



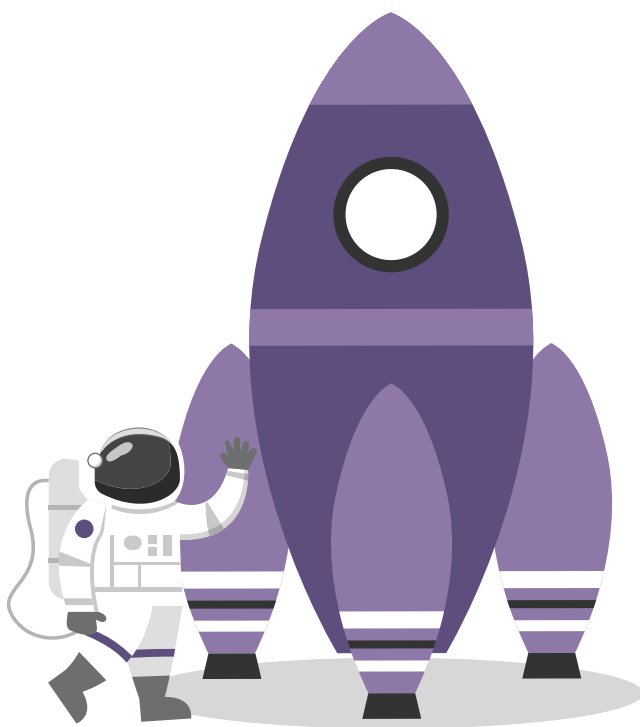
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

هندسه ۲



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

هندسه ۲ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

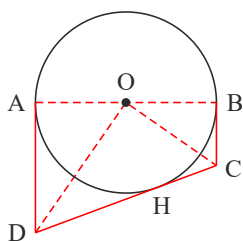
مدیر دپارتمان هندسه : امیرحسین نادری

فصل اول : دایره

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

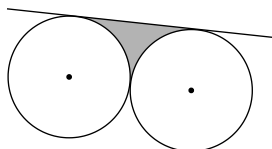
۱) نزدیک ترین و دورترین فاصله نقطه A از یک دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است. شعاع دایره چقدر است؟

۲) در شکل مقابل O مرکز دایره است. ثابت کنید $\angle COD = 90^\circ$.



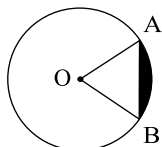
۳) اگر طول یک کمان 60° از دایره C_1 با طول کمان 45° از دایره C_2 برابر باشد، آنگاه نسبت مساحت دایره C_1 به مساحت دایره C_2 چقدر است؟

۴) دو دایره مساوی با شعاع های ۲ مماس خارج هستند. مساحت قسمت مشخص شده چقدر است؟



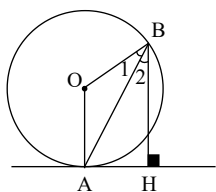
۵) از نقطه P دو مماس عمود برهم بر دایره ای به شعاع ۲ رسم شده است، سطح بین دو مماس و محیط دایره چقدر است؟

۶) به مرکز O و به شعاع R دایره ای رسم شده است که از A و B می گذرد. مثلث OAB متساوی الاضلاع است، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟





A diagram showing three identical circles arranged in a triangular pattern. The circles are tangent to each other at their points of contact. The region in the center, bounded by the three circles, is shaded black.



۱۰) مساحت ناحیه واقع بین دو دایره هم‌مرکز $\frac{25\pi}{2}$ سانتی‌متر مربع است، طول وتری از دایره بزرگتر که بر دایره کوچکتر مماس باشد، بر حسب سانتی‌متر کدام است؟

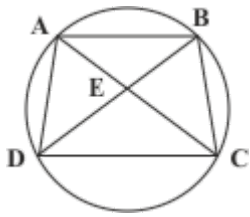
(ب) اگر $CQ = RQ, RC = \sqrt{2}$ آنگاه طول پاره‌های CD, DQ را به دست آورید.

طول مماس‌های رسم‌شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابرند.

۱۵) نقطه A درون دایره است. کوچک‌ترین وتر گذرنده از A را رسم کنید.



۱۶ شعاع‌های دو دایره هم مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازه وترى از دایره بزرگ‌تر که بر دایره کوچک‌تر مماس است را پیدا کنید.



۱۷ با توجه به شکل نشان دهید: الف) اگر $AD = BC$ ، آنگاه $AC = BD$.

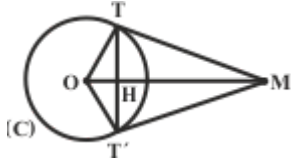
ب) اگر $AC = BD$ ، آنگاه $AD = BC$.

۱۸ دو خط MT, MT' در نقطه‌های T, T' بر دایره $C(O, R)$ مماس هستند. H نقطه برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:

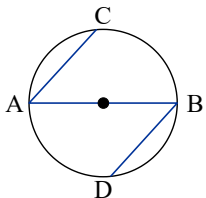
الف) خط OM نیمساز زاویه‌های TOT', TMT' است.

ب) خط OM عمودمنصف پاره خط TT' است.

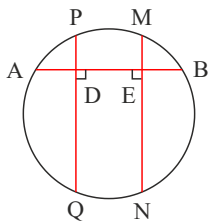
پ) $OH \cdot OM = R^2$



۱۹ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$

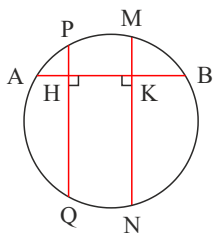


۲۰ در شکل مقابل $AD = BE$ است. اگر $\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$ باشد، ثابت کنید $PQ = MN$.



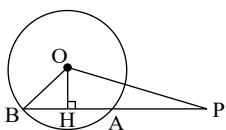
۲۱ مطابق شکل $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$ و $BK > AH$ است.

ثابت کنید: $MN > PQ$.



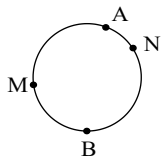
۲۲ در دایره با شعاع ۱۲، طول وترى که عمود منصف یک شعاع باشد، چقدر است؟

۲۳ در شکل مقابل $AB = 6$ و $OH = 1$ و $\hat{OHA} = 90^\circ$ شعاع دایره چقدر است؟



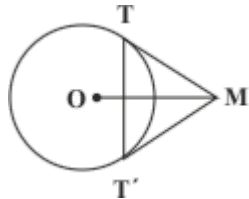


۲۴ دو دایره مساوی با شعاع ۳ و فاصله خط‌المركزين ۸ داده شده است. از وسط خط‌المركزين قاطعی رسم می‌کنیم، اگر طول وتر جداشده در یکی از دایره‌ها $\sqrt{2}$ باشد، طول وتر جداشده در دایره دوم چقدر است؟



۲۵ در دایره مقابل داریم: $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان $\widehat{ANB}$ چه کسری از محیط دایره است؟

۲۶ دایره $C(O, 6)$ و نقطه M به فاصله ۱۲ سانتی متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خط‌های MT, MT' بر این دایره مماس هستند. (T, T' نقطه‌های تماسند). الف) طول مماس‌های MT, MT' را تعیین کنید.



ب) طول وتر TT' را به دست آورید.

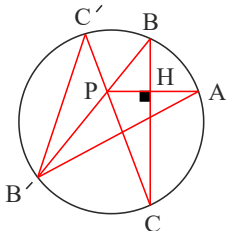
پ) اندازه زاویه TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

۲۷ دو رأس یک مربع روی محیط یک دایره و یک ضلع مربع مماس بر این دایره است. اگر طول ضلع مربع ۱۲ واحد باشد، اندازه شعاع دایره را به دست آورید.

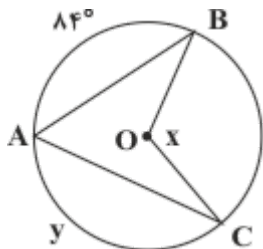
۲۸ الف. آیا با داشتن دو وتر موازی از دایره‌ای، می‌توان مرکز دایره را پیدا کرد؟ چرا؟

ب. آیا در حالتی که دو وتر ناموازی از دایره‌ای را داشته باشیم، می‌توان مرکز آن دایره را یافت؟ چرا؟

۲۹ در شکل مقابل BC عمود منصف AP است. اگر $\widehat{PCH} = \alpha$ باشد، اندازه زاویه $BB'A$ را بر حسب α بیابید.

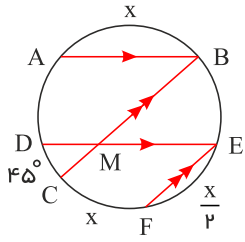


۳۰ الف) اگر $\widehat{y} = 140^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه x را به دست آورید. ب) اگر $\widehat{x} = 165^\circ$ ، آنگاه اندازه کمان $\widehat{y}$ را به دست آورید.

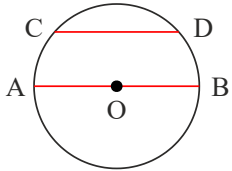




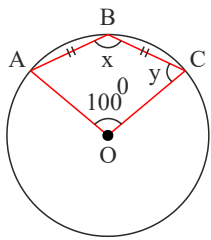
۳۱ در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



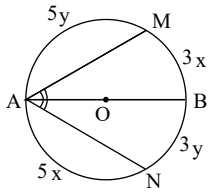
۳۲ در دایره $C(O, R)$ مقابل، $AB \parallel CD$ و $\widehat{CD} = 2\widehat{AC}$ است. اندازه زاویه $\widehat{DCB}$ چقدر است؟



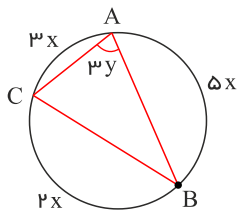
۳۳ در دایره مقابل به مرکز O ، حاصل $x + y$ چند درجه است؟



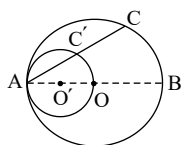
۳۴ در شکل مقابل AB قطر دایره است. اندازه زاویه MAN چند درجه است؟

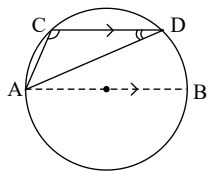


۳۵ اندازه x و y را در دایره مقابل تعیین کنید.



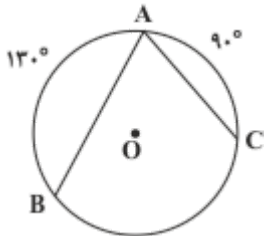
۳۶ در شکل مقابل، O و O' مراکز دو دایره هستند. ثابت کنید $AC' = CC'$.



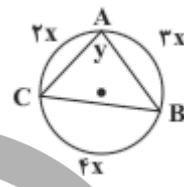


۳۷ مطابق شکل وتر CD موازی قطر AB است. ثابت کنید: $\widehat{ACD} - \widehat{ADC} = 90^\circ$.

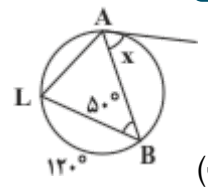
۳۸ زاویه محاطی BAC در دایره به مرکز O داده شده است. اگر $\widehat{AB} = 130^\circ$ ، $\widehat{AC} = 90^\circ$ باشد، اندازه زاویه BAC را تعیین کنید.



۳۹ اندازه‌های x و y را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.



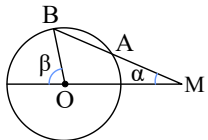
(ب)



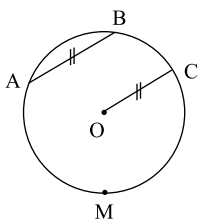
(الف)

۴۰ ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

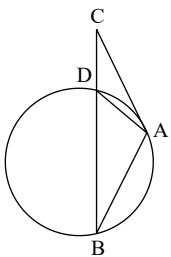
۴۱ دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ ؛ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$



۴۲ در شکل مقابل O مرکز دایره و $AB \parallel OC$ و $AB = OC$ است. اندازه کمان $\widehat{AMC}$ چقدر است؟

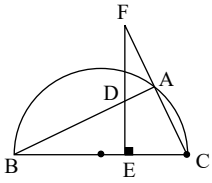


۴۳ در شکل مقابل AC در نقطه A بر دایره مماس بوده و $AC = AB$ است. ثابت کنید: $AD = DC$

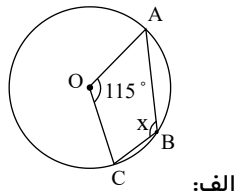




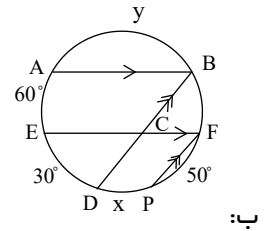
۴۴ در شکل مقابل $\hat{E} = 90^\circ$ و BC قطر نیم‌دایره است. ثابت کنید نقاط A و E و B و F روی یک دایره هستند.



۴۵ در شکل مقابل مقادیر مجهول را بیابید.



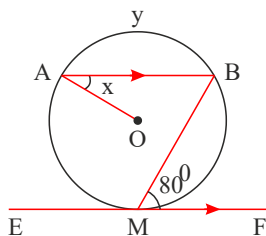
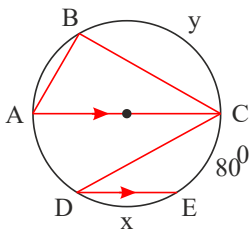
الف:



ب:

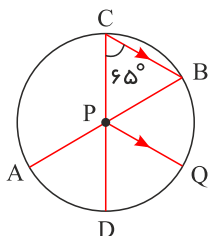
۴۶ ثابت کنید، هر دو وتر موازی که بر دو انتهای یک قطر دایره‌ای می‌گذرند، مساوی‌اند.

۴۷ در شکل مقابل DE موازی قطر AC بوده و $BC = CD$ است. مقادیر مجهول x و y چند درجه است؟



۴۸ در شکل مقابل $AB \parallel EF$ و پاره‌خط EF در نقطه M بر دایره مماس است.

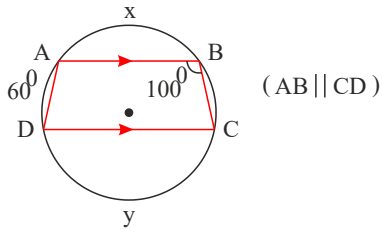
مقادیر مجهول x و y را حساب کنید.



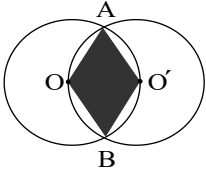
۴۹ P مرکز دایره است و $BC \parallel PQ$. اگر $\hat{BCP} = 65^\circ$ باشد، اندازه کمان‌های $\widehat{AD}$ و $\widehat{BQ}$ را حساب کنید.



۵۰ در شکل مقابل اندازه‌های خواسته‌شده را حساب کنید.



