انتگرال
به زبون آدمیزاد

EASY

هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد

NANO LEARN

NanoAmouz

برای دانلود جدیدترین نسخه این جزوه، روی نماد نانولرن لمس کنید

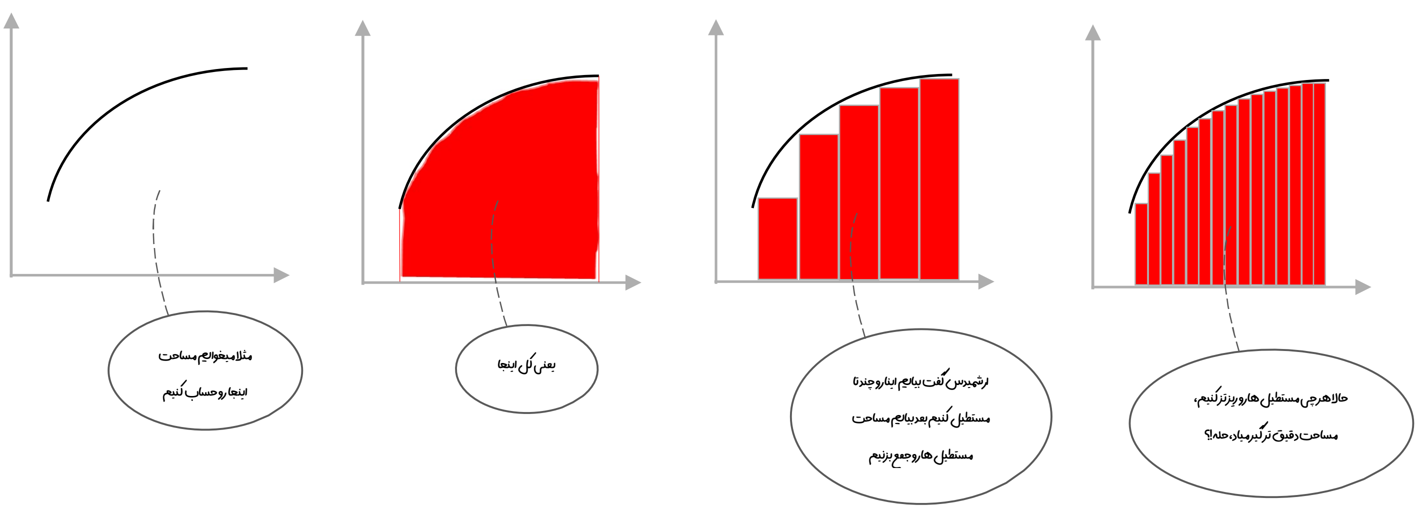
مهندس مجتبی احمدی

داستان انتگرال برمی‌گرده به زمان یونانیای قدیم، یعنی حدود ۲۳۰۰ سال پیش. یه دانشمند خفن به اسم ارشمیدس تو ذهنش یه سوال عجیب داشت:

چجوری می‌شه مساحت یه شکل عجیب‌غریب (مثل یه منحنی) رو حساب کرد؟ 🤔

اون موقع یه روش هوشمندانه کشف کرد که بهش میگفتن روش خسته‌کننده‌ی تقسیم‌بندی ! (البته اسم واقعیش "اگزاستیون" بود، ولی کی حوصله این اسما رو داره؟ 😆) خلاصه، ایده‌ش این بود که اون شکل عجیب رو به یه عالمه تیکه کوچیک تقسیم کنه (مثلاً مثل مستطیل‌های ریزریز) و مساحت هرکدومو جدا حساب کنه. هرچی تعداد این تیکه‌ها بیشتر می‌شد، جواب دقیق‌تر درمیومد. قبول داری؟

اینجارو نگاه کن تا بفهمی چی گفته :



حالا تو قرن ۱۷ میلادی دو تا مغز متفکر، یعنی آیزاک نیوتن از انگلیس و لایب‌نیتس از آلمان، هر کدوم جداگونه فهمیدن که انتگرال در واقع یه جور برعکس مشتقه! 😳 یعنی اگه مشتق یه تابعو بگیریم، برگردونیمش میشه انتگرال!

