باشد و اگر داشته باشیم $\text{plim}(\hat{\theta})=\theta$ یک برآوردگر سازگار از $\theta$ باشد و اگر تابع پیوسته مشتق‌پذیر g را در نظر بگیریم در آن صورت:

$$\text{plim}(g(\hat{\theta})) = g(\theta)$$ ← قضیه اسلاتسکی

به عبارت دیگر سازگاری منتقل می‌شود.

$$\text{plim}(\hat{\delta}_1) = \delta_1 + \text{plim}\left(\frac{Z'Z}{T}\right)^{-1}\cdot\text{plim}\left(\frac{Z'e_1}{T}\right) = \delta_1 + Q^{-1}\cdot\text{plim}\left(\frac{Z'e_1}{T}\right)$$

$$\text{plim}\left(\frac{Z'e_1}{T}\right) = \text{plim}\,\frac{1}{T}\begin{bmatrix} Y_1' \\ X_1' \end{bmatrix} e_1 = \text{plim}\begin{bmatrix} \frac{Y_1'e_1}{T} \\ \frac{X_1'e_1}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{plim}\,\frac{Y_1'e_1}{T} \\ \text{plim}\,\frac{X_1'e_1}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow plim(\hat{\delta}_{1OLS}) = \delta_1 + \bar{Q}^{-1}\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

* نکته: کماله حتی برای نمونه های بزرگ در سیستم معادلات همزمان نیز سازگار نیست و برآوردگر مناسب برای سیستم معادلات همزمان نمی باشد.

* چه تخمین زننده های دیگری هستند که می توانند برآوردهای سازگاری را برهند؟ خواص آنها هم از لحاظ ساختاری و هم از لحاظ کارایی چه می تواند باشد؟ اولین برآوردگری که بررسی می کنیم حداقل مربعات غیرمستقیم ← کماله ← است

* حداقل مربعات غیرمستقیم (کماله) :

← یکی از محدودیت های اساسی تخمین زننده کماله این است که سیستم معادلات همزمان باید just - identified باشد تا بتوان از این برآوردگر استفاده کرد.

برای بررسی این تخمین زننده و چگونگی کارکرد آن به صورت زیر عمل می کنیم.

$$y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1\beta_1 + e_1 = Z\delta_1 + e_1$$ ← معادله اول سیستم معادلات همزمان را درنظر می گیریم

$Y = X\Pi + V$ → Reduced form.

$Y = (y_1 \vdots Y_1 \vdots Y_2) \qquad X = (X_1 \vdots X_2)$ مشابه معادله ساختاری، R.F را نیز افراز می کنیم.

$$V = (v_1 \vdots V_1 \vdots V_2) \qquad \Pi = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{\circ} & \hat{\pi}_1^{\circ\circ} & \hat{\pi}_3 \\ \hat{\pi}_2^{\circ} & \hat{\pi}_2^{\circ\circ} & \hat{\pi}_4 \end{pmatrix}$$

$$(y_1 \,\vdots\, Y_1 \,\vdots\, Y_2) = (X_1 \,\vdots\, X_2)\begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{\circ} & \hat{\pi}_1^{\circ\circ} & \hat{\pi}_3 \\ \hat{\pi}_2^{\circ} & \hat{\pi}_2^{\circ\circ} & \hat{\pi}_4 \end{pmatrix} + (u_1 \,\vdots\, U_1 \,\vdots\, U_2)$$

$$y_1 = X_1 \hat{\pi}_1^{\circ} + X_2 \hat{\pi}_2^{\circ} + u_1$$

$$Y_1 = X_1 \hat{\pi}_1^{\circ\circ} + X_2 \hat{\pi}_2^{\circ\circ} + U_1$$

$$Y_2 = X_1 \hat{\pi}_3 + X_2 \hat{\pi}_4 + U_2$$

$$\pi\Gamma = -B \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{\circ} & \hat{\pi}_1^{\circ\circ} & \hat{\pi}_3 \\ \hat{\pi}_2^{\circ} & \hat{\pi}_2^{\circ\circ} & \hat{\pi}_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\hat{\pi}_1^{\circ} + \hat{\pi}_1^{\circ\circ}\gamma_1 = -\beta_1 \Rightarrow \boxed{\hat{\beta}_1 = -\hat{\pi}_1^{\circ\circ}\left(\hat{\pi}_2^{\circ\circ\,-1}\hat{\pi}_2^{\circ}\right) + \hat{\pi}_1} \\ -\hat{\pi}_2^{\circ} + \hat{\pi}_2^{\circ\circ}\gamma_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\gamma}_1 = \hat{\pi}_2^{\circ\circ\,-1} \cdot \hat{\pi}_2^{\circ}} \end{cases}$$

غیرمستقیم به خاطر این است که از R.F به پارامترهای ساختاری می‌رسیم. اگر سیستم I ق باشد جواب منحصر به فرد داریم.

در غیر این صورت جواب منحصر به فرد ندارد.

آیا تخمین زننده ILS سازگار است؟ یک تخمین زننده سازگار است در مقابل OLS اما محدودیت دارد:

۱) باید I ق باشد سیستم دقیقاً قابل شناسایی باشد.

۲) ابتدا باید R.F را تخمین زد و بعد از حل جبری رسیدن به پارامترهای ساختاری در سیستم معادلات بزرگ سخت می‌شود.

$\pi$ از معادله $y = x\pi + v$ با روش OLS تخمین خورد و چون $\pi$ فقط وابسته به X است هم نااریب است و هم سازگار، چون v با X correlate نیستند. $plim(\hat{\pi}) = \pi$ و براساس رابطه $\pi\Gamma = -B$ سازگاری به B هم منتقل می‌شود و هم چنین به $\Gamma$ طبق قضیه اسلاتسکی

نکته ← برای بدست آوردن $\hat{\pi}$ که از OLS استفاده شده چون در R.F ، OLS هم نااریب است و هم سازگار در نتیجه سازگاری منتقل می‌شود. $Y = X\Pi + V$

X متغیر برون‌زا که با V هم رابطه‌ای ندارد که می‌توان هم از OLS و هم از SURE استفاده کرد. $\rightarrow \hat{\Pi}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'Y$

Two stage Least square → 2SLS ←

* ILS فقط برای just-identified به کار برده می‌شود و اگر سیستم over-identified باشد به دلیل تعداد پارامترها تخمین امکان پذیر نبوده بنابراین به دنبال روشی هستیم که زمانی که سیستم over-identified است بتوانیم برآورد انجام دهد. که برای این منظور از تخمین زننده 2SLS استفاده می‌کنیم که یک OLS دو مرحله‌ای است که هم برای J.I و هم O.I استفاده می‌شود و هم سازگار است که مشکل ما را حل می‌کند.

برای این منظور ابتدا R.F را در نظر می‌گیریم و افراز می‌کنیم. $Y = X\Pi + U$

$$(y_1 \,\vdots\, Y_1 \,\vdots\, Y_2) = (X_1 \,\vdots\, X_2)\begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{\circ} & \hat{\pi}_1^{\circ\circ} & \hat{\pi}_3 \\ \hat{\pi}_2^{\circ} & \hat{\pi}_2^{\circ\circ} & \hat{\pi}_4 \end{pmatrix} + (\hat{v}_1 \,\vdots\, \hat{U}_1 \,\vdots\, \hat{U}_2)$$

اگر با روش OLS تخمین بزنیم داریم ← $\hat{\Pi} = (X'X)^{-1}X'Y$ در R.F.

$$\hat{y}_1 = X_1\hat{\pi}_1^{\circ} + X_2\hat{\pi}_2^{\circ}$$

$$\hat{Y}_1 = X_1\hat{\pi}_1^{\circ\circ} + X_2\hat{\pi}_2^{\circ\circ} \Rightarrow Y_1 = \hat{Y}_1 + \hat{U}_1$$

$$\hat{Y}_2 = X_1\hat{\pi}_3 + X_2\hat{\pi}_4$$

* این مرحله اول Least square است که از R.F بدست می‌آید.

مجدداً چون از دست دادن کلیت قضیه ، معادله اول را می‌نویسیم. $y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1B_1 + e_1$

گام اول در این مرحله این است که $Y_1$ را که از مرحله اول بدست آمد را در این رابطه جایگزین کنیم.

$$y_1 = \hat{y}_1 \gamma_1 + x_1 B_1 + \underbrace{e_1 + \hat{v}_1 \gamma_1}_{\varepsilon_1} \Rightarrow y_1 = \hat{y}_1 \gamma_1 + x_1 B_1 + \varepsilon_1 \Rightarrow y_1 = \hat{Z}_1 \delta_1 + \varepsilon_1$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{1\,2SLS} = (\hat{Z}_1' \hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}_1' y_1}$$

* این سیستم هم برای E.I و هم O.I جواب دارد.

نکته: زمانی که سیستم E.I جوابی که از 2SLS بدست می‌آید دقیقاً همان جوابهایی است که از ILS بدست می‌آید.

$\hat{y}_1$ را تخمین زده و در معادله روبرو جایگذاری می‌کنیم و دوباره به روش OLS تخمین می‌زنیم.

برای اثبات اینکه اگر سیستم E.I باشد جواب 2SLS با ILS برابر می‌شود.

$$y_1 = y_1 \gamma_1 + x_1 B_1 + e_1 \Rightarrow y_1 = \hat{y}_1 \gamma_1 + x_1 B_1 + \varepsilon_1 \Rightarrow y_1 = (x_1 \hat{\pi}_1^{oo} + x_2 \hat{\pi}_2^{oo}) \gamma_1 + x_1 B_1 + \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow y_1 = x_1 (\hat{\pi}_1^{oo} \gamma_1 + B_1) + x_2 \hat{\pi}_2^{oo} \gamma_1 + \varepsilon_1 \Rightarrow y_1 = (x_1 \vdots x_2) \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{oo} \gamma_1 + B_1 \\ \hat{\pi}_2^{oo} \gamma_1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{oo} \gamma_1 + B_1 \\ \hat{\pi}_2^{oo} \gamma_1 \end{pmatrix} = (x'x)^{-1} x' y_1 = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{o} \\ \hat{\pi}_2^{o} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\hat{\gamma}_1 = (\hat{\pi}_2^{oo})^{-1} \hat{\pi}_2^{o}}$$

$$y_1 = x_1 \hat{\pi}_1^{o} + x_2 \hat{\pi}_2^{o} + v_1 \Rightarrow y_1 = (x_1 \vdots x_2) \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{o} \\ \hat{\pi}_2^{o} \end{pmatrix} + v_1 \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{o} \\ \hat{\pi}_2^{o} \end{pmatrix} = (x'x)^{-1} x' y_1}$$

$$\hat{\delta}_{1\,2SLS} = (\hat{Z}_1' \hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}_1' y_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{y}_1' \hat{y}_1 & \hat{y}_1' x_1 \\ x_1' \hat{y}_1 & x_1' x_1 \end{pmatrix}^{-1}}_{(m_1 - 1 + k_1)(m_1 - 1 + k_1)} \begin{pmatrix} \hat{y}_1' \\ x_1' \end{pmatrix} y_1$$

* ثابت کنید 2SLS برای O.I هم مناسب است.

بررسی سازگاری 2sls برای معادلات همزمان :

$$y_1 = Y_1 \gamma_1 + X_1 B_1 + e_1$$

$$y_1 = \hat{Y}_1 \gamma_1 + X_1 B_1 + \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \hat{\delta}_{12SL} = (\hat{Z}_1' \hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}_1' y_1 \quad \Rightarrow \hat{\delta}_{12SL} = (\hat{Z}_1'\hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}_1' ( Y_1\gamma_1 + X_1 B_1 + e_1)$$

نکته ← $\hat{Z}_1' Z_1 = \hat{Z}_1' \hat{Z}_1$ *

$$\Rightarrow \hat{\delta}_{2SL} = (\hat{Z}_1'\hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}_1' ( Z_1 \delta_1 + e_1) = \delta_1 + (\hat{Z}_1'\hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}_1' e_1$$

$$p\lim \hat{\delta}_{2SL} = \delta_1 + p\lim \left(\frac{\hat{Z}_1'\hat{Z}_1}{T}\right)^{-1} \cdot \frac{\hat{Z}_1' e_1}{T} \Rightarrow p\lim \hat{\delta}_{12SL} = \delta_1 + Q^{-1} p\lim \left(\frac{\hat{Z}_1' e_1}{T}\right)$$

$$\Rightarrow p\lim \hat{\delta}_{12SL} = \delta_1 + Q^{-1} p\lim \left(\frac{1}{T} \begin{bmatrix} \hat{Y}_1' \\ X_1' \end{bmatrix} e_1\right) = \delta_1 + Q^{-1} p\lim \left(\frac{1}{T} \begin{bmatrix} \hat{Y}_1' e_1 \\ X_1' e_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow p\lim \hat{\delta}_{12SL} = \delta_1 + Q^{-1} \underbrace{p\lim \left(\frac{1}{T} \begin{bmatrix} (\hat{\Pi}_1^{**} X_1' + \hat{\Pi}_2^{**} X_2') e_1 \\ X_1' e_1 \end{bmatrix}\right)}_{\to 0} \Rightarrow \boxed{p\lim \hat{\delta}_1 = \delta_1}$$

* 2sls یک برآمدگر سازگار در سیستم معادلات همزمان است .

$$Y = X\Pi + V$$

$$\hat{Y}_1 = X_1 \hat{\Pi}_1^{**} + X_2 \hat{\Pi}_2^{**} \quad \to \text{First stage}$$

$$y_1 = \hat{Y}_1 \gamma_1 + X_1 B_1 + \varepsilon_1$$

چون $\hat{Y}$ تابعی خطی از متغیرهای برون زا است ، ارتباط میان $y_1$ ، $X_1$ ، $X_2$ که از طریق برآوردی که در مرحله اول انجام شده است و باعث می شود که در مرحله دوم ols برآورد سازگاری شود.

مرحله دوم که برآورد سازگاری بوجود می آورد از طریق correlate ، $\hat{Y}$ به $X_1$ و $X_2$ وعمود بودن $Y$ با جمله خطا( یعنی مستقل بودن آن ) . بنابراین در مرحله دوم correlation که از طریق $Y_1$ و $e_1$ وجود داشت از طریق $\hat{Y}_1$ رفع شده و امکان برآورد سازگار را می دهد. بنابراین 2sls سازگار است.

* $\hat{Y}_1$ تخمین زننده‌ای از $Y_1$ است، اگر $\hat{Y}_1$ دقیقاً $Y_1$ شود ( $R^2=1$ ) 2sls برآمدگر سازگاری نیست. ( $\hat{Y}_1=Y_1$ )

در واقع استفاده از ols دوم تخمین سازگاری نمی‌دهد.

رویه استفاده از 2sls :

۱) متغیرهای برون زا را از متغیرهای درون زا تفکیک می‌کنیم. تمامی متغیرهای درون زا را تابعی از متغیرهای برون زا گرفته و آنها را با روش ols تخمین می‌زنیم. تخمین فرم نمایی R.F، برای برآمد معادلات متغیرهای درون زا را مورد برازش قرار می‌دهیم.

۲) در این مرحله $\hat{Y}$های بدست آمده از مرحله اول را به ترتیب در متغیرهای توضیحی معادلات ساختاری جایگزین می‌کنیم، و ols را روی تک تک معادلات تخمین می‌زنیم تا پارامترهای ساختاری تخمین خورد. این روش سیستمی نیست ولی معادلات سازگار است چون از معادلات بین سیستمی استفاده نمی‌کند.

Instrumental Variable (IV) :

$Y = XB + U$ if $X$ : stochastic and $E(X'U) \neq 0$

$\hat{B}_{ols} = B + (X'X)^{-1}X'U \rightarrow E(\hat{B}_{ols}) = B + E(X'X)^{-1}X'U \neq B$

$plim\ \hat{B}_{ols} = B + plim\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \cdot plim\left(\frac{X'U}{T}\right) \Rightarrow plim\ \hat{B}_{ols} = B + Q^{-1}(\delta) \Rightarrow plim(\hat{B}_{ols}) \neq B$

* در IV Estimator ← ایده این است که چه متغیری باشد که بالاترین Correlation را با X داشته باشد ولی با U uncorrelate باشد.