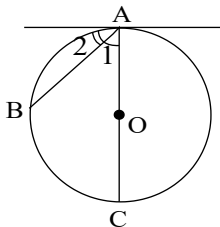
۵۱ دو دایره متساوی $C(O, R)$ و $C'(O', R)$ در نقاط A و B متقاطع‌اند و هریک از آنها از مرکز دایره دیگر می‌گذرد. مساحت رنگ‌شده چقدر است؟



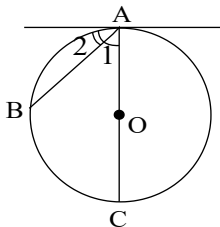
۵۲ سه دایره متساوی به شعاع R مطابق شکل بر هم مماس‌اند و مراکز آنها روی یک خط راست قرار دارد. مساحت نواحی رنگ‌شده چقدر است؟



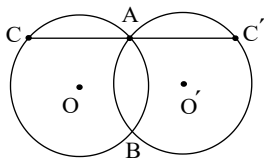
۵۳ روی دایره‌ای به قطر AB و به مرکز O نقطه C طوری قرار دارد که زاویه $\widehat{BOC}$ برابر 60° است، اگر قطر دایره ۵ سانتی‌متر باشد، طول وتر AC برحسب سانتی‌متر چقدر است؟



۵۴ در شکل مقابل اندازه زاویه ظلی A برابر 50° است. اندازه کمان $\widehat{BC}$ برحسب درجه چقدر است؟



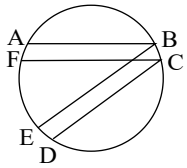
۵۵ در شکل مقابل دو دایره متساوی متقاطع‌اند. قاطع CAC' را رسم می‌کنیم. مثلث CBC' چگونه است؟



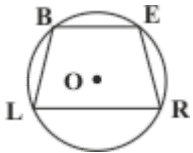
۵۶ مثلث ABC در یک دایره محاط است و اندازه کمان‌های AB و BC و AC به ترتیب $x + 75^\circ$ و $2x + 7^\circ$ و $3x - 22^\circ$ است. اندازه زاویه‌های داخلی مثلث برحسب درجه چقدر است؟



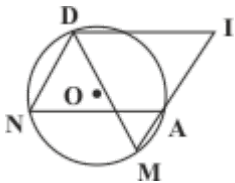
۵۷ در شکل مقابل اگر $AB \parallel FC$ و $CD \parallel BE$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $\widehat{CD} = 40^\circ$ و $\widehat{EF} = 110^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه $\widehat{FCD}$ را بیابید.



۵۸ در دایره روبه‌رو $BL = ER$ نشان دهید $BE \parallel LR$.

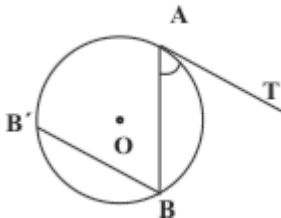


۵۹ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های M, A, I روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.



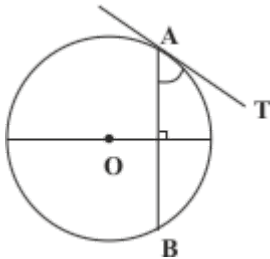
۶۰ با استفاده از تعریف زاویه محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

۶۱ زاویه ظلی TAB در دایره به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB' که موازی خط مماس AT رسم شده است، ثابت کنید:



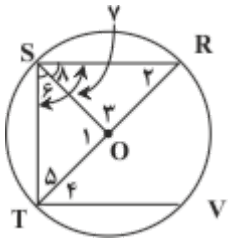
$$\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۶۲ زاویه ظلی TAB در دایره به مرکز O داده شده است. با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که $\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$.

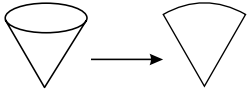




۶۳ در دایره‌ای به مرکز O ، $RS \parallel VT$ ، $\widehat{TS} = 70^\circ$ و RT قطر دایره است. اندازه زاویه‌های ۱ تا ۸ را به دست آورید.



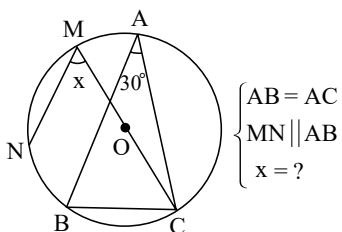
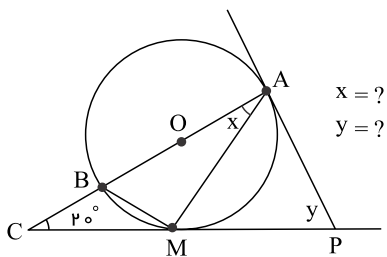
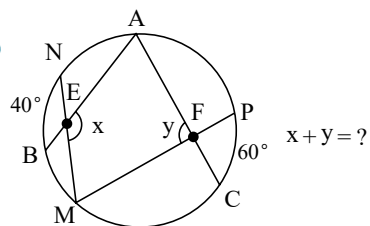
۶۴ شکل فضایی و گسترده یک مخروط داده شده است. شعاع قاعده مخروط ۳ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۴ سانتی‌متر است.



الف طول کمان قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

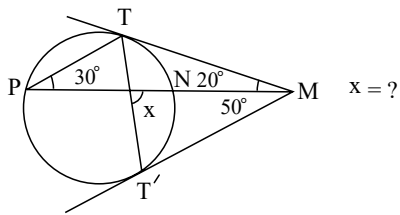
ب مساحت قطاع را به دست آورید.

۶۵ در شکل‌های زیر، مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.

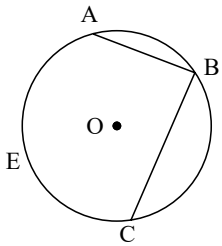




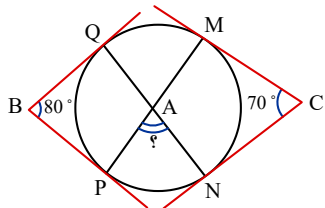
ت



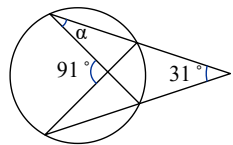
۶۶ مطابق شکل، وترهای $AB = R$ و $BC = \sqrt{2}R$ در دایره $C(O, R)$ رسم شده‌اند. اندازه کمان $\widehat{AEC}$ را محاسبه کنید.



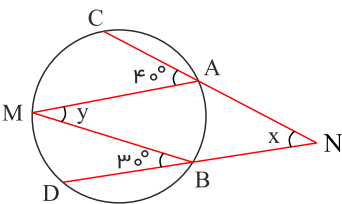
۶۷ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس هستند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟



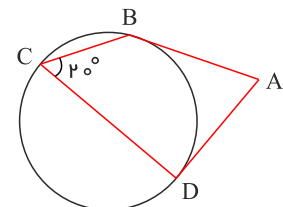
۶۸ در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

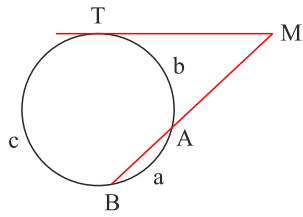


۶۹ در دایره روبه‌رو، حاصل $x + y$ کدام است؟

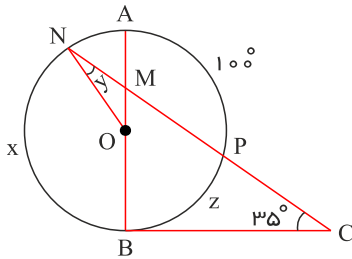


۷۰ در شکل مقابل AB و AD بر دایره مماس است. اگر $\hat{C} = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\hat{A}$ چقدر است؟

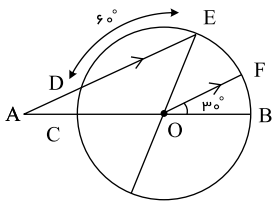




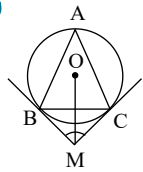
۷۱) در شکل زیر داریم: $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$. اندازه زاویه $\hat{M}$ چقدر است؟



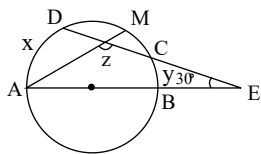
۷۲) در شکل مقابل، AB قطر دایره است. حاصل $x + y + z$ چقدر است؟



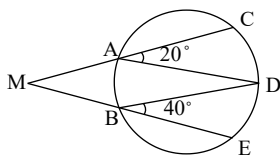
۷۳) در شکل روبه‌رو، BC قطر و $AE \parallel OF$ است. اندازه کمان $\widehat{DC}$ چقدر است؟



۷۴) در شکل مقابل MB و MC مماس بر دایره، $AB = AC$ و $\widehat{AC} = 140^\circ$ است. زاویه OMC چقدر است؟



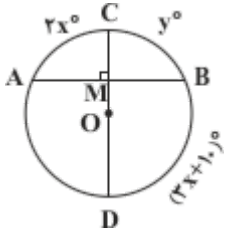
۷۵) در دایره مقابل، AB قطر، $\widehat{AD} = \widehat{DC} = x$ و M وسط کمان DC است. حاصل $x + y + z$ چقدر است؟



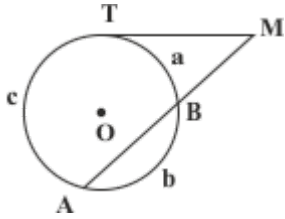
۷۶) در دایره مقابل، اندازه $\hat{M} + \hat{D}$ چقدر است؟



۷۷ در دایره مقابل، قطر CD در نقطه M بر وتر AB عمود است. اگر $\widehat{AC} = 2x^\circ$ ، $\widehat{BC} = y^\circ$ ، $\widehat{BD} = (3x + 10)^\circ$ باشد، x, y را بیابید.



۷۸ خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB در نقطه M متقاطع هستند. با فرض $\widehat{TB} = a$ ، $\widehat{BA} = b$ ، $\widehat{AT} = c$:



الف) اندازه زاویه M را در هریک از حالت‌های زیر تعیین کنید:

۲. $b = 120^\circ$ ، $c = 200^\circ$

۱. $c = 150^\circ$ ، $a = 60^\circ$

۴. $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$

۳. $c - a = 74^\circ$

ب) تعیین کنید:

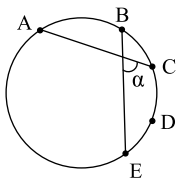
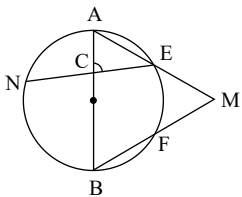
۱. a را در صورتی که $\hat{M} = 45^\circ$ ، $c = 200^\circ$ باشد.

۲. c را در صورتی که $\hat{M} = 30^\circ$ ، $a = 55^\circ$ باشد.

۳. a را در صورتی که $\hat{M} = 45^\circ$ ، $c = 3a$ باشد.

۴. a را در صورتی که $\hat{M} = 60^\circ$ ، $b = 100^\circ$ باشد.

۷۹ در شکل زیر AB قطر دایره و $EA = BF$ است. $\hat{M} = 56^\circ$ و N نقطه وسط کمان AB باشد، زاویه C چند درجه است؟

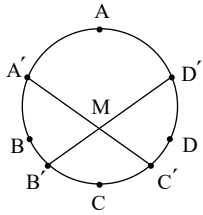


۸۰ نقاط A, B, C, D, E پنج رأس متوالی هشت‌ضلعی منتظم است. α چند درجه است؟

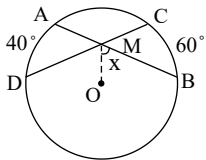


۸۱) مطابق شکل A' و B' و C' و D' نقاط وسط کمان‌های AB و BC و CD و AD است.

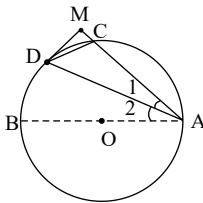
ثابت کنید: $A'C' \perp B'D'$



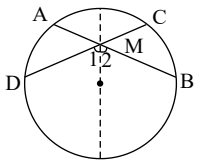
۸۲) در شکل مقابل دو وتر AB و CD مساوی‌اند. اگر O مرکز دایره باشد، زاویه x کدام است؟



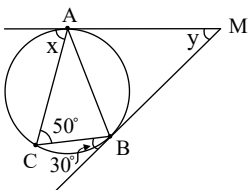
۸۳) در شکل مقابل $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و DM در نقطه D بر دایره مماس است. ثابت کنید: $\hat{M} = 90^\circ$ و $\hat{ACD} - \hat{A}_1 = 90^\circ$.



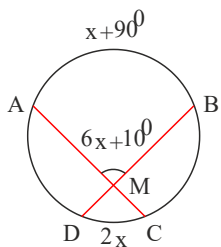
۸۴) در شکل مقابل دو وتر AB و CD مساوی‌اند. ثابت کنید قطر گذرنده از M ، نیمساز زاویه M است.



۸۵) در دایره مقابل، مقادیر x و y را محاسبه کنید.



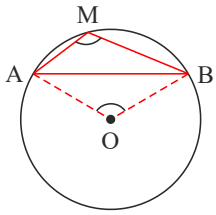
۸۶) در شکل مقابل x را محاسبه کنید.



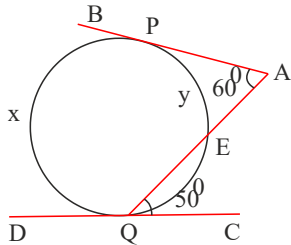


۸۷ در شکل مقابل O مرکز دایره است و داریم:

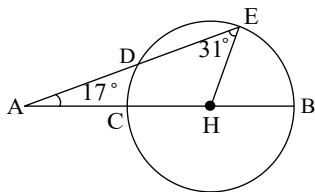
$\hat{AOB} = \hat{AMB}$. اندازه زاویه AMB را محاسبه کنید.



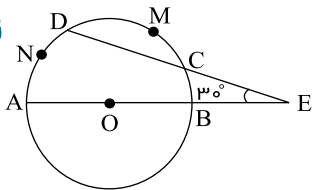
۸۸ در شکل مقابل مقادیر مجهول را بیابید.



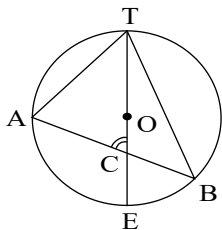
۸۹ در شکل مقابل $\hat{A} = 17^\circ$ و $\hat{E} = 31^\circ$ و H وسط قطر CB می‌باشد. کمان CD چند درجه است؟



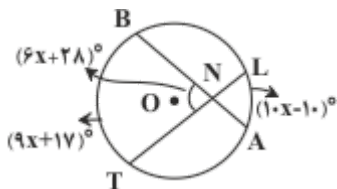
۹۰ در شکل مقابل O مرکز دایره، $\hat{DMC} = 30^\circ$ و $\hat{E} = 30^\circ$ ، مقدار کمان $\widehat{AND}$ چقدر است؟



۹۱ در شکل مقابل O مرکز دایره، $\hat{A} = 65^\circ$ و $\hat{B} = 35^\circ$ است. زاویه C چند درجه است؟

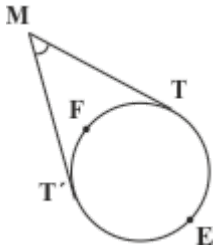


۹۲ در دایره زیر x و اندازه زاویه $\hat{BNT}$ را تعیین کنید.