حاجی القصه، این کشف باعث شد دنیای ریاضی زیر و رو بشه! ولی داستان خفن‌تر اینجاست که این دوتا سر این موضوع بدجور با هم دعواشون شد که کی اول اینو کشف کرده 😅

بیا سختش نکنیم دیگه ماهم مثل اینا نیفتیم به جون هم 😅 ، جیگر انتگرال رو فعلا برعکس مشتق در نظر بگیر، گرفتی چیشد؟

حالا چون انتگرال در واقع جمع همه اون مستطیل هایی هستش که زیر نمودار یه تابع هستن، پس علامتش هم کلمه جمع انگلیسی (SUM) هستش یعنی مخفف اش S، فقط یه کوچولو قدش بلند تره 👈 $\int$

همین اول بگم چون انتگرال خیلی جاها قراره استفاده بشه، پس همیشه باید مشخص کنی که نسبت به چی داری انتگرال می‌گیری! مثلا جزوه "مشتق به زبون آدمیزاد پیشرفته" رو اگه خونده باشی تو "**مشتق جزئی**" گفتم، ما معمولا نسبت به X مشتق می‌گیریم ولی خب

میتونیم نسبت به خیلی چیزا مشتق بگیریم، پس تو انتگرال هم برای اینکه کسی قاطی نکنه، همه مون قرار میزاریم که بگیم آقا نسبت به چی داریم انتگرال می‌گیریم و برای نشون دادن این از این علامت ها جلوی انتگرال استفاده می‌کنیم : dx dy dz

مثلا از تابع x^2 نسبت به X انتگرال می‌گیریم، الان فقط بنویسیم بعد میگم چجوری انتگرال رو بگیری : $\int x^2\, dx$

خب الان از همین تابع نسبت به Y انتگرال بخوای بگیری، چجوری می‌نویسی : $\int x^2\, dy$

خب الان داری فکر می‌کنی باشه بابا، علامت هارو یاد گرفتم ولش کن، الان جواب این لامصب چی میشه؟ خب بزار یه سوال بپرسم، مشتق $\frac{x^3}{3}$ رو برام بگیر ببینم... اینجارو نخون کاغذ بردار مشتق بگیر... بلد هم نیستی برو جزوه "مشتق به زبون آدمیزاد" رو بخون...

خب جوابش چی شد؟ آفرین شد x^2 یعنی چی؟ مگه مشتق برعکس انتگرال نیست؟ پس جواب انتگرال پیدا شد : $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$

بیا آخرین قانون رو هم هم بهت بگم تا دیگه دست پر بریم چند تا تکنیک بهت یاد بدم هر چی انتگرال دیدی بدون فکر کردن حل شون کنی! اصلا غصه نخور قیافه اش گنده است! 😅

اینارو ببین :

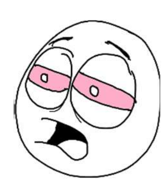
$$x^2+3 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$
$$x^2+4 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$
$$x^2+5 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$
$$x^2+6 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$

دیدی اون عدده هیچ تاثیری نداشت؟ چون قبلا یاد گرفته بودیم که مشتق عدد ثابت همیشه صفره، بخاطر همین هم وقتی انتگرال می‌گیرن میگن کنار جواب یه نماد برای اون عدد ثابته هم بزار مثل C (مخفف Constant)

اصلا بیا برگردیم همون مثال بالایی که زدیم خودت به چشم ببین برای چی این C رو میزاریم؟

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}+1 \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \frac{x^3}{3}+1 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}+2 \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \frac{x^3}{3}+2 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}+3 \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \frac{x^3}{3}+3 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}+4 \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \frac{x^3}{3}+4 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}+C \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \frac{x^3}{3}+C \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$

جای همه عددهایی که میشه گذاشت خب همینو بزار



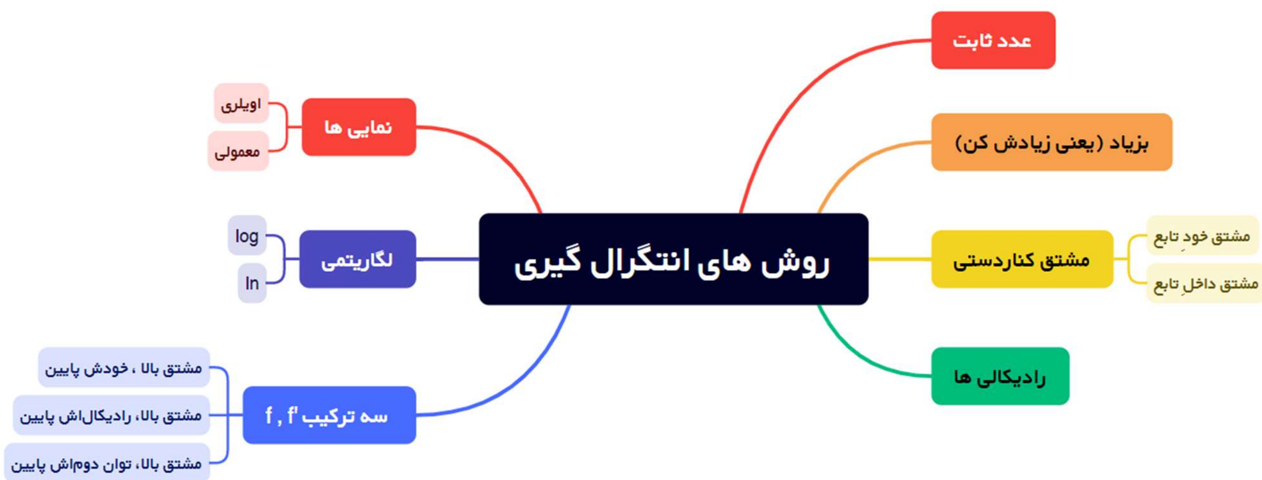
خب تا اینجا یه خلاصه بگم خسته شدی، اصلا بزار نشونت بدم خودت بگیری چیشد :