فرض می‌کنیم متغیر مورد نظر w باشد اگر ← $y = X\beta + v$

در نتیجه می‌توانیم داشته باشیم ← $w'y = w'X\beta + w'v$

ابعاد w نیز مانند X است یعنی w نیز nxk است.

اگر $w'v$ را در نظر نگیریم داریم ← $w'y = w'X\beta \Rightarrow \beta = (w'X)^{-1} \cdot w'y$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta}_{IV} = (w'X)^{-1} w'y}$$

چرا می‌گوییم متغیر ابزاری؟

* چون w ابزاری است که باعث می‌شود تخمین زننده سازگار شود و دارای این خواص است که:

1) با v uncorrolate باشد.

2) بالاترین corrolate را با X داشته باشد.

متغیرهای برون زا منطقاً متغیر ابزاری می‌شوند.

به بررسی معادلات همزمان می‌پردازیم ← اولین معادله سیستم معادلات همزمان ← $y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1\beta_1 + e_1$

مشکل اینجا corrolate بودن $e_1$ و $Y_1$ است که $cov(Y_1, e_1) \neq 0$ است یا $E(Y_1'e_1) \neq 0$.

$$y_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + e_1 \Rightarrow y_1 = Z_1\delta_1 + e_1 \rightarrow cov(Z_1, e_1) \neq 0 \quad , Z_{n \times (K_1 + m_1 - 1)}$$

$Z_1$ حاصل از ناحیه $Y_1$ با $e_1$، corrolate است، ابزار مناسب در این رابطه چیست؟

$$w_1' y_1 = w_1' Z_1 \delta_1 + w_1' e_1$$

$$\text{if } E(w_1'e_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{1\,IV} = (w_1'Z_1)^{-1} w_1' y_1}$$

اگر $W_1 = \hat{Z}_1 \Rightarrow \underset{2SLS}{\hat{\delta}_{IV}} = (\hat{Z}_1' Z_1)^{-1} \hat{Z}_1' y_1$

$\hat{Y}_1 = X_1 \hat{\Pi}_1^{*} + X_2 \hat{\Pi}_2^{*}$   $\hat{Y}_1$ یک ابزار است که بر اساس تمامی متغیرهای برون زای سیستم تعیین می‌شود.

نکته ← $\hat{Y}_1$ یک ابزار است که بر اساس تمامی متغیرهای برون زای سیستم تعیین می‌شود.

نکته ← IV یک تخمین زننده General است که تمامی تخمین زننده‌ها مثل ILS، 2SLS و ... را در بر می‌گیرد.

$$W_1 = [\hat{Y}_1 \quad X_1] \rightarrow \hat{\delta}_{IV} = (W_1' Z_1)^{-1} W_1' y_1 \Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{IV} = (\hat{Z}_1' Z_1)^{-1} \hat{Z}_1' y_1}$$

از طرفی هم می‌دانیم که ← $\boxed{\hat{\delta}_{2SLS} = (\hat{Z}_1' \hat{Z}_1)^{-1} \hat{Z}_1' y_1}$

$$Y_1 = \hat{Y}_1 + \hat{V}_1 \Rightarrow \hat{Y}_1' Y_1 = \hat{Y}_1' \hat{Y}_1 + \hat{Y}_1' \hat{V}_1 \Rightarrow \hat{Y}_1' \hat{Y}_1 = \hat{Y}_1' (Y_1 - \hat{V}_1) = \hat{Y}_1' Y_1 - \hat{Y}_1' \hat{V}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{Y}_1' \hat{Y}_1 = \hat{Y}_1' Y_1} \Rightarrow \boxed{\hat{Z}_1' \hat{Z}_1 = \hat{Z}_1' Z_1} \Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{1IV} = \hat{\delta}_{12SLS}}$$

رویکرد IV در سیستم معادلات همزمان:

وقتی سیستم معادلات همزمان داریم و متغیرهای درون زا (Y) و برون زا (X) آن را می‌دانیم، اگر گفته شود در این سیستم ابزارها چیست، گفته می‌شود ابزار در این سیستم معادلات همزمان متغیرهای برون زا می‌باشد. با توجه به معادله

اول   $Y = ....$ تابعی از تمامی متغیرهای برون زای سیستم شد.

* در 2SLS در مرحله اول $\hat{Y}_1$ تابعی از تمامی متغیرهای برون زای سیستم شد ( $X_1, X_2$ ) ⇐ ابزارهای $X_1$ و $X_2$ می باشند که $\hat{Y}_1$ را می دهند و آن یک ابزار برای $Y_1$ است.

ابزار از تمامی متغیرهای برون زا تعیین می شود، فیت را بدست آورده و جایگزین می کنیم.

اگر با سیستم معادلات مواجه نباشیم و یک معادله ما تک مصرف را داشته باشیم: $C_t = \alpha + \beta_1 Y_t + \beta_2 C_{t-1} + U_t$

در این معادله $Y$ به نوعی درون زا است ( $Y = C + I + \dots$ ) و از طرفی correlate بودن با $U$ می تواند باعث شود که OLS تخمین زننده سازگاری نباشد. در اینجا بهتر است که از یک ابزار (IV) استفاده کنیم. برای $Y_t$ خارج از این معادله ابزاری تعریف کنیم. در واقع متغیرهایی را در نظر بگیریم که درون زا بودن $Y_t$ را از بین ببرد.

چیزی که در تئوری سیستم اقتصاد ممکن است باشد ⇐ $Y_t = F(C_{t-1}, Y_{t-1}, I_{t-1}, \dots)$

← از طریق OLS تخمینی از $Y_t$ را بدست آورده و در معادله می گذاریم ( $\hat{Y}_t$ ) و correlate بودن $Y_t$ و $U$ را از این طریق از بین می بریم. این یک IV برای یک single equation است.

نکته ← single می بینیم اما Simultaneuse تخمین می زنیم.

* Three stage Least square → 3SLS ←

$$y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1\beta_1 + e_1$$

$$y_1 = [Y_1 \quad X_1]\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \beta_1\end{bmatrix} + e_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = Z_1\delta_1 + e_1$$

← اگر سیستم دقیقاً قابل شناسایی بود، تک تک معادلات را به روش 2SLS تخمین می‌زدیم و $\hat{\delta}$ را بدست می‌آوردیم.

اگر معادلات را جدا، جدا تخمین بزنیم، مشکلات سازگاری حل می‌شد ولی به صورت سیستمی تخمین نخواهد است.

به عبارت دیگر برآوردگر full information Estimator نیست.

چطور می‌توانیم یک روش سیستمی full information Estimator داشته باشیم؟

* SURE یک روش سیستمی است، چون ارتباط میان جملات خطا را در نظر می‌گرفت.

* IV و 2SLS، تخمین زننده‌های full information نیستند چون ارتباط میان خطاها را در نظر نگرفته‌اند

ولی تخمین زننده‌های سازگار هستند ولی هنوز مشکل اطلاعات را دارند.

* SURE اطلاعات بین معادلات را در نظر می‌گرفت و اطلاعات به efficiency منجر می‌گردد. زمانی که خطاها correlation

را در نظر بگیریم efficient می‌شود، چون روش، روش سیستمی است.

اگر در 2SLS سازگاری مطرح است، باید efficiency را وارد کنیم، efficiency از طریق وارد کردن

ارتباط خطاها وارد می‌شود.

* روش 3SLS روشی Full information است. (روش سیستمی است).

* 3SLS نه تنها سازگار است بلکه efficience بیشتری باشد و از تمام اطلاعات میان خطاها استفاده می

* ILS ، 2SLS و IV از روش های همزمان هستند اما سیستمی نیستند. چون اطلاعات بین معادلات را در نظر نمی‌گیرد.

* اگر به 2SLS روش سوم یک SURE اضافه کنیم تبدیل به 3SLS می‌شود، اما دقیقتر اگر به جای ols از GLS استفاده کنیم، روش از Limited information به Full information و یا از غیر سیستمی به سیستمی تبدیل می‌شود.

فرم های دیگری از 2SLS :

$$y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1B_1 + e_1$$

$$y_1 = Z_1\delta_1 + e_1 \quad \rightarrow \quad \hat{\delta}_{1\,2SLS} = (\hat{Z}_1'\hat{Z}_1)^{-1}\hat{Z}_1'y_1$$

$$(y_1 \,\vdots\, Y_1 \,\vdots\, Y_2) = (X_1 \,\vdots\, X_2)\begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{\circ} & \hat{\pi}_1^{\circ\circ} & \hat{\pi}_3 \\ \hat{\pi}_2^{\circ} & \hat{\pi}_2^{\circ\circ} & \hat{\pi}_4 \end{pmatrix} + (v_1 \,\vdots\, V_1 \,\vdots\, V_2)$$

$$Y_1 = X_1\hat{\pi}_1^{\circ\circ} + X_2\hat{\pi}_2^{\circ\circ} + \hat{V}_1 \Rightarrow Y_1 = \hat{Y}_1 + \hat{V}_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{\circ\circ} \\ \hat{\pi}_2^{\circ\circ} \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y_1$$

$$\hat{Y}_1 = X_1\hat{\pi}_1^{\circ\circ} + X_2\hat{\pi}_2^{\circ\circ} = X\begin{pmatrix} \hat{\pi}_1^{\circ\circ} \\ \hat{\pi}_2^{\circ\circ} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{Y}_1 = X(X'X)^{-1}X'Y_1} \quad (1)$$

$$X = (X_1 \vdots X_2) = X(X'X)^{-1}X'X = X(X'X)^{-1}X'(X_1 \vdots X_2) \longrightarrow \begin{cases} X_1 = X(X'X)^{-1}X'X_1 \\ X_2 = X(X'X)^{-1}X'X_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 = X(X'X)^{-1}X'X_1} \qquad (۲)$$

(۱) و (2) $\Rightarrow (\hat{Y}_1 \vdots X_1) = X(X'X)^{-1}X'(Y_1 \vdots X_1) \Rightarrow \boxed{\hat{Z}_1 = X(X'X)^{-1}X'Z_1}$ (3)

رابطه (3) را در $\hat{\delta}_{12SL}$ قرار می‌دهیم $\Rightarrow \hat{\delta}_{12SL} = \left[Z_1'X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'Z_1\right]^{-1}(Z_1'X(X'X)^{-1}X')y_1$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{12SL} = \left[Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_1\right]^{-1} \cdot (Z_1'X(X'X)^{-1}X')y_1}$$

حال یک روش IV و GLS را باهم بکار می‌بریم تا به 3sls برسیم.

ابتدا فرض می‌کنیم تمامی متغیرهای برون زای X ابزار باشند.

تمامی متغیرهای درون زا را تابعی از تمامی متغیرهای برون زای سیستم می‌کند، fit را می‌گیرد و جایگزین می‌کند. (ایده 2sls)

مرحله اول در این رویکرد استفاده از IV می‌باشد و مرحله بعد استفاده از GLS است.

✓ ابتدا تمامی متغیرهای برون زای سیستم را به عنوان ابزار در نظر می‌گیریم.

$$y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1\beta_1 + e_1$$

$$y_1 = Z_1\delta_1 + e_1 \longrightarrow X'y_1 = X'Z_1\delta_1 + X'e_1$$

$$cov(X'e_1) = X'E(e_1e_1')X = \sigma^2 X'X$$

$y = XB + U$ ← یادآوری

$E(UU') \neq \sigma^2 I \Rightarrow E(UU') = \sigma^2 \Omega$

$$\boxed{\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y}$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'IX)^{-1}X'Iy$$

راه‌حل $\rightarrow \quad Ty = TXB + TU \quad \rightarrow \quad \hat{\beta}_{GLS} = (X'T'TX)^{-1}X'T'Ty \Rightarrow \boxed{\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y}$

حال در سیستم معادلات همزمان خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_1 = \left[Z_1'X\underbrace{(X'X)^{-1}}_{\Omega^{-1}}X'Z_1\right]^{-1}\cdot\left(Z_1'X\underbrace{(X'X)^{-1}}_{\Omega^{-1}}X'y_1\right)$$

* چون هیچ اطلاعاتی در ماتریس واریانس-کوواریانس وجود ندارد دقیقاً همان نتایج 2SLS را می‌دهد.

اگر برای تک تک معادلات انجام دهیم، به جای اینکه سیستمی انجام دهیم جوابی که از IV و GLS بدست می‌آید همان 2SLS است، با این فرض که با درنظر گرفتن تک تک معادلات کلیت را از دست ندهیم. به مقایسه 2SLS که روشی غیرسیستمی است با 3SLS که روش سیستمی است می‌پردازیم.

برای رسیدن به 3SLS ابتدا معادله اول را درنظر می‌گیریم یا معادله hام.

$$\underset{T\times1}{y_h} = \underset{T\times(m_h-1)}{Y_h}\gamma_h + \underset{T\times K_h}{X_h}\beta_h + e_h$$

$$\Rightarrow y_h = \underset{T\times(m_h-1+K_h)}{Z_h}\delta_h + e_h$$

تمامی معادلات را در چارچوب یک بردار (vector) می‌نویسیم با تعداد مشاهدات.

$$\Rightarrow y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{Tm\times1} \qquad \delta^* = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix}_{\sum_{h=1}^{m}(m_h-1+K_h)\times1} \qquad Z^* = \begin{bmatrix} (Y_1 \vdots X_1) & & 0 \\ & (Y_2 \vdots X_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & (Y_m \vdots X_m) \end{bmatrix}_{Tm\times\sum_{h=1}^{m}(m_h-1+K_h)}$$

$$y^* = Z^*\delta^* + e^*$$

$$e^* e^{*\prime} = \Sigma \otimes I$$

ابزار $X^* = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_m \end{bmatrix}_{mT \times mK} = I \otimes X$ ← Xها برای تمامی معادلات همزمان یکی است

$$\hat{\delta}^*_{2SLS} = \left(Z^{*\prime}X^*\left(X^{*\prime}X^*\right)^{-1}X^{*\prime}Z^*\right)^{-1} Z^{*\prime}X^*\left(X^{*\prime}X^*\right)^{-1}X^{*\prime}y^*$$

$$\hat{\delta}_{2SLS} = \left[Z^{*\prime}(I\otimes X)\left((I\otimes X)'(I\otimes X)\right)^{-1}(I\otimes X)'Z^*\right]^{-1} Z^{*\prime}(I\otimes X)\left[(I\otimes X)'(I\otimes X)\right]^{-1}(I\otimes X)'y^*$$

$$\boxed{\hat{\delta}_{2SLS} = \left[Z^{*\prime}\left(\underline{I} \otimes X(X'X)^{-1}X'\right)Z^*\right]^{-1} Z^{*\prime}\left(\underline{I} \otimes X(X'X)^{-1}X'\right)y^*}$$ *

همه‌ی m معادله را در چارچوب یک سیستم نوشتیم. I می‌توانست ماتریس واریانس - کوواریانس باشد وقتی سیستم می‌کنیم

وجرا. چرا تخمین می‌زنیم بازهم اطلاعات بین معادلات در نظر گرفته نشده است و با توجه به اینکه سازگار است

اما هنوز نسبت به روش سیستمی efficiency کمتری دارد.

در 3SLS ← اگر $X^*$ را به عنوان ابزار در نظر بگیریم و یک GLS بزنیم ماتریس واریانس - کوواریانس که $\Sigma$ است

و شامل اطلاعات بین معادلات است وارد می‌شود و سیستم سازگار هم هست.

یک ابزار مانند x در نظر می‌گیریم ←

$$\Rightarrow y^* = Z^*\delta^* + e^*$$

$$X^{*\prime} y^* = X^{*\prime} Z^* \delta^* + X^{*\prime} e^*$$

$$\operatorname{cov}(X^{*\prime} e^*) = X^{*\prime} E(e^* e^{*\prime}) X^* = X^{*\prime} (\Sigma \otimes I) X^*$$

✓ چون ماتریس واریانس-کوواریانس جملات خطا ظاهر شده است در نتیجه 2SLS نیست.