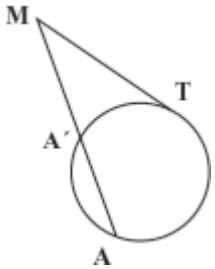




۹۳ ثابت کنید زاویه بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه T, T' بر یک دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقطه‌های T, T' است.

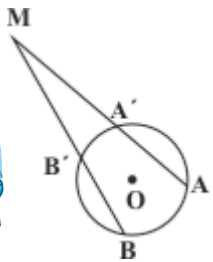


۹۴ در شکل روبه‌رو، خط مماس بر دایره (C) در نقطه T امتداد وتر AA' از این دایره را در نقطه M قطع کرده است. ثابت کنید:



$$\widehat{AMT} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{A'T}}{2}$$

۹۵ امتدادهای دو وتر AA', BB' از دایره O در نقطه M متقاطع هستند، تعیین کنید:



الف اندازه کمان $\widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{AB} = 160^\circ$ ، $\widehat{M} = 20^\circ$ باشد.

ب اندازه کمان $\widehat{AB}$ را، اگر $\widehat{A'B'} = 60^\circ$ ، $\widehat{M} = 35^\circ$ باشد.

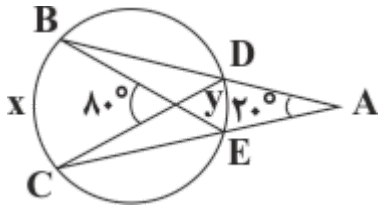
پ اندازه $\widehat{AB} - \widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{M} = 45^\circ$ باشد.

ت اندازه کمان $\widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{AB} = 3\widehat{A'B'}$ ، $\widehat{M} = 25^\circ$ باشد.

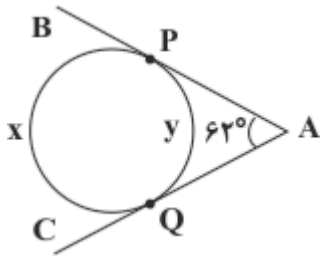
۹۶ در هر کدام از شکل‌های زیر y و x را بیابید.



الف



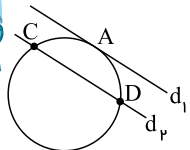
ب



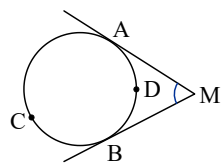
۹۷ در شکل‌های زیر ثابت کنید:

(راهنمایی: از نقطه تماس ضلع زاویه بر دایره، خطی موازی دیگر زاویه رسم کنید.)

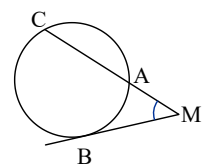
الف) الف $d_1 \parallel d_2$ ثابت کنید $\widehat{AC} = \widehat{AD}$



ب $\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$

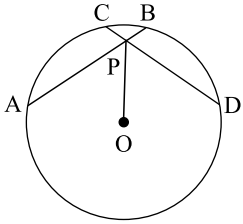


پ $\hat{M} = \frac{\widehat{CB} - \widehat{AB}}{2}$

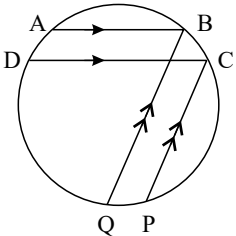




۹۸ در شکل زیر، دو وتر AB و CD برابرند و در نقطه P یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید OP نیمساز $\hat{APD}$ است.



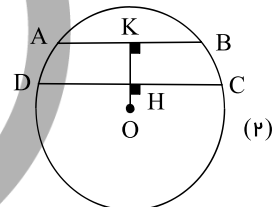
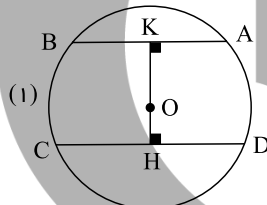
۹۹ در دایره زیر، $AB \parallel CD$ و $BQ \parallel PC$ می‌باشد.



الف ثابت کنید که چهار ضلعی‌های $ABCD$ و $BCPQ$ دوزنقه متساوی‌الساقین هستند.

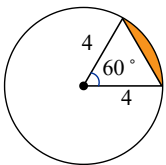
ب با توجه به اینکه در دوزنقه متساوی‌الساقین قطرها برابرند، ثابت کنید دو مثلث ACQ و PBD هم‌نهشت هستند.

۱۰۰ در دایره $C(O, R)$ ، دو وتر $AB = R$ و $CD = \frac{3R}{2}$ موازی هم رسم شده‌اند. بیشترین و کمترین فاصله دو وتر از یکدیگر را برحسب R محاسبه کنید. (طول HK را در دو حالت بررسی کنید.)



درس دوم : رابطه های طولی در دایره

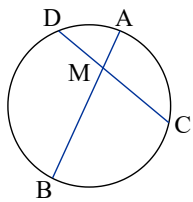
۱۰۱ در دایره روبه‌رو به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه‌زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



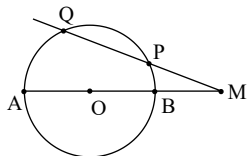
۱۰۲ از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول‌های PB و PC را به دست آورید.



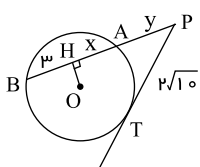
۱۰۳ در دایره $C(O, R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱\text{ cm}$ ، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



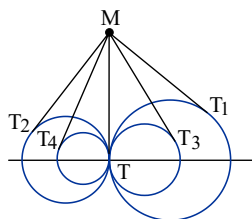
۱۰۴ در دایره $C(O, ۲)$ شکل مقابل، می‌دانیم $AO = OB = BM = ۲PQ$ ، اندازه MP چقدر است؟



۱۰۵ در دایره مقابل به مرکز O ، اندازه $x + y$ چقدر است؟

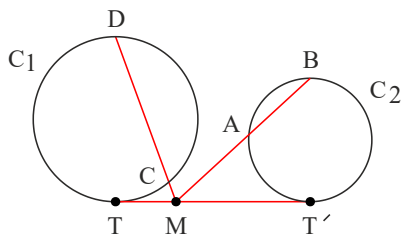


۱۰۶ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم.

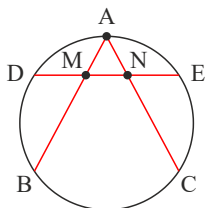


ثابت کنید: $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$

۱۰۷ در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $TM = \frac{1}{3}MT'$ باشد حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ چقدر است؟

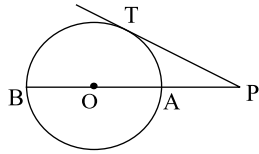


۱۰۸ مطابق شکل داریم: $AM = AN$ و $DM = MN = NE$. ثابت کنید: $BM = CN$.

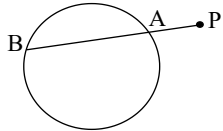




۱۰۹ نقطه C بر روی وتر AB به طول وتر ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است، طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده بر نقطه C از این دایره چقدر است؟

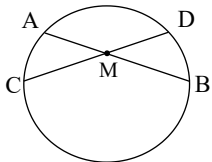


۱۱۰ در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۶، AB قطر و $PA = ۴$ می‌باشد، طول مماس PT چقدر است؟

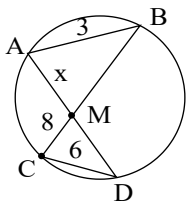


۱۱۱ در شکل مقابل $PA = ۵$ و $AB = ۳$ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است. فاصله نقطه P تا مرکز دایره چقدر است؟

۱۱۲ در دایره مقابل، دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع هستند. اگر $MA = ۶$ و $MB = ۳$ و $MD = ۲٫۵$ ، طول MC چقدر است؟



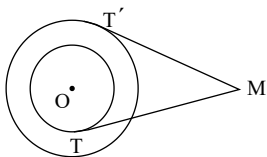
۱۱۳ در دایره مقابل، مقدار x چقدر است؟



۱۱۴ در شکل زیر دو قاطع IE ، IN با هم برابرند، ثابت کنید: $IS = ID$



۱۱۵ دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های R و $۳R$ مفروض هستند. مطابق شکل، از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دو دایره رسم شده است. اگر $MT' = ۲R$ باشد، MT چند است؟



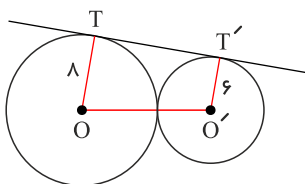


۱۱۶ دو دایره $C(O, 2m-3)$ و $C'(O', 2)$ با خط‌المركزين $d = OO' = m+1$ مفروض‌اند. اگر بتوان با طول‌های شعاع‌های دو دایره و خط‌المركزين مثلثی ساخت، حدود m چقدر است؟

۱۱۷ در مثلث قائم‌الزاویه ABC دایره‌ای بر A و B می‌گذرانیم، به قسمتی که در B بر وتر مثلث مماس شده و دایره‌ای هم بر C و A عبور می‌دهیم تا در C بر وتر مثلث مماس شود. ثابت کنید که این دو دایره مماس خارج‌اند.

۱۱۸ وضعیت دو دایره را در حالت‌های مختلف در نظر بگیرید، سپس در هر حالت مماس مشترک‌های آنها را در صورت وجود رسم کنید.

۱۱۹ در شکل روبه‌رو دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ مماس خارج و TT' مماس مشترک خارجی آنهاست. محیط و مساحت $OTT'O'$ چقدر می‌شود؟

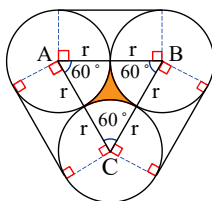


۱۲۰ طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

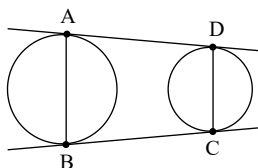
۱۲۱ طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المركزين آنها مساوی ۸ واحد است.

۱۲۲ دو دایره مماس خارج به شعاع‌های $R_1 = ۸$ و $R_2 = ۲$ مفروض هستند؛ اگر TT' مماس مشترک و O و O' مراکز دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟

۱۲۳ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۲\pi r + ۶r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳})r^۲$ محدود است.



۱۲۴ در شکل مقابل ثابت کنید: $AB \parallel CD$





۱۲۵) فاصلهٔ مرکزهای دو دایره ۴۱ سانتی‌متر و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر ۴ سانتی‌متر و شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر ۵ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره چند سانتی‌متر است؟

۱۲۶) دو دایره C و C' به مرکزهای O و O' به شعاع‌های ۳ و ۵ و طول خط‌المركزین $OO' = ۱۱$ مفروض است. چند خط می‌توان رسم کرد که از O و O' به‌ترتیب به فاصله‌های ۳ و ۵ باشد؟

۱۲۷) در مورد هم‌رسی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره و خط‌المركزین آنها چه می‌توان گفت؟

۱۲۸) دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازهٔ مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.

۱۲۹) جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) در مثلث با اضلاع a, b, c و مساحت S و محیط P ، طول شعاع دایرهٔ محاطی خارجی متناظر رأس A از رابطهٔ محاسبه می‌شود.

ب) در یک چهارضلعی محاطی، دو زاویهٔ مجاور ۴۵° و ۱۲۰° هستند. تفاضل دو زاویهٔ دیگر می‌باشد.

پ) طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ و طول خط‌المركزین ۴، برابر با است.

درس سوم: چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

۱۳۰) دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است، قدر مطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر چقدر است؟

۱۳۱) ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

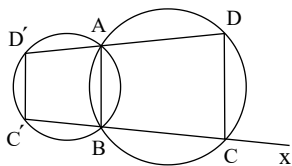
۱۳۲) از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک دوزنقه چه نوع چهارضلعی ایجاد می‌شود؟

۱۳۳) در یک مثلث مختلف‌الاضلاع اوساط اضلاع و پای یک ارتفاع رئوس یک چهارضلعی هستند. نوع این چهارضلعی چیست؟

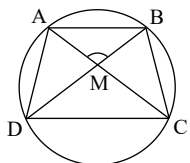
۱۳۴) در مثلث ABC ، نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C ، یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند. اگر O محل هم‌رسی نیمسازهای داخلی باشد، نوع چهارضلعی $BOCM$ چیست؟



۱۳۵ از نقاط A و B نقاط تقاطع دو دایره O و O' دو قاطع چنان رسم کرده‌ایم که دایره O را در C و D و دایره O' را در نقاط D' و C' قطع کرده‌اند. نوع چهارضلعی $DCC'D'$ چیست؟



۱۳۶ دوزنقه متساوی‌الساقین محاط در دایره مفروض است. اگر بین کمان‌های متناظر با قاعده کوچک، بزرگ و ساق آن رابطه $\widehat{DC} = 2\widehat{AB} = 2\widehat{BC}$ برقرار باشد، آنگاه زاویه بین امتداد ساق‌های دوزنقه چقدر است؟

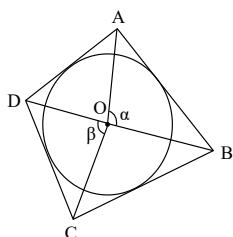


۱۳۷ اواسط اضلاع مستطیلی را به هم وصل می‌کنیم، چهارضلعی حاصل محیطی است یا محاطی؟ چرا؟

۱۳۸ در چهارضلعی محیطی $ABCD$ ، داریم $AB + CD = 8$ ؛ محیط چهارضلعی چقدر است؟

۱۳۹ چهارضلعی $ABCD$ محیطی است و O مرکز دایره است.

ثابت کنید: $\alpha + \beta = 180^\circ$



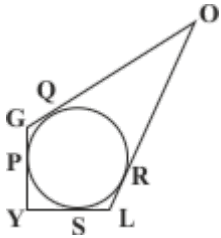
۱۴۰ ثابت کنید، اگر در یک چهارضلعی محدب، یک قطر عمودمنصف قطر دیگر باشد، چهارضلعی محیطی است.