$$\int 2x\,dx = x^2 + c \qquad\qquad x^2 \xleftarrow{\text{انتگرال بگیر}} \; \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} 2x$$

دخترا و پسرا، قراره روش هارو باهم یاد بگیریم، اما همینجا بگم یه کوچولو زرنگ باشی، ببین هر جوابی رو از هر جایی نوشتی، حالا چه خودت حل کردی یا چه تقلب کردی، به پسره چشمک زدی اونم هول بوده رسونده 😎 ، نه تهش، تست کن ببین جواب درسته یا نه؟

چجوری؟ معلومه اگه از جواب انتگرال مشتق بگیری باید چیو بده؟ آفرین تابعی که میخوای ازش انتگرال بگیری رو میده، اگه نداد ک یعنی جواب غلطه!

اینم دسته بندی چیزایی که قراره اینجا یاد بگیریم، مابقی حالت های مهم رو میتونی تو **نسخه پیشرفته** بخونی :



انتگرال عدد ثابت

لب کلام اگه از یه x خالی مشتق بگیری چی میشه؟ آفرین میشه یک! یعنی انتگرال عدد ثابت میشه x تموووووم!

$$\int 3\,dx = 3x \quad , \quad \int 5\,dx = 5x \quad , \quad \int 1\,dx = x \quad , \quad \int \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}x \quad , \quad \int e^2\,dx = e^2x$$

$$\int \sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}x \quad , \quad \int \pi\,dx = \pi x \quad , \quad \int \pi\,dy = \pi y$$

حواست باشه عدد ثابت، اعداد اویلر و عدد پی و چیزای دیگه هم هستن ها! یعنی هر چیزی که x نداره ، عدد ثابته، همین!

قانون بزیاد (یعنی زیادش کن)

آقا سلبریتی همه قانون های انتگرال گیری همینه! میگه هرچی چند جمله ای دیدی که ساده بود (یعنی رادیکالی و مثلثاتی و... نباشه)،

اینارو یه توان بهشون اضافه کن، همون توان رو بزار تو مخرج شون، مثلا اینو ببین : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} \quad , \quad \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} \quad , \quad \int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}$$

نکته 1 : ضریب دیدی بزار بیرون، اون ضریب رو مستقیم بیار تو جواب، نمیخواد بهش دست بزنی، مثلا اینارو ببین :

$$\int 3x\,dx = 3\frac{x^2}{2} \quad , \quad \int 7x\,dx = 7\frac{x^2}{2} \quad , \quad \int 5x^4\,dx = 5\frac{x^5}{5} = x^5$$

نکته 2 : اگه عبارتی بود که توش جمع و تفریق دیدی، هول نکن، اول تفکیک شون کن، بعد دونه انتگرال شونو بگیر؛ به قول

خودمون هر فیلی رو قاشق قاشق میشه خورد 😅

$$\int x+1\,dx = \int x\,dx + \int 1\,dx = \frac{x^2}{2} + x \quad , \quad \int x^2 - x + 1\,dx = \int x^2\,dx + \int -x\,dx + \int 1\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

$$\int 2 - x^3\,dx = \int 2\,dx - \int x^3\,dx = 2x - \frac{x^4}{4} \quad , \quad \int x - x^2\,dx = \int x\,dx - \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

استاد پس اون C که می‌گفتی رو چرا نمیزاری؟ آفرین که دقت کردی، باید بزاریم، ولی اینجا چون داریم یاد می‌گیریم نزاشتم، ولی بریم برای

حل سولات امتحان دیگه باید بزاریم. زرنگ بازی هم درنیار من خودم جایزه بگیرم جیگر 😅

خب حالا اگه ضرب و تقسیم دیدم مثل این $\int \sqrt{x}\,(x-1)\,dx$ اونوقت چی؟ اینو تو نسخه پیشرفته یاد می‌گیریم، فعلا عجله نکن! ولی خب تا

جایی که تونستی ضرب کن باز و تفکیک شون کن!