اگر یک GLS به کار گیریم:

$$\delta^* = \left[ Z^{*\prime} X^* \left( X^{*\prime} (\Sigma \otimes I) X^* \right)^{-1} X^{*\prime} Z^* \right]^{-1} \left( Z^{*\prime} X^* \left( X^{*\prime} (\Sigma \otimes I) X^* \right)^{-1} X^{*\prime} y^* \right)$$

$$\Rightarrow \delta^* = \left[ Z^{*\prime} (I \otimes X) \left( (I \otimes X)' (\Sigma \otimes I) (I \otimes X) \right)^{-1} (I \otimes X)' Z^* \right]^{-1} \left[ Z^{*\prime} (I \otimes X) \left( (I \otimes X)' (\Sigma \otimes I) (I \otimes X) \right)^{-1} (I \otimes X)' y^* \right]$$

$$\boxed{\Rightarrow \delta^*_{3SLS} = \left[ Z^{*\prime} \left( \hat{\Sigma}^{-1} \otimes X (X'X)^{-1} X' \right) Z^* \right]^{-1} \cdot \left[ Z^{*\prime} \left( \hat{\Sigma}^{-1} \otimes X (X'X)^{-1} X' \right) \right] y^*} \quad **$$

* و ** ← مشاهده می‌شود که در رابطه (**) خطاهای بین معادلات در قالب ماتریس واریانس-کوواریانس ظاهر شده است.

در رابطه (*) که همان 2SLS زده شده است اطلاعات بین معادلات خطاها در نظر گرفته نشده است و I ظاهر می‌شود.

اما چون خطاها correlate هستند وقتی از این ابزار استفاده می‌کنیم (مانند X) و GLS یا SURE می‌زنیم اطلاعات بین معادلات به جای I به صورت $\hat{\Sigma}^{-1}$ نشان داده می‌شود.

در SURE برای تک تک معادلات OLS می زدیم، پسماندها را استخراج می کردیم، Corrolation خطاها را می گرفتیم با ماتریس $\hat{\Sigma}$ در می رسیدیم.

در 3SLS مرحله اول و دوم به 2SLS بر می گردد. که در 2SLS از R.F ، $y_1$ را تخمین زده و در معادله ساختاری می گذاشتیم و سپس خطاهای معادله که به روش 2SLS تخمین خورده را محاسبه کرده ($e = y_1 - Z\hat{\delta}_1$) خطاهای بین معادلاتی را کوواریانس گرفته مثل SURE و در معادله گذاشته که stage سوم را می دهد. که ساختار نیز هست.

نکته) 3SLS ← یک 2SLS و SURE است که خطاهای آن از 2SLS بدست می آید که تلفیق این دو 3SLS را می دهد و چون اطلاعات بین معادلاتی ظاهر شده است به این روش Full Information گفته می شود.

نکته) 3SLS کاراتر از 2SLS یا برابر آن است. اگر در $\Sigma$ اطلاعاتی وجود داشته باشد 3SLS کاراتر و در صورتی که فاقد اطلاعات باشد، کارایی آن برابر 2SLS است.

$|\Sigma_{3SLS}| - |\Sigma_{2SLS}| \leq 0$ → Negative Semi difinit Matrix.

$|\Sigma_{2SLS}| - |\Sigma_{3SLS}| \geq 0$ → Positive Semi difinit Matrix.

نکته ← تخمین هایی که Full information هستند کاراتر از تخمین های Limited information می باشند.

تخمین هایی که Full می باشند روش های سیستمی اند چون از تمام اطلاعات بین معادلاتی استفاده می کنند.

اقتصاد سنجی ← 91.8.2

GMM → Generalized Methode of Moment

$Y = XB + U \rightarrow E(X'U) \neq 0$

$Y_1 = Z_1B + e_1 \rightarrow E(Z_1'e_1) \neq 0$

Instrument variable in ols → $X'$ اگر $E(X'U)=0$

$X'e=0 \rightarrow X'(Y - X\hat{B}) = 0 \Rightarrow X'Y = X'X\hat{B}$

$\Rightarrow \hat{B}_{ols} = (X'X)^{-1}X'Y$

* اگر $E(X'U) \neq 0$ باشد IV مناسب چیست؟

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum X_1 e = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum X_k e = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ گشتاور

$E(Z'U)=0 \rightarrow Z'e=0 \rightarrow Z'(Y - X\hat{B}) = 0 \Rightarrow Z'Y = Z'X\hat{B} \Rightarrow \hat{B}_{IV} = (Z'X)^{-1}Z'Y \leftarrow$

نشان دهید که سیستم 2sls هم برای just و هم برای over ident به کار می رود؟

$$\underset{\hat{B}}{Min}\,(Z'(Y - X\hat{B}))'\,W\,(Z'(Y - X\hat{B})) = Q(B)$$

$$\frac{\partial Q(B)}{\partial B} = 0 \rightarrow 2X'ZWZ'X\hat{B} - 2X'ZWZ'Y = 0 \Rightarrow \hat{B} = (X'ZWZ'X)^{-1}X'ZWZ'Y$$

→ Eive ←

$$W = (Z'Z)^{-1} \rightarrow \hat{B}_{2sls} = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y$$

سری‌های زمانی : Time Series

مطالبی که تا اینجا مطرح شد تحت عنوان اقتصاد سنجی سنتی بود که از سال ۱۹۸۰ تحولی در الگوسازی اقتصاد سنجی توسط Sims مطرح شد.

دو مشکل اساسی که در اقتصاد سنجی وجود داشته است :

۱- به طور معمول در کتاب‌های سنتی اقتصاد سنجی $Y_t = \alpha + \beta X_t + V_t$ در مورد اینکه $X_t$ دارای unit root باشد یا نه صحبت نکردیم. در اقتصاد سنجی سنتی فرض بر این بود که برخی متغیرها ما نا هستند و الگوها را بر این اساس تخمین می‌زدیم در صورتی که در اقتصاد اکثر متغیرها غیر مانا (non stationary) هستند و دارای رفتار I(1) هستند.

کاری که Engle - Granger در سال ۱۹۸۷ انجام دادند تحول بزرگی در اقتصاد سنجی بوجود آمد که بین الگوهایی که مانا و غیر مانا هستند در اقتصاد سنجی تفاوت قائل شویم.

۲- یک مجموعه ایراداتی که از سال ۱۹۸۰ به بعد مطرح شد و عمدتاً روی پیکره سیستم معادلات همزمان مطرح شد، اولین الگوهایی که برای الگوسازی معادلات همزمان انجام می‌شد در موسسه معروف به Levels توسط تیم برکلی و کلاین انجام شد. و الگوهایی با تعداد معادلات زیاد حتی تا ۱۰۰۰۰ معادله اما علی‌رغم جامع بودن این الگوها پیش بینی‌های ضعیفی داشتند.

از این به بعد دنبال الگوهایی هستیم که هم به خوبی ساختار را تحلیل کند و هم پیش بینی خوبی ارائه دهد.

در سال 1980، Sims مقاله‌ای به نام Macro Economics & Reality در Econometrica منتشر کرد که ایراداتی که به اقتصاد سنجی سنتی مطرح بود را عنوان کرد :

۱- بحث over identified بودن این الگوهاست :

Sims بیان می‌کند الگوها ناشی از تئوری محور هستند یعنی در واقع تئوری به داده‌ها تحمیل می‌شود و با توجه به داده‌ها الگوی مناسب انتخاب نمی‌شود. به طور معمول باید با توجه به داده‌ها تئوری انتخاب شود و شکست گردد.

*براساس آزمون تئوری انتخاب می شود نه اینکه یک الگو به آن تحمیل شود، در معادلات همزمان قیود زیاد بود که می خواهیم آنها را کم کنیم.

هدف در این مبحث ← آیا داده ها تئوری های اقتصادی را می پذیرند؟

۲- دومین بحث Dynamic Specification بودن این الگوهاست. (تصریح پویا).

هدف پیدا کردن وقفه های مناسب برای داده هاست.

از جمله روش هایی است که وقفه را وارد مدل می کند و از الگوهای ایستا تبدیل به الگوهای پویا می کند partial adjustment adaptive واز

چهارچوب تئوری می آید و در تمامی این رویکردها یک وقفه ظاهر می شود.

$$\frac{M_t}{P_t} = A Y_t^{B_1} \cdot e^{B_2 i + V_t} \rightarrow$$ تئوری غیرخطی

یک الگوی ایستا ←

$$\text{Log}\frac{M_t^d}{P_t} = \text{Log}A + B_1 \text{Log}Y_t + B_2 i + U_t \rightarrow \text{Demand for money}$$

در بازار نمی توان $M^d$ را بدست آورد چون تقاضای پول بی نهایت است.

$$* \quad M^d = M^S$$

$M^S$ (حجم نقدینگی) توسط مقامات پولی تعیین می شود.

$$* \rightarrow \text{Log}\frac{M_t^S}{P_t} = \text{Log}A + B_1 \text{Log}Y_t + B_2 i + V_t$$

← تمامی تئوری ها در steady state نوشته می شوند به همین علت ایستا هستند.

حال می خواهیم این تقاضا برای پول را به صورت پویا بنویسیم از تعدیل جزئی استفاده می کنیم.

در بازار یک حجم مطلوب واقعی پول وجود دارد یا تقاضا وجود دارد.

$$\overbrace{\log\frac{M_t}{P_t}-\log\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}}^{\text{حجم تقاضا شده مطلوب پول}}=\lambda\left(\log\frac{M_t^d}{P_t}-\log\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\right)$$

$0<\lambda<1$ adjustment ← ضریب

$B_1$ و $B_2$ کشش های بلندمدت هستند وقتی الگو پویا می شود کوتاه مدت می شود.

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}\left[\log\frac{M_t}{P_t}-\log\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\right]+\log\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}=\log\frac{M_t^d}{P_t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}\log\frac{M_t}{P_t}=-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\log\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}+\log A+B_1\log Y_t+B_2 i_t+u_t$$

$$\Rightarrow \log\frac{M_t}{P_t}=\underbrace{(1-\lambda)}_{\gamma_1}\log\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}+\underbrace{\lambda\log A}_{\gamma_0}+\underbrace{\lambda B_1}_{\gamma_2}\log Y_t+\underbrace{\lambda B_2}_{\gamma_3} i_t+\varepsilon_t$$

$\gamma_2$ و $\gamma_3$ کشش های کوتاه مدت هستند.

* با تخمین کشش های کوتاه مدت، کشش های بلندمدت حاصل می شوند.

* Sims بیان می کند اکثر الگوهایی که نمی توانند پیش بینی کنند الگوهای Dynamic-Specification Error هستند، ممکن است وقفه های لازم را نداشته باشند و دچار خطای تصریح شوند. Sims در جهت پیشنهادی بود که الگوی ساختاری به سمت الگوی Box & Jen پیش برود که به خوبی پیش بینی کند و تکرار وقفه های لازم را بدست آورد.

۳- مفهوم برون زایی در اقتصادسنجی ← Exogenity Assumption → Causality.

به عنوان مثال در الگوی زیر هزینه های دولتی را به صورت strictkly exageneaus در نظر می گیریم یعنی از شوک های

$Y_t = C_t + I_t + G_t$

$Y_t$ تاثیر نپذیرد که فرض بسیار قوی است و با واقعیت اقتصاد سازگار نیست.

و خودش می تواند تحت تاثیر متغیرهای دیگر قرار گیرد و اینکه چه سطحی از برون زایی را داشته باشد.

Hendry - Engle - Richard (1983) → Supper Exagenerity
→ Strong "
→ weakly "

Sims به جای اینکه از مفهوم strictly ex استفاده کند از مفهوم Granger causality استفاده می‌کند.

۴- چهارمین موردی که مطرح شد انتقاد لوکاس بود.

انتقاد لوکاس در چارچوب نئوکلاسیک مطرح می‌شود.

سیاست‌های پولی و مالی از آنجایی که مردم rational هستند در برابر این سیاست‌ها تغییر رفتار نشان می‌دهند در نتیجه تغییر در ساختار رخ می‌دهد بی اثر هستند. یعنی پارامترها که فرض بر این بود ثابت اند در مقابل سیاست‌ها تغییر می‌کنند.

انتظارات به جای عقب‌نگر، جلونگر باشد ← مردم جلوتر از دولت حرکت می‌کنند و ساختار حرکت تغییر دارد.

Vector Auto Regressive → VAR

در رونکرد VAR همه متغیرها درون زا هستند ← چه وقفه‌های و چه غیروقفه‌ای. مگر اینکه آزمون‌ها برون زا بودن را مشخص کنند.

مثال ← $(GDP_t , P_t , M_t)$ ← هر سه درون زا هستند و همه این متغیرها را در قالب Vector مثل $Y_t$ نشان می‌دهیم

$$Y_t = \begin{bmatrix} GDP_t \\ P_t \\ M_t \end{bmatrix}$$

که مربوط به مشاهده t ام است.

الگوی VAR(1) را به صورت روبرو نشان می‌دهیم ←

$$Y_t = \mu + A Y_{t-1} + U_t \qquad VAR(1)$$

$$\begin{bmatrix} GDP_t \\ P_t \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GDP_{t-1} \\ P_{t-1} \\ M_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \\ U_{3t} \end{bmatrix}$$

$$GDP_t = \mu_1 + a_{11} GDP_{t-1} + a_{12} P_{t-1} + a_{13} M_{t-1} + U_{1t}$$

$$P_t = \mu_2 + a_{21} GDP_{t-1} + a_{22} P_{t-1} + a_{23} M_{t-1} + U_{2t}$$

$$M_t = \mu_3 + a_{31} GDP_{t-1} + a_{32} P_{t-1} + a_{33} M_{t-1} + U_{3t}$$

* هر متغیر تابعی از وقفه‌های خود و دو متغیر دیگر است.

* از مفروضات VAR ← متغیرها stationary هستند.

حل سیستم VAR ، ثبات آن:

$$y_t = v + Ay_{t-1} + u_t \quad \text{VAR(1)}$$

ابتدا به صورت Recursive حل می‌کنیم ←

$$y_1 = v + Ay_0 + u_1$$

$$y_2 = v + A(v + Ay_0 + u_1) + u_2 = v + Av + A^2 y_0 + Au_1 + u_2$$

$$\vdots$$

$$y_t = (I + A + \dots + A^{t-1})v + A^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^i u_{t-i}$$

اگر از $t-j-1$ شروع کنیم در حالت General Solution داریم ←

$$y_t = (I + A + A^2 + \dots + A^j)v + A^{j+1} y_{t-j-1} + \sum_{i=0}^{j} A^i u_{t-i}$$

در حدگیری خواهیم داشت ←

$$y_t = (I - A)^{-1} v + \sum_{i=0}^{\infty} A^i u_{t-i}$$ → Vector Moving Average

VMA(∞)

ریشه‌های ماتریس A شرط ثبات را برای ما در می‌آورد ← $|\lambda| < 1$ ..

قضیه: اگر در سیستم VAR(P) تمامی مقادیر ویژه کوچک‌تر از یک باشند سیستم stable است و این دلالت برای این دارد که سیستم stationary است (تمامی متغیرها I(0) هستند.) ولی عکس قضیه برقرار نیست.

stable بودن شرط قوی‌تری از stationary بودن است زیرا weakly stationary مطرح است هر سیستم stable حتما stationary هم هست اما عکس این مطلب صادق نیست در صورتی که strictly stationary در نظر باشد با مفهوم stable یکی است.

نکته ← ممکن است تمامی متغیرهای $Y_t$، stationary باشند اما اگر تعیین وقفه را درست انجام ندهیم در این صورت ممکن است سیستم stable نباشد.