۱۴۱ سه نیمساز داخلی چهارضلعی $ABCD$ هم‌مس هستند. اگر اندازه‌های اضلاع آن $AB = 3a - 1$ و $BC = 5a - 3$ و $CD = 4a$ و $AD = a^2 + 2$ باشد، مقدار a کدام است؟

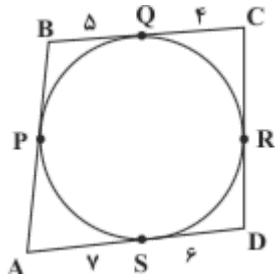
۱۴۲ یک دوزنقه متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع $R = 3$ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ واحد مربع باشد، طول ساق آن چقدر است؟



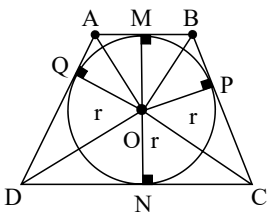
۱۴۳ ضلع‌های چهارضلعی $GOLY$ بر دایره مماس هستند. (شکل روبه‌رو)، ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$



۱۴۴ در شکل زیر P, Q, R, S نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ با دایره هستند. مقدار محیط این چهارضلعی را به دست آورید.



۱۴۵ مطابق شکل، دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ بر دایره به شعاع r محیط شده است.



الف) با توجه به این‌که نقطه O مرکز دایره محاطی دوزنقه و محل هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای داخلی آن است، ثابت کنید مثلث‌های AOM و BOM هم‌نهشت هستند و نتیجه بگیرید که $AM = BM = \frac{AB}{2}$. به همین ترتیب ثابت کنید مثلث‌های DON و CON هم‌نهشت هستند و نتیجه بگیرید $DN = CN = \frac{DC}{2}$.

ب) با توجه به قسمت (الف) و این نکته که مماس‌های رسم‌شده بر دایره از نقطه‌ای خارج آن، باهم برابرند، ثابت کنید:

$$AD = BC = \frac{AB + CD}{2}$$

۱۴۶ شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی با اضلاع ۸ و ۱۵ و ۱۷ چقدر است؟

۱۴۷ در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ واحد، طول خط‌المركزین دو دایره محاطی و محاطی خارجی آن چقدر است؟

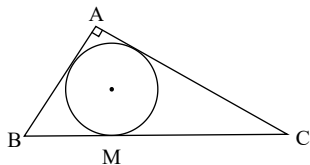
۱۴۸ شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $8\sqrt{3}$ چقدر است؟



۱۴۹ اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

۱۵۰ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ و $BC = 10$ است. اگر دایره محاطی داخلی این مثلث در نقطه M به فاصله ۴ واحد از رأس B بر ضلع BC مماس باشد، طول شعاع دایره محاطی چقدر است؟



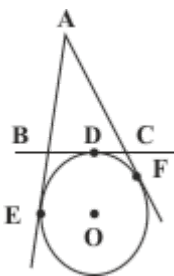
۱۵۱ در مثلث متساوی‌الاضلاع مجموع شعاع دایره محاطی داخلی با شعاع‌های ۳ دایره محاطی خارجی، چند برابر طول شعاع دایره محیطی است؟

۱۵۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت دایره محیطی چند برابر مساحت دایره محاطی داخلی است؟

۱۵۳ در دایره‌ای به مساحت $4\pi\sqrt{3}$ مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است، مساحت مثلث چقدر است؟

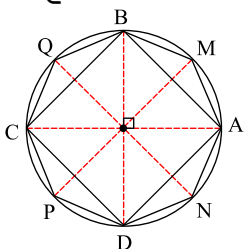
۱۵۴ در مثلثی به طول اضلاع ۷ و ۳ و ۵ واحد، دایره محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه تماس، ضلع متوسط را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱۵۵ خط‌های BC, AF, AE به ترتیب در نقطه‌های E و F و D بر دایره (O) مماس هستند. مماس BC ، خط‌های AF, AE را به ترتیب در نقطه‌های C, B قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه D روی دایره بین دو نقطه ثابت F, E ، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



۱۵۶ در هر مثلث، اگر یک زاویه منفرجه باشد، مرکز دایره محیطی مثلث قرار می‌گیرد.

۱۵۷ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشتضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.



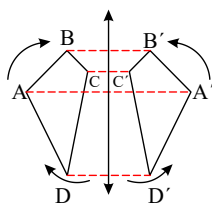
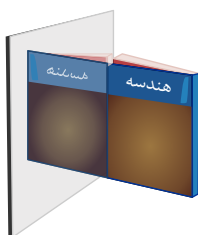


۱۵۸ در یک شش‌ضلعی منتظم به محیط $۱۲\sqrt{۳}$ فاصله مرکز دایره محیطی آن تا یکی از اضلاع شش‌ضلعی چقدر است؟

فصل دوم: تبدیل های هندسی

درس اول: تبدیل های هندسی

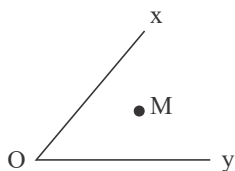
۱۵۹ در شکل زیر، چهارضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه، وقتی به ترتیب از A به C ، B و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



۱۶۰ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۱۶۱ چند بازتاب محوری وجود دارد که یک مستطیل (غیرمربع) را روی خود آن بازتاب می‌کند؟

۱۶۲ مطابق شکل، با استفاده از کدام تبدیل می‌توان خطی از M گذراند تا Ox و Oy را در A و B قطع کند طوری که $MA = MB$ باشد؟



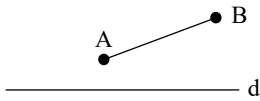
۱۶۳ دو پاره‌خط موازی و مساوی AB و CD بازتاب محوری هم هستند. نوع چهارضلعی $ABCD$ چیست؟

۱۶۴ نقطه A با سه بازتاب مرکزی متوالی به چهارضلعی $AA'A''B$ تبدیل می‌شود. مساحت این چهارضلعی چند برابر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن مراکز بازتاب می‌باشد؟

۱۶۵ ثابت کنید بازتاب محوری یک تبدیل طولیا است. (مسئله را در دو حالت زیر بررسی کنید)

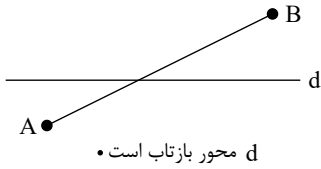


الف



d محور بازتاب است.

ب



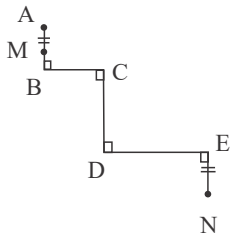
d محور بازتاب است.

۱۶۶ ثابت کنید بازتاب محوری در حالت کلی، شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۱۶۷ چند انتقال دو خط متقاطع را برهم منطبق می‌کند؟

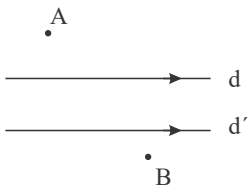
۱۶۸ دو دایره با شعاع‌های برابر با R مماس خارجند. بردار انتقالی که دو دایره را برهم منطبق می‌کند، کدام است؟

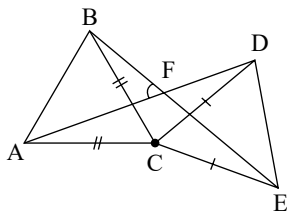
۱۶۹ مطابق شکل، $AB = ۲$ ، $BC = ۳$ ، $DC = ۴$ و $DE = ۵$ است. اگر $AM = EN$ باشد، طول بردار انتقالی که M را بر N منطبق می‌کند، کدام است؟



۱۷۰ دایره $C(O, R)$ و پاره خط AB در صفحه مفروض‌اند. در دایره C وتر موازی و مساوی AB رسم می‌کنیم. حداکثر چند وتر می‌توان یافت؟

۱۷۱ مطابق شکل، دو روستای A و B در دو طرف رودخانه قرار دارند. می‌خواهیم پلی عمودی بر رودخانه بسازیم. برای نصب پل به صورتی که مسیر بین A و B کمترین باشد، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟



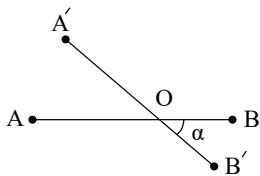


۱۷۲ در شکل روبه‌رو، مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle DEC$ متساوی‌الاضلاع هستند. الف) با کدام تبدیل و به چه صورت نقطه A بر B و نقطه D بر E تصویر می‌شود؟
 ب) با استفاده از ویژگی‌های تبدیل قسمت الف)، ثابت کنید که: $AD = BE$ و $\angle AFB = 60^\circ$.

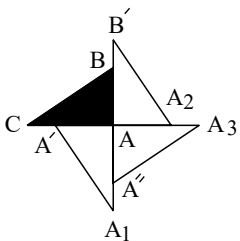
۱۷۳ نقطه A روی محیط دایره‌ای به شعاع R و مرکز O قرار دارد. n دوران متوالی یا زوایای برابر از A انجام می‌دهیم تا یک n ضلعی به‌دست آید. مساحت n ضلعی حاصل کدام است؟

۱۷۴ اگر زاویه بین خط و دوران‌یافته آن α باشد، با دوران دادن هر دو خط تحت زاویه $\alpha - 90^\circ$ ، زاویه بین خطوط دوران‌یافته کدام است؟

۱۷۵ نقطه M به فاصله a از مبدأ مختصات قرار دارد. این نقطه را به مرکز O (مبدأ مختصات) دو بار تحت زاویه 60° دوران می‌دهیم تا نقطه N به‌دست آید. طول MN کدام است؟



۱۷۶ در شکل مقابل، ثابت کنید دوران طولپا است.



۱۷۷ در شکل مقابل، چند دوران از شکل سایه‌دار وجود دارد؟

۱۷۸ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ باشد.

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟
 ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۱۷۹ دایره $C(O, R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k = 2$

ب) $k = -2$

پ) $k = \frac{1}{2}$



۱۸۰ در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۱۸۱ در یک تجانس به مرکز O و نسبت -4 ، فاصله یک نقطه و تصویرش چند برابر فاصله همان نقطه از مرکز تجانس است؟

۱۸۲ تحت یک تجانس محیط مثلث تصویر 12 و محیط مثلث اولیه 4 است. شعاع دایره‌ای که مجانس دایره‌ای به مساحت 16π تحت این

تجانس باشد، چقدر است؟

۱۸۳ اگر نقطه A' مجانس نقطه A با ضریب تجانس آن $k = 5$ باشد، مرکز تجانس کجاست؟

۱۸۴ دو دایره با شعاع‌های متفاوت با چند تبدیل ممکن است بر روی هم تصویر شوند؟

۱۸۵ اگر نقطه A' مجانس A با ضریب k و مرکز O و نقطه A'' مجانس A' با ضریب m و همان مرکز باشد، طول OA'' چند برابر OA

است؟

۱۸۶ مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم مثلث ABC به مرکز تجانس O می‌باشد. اگر $\frac{OA'}{AA'} = 3$ و نوع تجانس انقباضی باشد، مساحت

مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

۱۸۷ دو خط d و d' متقاطع اند. با چند تبدیل زیر می‌توان خط d را بر خط d' تصویر نمود؟

الف) انتقال ب) دوران پ) بازتاب محوری ت) تجانس

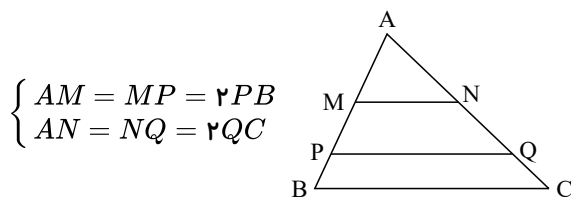
۱(۴

۳(۳

۲(۲

۴(۱

۱۸۸ در شکل مقابل داریم:



الف) با کدام تبدیل مثلث AMN بر مثلث APQ تصویر می‌شود؟ چگونه؟

ب) با کدام تبدیل مثلث APQ بر مثلث ABC تصویر می‌شود؟ چگونه؟

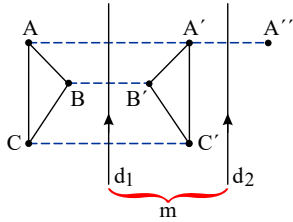


۱۸۹ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ΔABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

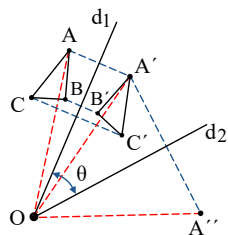


۱۹۰ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\angle AOA'' = 2\theta$

ب) اندازه $\angle B''OB$ و $\angle C''OC$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ΔABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

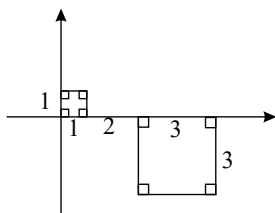


۱۹۱ خط d را نسبت به مرکز O تحت زاویه α دوران می‌دهیم تا خط d' به دست آید و دوران یافته d' به مرکز O' و تحت زاویه β را d'' می‌نامیم. زاویه بین d و d' کدام است؟ (هر دو دوران پادساعتگرد است)

۱۹۲ خط d را نسبت به خط Δ بازتاب می‌کنیم تا خط d' به دست آید. خط d' را تحت یک انتقال به خط d'' تبدیل می‌کنیم. اگر زاویه بین d و Δ را α بنامیم. زاویه بین d و d'' کدام است؟

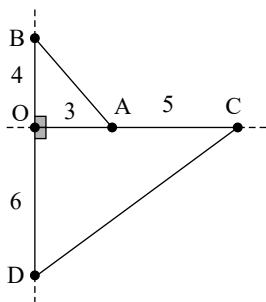
۱۹۳ تصویر یک خط تحت یک تبدیل بر همان خط منطبق است. این تبدیل چه تبدیلهایی می‌تواند باشد؟

۱۹۴ با ترکیب کدام تبدیل‌ها، مربع کوچک‌تر به مربع بزرگ‌تر تبدیل می‌شود؟



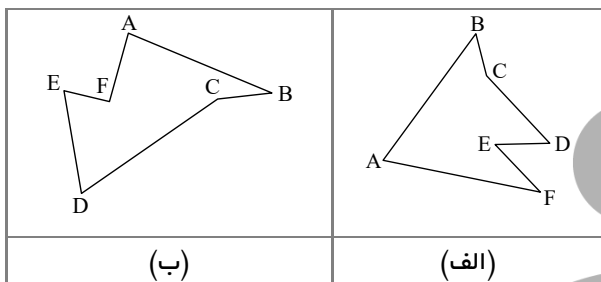


۱۹۵ مطابق شکل، با ترکیب کدام تبدیل‌ها، مثلث OAB بر مثلث OCD تصویر می‌شود؟

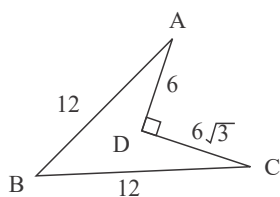


درس دوم : کاربرد تبدیل‌ها

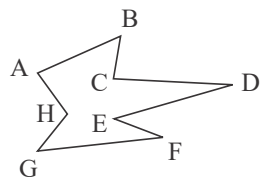
۱۹۶ دور زمین‌هایی مطابق شکل، حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



۱۹۷ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت جدید چقدر است؟

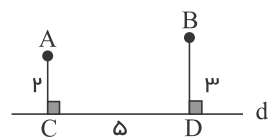


۱۹۸ می‌خواهیم با حفظ محیط این چندضلعی، مساحت آن را افزایش دهیم. از چه تبدیلی استفاده می‌کنیم؟



۱۹۹ مطابق شکل $CD = 5$ است. نقطه M روی d قرار دارد، به طوری که مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر است. طول این مسیر کدام

است؟

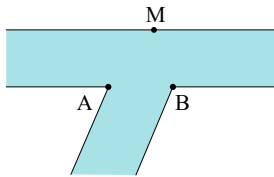




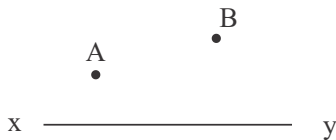
۲۰۰) مردی می‌خواهد برای برداشتن آب، از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و سپس آب را به اصطبل که در همان سمت رودخانه است، ببرد. او از کدام نقطه ساحل آب بردارد تا مسافتی که طی می‌کند، کمترین مقدار ممکن باشد؟ توضیح دهید.