نکته 3 : اگه متغیر دیگه ای دیدی، اونو مثل عدد ثابت در نظر بگیر! میتونی بندازی از انتگرال بیرون و تو جواب نهایی صاف بیاریش مثل

عدد ثابت! یعنی بستگی داره انتگرال بگه نسبت به چی داره می‌گیره مثلا dx یا dy و... مثلا اینارو ببین :

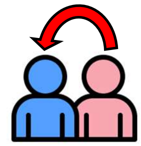
$$\int x^3 y\,dx = \frac{x^4}{4}y \quad , \quad \int y^2 x^5\,dx = y^2\frac{x^6}{6} \quad , \quad \int y x^4\,dy = \frac{y^2}{2}x^4$$

$$\int (y-1)(x^2)\,dy = \int y(x^2)\,dy + \int -x^2\,dy = \frac{y^2}{2}x^2 - x^2 y$$

خب تو این آخری چون انتگرال بر حسب y بود، با $-x^2$ مثل عدد ثابت رفتار کردیم، انداختیمش بیرون و صاف آوردیمش تو جواب، توش هم خب وقتی

$-x^2$ رو ببری بیرون چی می‌مونه؟ یک می‌مونه دیگه، انتگرال یک هم میشد چی؟ خودت بگو! دوباره برگرد ببین چجوری حلش کردیم...

قانون مشتق کنار دستی



اگه یه تابعی ببینی که مشتقش همون بغل دستشه، فقط کافیه انتگرال خود اون تابع رو با "بزیاد" خیلی شیک و مجلسی بگیری! 😎

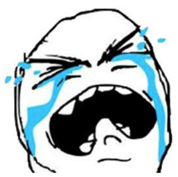
فقط این قانون برای چندجمله ای های ساده کار نمی‌کنه، یعنی تابع ات باید مرکب باشه، منظورم اینه که مثلا اینا نباشن : $x\ ,\ x^2\ ,\ x-1\ ,\ x^3+2\ , \dots$

حالا یعنی چی؟ بیا بهت نشون بدم :

اینو نگاه کن جیگر $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$ ، خب الان بیا تابع اصلی رو سینوس بگیریم، مگه مشتق سینوس نمیشه کسینوس؟ دقیقا پس مشتق اش کنار دستشه، قربون دستت پس خود این تابع اصلی رو (سینوسه رو میگم) بزیاد کن دیگه :

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

مهندس مشتق تانژانت چی بود؟ آفرین میشد $sec^2(x)$، خب حالا اینو ببین مثل آب خوردن حل میشه :



$$\int sec^2(x).\tan(x)\,dx \rightarrow \frac{tan^2(x)}{2} + C$$

این دو تا رو هم ببین تا دوباره مرور کنیم :

$$\int e^x.e^x dx \rightarrow \frac{e^{2x}}{2} + C \qquad , \qquad \int \sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx \rightarrow \frac{x}{2} + C$$

خب پس اگه مشتق یه تابعی کنارش بود (یعنی در خودش ضرب شده بود)، همون تابع رو با "بزیاد" انتگرال می‌گیری!

اما بریم بخش دوم که همه قاطی می‌کنن اینجارو، اگه کنار دست تابع، مشتق اون عبارت داخلیش بود، اونوقت فقط انتگرال خود تابع اصلی رو می‌گیری، دیگه کاری با "**بزیاد**" نداری!

استاد عبارت داخلی چیه؟ یعنی اون بدبختی که توی تابع مونه مثلا اینایی که اینجا برات قرمز کردم رو میگن عبارت داخلی تابع :

$$\mathbf{\sin}\, \boldsymbol{x^2+1} \qquad , \qquad \mathbf{\cos}\, \boldsymbol{x} \qquad , \qquad \boldsymbol{e^{x^3-2}} \qquad , \qquad \mathbf{\tan}\, \boldsymbol{\sqrt{x}} \qquad , \qquad \boldsymbol{e^{\sin x}}$$

گرفتی چیشد؟ یعنی اون عبارت داخل تابع اصلی رو میگم، حالا داستان چیشد؟ اگه مشتق این عبارت بغل دستش بود چی میشه؟ به سیاه و سفید دست نمیزنی، خیلی خوشگل میای انتگرال تابع اصلی رو می‌گیری!