اگر سیستم VAR(1) را به صورت lag operator بنویسیم ←

$$Y_t = \mu + ALY_t + V_t$$

$$(I - AL)Y_t = \mu + V_t \Rightarrow |I - AZ| = 0 \Rightarrow Z_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

در این صورت ریشه‌های Z باید بزرگتر از یک باشد تا نشان دهیم سیستم با ثبات است.

$$Y_t = V + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + V_t \quad VAR(P)$$

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{bmatrix}_{KP\times 1} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{KP\times 1} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & & A_p \\ I_K & 0 & \dots & 0 \\ & I_K & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & I_K & 0 \end{bmatrix}_{KP\times KP} \quad \mathbf{Y}_{t-1} = \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix}_{KP\times 1}$$

نمایشگری از VAR(P) به صورت VAR(1) است

$$\Rightarrow \mathbf{Y}_t = \mathbf{V} + A\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{V}_t \quad *$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y}_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A^i \mathbf{V}_{t-i} \quad ** \rightarrow \mu = (I - A)^{-1} \mathbf{V} \rightarrow VMA(\infty)$$

ماتریس J را تعریف می‌کنیم تا حاصل ضرب آن در عبارت ** فقط VAR(P) را به ما بدهد.

$$J\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} I_K & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{bmatrix} \Rightarrow J\mathbf{Y}_t = Y_t$$

$$J\mathbf{Y}_t = J\mu + J\sum_{i=0}^{\infty} A^i \mathbf{V}_{t-i}$$

$$Y_t = \mu + j \sum_{i=0}^{\infty} A^i j j' v_{t-i}$$

$$\Rightarrow Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{(JA^i J')}_{\theta^i} v_{t-i} \Rightarrow \boxed{Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i v_{t-i}}$$

**: world – Decomposition Theorem**

هر فرآیند چون VAR را می‌توان از ترکیب ۲ فرآیند جدا نوشت اولین فرآیندی که در دنیا مطرح است

یک فرآیند قطعی است و دیگری فرآیندی تصادفی است.

$$Y_t = \underbrace{\mu}_{\text{بخش قطعی}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i v_{t-i}}_{\text{بخش تصادفی}}$$

یک فرآیند نامتناهی MA است که برگشت آن می‌تواند فرآیندی باشد

VAR(P) متناهی بدهد وقتی با مرتبه‌ها داده‌ها تعیین شود. ← نامعلوم ← order ← نامتناهی

$Y_t = \phi(L) v_t \rightarrow$ VMA (q) محدود

$\rightarrow \phi^{-1}(L) Y_t = v_t \Rightarrow A(L) Y_t = v_t \rightarrow$ VAR (∞)

$\phi(L)$ باید absulately adaptive باشد ← There is a uniqe inverse.

Lag operator معبر

اگر summable نباشد ← $\lambda > 1$ می‌شود و معکوس پذیر نیست.

## Data generation Process :

در معادلات همزمان براساس تئوری جلو می‌رفتیم بعد داده‌ها را می‌گذاشتیم.

اما در نگاه Sims با توجه به داده‌ها به تئوری‌ها می‌رسیم یعنی داده‌ها را در مدل گذاشته و به تئوری می‌رسیم

→ $Y_t = V + A Y_{t-1} + U_t$ VAR (1)    * اگر پارامترهای A را داشته باشیم می‌توانیم پیش بینی کنیم.

ایده کلی Forcast :

هدف ما در پیش بینی این است که MSE را Min کنیم. بحثی که در اینجا مطرح می‌شود این است که پیش بینی بر چه اساسی صورت می‌گیرد. اینجا یک Linear projection داریم، ممکن است اینگونه نباشد، اگر یک اطلاعاتی مانند $\Omega_t$ داشته باشیم و بخواهیم متغیری مثل $Z_t$ را در افق زمانی پیش بینی کنیم، زمانی می‌توانیم بگوییم که این پیش بینی خوب است که نسبت به سایر پیش بینی کننده‌ها، Min MSE کمتری داشته باشد.

$$E(Y_{t+h}|\Omega_t) \rightarrow \text{Min } MSE_y(h|\Omega_t)$$

* یک پیش بینی کننده دیگر مانند $\bar{y}_t$ در نظر می‌گیریم به نحوی که $MSE_{\bar{y}}(h|\Omega_t) = E(Y_{t+h}-\bar{y}_t(h))(Y_{t+h}-\bar{y}_t(h))'$ و می‌خواهیم بررسی کنیم که $MSE_{\bar{y}}(h|\Omega_t) < MSE_y(h|\Omega_t)$ ؟

$$MSE_{\bar{y}}(h|\Omega_t) = E\Big[\big(Y_{t+h}-E(Y_{t+h}|\Omega_t) + E(Y_{t+h}|\Omega_t) - \bar{y}_t(h)\big)\Big]\cdot\Big[\big(Y_{t+h}-E(Y_{t+h}|\Omega_t) + E(Y_{t+h}|\Omega_t) - \bar{y}_t(h)\big)\Big]' = MSE_y(h|\Omega_t) + E\big(E(Y_{t+h}|\Omega_t)-\bar{y}_t(h)\big)\big(E(Y_{t+h}|\Omega_t)-\bar{y}_t(h)\big) + 0$$

$$(1) \rightarrow E\big(Y_{t+h}-E(Y_{t+h}|\Omega_t)\big)\big(E(Y_{t+h}|\Omega_t)-\bar{y}_t(h)\big)' = 0$$

$$(2) \rightarrow MSE_y(h|\Omega_t) = E\big(Y_{t+h}-E(Y_{t+h}|\Omega_t)\big)\big(Y_{t+h}-E(Y_{t+h}|\Omega_t)\big)'$$

$$\Rightarrow MSE_{\bar{y}}(h|\Omega_t) = MSE_y(h|\Omega_t) + E\Big[\big(E(Y_{t+h}|\Omega_t)-\bar{y}_t(h)\big)\big(E(Y_{t+h}|\Omega_t)-\bar{y}(h)\big)'\Big]$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{MSE_{\bar{y}_t}(h|\Omega_t) \geq MSE_{y_t}(h|\Omega_t)}$$

VAR یک مدل، بردار Linear projection (ترکیب خطی از گذشته خودش است).

$$Y_{t+h} = (I + A + A^2 + \dots + A^{h-1})v + A^h Y_t + \sum_{i=0}^{h-1} A^i U_{t+h-i}$$

$$E(Y_{t+h}) = (I + A + A^2 + \dots + A^{h-1}) + A^h Y_t$$

$$\rightarrow E\left[Y_{t+h} - E(Y_{t+h})\right]\left[Y_{t+h} - E(Y_{t+h})\right]' = \left(\sum_{i=0}^{h-1} A^i U_{t+h-i}\right)^2 = MSE$$ ← مجموع خطاها در طول زمان

Granger_causality :

← عمدتاً روی منطق پیش بینی، min MSE بحث می کند.

اولین بار توسط Granger در سال 1969 ارائه شده است، و اساس آن براین مبناست که آیا متغیرهایی وجود دارند که به پیش بینی متغیرهای دیگر کمک کنند، اگر در مجموعه $\Omega_t$ چنین متغیری وجود داشته باشد، می تواند به پیش بینی متغیر مورد نظر کمک کند می توان گفت بین دو متغیر causality وجود دارد.

* متغیر علت هیچ وقت بعد از معلول اتفاق نمی افتد. علت باید تغییر پیدا کند تا معلول اتفاق بیفتد.

اگر دو متغیر $X_t$ و $Z_t$ را در نظر بگیریم و اگر بخواهیم $Z_t(h|\Omega_t)$ را بدست آوریم، زمانی می توانیم بگوییم $X_t$ باعث توضیح پیش بینی $Z_t$ می شود که؟

* $X_t$ مربوط به s های کوچکتر از t را از $\Omega_t$ خارج کنیم.

$$MSE_{Z_t}(h|\Omega_t) < MSE_{Z_t}(h|\Omega_t \setminus \{X_s | s \leq t\})$$

$X_t$ Granger_cause $Z_t$

or

$X_t$ is Granger_cause for $Z_t$

* در الگوی VAR، وقفه‌های $y_t$ آن را cause می‌کند به این مفهوم که در Granger _ cause، Instantanous _ causality را در نظر گرفتیم.

Instantaneous casulity به مفهوم cause آنی است. $x_{t+1}$ خودش در پیش بینی $z_{t+1}$ تاثیر می‌گذارد (همزمان)

* مثال: قیمت نفت افزایش می‌یابد می‌خواهیم ببینیم این افزایش قیمت $y_t$ را اضافه می‌کند یا نه؟

تئوری و واقعیت نشان می‌دهد که $P^o_t$ از مکانیزم های مختلف باید با چند وقفه تولید را تحت تاثیر قرار می‌دهد. اما تغییر قیمت نفت در آن واحد قیمت ارز را تحت تاثیر قرار دهد که نقدینگی و سطح پول را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

اگر Instantaneouse را با Granger اضافه کنیم:

$$MSE_{z_t}(1 \mid \Omega_t) > MSE_{z_t}(1 \mid \Omega_t \cup \{x_{t+1}\})$$

براساس مجموعه اطلاعاتی که بحث کردیم، به سراغ VAR می‌رویم Granger casulity را در VAR پیاده می‌کنیم، که از این به بعد یکی از روش هایی که می‌توانیم در مورد structual casul صحبت کنیم در VAR Granger casulity است و در چهارچوب VAR چه طوری می‌توانیم بفهمیم، G. causal هست یا نه؟

مرحله بعدی به ایرادات G.C می‌پردازیم و سعی می‌کنیم I.C را وارد کنیم. و با روش های شبیه سازی انتقادی در چارچوب الگوی VAR به شبیه سازی انتقادی بپردازیم. در واقع با اثر شوک‌های cause یک متغیر بر روی متغیر دیگر و در قالب I.C و G.C می‌پردازیم که نوعی شبیه سازی است. شوکی به یک متغیر می‌دهیم و اثر شوک را در طول زمان روی متغیرهای دیگر بررسی می‌کنیم. اثر آنی و وقفه‌ای در طول زمان چقدر است.

$$y_t = \nu + A y_{t-1} + u_t \qquad VAR(1)$$

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A^i u_{t-i} \qquad VMA(\infty)$$

$$Y_t = \mu_t + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i V_{t-i} \qquad MA$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix}$$

y را به دو مجموعه بردار افراز می کنیم ← Structural Analysis :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11}(L) & \theta_{12}(L) \\ \theta_{21}(L) & \theta_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{z_t} \\ V_{x_t} \end{bmatrix} \qquad \theta(L) = I + \theta L + \theta^2 L^2 + \dots \qquad \theta(L) = \sum \theta^i L^i$$

$$\Rightarrow z_t = \mu_1 + \theta_{11}(L) V_{z_t} + \theta_{12}(L) V_{x_t}$$

$$x_t = \mu_2 + \theta_{21}(L) V_{z_t} + \theta_{22}(L) V_{x_t}$$

می خواهیم بررسی کنیم که آیا $x_t$، Granger-caused می کند $z_t$ را ؟

$$z_t = \mu_1 + \sum_{i=0} \theta_{11,i} V_{z_{t-i}} + \sum \theta_{12,i} V_{x_{t-i}}$$

هم z و هم x است. ←

$$\rightarrow z_t(1 \mid y_t) = \mu_1 + \sum \theta_{11,i} V_{z_{t-i+1}} + \sum \theta_{12,i} V_{x_{t-i+1}}$$

$$\Rightarrow MSE_z(h \mid y_s / s \le t) < MSE_z(h \mid z_s / s \le t) \Rightarrow$$ $x_t$، Granger-Cause، برای $z_t$ است.

$z_t$ هم تحت تاثیر شوک های z و هم شوک های مربوط به $x_t$ قرار می گیرد.

** اگر $x_t$، non-Granger-caused باشد، در این صورت باید تمامی $\theta_{12}$ روی تمام لگ‌ها، صفر باشد که اثر شوک $V_x$ روی $z_t$ منعکس نشود. ($\theta_{12,i} = 0$ , $i = 0, \dots$) و دقیقاً با Concept با V هم خوانی دارد

و در واقع یک متغیر است.

قضیه:

* اگر $y_t$ از یک فرآیند با ثبات VAR تبعیت کند، اگر $y_t$ را به دو مجموعه متغیر افراز کنیم ← $y_t = \begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix}$

و فرآیند canonical MA را برای $z$ به صورت معادله (1) نوشته شود، non_Granger.causal بودن $x_t$ برای

$z_t$ زمانی برقرار است که تمام $\theta_{12,i}$ ها برابر صفر باشند، $\theta_{12,i}=0$ و $i=0,1,...$

$$MSE_z(h \mid y_s \mid s \leq t) = MSE_z(h \mid z_s \mid s \leq t) \Leftrightarrow \theta_{12,i}=0 \quad , \quad i=0,1,...$$

* اگر causality برقرار نباشد ← $\begin{bmatrix} \theta_{11}(L) & 0 \\ \theta_{21}(L) & \theta_{22}(L) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \theta_{11}^{-1}(L) & 0 \\ \theta_{22}^{-1}(L).\theta_{21}(L).\theta_{11}^{-1}(L) & \theta_{22}^{-1}(L) \end{bmatrix}$

VAR(2):

$$\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,11} & A_{1,12} \\ A_{1,21} & A_{1,22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{2,11} & A_{2,12} \\ A_{2,21} & A_{2,22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{t-2} \\ x_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{zt} \\ U_{xt} \end{bmatrix}$$

non_Granger caused $\rightarrow A_{1,12} = A_{2,12} = 0$

نکته ←

VAR(P): $A_{i,12}=0$ $\quad i=0,1,...,P$

در non_Granger_causal، $z_t$ فقط تابعی از وقفه های خودش است و رابطه علی میان $x_t$ و $z_t$ وجود ندارد.

← می توان با F_test راجع به Granger causal در VAR بررسی نمود.

VAR را یک بار بدون قید تخمین زده و یکبار وقفه‌های $x_t$ را برداشته و تخمین می زنیم، تفاوت‌شان آماره F ظاهر می‌شود.

و در باره معنی داری تفاوت در MSE بحث می کند.

؟

$$
\begin{array}{c}
Z_t \\
X_t \\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ \hline y_{2,t} \\ y_{3,t} \end{bmatrix} = V + \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ \hline .1 & .1 & .3 \\ 0 & .2 & .3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ \hline y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1,t} \\ \hline V_{2,t} \\ V_{3,t} \end{bmatrix}
$$

→ $X_t$ is non Granger _ caused for $Z_t$

→ $Z_t$ is Granger_Causal for $X_t$

* اگر هر دو متغیر Granger هم باشند می‌گوییم Feed back داریم.

با توجه به داشتن ابعاد VAR، و به کار بردن Granger_casulity و اینکه چه زمانی causality وجود دارد به شبیه سازی سیاستی می‌پردازیم. Impulse_Response را استخراج کرده سپس به نقد آن می‌پردازیم و روشی که Sims درباره Policy Simulation در ابزار VAR مطرح کرد را نشان می‌دهیم (اثر یک متغیر شوک روی متغیرهای دیگر.)

: Impulse_Responses

ایده اصلی Impulse_Response بر این منطق استوار است که اگر در یک الگوی VAR، K متغیر داشته باشیم و اگر به یکی از این متغیرها شوکی وارد شود، اثر این متغیر شوک (تکانه) روی خود متغیر و سایر متغیرهای الگوی VAR در طول زمان چه جوری خودش را نشان می‌دهد.

* الگوی VAR را در نظر می‌گیریم که $K=3$ و عرض از مبدا نداریم.

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ .1 & .1 & .3 \\ 0 & .2 & .3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3,t} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_v = \begin{bmatrix} 2.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .5 \\ 0 & .5 & .74 \end{bmatrix} \rightarrow$$ ماتریس واریانس-کوواریانس

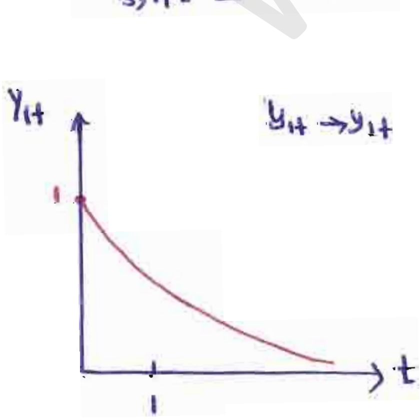
+ در زمان $t$، یک شوک به $v_{1t}$ وارد می‌شود و بقیه شوک‌ها صفر است. ($v_{1t}=1$) می‌خواهیم اثرات این شوک‌ها را در طول زمان بررسی کنیم.