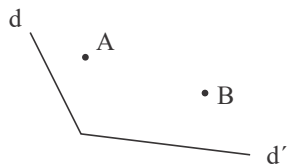
۲۰۱) می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



۲۰۲) مطابق شکل می‌خواهیم نقطه M را بر xy بیابیم که $\hat{BM}y = \hat{AM}x$ باشد. از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟



۲۰۳) مطابق شکل برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین A و B از طریق یافتن نقاط M و N بر d و d' از کدام تبدیل و چند بار استفاده می‌کنیم؟



۲۰۴) مطابق شکل برای یافتن نقطه M روی خط d که طول مسیر AMB کمترین باشد، از کدام تبدیل استفاده کنیم؟



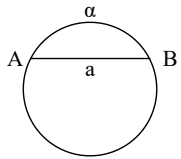
فصل سوم : روابط طولی در مثلث

درس اول : قضیه سینوس ها

۲۰۵) در مثلث ABC، $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ است. ثابت کنید: $b = 2R \cos \hat{C}$

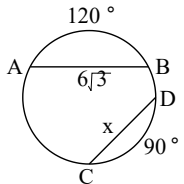


۲۰۶ مطابق شکل در دایره، وتری به طول $AB = a$ ، کمانی به اندازه زاویه α ایجاد کرده است. ثابت کنید: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$



(R شعاع دایره است.)

۲۰۷ در شکل مقابل، طول وتر CD چقدر است؟

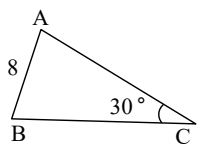


۲۰۸ ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم: $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

۲۰۹ در مثلث ABC ثابت کنید: $\frac{P}{R} = \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}$ (نصف محیط مثلث ABC است)

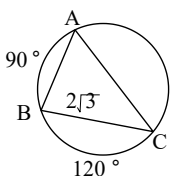
۲۱۰ در مثلث ABC ثابت کنید:

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$



۲۱۱ شعاع دایره محیطی مثلث ABC چقدر است؟

۲۱۲ در شکل مقابل طول ضلع AB چقدر است؟



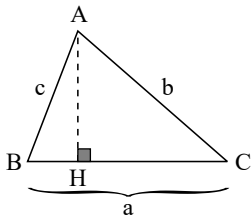
۲۱۳ در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ و $BC = 4\sqrt{3}$ است. فاصله مرکز دایره محیطی مثلث از ضلع BC چقدر است؟

۲۱۴ در مثلث ABC ثابت کنید:

$$\sin \hat{B} - \sin \hat{C} < \sin \hat{A} < \sin \hat{B} + \sin \hat{C}$$



- ۲۱۵ الف. در شکل مقابل، ارتفاع AH رسم شده است. می‌دانیم که $AC = 2R \times \sin \hat{B}$ (شعاع دایره محیطی مثلث) می‌باشد. با نوشتن رابطه $\sin \hat{B}$ در مثلث ABH ، ثابت کنید: $AB \times AC = AH \times 2R$.



ب. به همین ترتیب، ثابت کنید:

$$ab + ac + bc = 2R(h_a + h_b + h_c)$$

- ۲۱۶ در مثلث ABC داریم: $\frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$. زاویه $\hat{C}$ چند درجه است؟

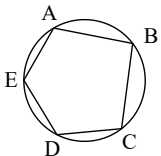
- ۲۱۷ در مثلث ABC ، $a = \sqrt{3}b$ و $\hat{A} = 2\hat{B}$. زوایای مثلث را محاسبه کنید.

- ۲۱۸ در مثلث ABC ، $BC = 2\sqrt{3} + 2$ و $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ است. محیط مثلث را حساب کنید.

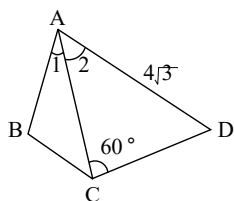
- ۲۱۹ در هر مثلث ثابت کنید:

$$\frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

- ۲۲۰ در پنج ضلعی محاطی $ABCDE$ ، همه قطرهای آن را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره محیطی R باشد، شعاع دایره محیطی کدام مثلث‌ها R می‌باشد؟



- ۲۲۱ در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ و $BC = 10\sqrt{3}$ است. اگر I محل هم‌رسمی نیم‌سازهای داخلی باشد، شعاع دایره محیطی مثلث BIC چقدر است؟

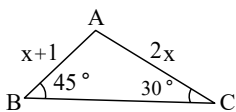


- ۲۲۲ در شکل مقابل، $CD = 2BC$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است. شعاع دایره محیطی مثلث $\triangle ABC$ چقدر است؟

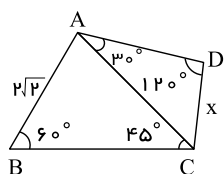
- ۲۲۳ در مثلث ABC ، $b = \sqrt{2}a$ و $\hat{A} = 30^\circ$. اندازه زاویه $\hat{C}$ چقدر است؟



۲۲۴ در مثلث ABC ، $b = \sqrt{3}a$ و $\hat{A} = 30^\circ$. اگر $c = 4$ باشد، بیشترین مقدار b چقدر است؟



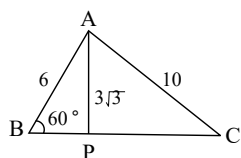
۲۲۵ در شکل مقابل، مقدار x چقدر است؟



۲۲۶ در مثلث ABC ، با ثابت ماندن طول $BC = a$ ، زاویه A دوبرابر می‌شود.

اگر اندازه شعاع محیطی تغییر نکند، زاویه A چند درجه است؟

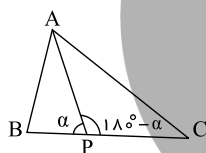
۲۲۷ در شکل مقابل، مقدار x چقدر است؟



۲۲۸ در شکل مقابل، شعاع دایره محیطی مثلث APC چقدر است؟

۲۲۹ در شکل مقابل برای نقطه دلخواه P ، روی ضلع BC ، ثابت کنید: $\frac{R_{\triangle APB}}{R_{\triangle APC}} = \frac{AB}{AC}$

(R شعاع دایره محیطی است.)



۲۳۰ در مثلث ABC ، حاصل $\frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}}$ برابر با است.

۲۳۱ در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ برابر با است. ($\hat{A} = 90^\circ$)

درس دوم : قضیه کسینوس ها

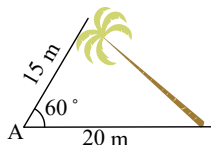
۲۳۲ یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 60° دیده می‌شود. اگر فاصله A تا پای

درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

(الف) طول درخت

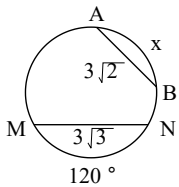
(ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

(پ) فاصله نوک درخت از زمین





۲۳۳ در شکل مقابل، اندازه کمان x چقدر است؟



۲۳۴ حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید:

الف) $BC = 9$, $AC = 6$, $AB = 10$

ب) $BC = 9$, $AC = 4$, $AB = 8$

پ) $BC = 17$, $AC = 15$, $AB = 8$

۲۳۵ به کمک قضیه کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

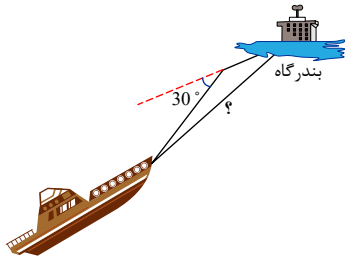
الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

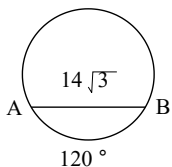
پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

۲۳۶ یک کشتی از یک نقطه با سرعت 60 کیلومتر در ساعت در جهت حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با

سرعت 40 کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



۲۳۷ در شکل مقابل، شعاع دایره را حساب کنید.



۲۳۸ در مثلث ABC رابطه $b^3 + c^3 = a^2(b + c)$ برقرار است. زاویه متوسط مثلث را به دست آورید.

۲۳۹ طول کوچک‌ترین قطر 12 ضلعی منتظم به طول ضلع a چقدر است؟

۲۴۰ در متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع 3 و 4 ، حاصل مجموع مربعات قطرها چقدر است؟

۲۴۱ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات قطرها، برابر با مجموع مربعات چهار ضلع متوازی‌الاضلاع می‌باشد.



۲۴۲ ثابت کنید در هر مثلث ABC داریم:

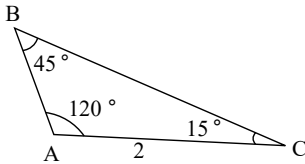
(۱) $\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow |b - c| < a < \sqrt{b^2 + c^2}$

(۲) $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

(۳) $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \sqrt{b^2 + c^2} < a < b + c$

۲۴۳ در مثلث ABC ، $AB = 3$ و $AC = 4$ و $BC = x - 1$ و $A > 90^\circ$ است. حدود x را مشخص کنید.

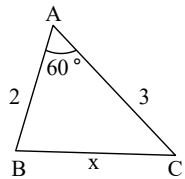
۲۴۴ در شکل مقابل، طول AB چقدر است؟



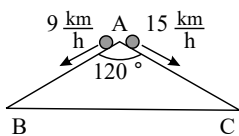
۲۴۵ در مثلث ABC ، $\hat{A} = 120^\circ$ است. ثابت کنید:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

۲۴۶ در شکل مقابل، مقدار x را حساب کنید.

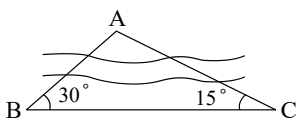


۲۴۷ از بالای سطح شیب‌دار، از نقطه A ، دو گلوله مشابه به سمت پایین آن رها می‌شوند. پس از $\frac{1}{3}$ ساعت به نقاط B و C می‌رسند.



طول BC چقدر است؟

۲۴۸ مطابق شکل، درختی در نقطه A ، در آن‌سوی رودخانه قرار دارد. از دو نقطه B و C ، این درخت به ترتیب با زاویه 30° و 15°



دیده می‌شود. اگر فواصل نقاط B و C از A به ترتیب $20\sqrt{2}$ و 20 باشد، فاصله BC را به دست آورید.

۲۴۹ در ضلعی منتظم، کوچک‌ترین قطر $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است. n چقدر است؟

۲۵۰ در مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۶، حاصل $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ چقدر است؟



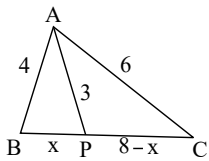
۲۵۱ در مثلث ABC ، m_a و m_b و m_c میانه‌ها هستند، ثابت کنید:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \end{cases}$$

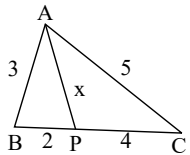
۲۵۲ در مثلث دلخواه ABC ثابت کنید رابطه‌های زیر برای میانه‌های مثلث برقرار است:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

۲۵۳ در شکل مقابل، مقدار x را حساب کنید.

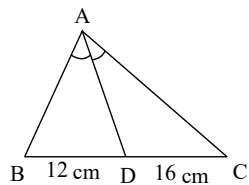


۲۵۴ در شکل مقابل، مقدار x را محاسبه کنید.



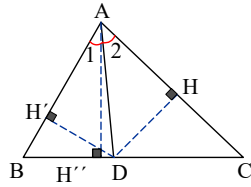
درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۲۵۵ اگر محیط مثلث مقابل 70 cm و AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ باشد، طول اضلاع AB و AC را بدست آورید.





۲۵۶ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:
الف) چرا $DH = DH'$ ؟



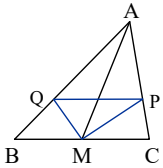
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times \dots}{\frac{1}{2}DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (1)$$

(ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times \dots}{\frac{1}{2}CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (2)$$

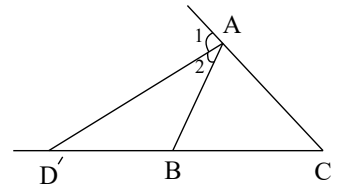
از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

۲۵۷ در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMB و AMC هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

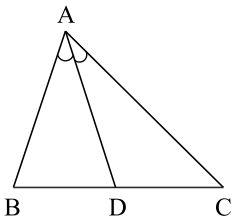


۲۵۸ در شکل زیر، AD' نیمساز خارجی زاویه $\hat{A}$ است. ثابت کنید:

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$



۲۵۹ در شکل مقابل، ثابت کنید: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (نیمساز داخلی $\hat{A}$: AD)

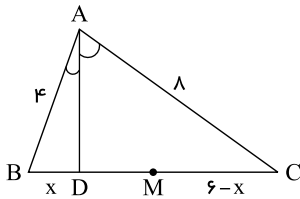


۲۶۰ در مثلث ABC ، طول اضلاع به نسبت ۲، ۳ و ۴ هستند. نیمساز داخلی بزرگترین زاویه رسم می‌شود. مساحت کوچکترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت اصلی است؟

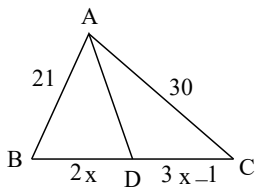


۲۶۱ در مثلث ABC ، نیمساز زاویه A ، ضلع BC را در D قطع می‌کند. ثابت کنید: $BD = \frac{ac}{b+c}$ ، $CD = \frac{ab}{b+c}$.