مثلا اینو ببین $\int (\boldsymbol{2x})(\boldsymbol{sin\ x^2})\,dx$ ، خب انتگرال ضرب رو که هنوز یاد نگرفتیم، اونجا هم یاد بگیری می‌بینی چقدر طولانیه! ولی اگه زرنگ

باشی می‌بینی که مشتق داخل سینوس که میشه 2x، بغل دست اشه، پس میتونی بگی انتگرال سینوس چی میشه؟ میشه منفی

کسینوس، پس جواب همینه! $\int (2x)(\sin x^2)\, dx = -\cos x^2$

گرفتی چیشد؟ اگه مشتق عبارت داخلی یه تابعی رو بغل دستش دیدی، دیگه فقط تنها کاری می‌کنی اینه که میای انتگرال خودِ تابع اصلی رو

می‌گیری! کاریت هم نباشه توش چیه تو فقط تو این سوال میگی آقا انتگرال سینوس چی میشه و تموووووم! 😄

بریم چند تا دیگه مثال بزنیم :

$$\int e^{2x}\cdot 2\, dx \to e^{2x} + C \quad , \quad \int 2x\, e^{x^2} dx \to e^{x^2} + C \quad , \quad \int 3x^2 e^{x^3} dx \to e^{x^3} + C$$

خب تو همه اینا مشتق اویلری رو که یادته، میشد خودش ضربدر مشتق توانش، که دقت کنی مشتق کنارش بود، پس صاف از خود اویلر انتگرال گرفتیم،

انتگرال اویلر هم میشه خودش دیگه چون مشتق اش هم میشد خودش! همین!

$$\int 5x^4 \cos(x^5)\, dx \to \sin(x^5) + C \quad , \quad \int 2x \,.\cos(x^2)\, dx \to \sin(x^2) + C \quad , \quad \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = e^{\tan(x)} + C$$

خب اینم مدل هایی مثلثاتی بود، یعنی وقتی مشتق داخلش کنار دستش باشه، میتونی انتگرال خود اون تابع رو بدون دردسر بگیری بیاری

بیرون عسلم 🧐

ای بابا من گیج شدم اصلا، الان فرق اینا چی بود؟ اصلا غصه نخور، زندگی مون همینجوری غصه هاش زیاده، بیا با این مثال بهت بگم دوباره :

$$\int \sin(x)\cos(x)\, dx \to \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$\int \sin(x^2)\,.\,2x\, dx \to -\cos x^2 + C$$

تو اولی مشتق خود sin بغل دستش بود پس "بزیاد" ، تو دومی مشتق اون عبارت داخل سینوس بغل دستش بود، پس صاف انتگرال گرفتیم!

خب اینم تیر آخر این قسمت، اگه یه وقت مشتق بغل دستش بود ولی نقص داشت، مثلا یه عددی چیزی کم داشت چی؟ مثلا اینو ببین $\int \sin(x^2)\,.\,x\, dx$

آقا این همه چیش اوکیه، ولی مشتق داخل سینوس میشه 2x ولی این یه 2 کم داره، حالا تکلیف چیه؟!

خب باید بهت بگم اولا ما کلا نمیتونیم به انتگرال ایکس اضافه یا کم کنیم یادت باشه اینو؛ ولی میتونیم با عدد هاش بازی کنیم تا چیزی که دلمون

میخواد رو بسازیم! یعنی مثلا تو همین مثال یه دونه 2 خودمون بهش اضافه می‌کنیم ولی برای اینکه تعادلش بهم نخوره یه دونه $\frac{1}{2}$ هم میزاریم پشت

انتگرال، اوکیه؟ یعنی انگار نوشتی $2 \times \frac{1}{2}$ خب این میشه یک یعنی هیچی دیگه، انگار تغییری توش ندادیم، منظورم اینه که هر عددی خواستی و کم

داشتی اضافه کن، برعکسش رو هم بزار پشت انتگرال اینجوری هم تو به هدفت میرسی، هم تعادل بهم نمی‌خوره! بدو سراغ مثال تا بفهمی :

$$\int \sin(x^2)\,.\,x\, dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int \sin(x^2)\,.\,2x\, dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

$$\int \cos(x^3)\,.\,x^2\, dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{3}\int \cos(x^3)\,.\,3x^2\, dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{3}\sin(x^3) + C$$

$$\int e^{5x}\,dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$$\int x\,.\,e^{x^2}dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int 2x\,.\,e^{x^2}dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

پس خودمون می‌بینیم مشتق اش چی کم داره (فقط عدد نه ایکس چون ایکس رو نمیشه اضافه یا کم کرد)، بعد میایم بهش اضافه می‌کنیم و برعکسش رو میزاریم پشتش، اینجوری راحت انتگرال می‌گیریم! یه مثال حرفه ای تر که باید مشتق بلد باشی :

$$\int \tan 2x\,.\,sec^2(2x)\,dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int \tan 2x\,.\,2sec^2(2x)\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{2}tan^2(2x) + C$$

اینجا ما تابع اصلی رو تانژانت گرفتیم بعد گفتیم مشتق اش چیه؟ میشه "مشتق عبارت داخل ضربدر سکانت به توان دو"، مابقی هم معلومه؛ فقط اگه برات سخت بود، تو مشکلت تو انتگرال گیری نیست، تو مشتق گیریت ضعیفه، بهتره بری جزوه "مشتق به زبون آدمیزاد" رو حداقل یه بار بخونی و تمرین کنی تا حداقل مشتق این تابع های مهم رو بلد باشی رفیق!