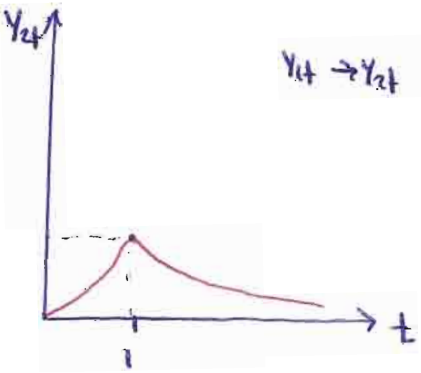
S.1/ $$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_{1t}=1 \\ v_{2t}=0 \\ v_{3t}=0 \end{bmatrix}$$

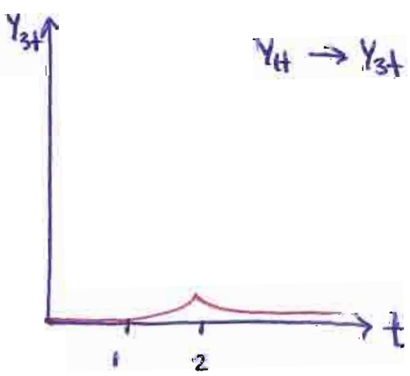
← در S.S مقادیر وقفه‌ها برابر صفر است.

S.2/ $$\begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} \\ y_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ .1 & .1 & .3 \\ 0 & .2 & .3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 \\ .1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{1,t+2} \\ y_{2,t+2} \\ y_{3,t+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ .1 & .1 & .3 \\ 0 & .2 & .3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5 \\ .1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .25 \\ .06 \\ .02 \end{bmatrix}$$



مشکلات روشی که به کار بردیم:

۱) با توجه به ماتریس واریانس ـ کوواریانس و Correlation میان $U$ها، نمی‌توان مثلاً $U_3$ را صفر کرد و $U_2$ را یک کرد و در واقع شوک‌ها خالص نیست، به دلیل وجود Correlation میان $U_2$ و $U_3$.

اگر ماتریس قطری باشد، Correlation نداریم و می‌توان یکی را یک و ما بقی را صفر کرد.

۲) VAR همواره R.F است، خطای آن R.F است و در واقع شوک‌ها به R.F وارد می‌شود و تحلیل از لحاظ اقتصادی ارزشی ندارد. چون شوک‌ها R.F تلفیقی از چند پارامتر ساختاری است.

$$Y\Gamma + XB + E = 0$$

$$-E\Gamma^{-1} = U \Rightarrow \Gamma^{-1'} E' E \Gamma^{-1} = U'U$$

* $U$ ترکیبی از پارامترهای ساختاری است.

$$R.F \rightarrow Y_t = -\Gamma^{-1} B Y_{t-1} - \Gamma^{-1} E_t \Rightarrow Y_t = A Y_{t-1} + U_t \quad VAR(1)$$

$$Y\Gamma + XB + E = 0 \Rightarrow \Gamma Y_t + B X_t + E_t = 0$$

فرض می‌کنیم در الگو متغیر برون‌زا وجود ندارد، اما متغیرهای از قبل تعیین شده وجود دارد.

$$\Rightarrow \Gamma Y_t + B Y_{t-1} + E_t = 0 \Rightarrow Y_t = -\Gamma^{-1} B Y_{t-1} - \Gamma^{-1} E_t \Rightarrow Y_t = A Y_{t-1} + V_t \quad VAR(1)$$

* فرض می‌کنیم در معادلات همزمان، دو متغیر را در set متغیر داریم.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ X_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = 0$$

* اولین معادله $\rightarrow \gamma_{11} Z_t + \gamma_{12} X_t + B_{11} Z_{t-1} + B_{12} X_{t-1} + \varepsilon_{1t} = 0$

در معادله اول $Z_t$ تابعی از بقیه و در معادله دوم $X_t$ تابعی از بقیه می‌شود

نرمالایز می‌کنیم $\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t \\ X_t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$

نکته) در R.F ← Instantaneuse _causality نیست، و فقط Granger_Caused است.

Sims : ۱) سعی می‌کند correlation آنی $V$ها را ببیند.

۲) شوک را به R.F نرهد و شوک‌ها را به ساختار دهد.

۳) I.causality را وارد کرد نه تنها وقفه‌ها اثر دارند بلکه لاهم آنی اثر کند. او این کار را در چارچوب Impulse_Response در الگوی VAR وارد می‌کند.

رویکرد Sims تحت عنوان ortagnol_impulse و

$$Y_t = AY_{t-1} + V_t \quad ; \quad \Gamma Y_t = -BY_{t-1} - E_t$$

$$\Rightarrow Y_t = -\Gamma^{-1}BY_{t-1} - \Gamma^{-1}E_t \Rightarrow \boxed{Y_t = AY_{t-1} + V_t}$$

$$E(VV') = \Sigma_V = PP'$$

جا که پایین مثلثی    بالا مثلثی

* VAR را حل کرده ماتریس واریانس_کوواریانس را بدست آورده و Choleski_Decomposition را انجام می‌دهیم که براساس

اینا رویکرد هر ماتریس مربع را می‌توان به یک ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی تبدیل کرد.

Ex)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21}+a_{22}^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11}=1 \\ a_{12}=3 \\ a_{22}= \end{matrix}$$

؟

ماتریس ماتریس D را Diagnol در نظر می‌گیریم که روی قطر آن دقیقاً مساوی قطر ماتریس P باشد، و P را در $D^{-1}$ ضرب می‌کنیم که روی قطر آن I می‌شود و پایین مثلثی است. لزوماً اجزا آن با ابعاد P برابر نیست.

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} = PD^{-1} \Rightarrow P = \Gamma^{-1}D$$

* می‌خواهیم شوک‌ها را به ساختار ببریم که معنی تئوریک داشته باشد.

$$v_t = -\Gamma^{-1}\varepsilon_t \Rightarrow \varepsilon_t = -\Gamma v_t \rightarrow R.F$$

↳ structured shock

$$\varepsilon_t\varepsilon_t' = \Gamma v_t v_t' \Gamma' \rightsquigarrow E(\varepsilon_t\varepsilon_t') = \Gamma E(v_t v_t')\Gamma'$$

$$\Rightarrow \Sigma_\varepsilon = \Gamma \Sigma_v \Gamma' = \Gamma P P' \Gamma' = \Gamma \Gamma^{-1} D D' \Gamma'^{-1} \Gamma$$

ماتریس واریانس-کوواریانس ساختار $\Rightarrow \Sigma_\varepsilon = \Lambda$ ماتریس قطری

نکته ← چون $\varepsilon$ ها باهم correlation همبستگی دارند یک شوک به $\varepsilon$ وارد می‌شود، یک شوک خالص نیست و بر روی سایر $\varepsilon$ ها هم تاثیر می‌گذارد. با این روش ماتریس واریانس-کوواریانس را قطری کردیم که شوک خالص داشته باشیم و شوک به یکی از $\varepsilon$ ها به دیگر $\varepsilon$ ها تاثیر نمی‌گذارد.

در سیستم معادلات همزمان هدف تخمین ضرایب ساختاری ($\Gamma$ و $B$) بود.

نکته اول) زمانی که ماتریس $P$ را تجزیه و ماتریس واریانس-کوواریانس را بدست آمده، $D$ را به عنوان مقداری که بتواند روی قطر را یک کند بدست می‌آوریم. عملاً به نوعی ماتریس $\Gamma$ را تخمین زده‌ایم و از ماتریس واریانس-کوواریانس شناسایی می‌کنیم. شناسایی از دو روش استفاده از پارامترها و یا ماتریس واریانس-کوواریانس انجام می‌شود. تخمینی از $\Gamma^{-1}$ معادلات همزمان است که پارامترها را به صورت عطفی تخمین می‌زند.

نکته دوم) $\gamma_{12}$ و $\gamma_{21}$ شوک آنی است که اگر بخواهیم شناسایی کنیم (بطور عطفی) یک ماتریس پایین مثلثی می‌شود $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \gamma_{21} & 1\end{bmatrix}$
نوعی شناسایی که Sims بررسی می‌کند عطفی است که همواره just identified است، ایرادی که به Sims وارد شد این بود که معادلات over-identified نیستند. شوک ساختاری است و سیستم معادلات همزمان عطفی است.

رویکرد Sims را که بررسی می کردیم:

یکی از مشکلات Simulation ساده این بود که چون کوواریانس ها غیر صفر بودند، اثر شوک خالص نبود و باعث می شد بررسی اثر شوک ها بر روی متغیرها نتوانیم تفکیک قائل شویم. ایراد دوم این بود که شوک را با R.F می داد که مفهوم اقتصادی ندارد و در حالی که ما با ساختار کاری کنیم و اثر شوک باید برگرفته از ساختار باشد.

ایراد سوم اینکه، شوک های لحظه ای را نمی دید و Granger Causality را بررسی می کرد و $I_0$ causality را بررسی نمی کرد

$$y_1\gamma_{11}+x_1B_{11}+x_2B_{21}+\cdots+x_kB_{k1}+E_1=0$$

سیستم عطفی درنظر می گیریم:

$$y_1\gamma_{12}+y_2\gamma_{22}+x_1B_{12}+\cdots+x_kB_{k2}+E_2=0$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}-1 & \gamma_{12} & \cdots & \\ 0 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -1\end{bmatrix}\Rightarrow P=\Gamma^{-1}D\Rightarrow\boxed{\Gamma^{-1}=PD^{-1}}\qquad\boxed{E=-\Gamma v_t}$$

$$E(vv')=\Sigma_v\Rightarrow\boxed{E(E_tE_t')=\Lambda}$$

چون ماتریس واریانس-کوواریانس R.F، Correlation دارد اما $\Lambda$ ندارد.

به جای اینکه بگوییم سیستم همزمان است، عطفی در نظر می گیریم. تا $\Gamma$ تبدیل به یک ماتریس بالا یا پایین مثلثی تبدیل شود. (با وارد کردن محدودیت های صفر) و به جای اینکه از ols برای تخمین استفاده کنیم از ماتریس $P$ استفاده کرده و $\Gamma^{-1}$ را بدست می آوریم. $\Gamma^{-1}=PD^{-1}$

براین اساس می توان هم شوک را به صورت Instantaneuse درنظر بگیریم و هم شوک های ساختاری بدست آوریم.

توضیح بیشتر ←

$$\begin{bmatrix}-1 & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_t\\ x_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{t-1}\\ x_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix}=0$$

* برای تبدیل این سیستم معادلات همزمان به سیستم عطفی باید $\gamma_{12}=0$ می گذاشتیم. که تبدیل به $\text{فرم } 2$ می شود و سپس به روش ols، $\gamma_{21}$ را تخمین می زنیم.

← از لحاظ نظری جزئی

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{-\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \gamma_{21} & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} z_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} \underbrace{- \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \gamma_{21} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}}_{U_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_t = A\, Y_{t-1} + U_t}$$

* که تبدیل به VAR شده است و identification براساس پارامترهای structural رگرسیون‌ها معادلات ساختاری صورت گرفته است.

* فرض کنید $\gamma_{12} \neq 0$ و VAR داریم که درمورد ۱.ز و ۱.O آن صحبتی نکرده‌ایم. و می‌خواهیم R.F را به تحلیل ساختار برگردانیم.

$$U_t = -\begin{bmatrix} -1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

* می‌توان به جای اینکه شناسایی را روی پارامترها انجام داد، می‌توان از ماتریس واریانس-کوواریانس استفاده کرد که ترکیبی از پارامترهای ساختاری و شوک‌های ساختاری است.

* وچون این ماتریس $\Sigma$ است کافی است که محدودیت را اعمال کرده و شناسایی را انجام دهیم. $E(UU') = \Sigma$

اگر فرض کنیم ۱.ز است با یک قید سیستم عطفی درنظر گرفته می‌شود و کافی است حالا $\gamma_{21}$ را تخمین زد که به نوعی تخمین پارامترهای ساختاری از طریق ماتریس واریانس-کوواریانس است.

وقتی از Ch.D استفاده کردیم مثل اینکه تبدیل به دو ماتریس با لا و پایین مثلثی تبدیل کرده بودیم و شناسایی کردیم، و ۱.ز و سیستم عطفی می‌شود.

داشتن $PP'$ مثل داشتن $P^{-1}$ است، با این تفاوت که در $D^{-1}$ ضرب شده تا نرمالایز گردد.

داشتن D مثل این است که رابطه عطفی میان $\varepsilon$ و $U$ وارد کردیم و با داشتن این ماتریس مثل این است که سیستم معادلات همزمان را به صورت عطفی انجام داده‌ایم. از شوک‌های R.F به شوک‌های ساختاری رسیدیم.

$$U_{1t} = \varepsilon_{1t}$$

$$U_{2t} = \underbrace{\gamma_{21}}\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}$$

ارتباط همزمان $z_t$ و $x_t$

نکته) از فرآیند تحلیل داده‌ها شروع کرده و به جای وارد کردن شوک به R.f با در نظر گرفتن معادلات همزمان شوک

به جملات معادله ساختاری وارد می‌شود. چون با جملات دیگر correlation ندارد یک شوک خالص است.

و براساس رابطه بالا به معادله‌های دیگر وارد می‌شود و همزمان با ارتباط شوک‌های ساختاری وارد می‌شود. ارتباط $Z_t$ و $Y_t$

$\varepsilon_1$ و $\varepsilon_2$ ارتباط دارند.

وقتی به $\varepsilon_{1t}$ شوک می‌دهیم روی خود متغیر $Z_t$ ظاهر می‌شود (در آن واحد) ولی در معادله دوم با ضریب $\delta_{21}$ به طور آنی

در معادله دوم اثر می‌گذارد و در مرحله بعد با وقفه و پویایی سیستم شروع به کار می‌کند.

نکته ← اگر شوک به $\varepsilon_{2t}$ داده شود به طور همزمان بر روی $Z_t$ تا ثیری ندارد و این یکی از ایرادات اولیه است که اولاً به عطف بوف

بر می‌گردد که اگر این رو بگیرد O.I بود مشکل حل می‌شد که بعدها کامل می‌شود و تحت عنوان Structural VAR مطرح می‌شود.

همزمان سه کار انجام دادیم: ۱) شوک‌ها را Diagnal کردیم.

۲) orthognal Impulse ← شوک‌ها را عمود کردیم.

۳) همزمان شوک‌ها را به ساختار می‌دهیم.

نمایش Grangery ، VMA ←

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \, v_{t-i}$$

$$\rightarrow y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \cdot \Gamma^{-1} \varepsilon_{t-i} \quad \Rightarrow \quad y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \, PD^{-1} \cdot \varepsilon_{t-i}$$

D ← انحراف معیار است. چون $DD'$ ماتریس واریانس-کوواریانس است.

$$E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t') = DD'$$

بخاطر ماتریس D شوک به اندازه یک واحد انحراف معیار وارد می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1/\sqrt{\varepsilon_1} & & \\ & \varepsilon_2/\sqrt{S_{\varepsilon_2}} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta^{21} & 1 & 0 \\ \delta^{31} & \delta^{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_{1t} = \varepsilon_{1t} \\ v_{2t} = \delta^{21}\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} \\ v_{3t} = \delta^{31}\varepsilon_{1t} + \delta^{32}\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{3t} \end{cases}$$

* شوک به $\varepsilon_{1t}$ می‌دهیم، از کانال $y^{21}$ به دومی و از کانال $y^{31}$ به سومی وارد می‌شود. (در حالت S.S).