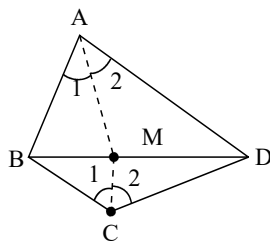
۲۶۲ در مثلث به طول اضلاع ۴، ۶ و ۸، فاصله پای نیمساز وارد بر ضلع متوسط تا وسط آن ضلع چقدر است؟



۲۶۳ در مثلث ABC با طول اضلاع ۳، ۴ و ۶، نیمساز وارد بر بزرگترین ضلع آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. طول هر قسمت را حساب کنید.

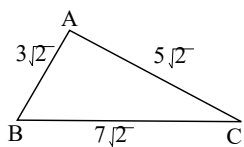


۲۶۴ در شکل مقابل AD نیمساز زاویه A است. مقدار x را بدست آورید.



۲۶۵ در شکل مقابل، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. ثابت کنید: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

۲۶۶ در مثلث ABC می‌دانیم $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه C را به دست آورید.



۲۶۷ در شکل مقابل، طول نیمساز داخلی زاویه A را حساب کنید.

۲۶۸ در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ و $AB = 3$ و $AC = 4$ است. طول نیمساز داخلی زاویه A چقدر است؟

۲۶۹ در مثلث ABC ، ثابت کنید:

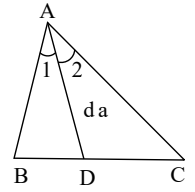
$$d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} \quad (d_a \text{ نیمساز داخلی زاویه } A)$$



۲۷۰ در مثلث ABC ثابت کنید:

$$d_a^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

(AD نیمساز زاویه A است)



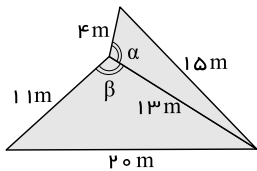
درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)

۲۷۱ دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

۲۷۲ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد زمین ها در شکل مشخص

شده اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می شود؟

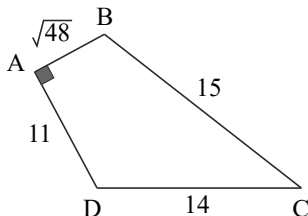
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه های برابر می سازد. ($\alpha = \beta$)



۲۷۳ در مثلث به اضلاع ۳، ۵ و ۷، طول بزرگترین ارتفاع را حساب کنید.

۲۷۴ ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) داریم: $S = p(p - a) = (p - b)(p - c)$.

۲۷۵ مساحت چهارضلعی $ABCD$ را حساب کنید.



۲۷۶ مساحت مثلث با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ را حساب کنید.

۲۷۷ بر اساس دستور محاسبه مساحت هرون، مساحت مثلثی با اضلاع a ، b و c از رابطه محاسبه می شود.

۲۷۸ ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.



۲۷۹ در مثلث ABC داریم: $AB = ۱۰$ ، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$.

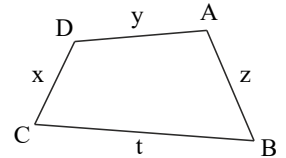
الف) طول BC را به دست آورید.

ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

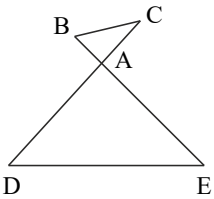
پ) مقدار $\sin \hat{B}$ را پیدا کنید.

۲۸۰ چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. ثابت کنید:

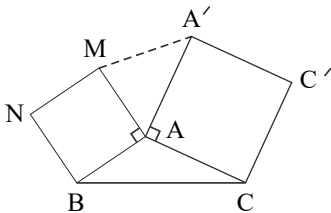
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(xy + zt) \times \sin \hat{D}$$



۲۸۱ در شکل مقابل داریم: $\frac{AB}{AD} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{AC}{AE} = \frac{1}{2}$ ؛ نسبت مساحت‌های دو مثلث چقدر است؟



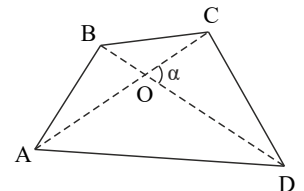
۲۸۲ در شکل مقابل، دو مربع بر اضلاع AB و AC از مثلث ABC ساخته‌ایم. ثابت کنید: $S_{\triangle AA'M} = S_{\triangle ABC}$



۲۸۳ اضلاع مثلثی را از طرف رأس‌های آن به اندازه همان ضلع ادامه می‌دهیم. مساحت مثلث جدید چند برابر مثلث اولیه است؟

۲۸۴ ثابت کنید مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

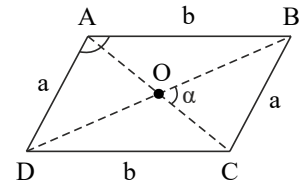
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin \alpha$$





۲۸۵ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، a و b طول اضلاع و c و d طول قطرهای می‌باشد. ثابت کنید:

$$S_{ABCD} = ab \sin \hat{A} = \frac{1}{2} cd \times \sin \alpha$$

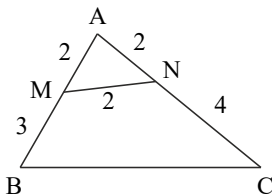


۲۸۶ قطر مستطیلی ۱۲ و زاویه بین قطرهای 60° است. مساحت مستطیل چقدر است؟

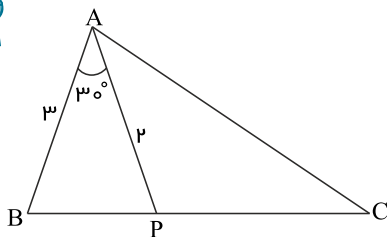
۲۸۷ بیشترین مساحت مثلث با طول دو ضلع ۴ و ۱۲ چقدر است؟

۲۸۸ در مثلث ABC ، $AB = 6$ و $AC = 10$ و مساحت مثلث $15\sqrt{3}$ می‌باشد. زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

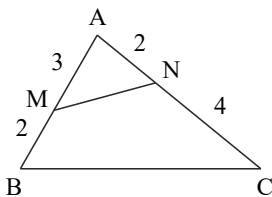
۲۸۹ در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی چقدر است؟



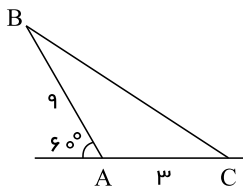
۲۹۰ در مثلث ABC داریم: $\frac{PB}{PC} = \frac{1}{2}$. مساحت مثلث ABC را حساب کنید.



۲۹۱ در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی چه نسبتی از مساحت مثلث ABC است؟



۲۹۲ مساحت مثلث ABC را حساب کنید.



۲۹۳ اگر در مثلثی اضلاع AB و AC و زاویه A معلوم باشند، مساحت مثلث از رابطه به دست می‌آید.



۲۹۴ در مثلث ABC رابطه $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{S}$ برقرار است. مقدار $h_a + h_b + h_c$ را حساب کنید.

۲۹۵ در مثلث ABC ، $a = 3$ ، $b = 5$ و $c = 6$ است. حاصل $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c}$ چقدر است؟

۲۹۶ ثابت کنید در مثلث ABC ، با طول‌های $\frac{1}{h_a}$ ، $\frac{1}{h_b}$ ، $\frac{1}{h_c}$ می‌توان مثلث جدیدی ساخت.





پاسخنامه تشریحی

۱ مطابق شکل، اگر نقطه A را به مرکز دایره وصل کنیم و امتداد دهیم، دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند که نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره به نقطه A هستند. داریم:

$$\begin{cases} d - R = 8 \\ d + R = 12 \end{cases} \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2$$

۲ می‌دانیم که شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است. داریم:

$$\widehat{OAD} = \widehat{OBC} = \widehat{OHC} = 90^\circ$$

$$\begin{cases} OB = OH, \widehat{H} = \widehat{B} = 90^\circ, OC \text{ (وتر مشترک)} \Rightarrow \widehat{OHC} \cong \widehat{OBC} \Rightarrow \widehat{HOC} = \widehat{BOC} \text{ (۱)} \\ OA = OH, \widehat{H} = \widehat{A} = 90^\circ, OD \text{ (وتر مشترک)} \Rightarrow \widehat{OAD} \cong \widehat{OHD} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{DOH} \text{ (۲)} \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{DOC} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

۳ اگر شعاع دایره C_1 را R_1 و شعاع دایره C_2 را R_2 فرض کنیم، آنگاه طول کمان‌های موردنظر برابر است با:

$$L_2 = \frac{45}{360} (2\pi R_2), L_1 = \frac{60}{360} (2\pi R_1)$$

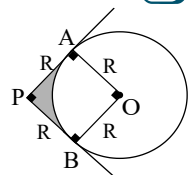
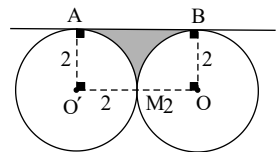
و در نتیجه:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow 45R_2 = 60R_1 \Rightarrow 3R_2 = 4R_1 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{9}{16}$$

$$\begin{aligned} S &= (\text{مستطیل } ABOO') - 2 \times S_{\widehat{MOB}} \text{ (هاشورزده)} \\ \Rightarrow S &= 2 \times 4 - 2 \times \frac{90^\circ}{360} \times \pi \times 2^2 = 8 - 2\pi \end{aligned}$$

۵ مساحت هاشورخورده برابر است با مساحت مربع به ضلع R منهای مساحت ربع دایره به شعاع R ، بنابراین:

$$S_{\text{ربع}} = R^2 - \frac{1}{4} (\pi R^2) = 4 - \frac{\pi}{4} \times 4 = 4 - \pi$$



$$S_{\text{قطعه}} = \frac{60}{360} (\pi R^2) - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} R^2 - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

۷ اگر مراکز سه دایره را A و B و C فرض کنیم، مساحت ناحیه هاشورخورده برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ منهای مساحت سه قطاع 60° از دایره به شعاع ۱ (که روی هم یک نیم دایره به شعاع «۱» می‌سازند):

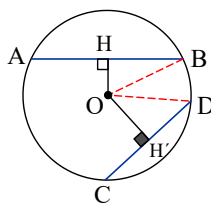
$$S_{\text{هاشور}} = \frac{2^2 \times \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \pi \times 1^2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

۸ از O به B و C وصل می‌کنیم،

$$\begin{cases} OH \perp AB \Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} \\ OH' \perp CD \Rightarrow CH' = DH' = \frac{CD}{2} \\ OB = OD = R \end{cases}$$



اگر $AB > CD$ داریم:

$$\frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow BH > DH'$$


$$\begin{cases} \triangle OBH : BH^2 = R^2 - OH^2 \Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow OH < OH' \\ \triangle ODH' : DH'^2 = R^2 - OH'^2 \end{cases}$$

$$R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow BH^2 > DH'^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4} \Rightarrow AB > CD$$

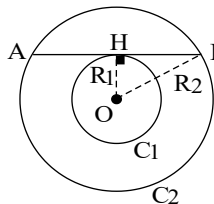
حال اگر فرض کنیم $OH < OH'$ داریم:

۹ شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = 90^\circ, \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow OA \parallel BH \Rightarrow \hat{OAB} = \hat{B}_r \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_r \\ OA = OB \Rightarrow \hat{OAB} = \hat{B}_1 \end{cases}$$

۱۰

مساحت ناحیه واقع بین دو دایره برابر است با:



$$\Delta S = S_r - S_1 = \pi R_r^2 - \pi R_1^2$$

$$\pi R_r^2 - \pi R_1^2 = \frac{25\pi}{2} \Rightarrow R_r^2 - R_1^2 = \frac{25}{2}$$

$$HB^2 = R_r^2 - R_1^2$$

بنابراین:

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه OHB داریم:

در نتیجه:

$$HB^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow HB = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 2HB = \frac{5}{\sqrt{2}} \times 2 = 5\sqrt{2}$$

$$\widehat{AB} = 60^\circ, AB = 10, OA = OB \Rightarrow OA = OB = AB = 10$$

$$\triangle OAB : \text{متساوی الاضلاع} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 5\sqrt{3}$$

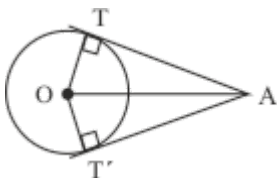
$$\triangle APR : AP^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AP = 8$$

$$AP = PB \Rightarrow AB = 2AP = 16$$

$$RQ = CQ = x$$

$$\triangle RCQ : x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$CQ = QD = 1 \Rightarrow CD = 2$$

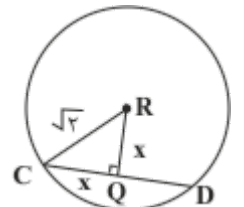


از مرکز دایره به نقاط تماس T, T' رسم می‌کنیم. چون شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، زوایای ایجادشده 90° می‌شوند.

$$\begin{cases} OT = OT' = R \text{ وتر و یک ضلع قائمه} \\ OA = OA \end{cases} \xrightarrow{\quad} \triangle OTA \cong \triangle OT'A \Rightarrow AT = AT'$$

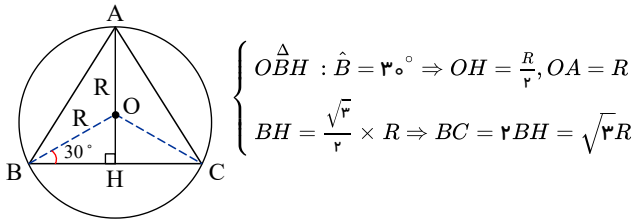
۱۳

ب) مطابق شکل داریم:

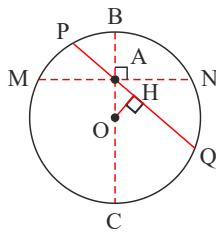




۱۴



$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3}R)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$



مطابق شکل قطر گذرنده از A را می‌گذرانیم. از A وتر MN را بر قطر BC عمود می‌کنیم.

۱۵

این وتر (MN) کوتاه‌ترین وتر گذرنده از A می‌باشد زیرا اگر وتر دلخواه PQ را رسم کنیم، آنگاه داریم:

$$\angle OAH : \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow OA > OH$$

$$OA > OH \Rightarrow MN < PQ$$

می‌دانیم که در یک دایره، وتری کوتاه‌تر است که از مرکز دایره فاصله بیشتری داشته باشد، بنابراین:

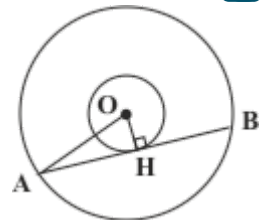
برای هر وتر دلخواه دیگر هم این مطلب برقرار است پس MN کوچک‌ترین وتر گذرنده بر A می‌باشد.

۱۶

$$\begin{cases} OA = R = 5 \\ OH = R' = 3 \end{cases}$$

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 25 = 9 + AH^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = 16 \Rightarrow AH = 4 \Rightarrow AB = 2AH = 8$$



می‌دانیم اگر دو وتر مساوی از دایره‌ای داشته باشیم کمان‌های نظیر آنها نیز مساوی‌اند و برعکس.