$$\int \sqrt{x^2+1}\,.\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\,.\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{2}(x^2+1) + C$$

اینجا بازم دومی مششتق اولی بود، مشتق رادیکالی یادته که؟ ولی یه دونه 2 کم داشت! ردیفه؟

این چند تا یه کوچولو فسفر میخوان، خودت بشین فکر کن،من حرف نمیزنم :

$$\int e^{2x}\,.\,e^{e^{2x}}dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,.\,e^{e^{2x}}dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{2}e^{e^{2x}} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \sqrt{x^2+1} + C$$

انتگرال رادیکالی ها

از چیزی که فکر می‌کردی هم ساده تره، یادت میاد چجوری رادیکال رو به توان کسری تبدیل می‌کردیم، بیا مرور کنیم اول :

$$\sqrt[a]{x^b} \rightarrow x^{\frac{b}{a}}$$

مثلا اینجوری

$$\sqrt[3]{x^2} \rightarrow x^{\frac{2}{3}} \quad \text{و} \quad \sqrt[2]{(x+1)^5} \rightarrow (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

خب فکر کنم گرفتی میخوام چی بگم؟ هر چی رادیکال دیدی، بیا تبدیلش کن به توان کسری، بعدش با "بزیاد" حلش کن و تموووم!

$$\int \sqrt{x}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int x^{\frac{1}{2}}dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \sqrt{x^3}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int x^{\frac{3}{2}}dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int x^{\frac{2}{3}}\,dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \xrightarrow{\text{بیار بالا}} \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} -2x^{-\frac{1}{2}}$$

تو این آخری یادت باشه دیگه اگه چیزی رو بین صورت و مخرج جابجا کنی، فقط توانش منفی و مثبتش تغییر می‌کنه! مابقی‌اش دیگه معلومه!

خب اگه داخل رادیکال به جای ایکس خالی، یه عبارت بود چی؟ مثلا $\sqrt[2]{(x+1)^5}$ ، خب اینم فعلا میتونی از همین روش حل کنی چون مشتق داخل رادیکال هم میشه 1 ولی عجله نکن، برای حل اینا باید روش "تغییر متغیر" رو یاد بگیری که تو نسخه بعدی به تیاد میدم فعلا پس هر چی رادیکال دار دیدی که ایکس خالی بود یا عبارتی بود که مشتق اش یک میشد با همین روش میتونی حلش کنی!

ما داریم گام به گام یاد می‌گیریم، عجله کنی باخت دادی، صبر کن آروم آروم همه رو یاد می‌گیریم اصلا نگران نباش، چیزی نمی‌مونه یاد نگیری!

سه قانون f , f'

حاجی این سه تا قانون ساده هم آچار دستته، اینارو یاد بگیری خیلی جلو میفتی!

$$\int \frac{f'}{f}\,dx \rightarrow \ln|f| + C$$ اولی) یعنی اگه مشتق یه تابع بالا بود، خودش پایین

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}}\,dx \rightarrow 2\sqrt{f} + C$$ دومی) یعنی اگه مشتق یه تابع بالا بود، رادیکال خودش پایین

$$\int \frac{f'}{f^2}\,dx \rightarrow -\frac{1}{f} + C$$ سومی) یعنی اگه مشتق یه تابع بالا بود، توان دو خودش پایین

داستان اون قدر مطلق چیه تو اولی؟ بخوام ساده‌اش کنم در همین حد بدون که اگه یه وقت تابع منفی بود، مثبتش رو بنویس، چون جلوی لگاریتم نمیتونه منفی باشه دیگه، همین!

حالا بریم از هر کدوم چند تا مثال بزنیم دستت راه بیفته، توی هرکدوم اول تشخیص میدیم که جزو کدوم دسته است بعد جواب رو سه سوته میدیم :

$$\int \frac{\cos x}{\sin(x)}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالاست}} \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالاست}} \ln|x^2+1| + C$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{x}\ln(x)}\,dx \xrightarrow{\text{برای راحتی می‌نویسیم}} \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالاست}} \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق داخل رادیکال بالاست}} 2\sqrt{x+1} + C$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق داخل رادیکال بالاست}} 2e^{\frac{x}{2}} + C$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق داخل رادیکال بالاست}} 2\sqrt{x^2+4} + C$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx \xrightarrow{\text{توان دوم تابعی پایینه که مشتق‌اش بالاست}} -\frac{1}{x^2+1} + C$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}}\,dx \xrightarrow{\text{توان دوم تابعی پایینه که مشتق‌اش بالاست}} -\frac{1}{e^x} + C$$

$$\int \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx \xrightarrow{\text{برای راحتی می‌نویسیم}} \int \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\,dx \xrightarrow{\text{توان دوم تابعی پایینه که مشتق‌اش بالاست}} -\frac{1}{\ln(x)} + C$$