از مرحله بعدی رفته‌رفته به صورت پویا شروع به کار می‌کند recursive Loop اثر خود را نشان می‌دهد و هم Instantaneuse

و هم Granger _ Causality بررسی می‌شود.

نکته ← اگر شوک به $\varepsilon_{4t}$ وارد شود در اولی چون عطفی است بی‌تاثیر است و در دومی و سومی تاثیر دارد (در آن واحد) و در Loop های بعدی وارد اولی می‌شود.

ایراد سیستم عطفی choleski Decomposition با رویکرد Sims ← چون ch.D استفاده می‌کنیم واحد نیست و به جابجایی متغیرهای VAR حساس است و به اینکه کدام متغیر اول باشد حساس است و اگر ترتیب و چیدمان تغییر پیدا کند ch.D تغییر پیدا می‌کند و اهمیت شوک نیز جابجا می‌شود.

برای از بین بردن این ایراد ۲ رویکرد وارد می‌شود:

۱) اگر سه متغیر داشته باشیم ۹ تا impulse _ response داریم، تمام ۹ حالت را در نظر گرفته و بررسی کنیم چقدر تفاوت دارند و کدام با تئوری سازگارتر است.

براساس تئوری Demand side، اثر متغیرهای اسمی و money supply بر روی متغیرهای حقیقی GDP کوتاه مدت است.

نکته ← اگر شوک پولی به کار ببریم در مرحله اول حجم GDP را افزایش می‌دهد اما با افزایش حجم پول در مراحل بعدی باعث می‌شود price بالا رود و تورمی که ایجاد می‌شود می‌تواند افزایش GDP را خنثی کند.

۲) چیدمان متغیرها در VAR براساس تئوری است و براساس ذهنیتی که از تئوری می‌آید می‌توان حدس زد که متغیرهای برون‌زا کدام است.

یک متغیر اقتصاد ساده را در نظر می‌گیریم که سه متغیر $m_2$، P، GDP دارد. به m شوک می‌دهیم و فرض می‌کنیم که سرعت گردش پول ثابت است ← y زیاد می‌شود در مرحله بعدی P بالا می‌رود و رابطه دوباره برقرار می‌گردد. $\Rightarrow P Y_t = V m_t$

اثر روی y کوتاه‌مدت و روی P بلندمدت است.

درواقع در ذهنیت از لحاظ تئوری برای این سیستم $m_2$ برون زاست و می‌خواهیم اثر شوک $m_2$ را روی سایر متغیرها ببینیم

پس چیدمان به صورت $\begin{bmatrix} m_2 \\ GDP \\ P \end{bmatrix}$ است.

داده‌ها نشان می‌دهند که از $P$ و $GDP$ به $m_2$، causality وجود ندارد ولی از $m_2$ به $GDP$ و $P$، casuality وجود دارد. حالت‌های خاص را می‌توان بررسی کرد. با چیدمان تمنی VAR، درون زایی تغییر نمی‌کند.

نکته ← اثر Supply shock مثل تکنولوژی بلندمدت است و اثر Demand shock کوتاه مدت است.

R.B.C می‌گوید هیچ شوکی در اقتصاد تأثیر ندارد بجز تکنولوژی.

در الگوی VAR، تجزیه و تحلیل الگوها ۲ رویکرد دارد:

۱) Impulse_response

۲) Variance_Decomposition

نکته: محققین که آنچه و یا o.i باشد چه از طریق ماتریس واریانس کوواریانس و چه از طریق تخمین سیستم شرایط نتیجه شناسایی فرقی نمی‌کند.

ابتدا یک الگوی VAR را درنظر می‌گیریم:

$$Y_t = v + AY_{t-1} + U_t \Rightarrow Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i U_{t-i} \qquad VMA(\infty)$$

$$\Rightarrow Y_{t+h} = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i U_{t+h-i}$$

توان ۲ این عبارت MSE را می‌دهد ← $(Y_{t+h} - Y_t(h)) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i U_{t+h-i}$ : خطای پیش بینی

* تجزیه واریانس، اساساً بر روی خطای پیش بینی استوار است.

* این روش که مکمل روش Impulse Response است، بحث می‌کند اگر شوک ساختاری به یکی از متغیرها اعمال کردیم، چیزی که مطرح می‌شود این است که چه سهمی از این شوک مربوط به سایر متغیرها می‌شود و چه سهمی مربوط به خود متغیر می‌شود.

* اگر متغیری تغییرات دارد، بررسی می‌کنیم، سهم تغییرات بر روی خود متغیر و سایر متغیرها چگونه است.

* وقتی یک سری را Decompose می‌کنیم درواقع واریانس سری را می‌خواهیم ببینیم از ۱ تا ۱ چه بخشی از تغییرات واریانس مربوط به خودش و چه بخشی مربوط به سایر متغیرها است. (این تجزیه واریانس).

اینجا U داریم که مربوط به R.F است باید تبدیل به شوک ساختاری کرد.

$$(Y_{t+h} - Y_t(h)) = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\theta_i P}_{\phi} \underbrace{D^{-1} \varepsilon_{t+h-i}}_{W} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i W_{t+h-i} \qquad * W = D^{-1} \varepsilon_{t+h-i}$$

$$E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t') = DD'$$

ماتریس واریانس کوواریانس W ها، I می‌شود.

$$E(D^{-1} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_t' D'^{-1}) = D^{-1} E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t') D'^{-1} = D^{-1} D D' D'^{-1} = I$$

$y$ را به دو متغیر $z_t$ و $x_t$ افراز کردیم، می خواهیم اثر شوک ها بر روی $z_t$ را تا $h$ دوره بررسی کنیم.

$$\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11}(L) & \theta_{12}(L) \\ \theta_{21}(L) & \theta_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}$$

$$z_t = \mu_1 + \theta_{11}(L) v_{1t} + \theta_{12}(L) v_{2t}$$

$$z_t = \mu_1 + \phi_{11}(L) w_{1t} + \phi_{12}(L) w_{2t}$$

$$(z_{t+h} - z_t(h)) = \phi_{11}(L) w_{1t+h} + \phi_{12}(L) w_{2t+h}$$

$$\Rightarrow z_{t+h} - z_t(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{11,i} w_{1t+h-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{12,i} w_{2t+h-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (\phi_{11,i} w_{1t+h-i} + \phi_{12,i} w_{2t+h-i})$$

حال اگر $K$ تا متغیر داشته باشیم $j = 1, \dots, K$

$$y_{j,t+h} - y_{j,t}(h) = \sum_{i=0}^{h-1} (\phi_{j1,i} w_{1t+h-i} + \dots + \phi_{jK,i} w_{Kt+h-i})$$

$$\Rightarrow y_{j,t+h} - y_{j,t}(h) = \sum_{K=1}^{K} (\phi_{jK,0} w_{Kt+h} + \dots + \phi_{jK,h-1} w_{Kt+1})$$

توضیح نحوه جابجایی sum ها

$$\sum_{i=0}^{h-1} (\phi_{j1,i} w_{1t+h-i} + \dots + \phi_{jK,i} w_{Kt+h-i}) = \phi_{j1,0} w_{1t+h} + \phi_{j1,1} w_{1t+h-1} + \dots + \phi_{j1,h-1} w_{1t+1}$$

$$+ \phi_{j2,0} w_{2t+h} + \phi_{j,2,1} w_{2t+h-1} + \dots + \phi_{j,2,h-1} w_{Kt+1} + \dots$$

$$= \sum_{K=1}^{K} (\phi_{jK,0} w_{Kt+h} + \dots + \phi_{jK,h-1} w_{Kt+1})$$

35

$$MSE = E\left[y_{j,t+h} - y_{j,t}(h)\right]^2 = \sum_{k=1}^{K} \left( \overbrace{\phi_{j,k,0}^2 + \dots + \phi_{j,k,h-1}^2}^{\text{جمع تمامی شوکها در } h=0} \right)$$

* سهم هر متغیر از تغییرات عبارت است از:

$$\delta_{jk,h} = \frac{\phi_{j,k,h}^2}{\sum_{k=1}^{K} \phi_{jk,h}^2}$$

* جمع تمامی این سهم‌ها یک است.

* می‌توان تمامی این سهم‌ها را در طول زمان استخراج کرد.

√ مثال صفحه 57 کتاب Lutkepohl : مطالعه شود.

یک الگوی کلان ساده داریم که

1) $Y_t = C + I + G + X - M$

۲) $C_t = f_1(Y_t)$

۳) $X = f_2\left(\frac{e_t P_t^*}{P_t}\right)$

۴) $M = f_3\left(Y_t, \frac{e_t P_t^*}{P_t}\right)$

5) $I = f_4(Y_t, r_t)$

6) $\frac{M_t}{P_t} = f_5(r_t, Y_t)$

7) $M^s = M^d$

اگر بخواهیم از سیستم معادلات استفاده کنیم، ۷ معادله داریم.

اگر به جای تخمین معادلات، یک الگوی VAR بزنیم، سیستم را براساس قیمت می‌زنیم و کمینه مقادیر وارد الگو نمی‌شود.

الگوی بزرگ پیش بینی درستی نمی‌دهد، الگوی VAR به دنبال پیش‌بینی درست است و هم‌چنین تعیین ساختار.

برای تبدیل کردن به VAR در steady state می‌نویسیم که تراز تجاری صفر $X - M = 0$

$\Rightarrow Y_t = f_6\left(\frac{e_t P_t^*}{P_t}\right)$ $\Rightarrow Y_t = f_7\left(\frac{e_t P^*}{P_t}, r\right)$ و $\frac{M^s}{P_t} = f_8(r_t, Y_t)$

می‌توان $G_t$ را باصست $G = f(G_{t-1}, \dots)$ وارد کرد. $\Leftarrow$ $Y_t = \left\{Y_t, \frac{eP^*}{P}, r, \frac{M^s}{P_t}\right\}$

بدون اینکه هیچ تئوری را وارد کنیم، می توان به یک الگوی VAR رسید که براساس شوک‌ها و متغیرهای real است.

سوال سه اگر قرار است در VAR هر متغیری را وارد کنیم، تئوری Miss specification چه می شود؟

اگر بدون تئوری باشد Miss specification چه می شود؟

اگر Base ذهنی یک چهارچوب تئوری اعتقاد باشد نه بدین معنی که تئوری را تحمیل کردیم در چهارچوب این الگو هر متغیری بود را وارد VAR کردیم و تئوری تحمیل نکردیم. می دانیم براساس این سیستم هیچ متغیری نیست که در سیستم مهم باشد و ما در الگو وارد نکرده باشیم و هیچ توزیعی بین معادلات تحمیل نشده است و با ۶ متغیر رفتار تمام متغیرهای الگو را در نظر گرفته‌ایم، ممکن است این VAR تحلیل دقیق‌تری نسبت به سیستم معادلات بود.

* در VAR به جای اینکه sector را الگو کنیم، بازار به بازار الگو می کنیم. تحلیل‌ها براساس بازار است.

* تمامی شوک‌های معادلات ۲، ۳، ۴، ۵ در قالب شوک بازار کالا وارد می شود و به جای وارد شدن ۴ شوک، یک شوک وارد می شود.

شناسایی شوک‌های بازار پول و کالا است که کمک به شناسایی رفتار کل می کند، مشکل زمانی است که VAR به خوبی شوک بازار پول و کالا را تفکیک نکند و دچار مشکل شناسایی می شویم.

36

structural VAR:

* اقتصاد سنجی 2: 91.9.26

$$\log L(A', \Sigma) = -\frac{TK}{2}\log 2\pi + \frac{T}{2}\log|\Sigma|^{-1} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} tr(y-\hat{A}'x_t)\Sigma^{-1}(y_t-\hat{A}'x_t)'$$

$$\frac{\partial \log L(\hat{A}', \Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{T}{2}\Sigma - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\hat{U}_t\hat{U}_t' = 0 \Rightarrow \hat{\Sigma} = \frac{\sum \hat{U}_t\hat{U}_t'}{T}$$

* از این R.F به این تخمین زننده ها رسیدیم.

حال آزمون ماکزیمم لایکلیهود ریشو ← LR Test: آزمون محدودیت های مان

over Iden را شناسایی کنیم.

$$\log L(\hat{A}', \hat{\Sigma}) = -\frac{TK}{2}\log 2\pi + \frac{T}{2}\log|\Sigma^{-1}| - \frac{T}{2} tr\, \underbrace{I_K}_{K}$$

$$\boxed{\log L_U(\hat{A}', \hat{\Sigma}) = -\frac{TK}{2}\log 2\pi + T/2\log|\Sigma^{-1}| - \frac{TK}{2}} \rightarrow \text{unrestricted}$$

$$\boxed{\log L_R(\hat{A}', \hat{\Sigma}) = -TK/2\log 2\pi + T/2\log|\Sigma_R^{-1}| - TK/2} \rightarrow \text{Restricted}$$

$$2(\log L_R - \log L_U) = T(\log|\hat{\Sigma}_R^{-1}| - \log|\hat{\Sigma}_U^{-1}|)$$

$$-2(\log L_R - \log L_U) = T(\log|\hat{\Sigma}_R| - \log|\hat{\Sigma}_U|) \quad \chi^2(?)$$

* دارای توزیع $\chi^2$ با ... درجه آزادی است. دارای خواص مجانبی است.

$\lim_{T\to\infty} qF \rightarrow \chi^2(q)$ ✓

← توزیع F مجانباً به توزیع $\chi^2$ میل می‌کند. توزیع F برای نمونه‌های کوچک است.

← توزیع t مجانباً به Z میل می‌کند.

تعیین طول وقفه در VAR به روش آماره LR Test:

$$Y_{1t} = v_1 + \alpha_{11} Y_{1t-1} + \alpha_{12} Y_{2t-1} + \alpha_{13} Y_{1t-2} + \alpha_{14} Y_{2t-2} + U_{1t} \qquad VAR(2)$$

$$Y_{2t} = v_2 + \alpha_{21} Y_{1t-1} + \alpha_{22} Y_{2t-1} + \alpha_{23} Y_{1t-2} + \alpha_{24} Y_{2t-2} + U_{2t}$$

* تست اینکه VAR(1) بهتر است یا VAR(2)؟

بین VAR Restricted و UnRestricted متفاوت است یا ... Restricted / UnRestricted Test

$H_0$: VAR(1)

$H_1$: VAR(2)

VAR(2) ← UnRestricted

VAR(1) ← Restricted

← اگر رد شود ← VAR(2)

(*) با روش ols تخمین بزنیم که همان ols است.