۱۷

(الف)

$$AD = BC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AB}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{CBA} \Rightarrow BD = AC$$

(ب)

$$AC = BD \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{ABC} - \widehat{AB} = \widehat{DAB} - \widehat{AB}$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow BC = AD$$

(الف) ۱۸

$$\begin{cases} MT = MT' \\ OT = OT' = R \\ OM = OM \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \triangle OMT \cong \triangle OMT'$$

پس $\widehat{TOM} = \widehat{T'OM}$, $\widehat{TMO} = \widehat{T'MO}$ یعنی پاره‌خط OM نیمساز دو زاویه گفته‌شده می‌باشد.

(ب)

$$\begin{cases} OT = OT' = R \\ OH = OH \\ \widehat{TOH} = \widehat{T'OH} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \triangle OTH \cong \triangle OT'H$$

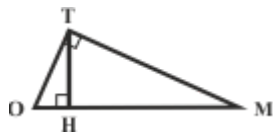
پس $TH = T'H$ یعنی H وسط TT' است.

از طرفی باز هم به خاطر اجزای متناظر دو مثلث زوایای $\widehat{H_1}$, $\widehat{H_2}$ مساوی‌اند و داریم:



$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_r \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_r = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_r = 90^\circ$$

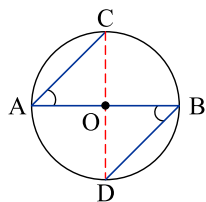
$$\begin{cases} TH = T'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_r = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow TT' \text{ عمود منصف } OM \text{ است}$$



پ) در مثلث قائم الزاویه OTM ، ارتفاع وارد بر وتر است. از طرفی طبق روابط طولی در هر مثلث قائم الزاویه می‌دانیم هر ضلع زاویه قائمه، واسطه هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است پس:

$$OT^r = OH \cdot OM \Rightarrow R^r = OH \cdot OM$$

۱۹



$$AC \parallel BD \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

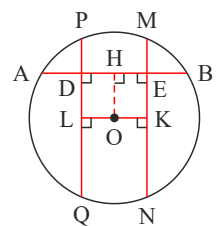
$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OC = OB = OD \\ \hat{OBD} = \hat{ODB} = \hat{OAC} = \hat{OCA} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAC \cong \triangle OBD \Rightarrow AC = BD$$

(هم‌ضلع)

۲۰ مطابق شکل از مرکز دایره عمودهای OH و OK و OL را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این عمودها، وتر مقابل را نصف می‌کند. داریم:

$$OH \perp AB \Rightarrow AH = BH, AD = BE \Rightarrow DH = EH$$

$$OHKE, OHDL : \text{مستطیل} \Rightarrow OK = HE, OL = DH \Rightarrow OK = OL$$

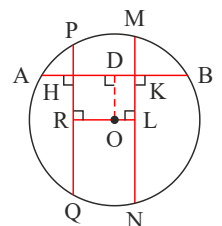


فاصله دو وتر PQ و MN از مرکز دایره یکسان است، پس $PQ = MN$.

۲۱ از مرکز دایره عمودهای OL و OD و OR را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این عمودها، وترهای مقابل را نصف می‌کند. داریم:

$$\hat{D} = 90^\circ \Rightarrow AD = BD = \frac{AB}{2}, AH < BK \Rightarrow HD > DK$$

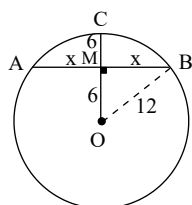
$$OLKD, ORHD : \text{مستطیل} \Rightarrow OL < OR$$



می‌دانیم وتر بزرگتر فاصله کمتری از مرکز دایره دارد، پس داریم:

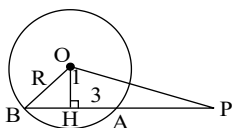
$$OL < OR \Rightarrow MN > PQ$$

۲۲ وقتی وتر AB عمود منصف شعاع OC است، بر آن عمود است و آن را نصف می‌کند، پس مطابق شکل $OM = 6$ می‌باشد. حال در مثلث قائم الزاویه OMB داریم:



$$MB^r = 12^r - 6^r = 108 \Rightarrow AB = 2\sqrt{108} = 12\sqrt{3}$$

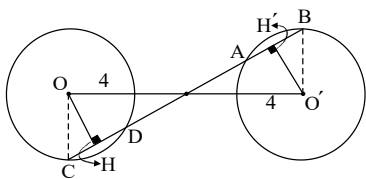
۲۳ می‌دانیم که شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان مقابل آن را نصف می‌کند، بنابراین $BH = \frac{AB}{2} = 3$ و طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه OBH داریم:



$$R^r = BH^r + OH^r = 9 + 1 \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

۲۴ اولاً به دلیل تقارن مسأله $AB = CD$ ، در ثانی اگر بخواهیم استدلال کنیم از O و O' عمودهایی بر وترهای AB و CD رسم می‌کنیم دو مثلث قائم الزاویه به حالت وتر

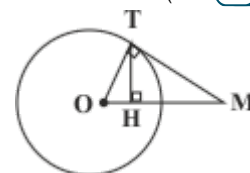
و یک زاویه حاده برابرند و نتیجه $OH = O'H'$ است و حال می‌گوییم در دو دایره مساوی اگر دو وتر از مرکز به یک فاصله باشند، باهم برابرند.



طبق شکل داریم:

$$\widehat{\text{محیط دایره}} = \widehat{AMB} + \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{\text{محیط دایره}} = 4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \frac{1}{5}(\widehat{\text{محیط دایره}})$$

$$\begin{aligned} OM^{\mathfrak{r}} &= OT^{\mathfrak{r}} + MT^{\mathfrak{r}} \\ \Rightarrow 1\mathfrak{F}\mathfrak{F} &= \mathfrak{F}\mathfrak{F} + MT^{\mathfrak{r}} \Rightarrow MT^{\mathfrak{r}} = 1 \circ \mathfrak{A} \\ \Rightarrow MT &= MT' = \sqrt{1 \circ \mathfrak{A}} = \mathfrak{F}\sqrt{\mathfrak{F}} \end{aligned}$$



(ب) راہ اول:

$$TT' \cdot OM = \mathfrak{r}R \cdot MT \Rightarrow TT' \times 1\mathfrak{r} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{e} \times \mathfrak{e}\sqrt{\mathfrak{r}} \Rightarrow TT' = \mathfrak{e}\sqrt{\mathfrak{r}}$$

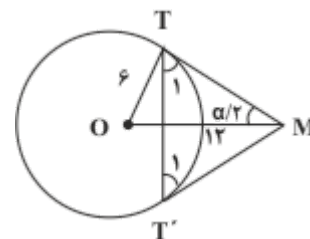
راه دوم: طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه OTM داریم:

$$TH \cdot OM = OT \cdot TM \Rightarrow TH \times 12 = 6 \times 6\sqrt{3} \Rightarrow TH = 3\sqrt{3} \Rightarrow TT' = 2TH = 6\sqrt{3}$$

(پ) راه اول: با توجه به قسمت‌های قبل $MT = MT' = TT'$ می‌باشد پس مثلث متساوی‌الاضلاع است پس همه زوایای آن 60° می‌باشند.

راه دوم: در مثلث قائم الزاویه OTM داریم:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

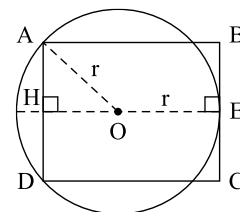


یعنی $T\hat{M}T' = 60^\circ$ می باشد. از طرفی $MT = MT'$ پس $\hat{T}_1 = \hat{T}'_1$ و داریم:

$$\hat{T}_1 + \hat{T}'_1 + \hat{M} = 1\lambda_0 \Rightarrow 2\hat{T}_1 + 6_0 = 1\lambda_0 \Rightarrow \hat{T}_1 = \hat{T}'_1 = 6_0^\circ$$

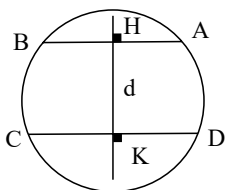
۲۷ مطابق شکل، اگر از نقطهٔ تماس (E) بر ضلع روبه‌رو (AD) خط عمود وارد کنیم از مرکز دایره می‌گذرد (چرا؟) و داریم:

$$OAH : \begin{cases} AH = 6 \\ OA = r \\ OH = 12 - r \end{cases} \xrightarrow{\text{فيثاغورس}} r^2 = 6^2 + (12 - r)^2 \Rightarrow r^2 = 36 + 144 + r^2 - 24r \Rightarrow 24r = 180 \Rightarrow r = \frac{15}{2} = 7,5$$



۲۸ الف. می‌دانیم که عمودمنصف هر وتر یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرد. از آنجا که دو وتر AB و CD موازی‌اند، مطابق شکل خط d که عمودمنصف مشترک هر دو

می‌باشد، از مرکز دایره می‌گذرد. به عبارت دیگر مرکز دایره روی خط d قرار می‌گیرد و نمی‌توان دقیقاً آن را به عنوان یک نقطه مشخص کرد.



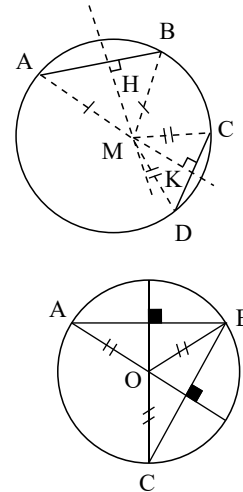
پ.

مطابق شکل، دو وتر AB و CD نابرابر و ناموازی هستند. می‌دانیم مرکز دایره از A و B به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف AB قرار دارد. از طرفی مرکز دایره نیز روی عمودمنصف CD نیز قرار دارد، پس تلاقی این دو عمودمنصف همان مرکز دایره است. مطابق شکل عمودمنصف‌های AB و CD در نقطه M (مرکز دایره) متقاطع‌اند و



داریم:

$$\begin{cases} AB \text{ روی } M \Rightarrow MA = MB \\ CD \text{ روی } M \Rightarrow MC = MD \end{cases}$$



۲۹ از C به A وصل می‌کنیم. دو مثلث ACH و $PC H$ به حالت دو ضلع و زاویه بین (قائمه) هم‌نهشت هستند. داریم:

$$\begin{cases} \widehat{HCA} = \widehat{HCP}, \widehat{HCP} = \frac{\widehat{BC'}}{2} \Rightarrow \widehat{BC'} = 2\alpha \\ \widehat{HCP} = \alpha \end{cases}$$

$$\widehat{HCA} = \widehat{HCP} = \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = 2\alpha, \quad (\text{محاطی}) \widehat{BB'A} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

۳۰ الف) با توجه به شکل داریم:

$$84^\circ + y + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 360^\circ - 84^\circ - 140^\circ = 136^\circ$$

$$\hat{x} = \widehat{BC} = 136$$

ب)

$$\hat{x} = 165^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 165^\circ \Rightarrow 84^\circ + 165^\circ + y = 360^\circ \Rightarrow \hat{y} = 111^\circ$$

۳۱ می‌دانیم که اگر در دایره‌ای دو وتر موازی باشند، کمان‌های بین آنها مساوی‌اند. داریم:

$$\begin{cases} EF \parallel BC \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} = x \\ AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{AD} = x \end{cases} \Rightarrow 360^\circ = x + x + x + x + \frac{x}{2} + 45^\circ$$

$$\Rightarrow 315^\circ = \frac{9x}{2} \Rightarrow x = 70^\circ$$

۳۲ کمان‌های بین دو وتر موازی، مساوی‌اند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \\ \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \\ \widehat{CD} = 2\widehat{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow 4\widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DCB} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

۳۳

$$(\text{مرکزی}) \widehat{AOC} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$$

$$(\text{محاطی}) x = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{260^\circ}{2} = 130^\circ$$

۳۴ امتداد شعاع OC ، دایره را در D قطع می‌کند. داریم:

$$\widehat{AD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow (\text{محاطی}) \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = \frac{50^\circ + 80^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 130^\circ + 65^\circ = 195^\circ$$

۳۵ با توجه به شکل داریم:

$$5y + 3x + 3y + 5x = 360^\circ \Rightarrow 8(x + y) = 360^\circ \Rightarrow x + y = 45^\circ$$

$$(\text{محاطی}) \widehat{MAN} = \frac{3x + 3y}{2} = \frac{3}{2}(x + y) = 67,5^\circ$$

۳۶

$$2x + 3x + 5x = 360^\circ \Rightarrow 10x = 360^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\text{زاویه محاطی } 3y = \frac{2x}{2} \Rightarrow 3y = x = 36^\circ \Rightarrow y = \frac{36^\circ}{3}$$

۳۷



$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{OC'A} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow OC' : AC \text{ شعاع عمود بر } AC' = CC' \\ \text{شعاع } OC' \end{array} \right.$$

۳۷

طبق شکل داریم:

$$(\text{محاطی}) \quad \widehat{ACD} = \frac{\widehat{ABD}}{2}, \quad (\text{محاطی}) \quad \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} - \widehat{ADC} = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

۳۸

$$90^\circ + 130^\circ + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 140^\circ$$

$$\text{محاطی } \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 70^\circ$$

۳۹ (الف)

$$\text{زاویه ضلّی} \quad \widehat{A} = x \Rightarrow \widehat{AB} = 2x$$

$$\widehat{B} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AL} = 100^\circ$$

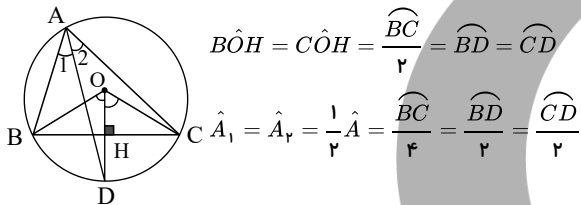
$$2x + 120^\circ + 100^\circ = 360^\circ \Rightarrow 2x = 140^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$$

(ب)

$$2x + 4x + 3x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow y = \frac{4x}{2} = 2x = 80^\circ$$

۴۰ عمود منصف BC از O مرکز دایره محیطی می‌گذرد. داریم:



بنابراین محل برخورد نیمساز زاویه A وسط کمان BC می‌باشد که همان محل برخورد عمود منصف BC با محیط دایره است.