انتگرال نمایی و اویلری

ببین مشتق e^x چی میشه؟ آفرین میشه خودش، پس انتگرالش هم میشه خودش، تا اینجا اوکی؟ $\int e^x\,dx = e^x + C$

حالا اگه این اویلر داستان ما یه عبارتی تو توانش داشت چی؟ اینجا دو تا حالت داریم، اگه تو توانش ضریب داشت یعنی عدد بود (مثلا e^{2x})، بفرما :

$$\int e^{ax}\,dx \rightarrow \frac{e^{ax}}{a}$$

ولی اگه تو توانش یه عبارت ایکس دار بود (مثلا e^{2x^2}) باید از روش "تغییر متغیر" حلش کنی، که تو نسخه بعدی قراره یاد بگیری، کلا هر تابع نمایی چه اویلری باشه چه نباشه اگه توانش یه عبارت ایکس دار پیچیده بود که تو مشتق اش هم ایکس داشت دیگه میریم سراغ "تغییر متغیر"

فعلا این مثال هارو داشته باشه تا اویلر هارو خوب یاد بگیری، بعد نمایی هارو بهت بگم :

$$\int e^{2x}\,dx \rightarrow \frac{e^{2x}}{2} + C \quad , \quad \int e^{3x}\,dx \rightarrow \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$\int e^{-x}\,dx \rightarrow -e^{-x} + C \quad , \quad \int e^{0.5x}\,dx \rightarrow 2e^{0.5x} + C$$

حالا مهندس بیا اینم بدونی بد نیست که به جز اویلر، برای همه تابع های نمایی اینجوری باید انتگرال بگیری :

$$\int a^{bx}\,dx \rightarrow \frac{a^{bx}}{b\ln a}$$

این مثال هارو داشته باش، حالا برات جمع بندی هم می‌کنم، چون الان داری میگی چقدر زیاد شد بابا یادم میره، غصه نخور، عجله نکن :

$$\int 2^{3x}\,dx \rightarrow \frac{2^{3x}}{3\ln(2)} + C \quad , \quad \int 3^{2x}\,dx \rightarrow \frac{3^{2x}}{2\ln(3)} + C \quad , \quad \int 7^{4x}\,dx \rightarrow \frac{7^{4x}}{4\ln(7)} + C$$

$$\int 5^{-x} dx \to \frac{5^{-x}}{-\ln(5)} + C \quad , \quad \int 4^{0.5x} dx \to \frac{4^{0.5x}}{0.5\ln(4)} + C \quad , \quad \int \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} dx \to \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}{2\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + C$$

انتگرال لگاریتمی (log , ln)

بزار خیالت رو راحت کنم، از این مدل انتگرال ها کلا خیلی استفاده نمیشه، معمولا هم ازشون سوال نمیدن واقعا، ولی اگه دیدی استاد درس داده یا خودت میخوای یاد بگیری، بخونش وگرنه میتونی این یه دونه رو رد کنی، من برای محکم کاری آوردم :

$$\int \ln ax \, dx \quad \to \quad x \ln ax - x + C$$

$$\int \log ax \, dx \quad \to \quad \frac{1}{\ln 10}(x\, ln(ax) - x) + C \quad \text{یا} \quad x \log ax - \frac{x}{\ln 10} + C$$

اوه اوه خیلی سخت شد حفظ کردن این مزخرف ها، بریم مثال هارو حل کنیم، خودت بشین دست به خودکار حل کن، منو نگاه نکن :

$$\int \ln(2x) dx \to x\ln(2x) - x + C \quad , \quad \int \ln(3x) dx \to x\ln(3x) - x + C$$

$$\int \ln(0.5x) dx \to x\ln(0.5x) - x + C \quad , \quad \int \ln(4x) dx \to x\ln(4x) - x + C$$

$$\int \ln(7x) dx \to x\ln(7x) - x + C \quad , \quad \int \ln(10x) dx \to x\ln(10x) - x + C$$

$$\int \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)x\right) dx \to x\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)x\right) - x + C \quad , \quad \int \ln(5x) dx \to x\ln(5x) - x + C$$

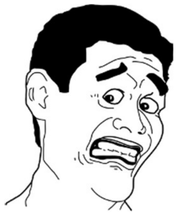
$$\int \ln\left(\left(\frac{1}{10}\right)x\right) dx \to x\ln\left(\left(\frac{1}{10}\right)x\right) - x + C \quad , \quad \int log(2x) dx = x\, log(2x) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

$$\int log(4x) dx = x\, log(4x) - \frac{x}{ln(10)} + C \quad , \quad \int log(7x) dx = x\, log(7x) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

$$\int log(10x) dx = x\, log(10x) - \frac{x}{ln(10)} + C \quad , \quad \int log\left(\frac{x}{3}\right) dx = x\, log\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

$$\int log(5x) dx = x\, log(5x) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