(*) در دنیای واقعی تعیین وقفه بهینه به فرم لاسی را همه ارجحیت دارند.

$$\Sigma = PP'$$

$$PD^{-1} = \Gamma^{-1} \rightarrow P = \Gamma^{-1} D$$

$$\rightarrow \Sigma = \Gamma^{-1} D D' \Gamma^{-1'} = \Gamma^{-1} \Lambda \Gamma^{-1'}$$

$$\Sigma \, tr\,[\Gamma' \Lambda \Gamma] \; T \hat{\Sigma}$$

$$\log L(\Lambda, \Gamma^{-1}) = -\frac{TK}{2}\log 2\pi - \frac{T}{2}\underbrace{\log|\Gamma^{-1}\Lambda\Gamma^{-1'}|}_{\text{perior Information}} - \frac{1}{2}\overbrace{\sum tr\,(\underbrace{y-\hat{A}'x_t}_{\hat{U}'})'(\Gamma'\Lambda\Gamma)(\underbrace{y-\hat{A}'x_t}_{\hat{U}})}^{}$$

→ perior Information

→ posterior Information

37

# Structral VAR :

اقتصاد سنجی ۲ : 91.9.27 :

Blanchard – quart :

یک رویکرد identification :

می‌خواهیم اثرات بلندمدت را در این مدل impose کنیم. $Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + V_t$ VAR(P)

$$\Rightarrow Y_t = (A_1 + A_2 L + \cdots + A_p L^{p-1}) Y_{t-1} + V_t \Rightarrow Y_t = A(L) Y_{t-1} + V_t \Rightarrow (I - AL(L)) Y_t = V_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \longrightarrow V(t)\, C(L)^{-1} \Rightarrow \boxed{Y_t = C^{-1}(L) \cdot V(t)} \Rightarrow Y_t = C^{-1}(L)\, G(L)\, \varepsilon_t$$

اثرات بلندمدت :

(جمع اثرات یک شوک در کوتاه‌مدت صفر است)

$C^{-1}(L) G$ ← را باید بدست آمد. $C^{-1}(L)$ را از تخمین VAR . RF بدست می‌آیم و تنها کافی است G را بدست آوریم.

$$C^{-1}(L) \hat{\Sigma} C^{-1'}(L) = W$$

$$* \; G = P^{-1}$$

$$W = C^{-1}(L)\, G .\, G' .\, C^{-1'}(L)$$

اثر بلندمدت ←

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix} .$$

سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی استان ۲۳۱۴۲ ...

$$\begin{bmatrix} 1 - \Sigma a_{22,i} & -\Sigma a_{12,i} \\ -\Sigma a_{21,i} & 1 - \Sigma a_{11,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$g_{12}(1 - \Sigma a_{22,i}) - g_{21} \Sigma a_{21,i} = 0$$

$$\rightarrow C(L) . C^{-1}(L) . G = G$$

43

$$\Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - Y_{t-3} \Rightarrow \Delta Y_{t-2} = Y_{t-1} - \Delta Y_{t-1} - Y_{t-3}$$

$$\Rightarrow Y_{t-3} = Y_{t-1} - \Delta Y_{t-1} - \Delta Y_{t-2}$$

$$\Rightarrow \Delta Y_t = (A_1 + A_2 + A_3 - I) Y_{t-1} - (A_2 + A_3) \Delta Y_{t-1} - A_3 \Delta Y_{t-2} + V_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta Y_{t-2} + V_t} \qquad \Pi = A_1 + A_2 + A_3 - I$$

بردار — Level — متغیر وجود دارد

↳ Vector Error Correlation Model

↳ یا difference گرفتن، وقفه را یک دوره کم کرد.

تمام تحلیل‌ها بر روی ماتریس $\Pi_{p \times p}$ صورت می‌گیرد.

حالت اول:

در تست ADF اگر $\phi = 0$ می‌بود، متغیرها non-stationary بودند ولی در اینجا چون $\Pi$ ماتریس است باید از رتبه استفاده کنیم. اگر رتبه $\Pi$ برابر صفر باشد، یعنی تمام مقادیر ویژه آن برابر یک است، یعنی در واقع تمام مقادیر ویژه ماتریس $A_1$، $A_2$، $A_3$، $I$، یک است. و تمام ترکیب‌های خطی $I(1)$ هستند. $(\rho(\Pi) = 0)$.

اگر ترکیب خطی دو متغیر که $I(1)$ هستند، $I(0)$ باشد سپس Cointegration وجود دارد.

در واقع مقادیر ویژه همان $\theta$ هست که اگر $\lambda = \theta = 1$ باشد ناایستا می‌شود.

$$Y_t = \theta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \theta \text{ یا } \lambda = 0$$

نکته: اگر $\rho(\Pi) = 0$ هیچ ترکیب خطی میان متغیرها وجود ندارد که $I(0)$ بدهد در واقع تبدیل به VAR (sims) می‌شود و می‌توان از difference استفاده کرد و با این کار اطلاعاتی در بلندمدت وجود ندارد که از دست بدهیم.

حالت دوم ←

اگر $\rho(\pi) = $ full Rank باشد، یعنی تمام متغیرها Stationary هستند و تمامی $\lambda<1$ است وقتی همه‌ها ایستا هستند در واقع رابطه بلندمدتی نداریم. زمانی رابطه بلندمدت داریم که متغیرها ناایستا باشند و ترکیب خطی آنها $I(0)$ باشد و به صورت معمولی وارد VAR می کنیم، تمامی ترکیبات خطی متغیرها $I(0)$ هستند.

حالت سوم: حالتی است که در آن رنک ماتریس $\pi$ نه full Rank است و نه صفر. یعنی در واقع $0<\rho(\pi)<P$ می باشد. در این حالت یعنی متغیرها باهم cointegrate هستند و برخی نیستند و در واقع full Rank نیست و Reduce Rank است و $\rho(\pi)=r$ و $0<r<P$.

reduce rank یعنی ترکیب خطی بعضی از متغیرها cointegrate هست و برخی نیستند.

در واقع اساس فکری Johansen بر روی این شکل می گیرد که ترکیب خطی برخی متغیرها $I(1)$ و برخی $I(0)$ است.

در این روش می توان بررسی کرد: ۱) r چقدر است.

۲) ضرایب بلندمدت و کوتاه مدت را جدا کرد. (تخمین ضرایب بلندمدت و کوتاه مدت).

۳) چند بردار هم انباشتگی داریم ← cointegrated vector.

به بررسی حالت سوم می پردازیم :

Reduced Rank Regration یا RRR

ایده اصلی این است که ابتدا $\pi$ را بخش بندی می کنیم و بردارهایی به صورت زیر تعریف می کنیم .

$Z_{0t} = \Delta y_t$

$Z_{1t} = \Delta y_{t-1}$

$\psi Z_{2t} = \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i \Delta y_{t-i}$

$$\Rightarrow \Delta y_t = \pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi \Delta y_{t-i} + v_t$$

$$\Rightarrow Z_{0t} = \pi Z_{1t} + \psi Z_{2t} + v_t \Rightarrow \boxed{Z_{0t} = \alpha B' Z_{1t} + \psi Z_{2t} + v_t}$$

* Canonical Correlation به قوی ترین همبستگی میان دو Set را گویند . همبستگی میان دو مجموعه به میزان مقادیر ویژه بستگی دارد .

$\pi = \underset{p\times r}{\alpha} \underset{r\times p}{B'}$

اگر رتبه ماتریس در تحقیق Reduced Rank باشد به آن RRR می گویند که $\pi$ را می توان به دو ماتریس افراز کرد .

که ماتریس $\alpha$ و $B$ کاملا نیستند .

و مشاهده می کنیم که $B$ ضرایب بلندمدت و $\alpha$ ضرایب تعدیل کوتاه مدت است .

برای بررسی Correlation میان $Z_{0t}$ و $Z_{1t}$ باید $Z_{2t}$ را از این دو حذف کنیم .

$Z_{0t} = \alpha B' Z_{1t} + \psi Z_{2t}$ (1)

ماتریس ها شد $M_{ij}$ و ... داده $i, j = 0,1,2$ را تعریف می کنیم .

$M_{i,j} = T^{-1} \sum Z_{it} Z'_{jt}$

می توان از رابطه (1)، $\psi$ را بدست آورد با توجه به داشتن $M_{ij}$ .

طرفین رابطه را در $Z'_{02}$ ضرب می کنیم ، sum می گیریم و در $T^{-1}$ ضرب می کنیم به رابطه زیر می رسیم .

$$\Rightarrow M_{02} = \alpha B' M_{12} + \psi M_{22} \Rightarrow \boxed{\hat{\psi} = M_{02} M_{22}^{-1} - \alpha B' M_{12} M_{22}^{-1}}$$

هدف خالص کردن $Z_{0t}$ و $Z_{1t}$ از $Z_{2t}$ است تا correlation آنها را به طور دقیق پیدا کنیم.

با داشتن مقدار $\psi$ می توان پسماند R را بدست آوریم که دیگر داخل آن $Z_{02}$ نداشته باشیم.

پسماندهای خالص شده از $Z_{2t}$ $\Rightarrow \begin{cases} \underset{p\times1}{R_{0t}} = Z_{0t} - M_{02}M_{22}^{-1}Z_{2t} \\ \underset{p\times1}{R_{1t}} = Z_{1t} - M_{12}M_{22}^{-1}Z_{2t} \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{R_{0t} = \alpha B' R_{1t} + \varepsilon_t}$ R.R.R

* $\psi$ دو قسمت دارد: ضریب اول مربوط به $Z_{0t}$ و ضریب دوم مربوط به $Z_{1t}$ است.

$$\Rightarrow (Z_{0t} - M_{02}M_{22}^{-1}Z_{2t}) = \alpha B'(Z_{1t} - M_{12}M_{22}^{-1}Z_{2t}) + \varepsilon_t \quad * \quad \text{R.R.R}$$

* رابطه 1 یک سیستم غیرخطی بر روی متغیرهاست و نمی توان آنها را بدست آورد چون رابطه غیرخطی است.

ابتدا با فرض given بودن B، $\alpha$ را بدست آورده و سپس با بدست آمدن $\alpha$، B را بدست می آوریم. معمولاً این رویکرد

یک روش 2 مرحله ای است.

$$\operatorname{Log} L(\alpha, \hat{B}', \Lambda, \psi) = -\frac{T}{2}\operatorname{Log}|\Lambda| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Z_{0t} - \alpha B' Z_{1t} - \psi Z_{2t})'\Lambda^{-1}(Z_{0t} - \alpha B' Z_{1t} - \psi Z_{2t})$$

$$T^{-1}\Sigma Z_{0t}Z_{0t}' = M_{00}$$

$$T^{-1}\Sigma Z_{0t}Z_{1t}' = M_{01} \qquad \Rightarrow * \operatorname{Log}L = -\frac{T}{2}\operatorname{Log}|\Lambda| - \frac{1}{2}\Big\{ tr\,\Sigma Z_{0t}'\Lambda^{-1}\psi Z_{2t} + tr\,\Sigma Z_{1t}' B\alpha' \Lambda^{-1}\psi Z_{2t}$$

$$T^{-1}\Sigma Z_{0t}Z_{2t}' = M_{02}$$

$$- tr\,\Sigma Z_{2t}'\psi'\Lambda^{-1}Z_{0t} + tr\,\Sigma Z_{2t}'\psi'\Lambda^{-1}.\alpha B' Z_{1t} + tr\,\Sigma Z_{2t}'\psi'\Lambda^{-1}.\psi Z_{2t}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\Big\{ tr\,\psi M_{02}\Lambda^{-1} + tr\,\psi M_{12}B\alpha'\Lambda^{-1} - tr\,\psi'\Lambda^{-1}M_{02} + tr\,\psi'\Lambda^{-1}.\alpha B' M_{12} + tr\,\psi'\Lambda^{-1}\psi M_{22}\Big\}$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow -\Lambda^{-1} M_{02} + \Lambda^{-1} \alpha . B' M_{12} - \Lambda^{-1} M_{02} + \Lambda^{-1} \alpha . B' M_{12} + 2 \Lambda^{-1} \psi M_{22} = 0$$

$$\Rightarrow -M_{02} + \alpha B' M_{12} + \psi M_{22} = 0 \Rightarrow \hat{\psi} = M_{02} M_{22}^{-1} - \alpha B' M_{12} M_{22}^{-1}$$

$$\text{Log}L(\alpha, B, \Lambda) = -T/2 \,\text{Log}|\Lambda| - 1/2 \sum_{t=1}^{T} (R_{0t} - \alpha B' R_{1t})' \Lambda^{-1} (R_{0t} - \alpha B' R_{1t})$$

$$T^{-1} \sum R_{0t} R_{1t}' = S_{01}$$

$$* -\frac{1}{2} \left\{ \text{tr}\, \alpha B' S_{01} \Lambda^{-1} - \text{tr}\, \alpha' \Lambda^{-1} S_{10} B + \text{tr}\, \alpha' \Lambda^{-1} \alpha B' S_{11} B \right\}$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow -\Lambda^{-1} S_{01} B - \Lambda^{-1} S_{10} B + 2 \Lambda^{-1} \alpha B' S_{11} B = 0$$

$$\Rightarrow S_{01} B = \alpha B' S_{11} B \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = (S_{01} B)(B' S_{11} B)^{-1}}$$

2) $\frac{\partial \text{Log}|A|}{\partial A} = A^{-1}$

1) $\frac{\partial \text{tr}(AB)}{\partial A} = B'$ تذکر/

3) $\frac{\partial \text{Log}|A^{-1}|}{\partial A} = A$

4) $\frac{\partial \text{tr} A^{-1} B}{\partial A} = B'$

$$\operatorname{Log} L = \frac{T}{2} \operatorname{Log} |\Omega^{-1}| - \frac{1}{2} \sum \operatorname{tr} \Omega^{-1} (R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})' (R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Log} L}{\partial \Omega} = \frac{T}{2} \Omega - \frac{1}{2} \sum^{T} (R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})' (R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})$$

$$\Rightarrow \hat{\Omega} = T^{-1} \sum^{T} (R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})' (R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})$$

$$\Rightarrow \hat{\Omega} = S_{00} - S_{01} \beta \alpha' - \alpha \beta' S_{10} + \alpha \beta' S_{11} \beta \alpha'$$

با جاگذاری $\alpha$ در رابطه بالا به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\hat{\Omega} = S_{00} - S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1} \beta' S_{10}}$$

$$\Rightarrow \hat{\Sigma} = S_{00} - S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1} \beta' S_{10}$$

$$|\Sigma| = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = |\Sigma_{11}| \left| \Sigma_{22} - \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \right| = |\Sigma_{22}| \left| \Sigma_{11} - \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \right|$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} S_{00} & S_{01} \beta \\ \beta' S_{10} & \beta' S_{11} \beta \end{vmatrix} = |S_{00}| \left| \beta' S_{11} \beta - S_{01} \beta (S_{00})^{-1} \beta' S_{10} \right| = |\beta' S_{11} \beta| \left| S_{00} - S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1} S_{10} \right|$$

$$\Rightarrow \left| S_{00} - S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1} \beta' S_{10} \right| = \frac{|S_{00}| \left| \beta' S_{11} \beta - S_{01} \beta (S_{00})^{-1} \beta' S_{10} \right|}{|\beta' S_{11} \beta|}$$

هدف Max کردن Likelihood است و نیز Duality است مثل اینکه ماتریس واریانس-کوواریانس را Min کنیم.

اگر $\hat{\Sigma}$ بدست آمده را در $\log L$ قرار دهیم و چون

$$T\hat{\Sigma} = tr\,\Sigma (R_{0t}-\alpha B' R_{kt})'(R_{0t}-\alpha B R_{kt})$$

$$\Rightarrow \log L = -T/2 \log|\Sigma| - T/2\, tr I \Rightarrow \log L = -T/2 \log|\Sigma| - \frac{TP}{2}$$

* Min کردن $\Sigma$ معادل Max کردن Likelihood است.

* B باید چه باشد که L حداکثر گردد و $\Sigma$، مینیمم گردد.

* مرحله اول هدف بدست آوردن $\alpha$ و $\Sigma$ بود و مرحله دوم بدست آوردن $\Sigma$ به نحوی است که L را Max و $\Sigma$ را Min کند. B تابعی است که cointegrate vector را می‌دهد.

Lema1 :

اگر دو ماتریس متقارن $M_{p\times p}$ و $N_{p\times p}$ را درنظر بگیریم که اولی نیمه معین مثبت و دومی مثبت معین باشد حل معادله $|\lambda N - M| = 0$ در واقع مقادیر ویژه‌ای را می‌دهد که براساس آن مقادیر ویژه می‌توان به صورت زیر باشد:

$\lambda$ ها براساس مقادیر مرتب شده‌اند. $\rightarrow$ $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_p$

خواصی که می‌توان استخراج کرد به صورت زیر است

1) $\lambda_i N V_i = M V_i \rightarrow$ $\lambda_i$ بردار ویژه مربوطه

که یک ماتریس قطری است که در آن 2) $V_i' N V_i = I$ , $V_i M V_i = D$

مقادیر ویژه قرار دارند.

Lemma2 : با تعریف ماتریس های M و N به صورت قبل، نسبت زیر براساس بزرگترین مقادیر ویژه $\lambda_i$ و بردار ویژه $V_i$ که از حل $|\lambda_i N - M| = 0$ حاصل می‌شود، Max می‌شود.

$$\frac{X'MX}{X'NX}$$

X یک بردار $P \times 1$ است.

$V_i$ که براساس $\lambda_i$، max بدست آمد در واقع همان X است.

