آنالیز

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt$$
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

سنتز

$$x(t) = \sum_{k=-x}^{x} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

قطار ضربه

$$x(t) = \sum_k \frac{1}{T_0} e^{jk\omega t}$$

1-خطی

$$Ax(t) + By(t) \Leftrightarrow Aa_k + Bb_k$$

2- تقارنی

$$a_k = a^*_{-k}$$
$$a_k = Re\{a_k\} + j\,Im(a_k)\ ,\ a_k = |a_k|e^{j\measuredangle a_k}$$
$$a^*_{-k} = Re\{a_{-k}\} - j\,Im(a_{-k})\ ,\ a^*_{-k} = |a_{-k}|e^{-j\measuredangle a_{-k}}$$

$a_k = a^*_{-k} = a_{-k}$ اگر تابع حقیقی و زوج باشد

$a_k = a^*_{-k} = -a_{-k}$ اگر تابع حقیقی و فرد باشد

3- شیفت زمانی

$$x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{jk\omega_0 t_0}\,a_k = e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_0}a_k$$

4 معکوس زمانی

$$x(t) \Leftrightarrow a_k,\ x(-t) \Leftrightarrow a_{-k}$$

5- مشتق

$$\frac{dx(t)}{dt} \to jk\omega_0 a_k \to \frac{d^2x}{dt^2} \to (jk\omega_0)^2 a_k$$

6- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$
$$\frac{1}{T}\int_T x(t)y^*(t)\,dt = \sum_k a_k b_k^*$$

7- خاصیت ضرب

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

8- عبور از سیستیم LTI

$$b_k = a_k H(S)|_{S=jk\omega_a}$$

تابع سینک:

$$sinc(\theta) = \frac{sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

تبدیل فوریه دوتابع متناوب:

$$cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$
$$sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{j}\,\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\pi}{j}\,\delta(\omega+\omega_0)$$
$$cos(\omega) = \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{j\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}\delta(t+1)$$

آنالیز

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,d\omega\,,$$

رابطه سنتز :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

تبدیل فوریه نمایی:

$$e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}\ ,\ |X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\ ,\ \measuredangle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

تبدیل فوریه تابع ضربه

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\,dt\ \ ,\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

تبدیل فوریه تابع سینک

$$X(j\omega) = \frac{2\,sin\,\omega T}{\omega} \Leftrightarrow x(t) = \prod\left(\frac{t}{2T_1}\right)$$

1-خطی

$$Ax(t) + By(t) \Leftrightarrow AX(j\omega) + BY(j\omega)$$

2- تقارنی

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$
$$X(j\omega) = Re\{X(j\omega)\} + j\,Im\big(X(j\omega)\big)\,,$$
$$X(j\omega) = Re\{X(-j\omega)\} + j\,Im\big(X(-j\omega)\big)\,,$$

3-شیفت زمانی

$$x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{jk\omega_0 t_0}\,X(j\omega) = e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_0}X(j\omega)$$

4- مشتق

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega X(j\omega)\ \ ,tx(t) \Leftrightarrow j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}\,X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

5-تغییر مقیاس

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}\,X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

6-دوگانی

$$g(t) \Leftrightarrow\ f(j\omega)$$
$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi g(-j\omega)$$

7-پارسوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$$

8-کانولوشن

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

9-ضرب(مدولاسیون)

$$r(t) = s(t)p(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))\,d\theta$$

$$y[n] = H(z)z^n$$
$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^k$$
$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \to y[n] = \sum_k a_k H(z_k)z_k^n$$

سنتز

$$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

آنالیز

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=(N)} x[n]\,e^{-jk(2\pi/N)n}$$

1-خطی

$$Ax[n] + By[n] \Leftrightarrow Aa_k + Bb_k$$

2-خاصیت تقارنی

$$a_k = a^*_{-k}$$
$$Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\}\ \ ,|a_k| = |a_{-k}|$$
$$im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\}\,,\ \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k}$$
$$x_e[n] = \varepsilon v\{x[n]\} \Leftrightarrow Re\{a_k\}\,,\ x_o[n] = Od\{x[n]\} \Leftrightarrow jIm\{a_k\}$$

3- شیفت زمانی

$$x[n-n_0] \Leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/N)n}$$
$$e^{jk(2\pi/N)n}x[n] \Leftrightarrow a_{k-M}$$

4- معکوس زمانی

$$x[-n] \Leftrightarrow a_{-k}$$

5-مشتق مرتبه اول

$$x[n] - x[n-1] \Leftrightarrow \left(1 - e^{jk(2\pi/N)n}\right)a_k$$

6- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N}\sum_{n=(N)} |x[n]|^2 = \sum_{k=(N)} |a_k|^2$$

8- عبور از سیستیم LTI

$$b_k = a_k H(z)|_{z=e^{\frac{j2\pi k}{N}}} = a_k H\left(e^{\frac{j2\pi k}{N}}\right)$$

سنتز

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\ d\omega$$

آنالیز

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\,[n]e^{-j\omega n}$$

پنجره

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

سینک

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

شرط همگرایی

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

تبدیل فوریه تابع متناوب

$$\sum_{k=(N)} a_k\,e^{jk(2\pi/N)n} \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,a_k\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

1-متناوب بودن تبدیل فوریه

$$X\big(e^{j(\omega+2\pi)}\big) = X(e^{j\omega})$$

2-خطی بودن

$$ax_1[n] + bx_2[n] \Leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

3-شیفت یا انتقال

$$x[n-n_0] \Leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$
$$e^{j\omega_0 n}x[n] \Leftrightarrow X\big(e^{j(\omega-\omega_0)}\big)$$

4- خاصیت تقارنی

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$
$$Re\{X(e^{j\omega})\} = Re\{X(e^{-j\omega})\}$$
$$Im\big(X(e^{j\omega})\big) = -Im\big(X(e^{-j\omega})\big)$$

5-تفریق و جمع

$$x[n] - x[n-1] \Leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$
$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \Leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\,X(e^{j\omega}) + \pi\,X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - 2\pi k)$$

6-معکوس زمانی

$$x[-n] \Leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

7-تغییر مقیاس

$$x_{(k)}[n] \Leftrightarrow\ X(e^{jk\omega})$$

8-مشتق در حوضه فرکانس

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jn\,x[n]e^{-j\omega n}\ ,\qquad nx[n] \Leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

9-رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2\ d\omega$$

10-خاصیت کانولوشن

$$y[n] = x[n] * h[n]\ \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

11-ضرب (مدولاسیون)

$$y[n] = x[n].x[n]\ \Leftrightarrow\ Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$