اون قانون اول یادته که می‌گفت اگه مشتق یه تابع بالا بود، خودش پایین چجوری انتگرال می‌گیری؟ برو یه نگاه بنداز، حالا یه قلق مهم بهت بگم که این خیلی به درد بخوره، اینم از همون قانون اولیه پیروی می‌کنه یعنی مشتق ایکس که میشه 1 توی صورت هستش ولی این خیلی بیشتر از بقیه کاربرد داره (یعنی تو اینو بلد بودی ولی این مدل خاصش رو خیلی استفاده میکنن)



این مروری بر قانون اول هستش، دوباره یه تعداد مثال حل می‌کنیم و بیشتر پاره میشیم!!!!

$$\int \frac{1}{x}\,dx \;\rightarrow\; \ln|x| + C$$

نکته مهم : همیشه عدد ثابت هارو بنداز بیرون و از اون‌چیزی که مونده انتگرال بگیر

$$\int \frac{1}{2x}\,dx \xrightarrow{\text{عدد ثابت رو بنداز بیرون}} \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$\int \frac{5}{x}\,dx \xrightarrow{\text{عدد ثابت رو بنداز بیرون}} 5\int \frac{1}{x}\,dx = 5\ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالا نیست چون 3 کم داره پس 3 اضافه می‌کنیم و یه } \frac{1}{3} \text{ به پشتش}} \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$$

$$\int \frac{1}{5x-2}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالا نیست چون 5 کم داره پس 5 اضافه می‌کنیم و یه } \frac{1}{5} \text{ به پشتش}} \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x-2}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$$

اینم خلاصه مفید این جزوه برای تو کراش خوشگلم 😉 :

- **چندجمله‌ای دیدی؟ یه درجه ببر بالا، همونو بزار مخرج!**

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \xrightarrow{\text{مثلا}} \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

- **ضریب داشت؟ بزار بیرون، راحت‌تر حل میشه!**

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \xrightarrow{\text{مثلا}} \int 5x^2\,dx = 5\int x^2\,dx = 5\frac{x^3}{3} + C$$

- **جمع و تفریق؟ جدا جدا بگیر، انگار تیکه‌تیکه شده!**

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \xrightarrow{\text{مثلا}} \int (x^2 - 3x + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{3x^2}{2}\right) + 2x + C$$

- **یه عدد کم داشت؟ اضافه کن و برعکسش رو بزار پشت انتگرال تا جبرانش کنی!**

◇ اگه توی انتگرال رادیکال داشتی، اول رادیکال رو به توان کسری تبدیل کن و بعد مثل یک چندجمله‌ای انتگرال بگیر

$$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\left(\frac{m}{n}\right)+1}}{\left(\frac{m}{n}\right)+1} + C \quad \xrightarrow{\text{مثلا}} \quad \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)+1} + C = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

◇ اگه مشتق تابع کنار دستش بود ، بزیاد ؛ اگه مشتق عبارت توی تابع کنار دستش بود، انتگرال خودِ تابع رو می‌گیری سریع!!

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} + C \qquad , \qquad \int \sin(x^2)\,.\,2x\,dx \rightarrow -\cos x^2 + C$$

جدول انتگرال های پرکاربرد

تابع مون	انتگرال اش
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^{ax}\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)e^{ax} + C$
$\int \sin(ax)\,dx$	$-\left(\frac{1}{a}\right)\cos(ax) + C$
$\int \cos(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)\sin(ax) + C$
$\int \tan(ax)\,dx$	$-\left(\frac{1}{a}\right)\ln\lvert\cos(ax)\rvert + C$
$\int \cot(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)\ln\lvert\sin(ax)\rvert + C$
$\int \sec(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)\ln\lvert\sec(ax) + \tan(ax)\rvert + C$
$\int \csc(ax)\,dx$	$-\left(\frac{1}{a}\right)\ln\lvert\csc(ax) + \cot(ax)\rvert + C$
$\int \sinh(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)\cosh(ax) + C$
$\int \cosh(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)\sinh(ax) + C$
$\int \tanh(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)\ln\lvert\cosh(ax)\rvert + C$
$\int \coth(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)\ln\lvert\sinh(ax)\rvert + C$
$\int \ln(ax)\,dx$	$x\ln(ax) - x + C$

برای حل تمرینات امتحانی میتونی همین الان "تمرینات انتگرال به زبون آدمیزاد" رو دانلود کنی، کافیه روش لمس کنی!

برای ادامه جزوه هم نسخه پیشرفته رو از همینجا با لمس روش دانلود کن رفیق!