اولین $\lambda$، $\lambda_1$ و دومی $\lambda_2$ و ... این روند می‌تواند ادامه داشته باشد تا جایی که ارتباط وجود داشته باشد

X ← بردار ویژه براساس بزرگترین $\lambda$ است که یکتا نیست.

* می‌خواهیم $\hat{\Sigma}$ را min کنیم که برابر است با ← $\hat{\Sigma} = \frac{\sum (R_{0t} - \alpha B' R_{1t})(R_{0t} - \alpha B' R_{1t})'}{T}$ و می‌خواهیم

residual correlation را بدست آوریم که به رابطه یا نسبت $\frac{X'MX}{X'NX}$ می‌رسیم.

$|A - \lambda I| = 0$ ← فقط رفتار مقادیر ویژه A را نشان می‌دهد، $\lambda I$ اطلاعاتی ندارد.

و $\lambda$، correlation در sd است. قوی‌ترین correlation براساس بزرگترین $\lambda$ ← $|\lambda N - M| = 0$

Lemma3 : $Max\left|\frac{B'MB}{B'NB}\right|$ زمانی حاصل می‌شود که رابطه $\prod_{i=1}^{r} \lambda_i$، max گردد که در آن B معادل بردارهای ویژه است ← $B = (V_1, \dots V_r)$

در واقع r تعداد $\lambda$ های بزرگ و معنی‌دار است که $\lambda$ ها از حل $|\lambda_i N - M| = 0$ حاصل شده است ← $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$

B یک ماتریس Reduced Rank است که ابعاد آن $P \times r$ است و یکتا نیست.

$N = S_{11}$ و $M = S_{11} - S_{10}(S_{00})^{-1} S_{01}$

$\Rightarrow |\rho S_{11} - (S_{11} - S_{10}(S_{00})^{-1} S_{01})|$

* در تمامی لم‌های می‌خواستیم Max کنیم ولی اینجا می‌خواهیم Min کنیم. در این حالت $\lambda$ $\rho=1-\lambda$ است و باید min کنیم.

$$\Rightarrow \left| (1-\lambda)S_{11} - (S_{11} - S_{10}(S_{00})^{-1}S_{01}) \right| = \left| \lambda S_{11} - S_{10}(S_{00})^{-1}S_{01} \right| = 0$$

$\lambda$ها را بدست می‌آوریم، که با توجه به $\lambda$ها، $\rho$ها را بدست می‌آوریم و براساس رابطه $\prod_{i=1}^{r} \hat{\lambda}_r$ حداقل سازی انجام می‌شود

Maximum Likelihood Ratio Test یا (LR)

واریانس ناهمسانی شرطی (AR). Auto regressive Conditional Hetero secedastisity : (ARCH)

این کار را اولین بار Engle در سال 1982 ارائه کرد. ارائه نظری این رویکرد بازار مالی را تحت تاثیر قرار داد.

و تبدیل به ابزار قدرتمندی برای اندازه گیری ریسک و پیش بینی ریسک شده است.

در بازاری مثل بازار نفت تنها تقاضا و عرضه تعیین کننده نیست بلکه بورس بازهایی هستند که می توانند در قیمت تاثیر بگذارند.

و بحث اصلی این است که چه عواملی باعث تغییر قیمت می شود. در واقع می توان دو اثر را مطرح کرد که اثر بلندمدت مربوط

به عرضه و تقاضا و اثر کوتاه مدت مربوط به بورس بازان می شود.

در بورس زمان بسیار مهم است، تغییرات آنی برای تحلیل بازار بسیار مهم است و حجم مبادلات روزانه است که

می تواند قیمت را در کوتاه مدت تحت تاثیر قرار دهد. اما در مورد عرضه و تقاضا بلندمدت مطرح است و مثلاً سالانه مطرح میشود.

آیا قیمت تعادلی وجود دارد؟ و به چه صورت تعیین می شود؟

تعادل یک مفهوم تعلقی است و ما در فضای تصادفی کار می کنیم و زمانیکه بازار تصادفی است ما در فضای تصادفی کار می کنیم.

تعادل آماری به جای تعادل قطعی مطرح می شود. cointegrate بودن و I(0) بودن به معنای تعادل است و در یک بازه تعادل مطرح

می شود و نه در یک نقطه. در واقع منظور از تعادل در فضای تصادفی است که stationary.

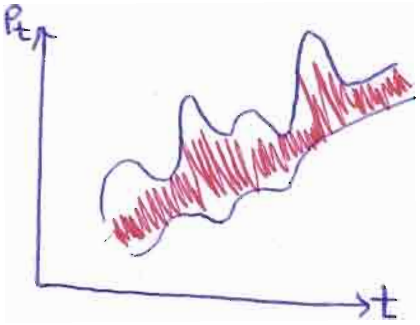
فرض می کنیم قیمت stock Market را به صورت روزانه داریم و می خواهیم پیش بینی کنیم. با روش های مختلفی می توان این کار را

انجام داد، مثلاً با ARIMA.

میانگین مهم نیست بلکه واریانس مهم است و ریسک مطرح می شود. دنبال روشی هستیم که نوسانات را بررسی کند.

منظور از fluctuation که تغییرات میانگین است.

منظور از Validity که تغییرات واریانس است.




ARCH ← می‌خواهیم الگو بررسی کنیم که بتواند ریسک را بررسی و پیش‌بینی کند.

متغیری شکل قیمت، تورم و ... را در نظر می‌گیریم ←

در Time Series واریانس داده‌ها را ثابت در نظر می‌گرفتیم.

$$Y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

$E(u_t^2) = \sigma^2$ واریانس غیرشرطی

Engle مطرح می‌کند اگرچه واریانس غیرشرطی ثابت است اما دسته به دسته یا خوشه به خوشه واریانس از یک دوره به دوره بعد به صورت conditional تغییر پیدا می‌کند.

در واقع واریانس دوره قبل conditional می‌شود برای دوره بعد.

اگر یک AR(P) را در نظر بگیریم ←

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + u_t \qquad u_t \sim i.i.d\ N(0, \sigma^2)$$

شرط ثبات این است که ریشه‌ها باید داخل دایره واحد قرار بگیرند (ریشه‌های z خارج از دایره واحد باشند).

$$|1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 \dots - \phi_p z^p| = 0$$

← $u_t^2$ خودش می‌تواند یک فرآیند AR باشد.

$$u_t^2 = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \varepsilon_t \quad \text{که} \quad \varepsilon_t \sim i.i.d\ (0, \lambda^2)$$

$$E(u_t^2 \mid u_{t-1}^2, \dots, u_{t-m}^2) = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2$$

$$\Rightarrow u_t^2 = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \varepsilon_t \ , \quad \varepsilon_t \sim i.i.d\ (0, \lambda^2) \quad \text{که} \quad \text{ARCH}$$

40

$$|1-\alpha_1 z-\alpha_2 z^2-\dots-\alpha_m z^m|=0$$

می‌دانیم $v_t^2$ مثبت است چون تمام $v$ها دارای توان ۲ هستند.

با محدودیت‌هایی اعمال کنیم که حتماً مثبت است، باید تمامی ضرایب مثبت باشد.

1) $\delta>0$ 2) $-\delta=\varepsilon_t$ که $\varepsilon_t$ نباید از $\delta$- کوچکتر باشد

3) $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m<1$ $\rightarrow$ stability شرط

$u_t=\sqrt{h_t}\,v_t$ $v_t\sim N(0,1)$ تبدیل دیگری از ARCH که عمومی‌تر است

$$h_t=E(u_t^2|u_{t-1}^2,u_{t-2}^2,\dots,u_{t-m}^2)=\delta+\alpha_1 u_{t-1}^2+\dots+\alpha_m u_{t-m}^2 \quad ARCH(m)$$

$$\Rightarrow u_t^2=h_t v_t^2 \rightarrow E(u_t^2)=h_t\,E(v_t^2)=h_t$$

$h_t \leftarrow$ ریسک بازار است.

در این سیستم از $\alpha_1$ تا $\alpha_m$ را باید تخمین بزنیم و هیچ اطلاعاتی از $h_t$ نداریم. برای بدست آوردن $h_t$ باید $\phi_1$ تا $\phi_p$ را تخمین بزنیم و پسماندها را بدست آوریم. اما در مورد واریانس شرطی اطلاعاتی نداریم و رگرسیون قابل حل و تخمین نیست و از یک فرآیند MLE بدست می‌آید $h_t$ تابعی از پسماندها به توان ۲ می‌باشد.

$$Log L=-T/2\,Log 2\pi-T/2\,Log\,h_t-\frac{1}{2h_t}(y_t-c-\phi_1 y_{t-1}-\dots-\phi_p y_{t-p})^2$$

باید هم نسبت به واریانس و هم نسبت به پارامترهای $\phi_1$ تا $\phi_p$ مشتق بگیریم.

$h_t$ خودش تابعی از $\alpha$ و $\phi$ و یک فرآیند غیرخطی است.

$$h_t=\delta+\alpha_1(y_{t-1}-c-\phi_1 y_{t-2}-\dots-\phi_p y_{t-p})^2+\dots+\alpha_m(y_{t-m}-c-\phi_1 y_{t-m-1}-\dots)^2$$

ابتدا یک حل حدسی از $\phi_1$ تا $\phi_p$ که از ols بدست آورده‌ایم در نظر می‌گیریم. در نتیجه $u_1$ تا $u_m$ را بدست می‌آوریم. در L تخمین از $\alpha_1$ تا $\alpha_m$ نیاز داریم تا با داشتن $u_1$ تا $u_m$، $h_t$ را بدست آوریم. در likelihood نمایی و به صورت علامتی نشان می‌دهد که به Max

نزدیک شده است یا نه و این فرآیند ادامه می یابد تا به Max likelihood برسد.

$$\theta_0^{t+1} = \theta_0^{t} + \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta_0}\right)\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_0 \partial \theta_0'}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow \theta = (\phi_i , \alpha)$

به طور معمول تا جایی ادامه می دهیم که $|\theta^{t+1} - \theta^{t}| < \delta$ .

Econometrics : 13.10.91

Generalized Autoregressive conditional hetroscedasticity :

$$h_t = \xi + \pi(L)\, v_t^2$$

$$\pi(L) = \sum \pi_i L^i \quad , \quad \pi(L) = \frac{\alpha(L)}{1-\delta(L)} \rightarrow$$

باید طولانی تا ∞ است اما
چون تخمینا وقت نمیشه
ما آنرا تا m درنظر میگیریم.

$$\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_m L^m$$

$$\delta(L) = \delta_1 L + \delta_2 L^2 + \dots + \delta_q L^q$$

$$* \; v_t^2 = h_t + \varepsilon_t$$

$$* \; h_t = \xi + \frac{\alpha(L)}{1-\delta(L)} v_t^2 \Rightarrow (1-\delta(L))\, h_t = \xi(1-\delta(L)) + \alpha(L) v_t^2$$

$$\Rightarrow h_t = K + \delta(L) h_t + \alpha(L) v_t^2$$

$$\Rightarrow h_t = K + \alpha_1 v_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m v_{t-m}^2 + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \dots \delta_q h_{t-q} \; *$$

$$\Rightarrow h_t + v_t^2 = K + \alpha_1 v_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m v_{t-m}^2 + \delta_1 h_{t-1} + \dots + \delta_q h_{t-q} + v_t^2$$

$$\Rightarrow h_t + v_t^2 = K + \alpha_1 v_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m v_{t-m}^2 + \delta_1 v_{t-1}^2 + \dots + \delta_q v_{t-q}^2 - [\delta_1 v_{t-1}^2 + \dots + \delta_q v_{t-q}^2] +$$
$$\delta_1 h_{t-1} + \dots + \delta_q h_{t-q} + v_t^2$$

$$\Rightarrow h_t + v_t^2 = K + (\alpha_1 + \delta_1) v_{t-1}^2 + \dots + (\alpha_r + \delta_r) v_{t-r}^2 - [\delta_1 v_{t-1}^2 + \dots + \delta_q v_{t-q}^2] +$$
$$\delta_1 h_{t-1} + \dots + \delta_q h_{t-q} + v_t^2$$

$$\rightarrow r = \max\{m, q\}$$

$$\Rightarrow h_t + v_t^2 = K + (\alpha_1 + \delta_1) v_{t-1}^2 + \dots + (\alpha_r + \delta_r) v_{t-r}^2 + \delta_1 (h_{t-1} - v_{t-1}^2) + \dots + \delta_q (h_{t-q} - v_{t-q}^2)$$
$$+ (v_t^2 - h_t)$$

$$v_t^2 = \delta + \alpha_1 v_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m v_{t-m}^2 + \varepsilon_t \Rightarrow v_t^2 - h_t = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow v_t^2 = K + (\alpha_1+\delta_1)v_{t-1}^2 + \cdots + (\alpha_r+\delta_r)v_{t-r}^2 + \delta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \delta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$ ← GARCH (r,q)

$$(\alpha_1+\delta_1) + \cdots + (\alpha_r+\delta_r) < 1$$

* شرط stable بودن این سیستم ←

ARCH in Mean : فرض کنید قیمت بازار را داریم، می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازارها کارا هستند یا نه؟ آزمون unit root می‌زنیم

اگر random walk باشد هیچ اطلاعاتی نداریم و صرفاً noise است. اگر random walk یا mean باشد نشان دهنده کارایی است در غیر این صورت بازار کارا نیست.

$$\log P_t = c + \log P_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \Delta \log P_t = c + \varepsilon_t$$ → rate of return ←

بازدهی بازار ←

$c$ → mean of rate of return ←

میانگین بازدهی بازار

$$\Rightarrow \hat{e}_t = \Delta \log P_t - \hat{c}$$

بازدهی بازار تا میزان c هست و تا چه اندازه ریسک هم می‌باشد.

$$\Rightarrow h_t = \delta + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_{t-1}^2$$ → ARCH

$$\Rightarrow h_t = \hat{\delta} + \hat{\alpha}_1 \hat{e}_{t-1}^2 + \hat{\delta}_1 h_{t-1}$$ → GARCH

ریسک روی بازدهی اثر نمی‌گذارد؟ آیا تغییر ریسک می‌تواند خودش روی بازدهی اثر بگذارد؟

$$\Delta \log P_t = c + \varepsilon_t$$
$$h_t = \delta + \alpha v_{t-1}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta \log P_t = c + \beta h_t + \varepsilon_t \\ h_t = \delta + \alpha v_{t-1}^2 + \delta h_{t-1} \end{cases}$$

ریسک در بازار تأثیر می‌گذارد، تغییر در ریسک بر روی بازار هم تأثیرگذار است.

کارایی یعنی به هیچ وجه شوک و ریشه‌ای غیرانتظاری در فرآیند قیمت وجود نداشته باشد و بهترین پیش‌بینی برای دوره بعد همین دوره است.

و صرفاً ریسک تأثیرگذار است. اگر ریشه‌ای غیرانتظاری داشته باشد یعنی می‌توان یک الگو از این فرآیند استخراج کرد که رفتار بازار را پیش‌بینی کند.

## E GARCH :

← الگو کردن اطلاعات به صورت نا متقارن است

← یعنی اثری که یک خبر خوب دارد برابر نیست با اثری که یک خبر بد دارد.

$$\log h_t = \xi + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left\{ |u_{t-j}| - E|u_{t-j}| \right\} + \delta u_{t-j}$$

اثر asy را می‌برد

← اثر asy-metric نداریم. ⇐ $\delta = 0$ و $u_t > 0$ اگر

اثر خبر خوب و بد متفاوت خواهد بود. ⇐ اگر $\delta \neq 0$

اثرات تشدیدی کند. ⇐ اگر $u_t < 0$ و $\delta < 0$

اثر را کاهش می‌دهد. ⇐ اگر $\delta > 0$ و $u_t > 0$

Multi Variate _ ARch _ mean _ Asy :

T ARch → ← اثر شوک‌های مثبت و منفی را جدا کرده و اگر ضرایب یکسان بود یعنی symmetric است.