۴۱

$$OA = AM = R \Rightarrow \widehat{AOM} = \alpha, (\text{زاویه خارجی}) \quad \widehat{OAB} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

$$OA = OB \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{OAB} = 2\alpha \Rightarrow (\text{زاویه خارجی}) \quad \widehat{\beta} = \widehat{B} + \alpha = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

۴۲

$$AB \parallel OC, AB = OC \Rightarrow ABCO \text{ متوازی الاضلاع} \quad AO = BC \Rightarrow AB = BC = OC = AO$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} : AO = OB = AB \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ \\ \widehat{BOC} : OB = OC = BC \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AMC} = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 240^\circ$$

۴۳

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B}, \quad (\text{ظلی}) \quad \widehat{DAC} = \frac{\widehat{AD}}{2}, \quad (\text{محاطی}) \quad \widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{B}, \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{DAC} \Rightarrow AD = DC$$

۴۴ مطابق شکل داریم:

$$BC \text{ قطر نیم‌دایره} \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$$

می‌بینیم که دو زاویه قائم FAB و FEB روبه‌رو به BF هستند پس نقاط A و E و B و F روی دایره‌ای به قطر BF قرار دارد.

۴۵

$$\text{الف} \quad \widehat{AOC} = \widehat{ABC} = 115^\circ, \quad (\text{محاطی}) \quad \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = x \Rightarrow \widehat{AC} = 2x$$

$$\widehat{AC} = 360^\circ - 115^\circ = 245^\circ \Rightarrow 2x = 245^\circ \Rightarrow x = 122,5^\circ$$

(ب) می‌دانیم که کمان‌های بین دو وتر موازی، با هم برابرند:

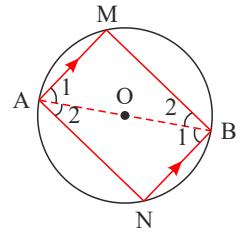
$$\text{ب) } AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE} = 60^\circ, \quad PF \parallel BD \Rightarrow \widehat{BF} = x = 60^\circ$$

$$y = 360^\circ - (60^\circ + 30^\circ + 60^\circ + 50^\circ + 60^\circ) = 100^\circ$$



۴۶ مطابق شکل AB قطر است و $AM \parallel BN$ است. داریم:

$$AB, \hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ, \hat{A}_r = \hat{B}_r \\ \Rightarrow \triangle ABN \cong \triangle AMB \text{ (ز ض ز)} \Rightarrow AM = BN$$



۴۷ می‌دانیم که در دایره کمان‌های بین دو وتر موازی، مساوی‌اند. داریم:

$$DE \parallel AC \Rightarrow \widehat{CE} = \widehat{AD} = 80^\circ, \xrightarrow{\text{قطر دایره } AC} \Rightarrow x = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 20^\circ$$

$$BC = CD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{CD} = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ \Rightarrow y = 100^\circ$$

۴۸

$$(\text{ظلی}) \quad \hat{M} = \frac{\widehat{BM}}{2} \Rightarrow 80^\circ = \frac{\widehat{BM}}{2} \Rightarrow \widehat{BM} = 160^\circ$$

$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{MB} = 160^\circ \Rightarrow y = 360^\circ - (160^\circ + 160^\circ) = 40^\circ$$

$$\triangle AOB : OA = OB, \text{ (مرکزی)} \quad \angle AOB = y = 40^\circ, \angle OAB = \angle OBA = x$$

$$\Rightarrow 2x + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$$

۴۹ می‌دانیم که:

$$PC = PB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 65^\circ$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \widehat{BPQ} = \hat{B} = 65^\circ, \text{ (مرکزی)} \quad \widehat{BPQ} = \widehat{BQ} = 65^\circ$$

$$\triangle PBC : \hat{B} = \hat{C} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BPC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{APD} = 50^\circ$$

$$(\text{مرکزی}) \quad \widehat{APD} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AD} = 50^\circ$$

۵۰ می‌دانیم که اگر در دایره‌ای دو وتر موازی باشند، کمان‌های بین آنها برابرند. داریم:

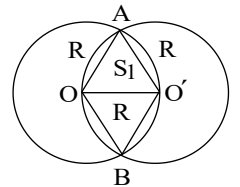
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} = 60^\circ$$

$$(\text{محاطی}) \quad B = 100^\circ = \frac{\widehat{ADC}}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{60^\circ + y}{2} \Rightarrow y = 140^\circ$$

$$x = 360^\circ - (60^\circ + 140^\circ + 60^\circ) = 100^\circ$$

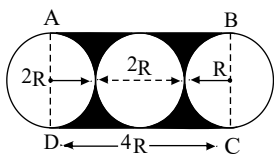
۵۱ با توجه به اینکه $OO' = R$ می‌باشد و $OA = O'A = R$ ، مثلث‌های $OO'B$ و $OO'A$ متساوی‌الاضلاع هستند. در نتیجه:

$$S_{\text{لوزی}} = 2S_1 = \frac{2\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$



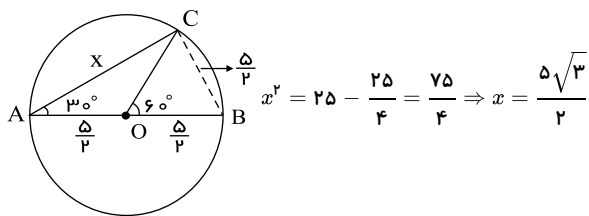
۵۲ سطح رنگی برابر است با مساحت مستطیل $ABCD$ منهای مساحت دو دایره کامل به شعاع R یعنی:

$$S_{\text{رنگی}} = (2R)(4R) - 2(\pi R^2) = 8R^2 - 2\pi R^2 = 2R^2(4 - \pi)$$



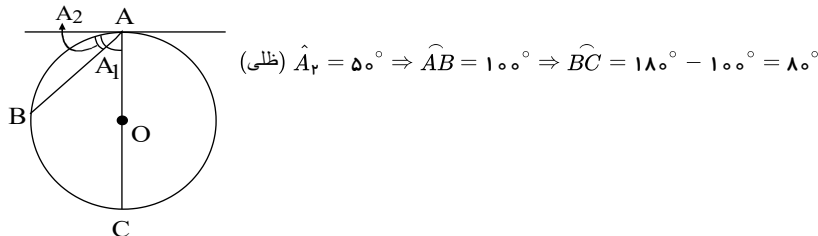
۵۳ AB قطر دایره است پس مطابق شکل $\triangle ABC$ در رأس C قائمه است، از طرفی زاویه‌های مرکزی $\widehat{BOC}$ و $\widehat{AOC}$ روبه‌رو به یک کمان هستند، پس $\hat{A} = 30^\circ$ است

و ضلع مقابل به آن نصف وتر است. حال در مثلث ABC از فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

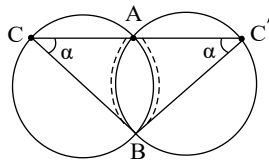


۵۴ در شکل، قطر دایره است. قطر، محیط دایره را به دو قسمت برابر تقسیم می‌کند.

یعنی هر کدام از این کمان‌ها برابر با 180° است، داریم:



۵۵ مطابق شکل، زاویه‌های محاطی $\hat{C}$ و $\hat{C}'$ هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{AB}$ هستند، پس دو زاویه محاطی برابر هستند، یعنی مثلث مورد نظر متساوی الساقین است.



$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (x + 75^\circ) + (2x + 7^\circ) + (3x - 22^\circ) = 360^\circ \Rightarrow 6x + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 50^\circ \\ & \hat{A} = \frac{1}{2}(2x + 7^\circ) = 53.5^\circ \\ & \hat{B} = \frac{1}{2}(3x - 22^\circ) = 64^\circ, \hat{C} = \frac{1}{2}(x + 75^\circ) = 62.5^\circ \end{aligned}$$

در نتیجه زوایای داخلی مثلث که زاویه‌های محاطی محسوب می‌شوند برابر با نصف کمان مقابل خودشان هستند، پس:

۵۷ از موازی بودن وترها نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} AB \parallel FC \Rightarrow \hat{AF} = \hat{BC} = x \\ BE \parallel DC \Rightarrow \hat{ED} = \hat{BC} = x \end{cases} \Rightarrow \hat{AF} = \hat{BC} = \hat{ED} = x$$

از طرفی داریم:

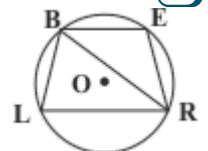
$$60^\circ + x + 40^\circ + x + 110^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow 3x = 150^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$$

چون زاویه‌ی محاطی $\widehat{FCD}$ روبه‌رو به کمان $\widehat{FED}$ است، پس با نصف کمان مقابل خودش برابر است:

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(110^\circ + x) = \frac{1}{2}(110^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$$

۵۸ می‌دانیم وترهای مساوی در یک دایره، کمان‌های مساوی از آن دایره جدا می‌کنند، پس:

$$\begin{aligned} BL = ER & \Rightarrow \hat{BL} = \hat{ER} \Rightarrow \frac{\hat{BL}}{2} = \frac{\hat{ER}}{2} \quad (\text{عکس قضیه خطوط موازی و مورب}) \\ & \Rightarrow \hat{BRL} = \hat{RBE} \Rightarrow BE \parallel LR \end{aligned}$$



۵۹ چون چهارضلعی DIAN متوازی‌الاضلاع است پس $\hat{I} = \hat{N}$

از طرفی زوایای $\hat{M}$ ، $\hat{N}$ زوایای محاطی مقابل به کمان $\widehat{DA}$ هستند، پس:

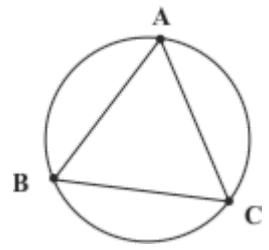
$$\hat{M} = \hat{N} = \frac{\widehat{DA}}{2}$$

$$\begin{cases} \hat{I} = \hat{N} \\ \hat{M} = \hat{N} \end{cases} \Rightarrow \hat{I} = \hat{M} \Rightarrow IDM \text{ متساوی الساقین است} \Rightarrow DM = DI$$

۶۰ می‌دانیم که همه مثلث‌ها محاطی هستند پس دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم، داریم:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$



۶۱

می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند. لذا داریم:

$$AT \parallel BB' \Rightarrow \widehat{ABB'} = \widehat{BAT}$$

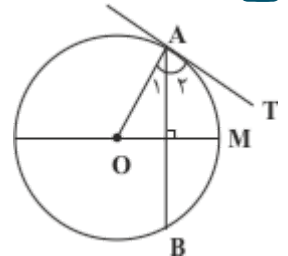
$$\text{قضیه } AT \parallel BB' \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AB'}$$

$$\begin{cases} \widehat{ABB'} = \frac{\widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \widehat{ABB'} = \widehat{BAT} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BAT} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

از طرفی زاویه $\widehat{ABB'}$ محاطی مقابل به کمان $\widehat{AB'}$ است، پس:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_r = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{O} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{O}$$

۶۲ با توجه به شکل زیر داریم:



از طرفی $\hat{O} = \widehat{AM}$ است پس $\widehat{O} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ بنابراین $\widehat{AM} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ پس می‌کند پس $\widehat{AM} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$

از طرفی می‌دانیم که قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند پس $\widehat{AM} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ پس $\widehat{O} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ پس $\hat{A}_r = \frac{1}{2}\widehat{AB}$

۶۳

$$RS \parallel VT \Rightarrow \widehat{TS} = \widehat{RV} = 70^\circ$$

$$\widehat{TS} + \widehat{SR} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{SR} = 110^\circ \Rightarrow \widehat{TV} = 110^\circ$$

$$\hat{1} = \widehat{TS} = 70^\circ, \hat{2} = \frac{\widehat{TS}}{2} = 35^\circ, \hat{3} = \widehat{RS} = 110^\circ$$

$$\hat{4} = \frac{\widehat{RV}}{2} = 35^\circ, \hat{5} = \frac{\widehat{SR}}{2} = 55^\circ, \hat{6} = \hat{5} = 55^\circ$$

$$\hat{7} = \frac{\widehat{RVT}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \quad \hat{8} = \hat{2} = 35^\circ$$

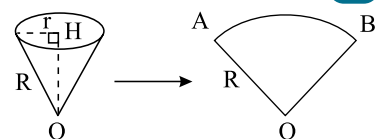
۶۴

$$\text{محیط قاعده مخروط} = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi \quad (1)$$

$$OA^r = OH^r + AH^r \rightarrow R = \sqrt{4^r + 3^r} = 5 \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{\text{طول کمان } AB}{R} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$

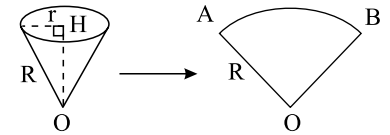
الف



ب



$$\text{محیط قاعده مخروط} = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi \quad (1)$$



$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \rightarrow R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{\text{طول کمان } AB}{R} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$

$$S = \frac{1}{2} \alpha R^2 = \frac{1}{2} \times \frac{6\pi}{5} \times 5^2 = 15\pi$$

۶۵

الف

در هر دایره می‌دانیم که زاویه بین دو وتر، برابر با نصف مجموع اندازه کمان‌های روبه‌روی آن زاویه است، بنابراین:

$$\hat{x} = \frac{\widehat{BN} + \widehat{APCM}}{2} = \frac{40^\circ + \widehat{AP} + 60^\circ + \widehat{CM}}{2} = 50^\circ + \frac{\widehat{AP}}{2} + \frac{\widehat{CM}}{2} \quad (1)$$

$$\hat{y} = \frac{\widehat{PC} + \widehat{ANBM}}{2} = \frac{60^\circ + \widehat{AN} + 40^\circ + \widehat{BM}}{2} = 50^\circ + \frac{\widehat{AN}}{2} + \frac{\widehat{BM}}{2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = 100^\circ + \frac{\widehat{AP} + \widehat{AN} + \widehat{BM} + \widehat{CM}}{2} = 100^\circ + \frac{360^\circ - (40^\circ + 60^\circ)}{2} = 230^\circ$$

چون AB قطر دایره است، پس:

ب

$$\widehat{AM} + \widehat{BM} = 180^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AM} - \widehat{BM}}{2} = 20^\circ \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{AM} + \widehat{BM} = 180^\circ \\ \widehat{AM} - \widehat{BM} = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AM} = 110^\circ \\ \widehat{BM} = 70^\circ \end{cases}$$

$$\hat{x} = \frac{\widehat{BM}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

چون AP مماس بر دایره است، پس بر قطر AB در نقطه تماس (A) عمود است، بنابراین:

$$\triangle ACP : \hat{CAP} = 90^\circ, \hat{C} = 20^\circ \Rightarrow \hat{y} = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$$

مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($AB = AC$)، پس:

پ

$$\begin{cases} AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \\ \hat{B} = \hat{C}, \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ \end{cases}$$

از طرفی:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 150^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

$$\hat{A} = 30^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ$$

MC قطر دایره است، بنابراین:

$$\widehat{AC} + \widehat{AM} = 180^\circ \Rightarrow 150^\circ + \widehat{AM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AM} = 30^\circ$$

به دلیل اینکه دو وتر AB و MN موازی‌اند، پس کمان‌های AM و BN برابرند، پس:

$$\widehat{BN} = \widehat{AM} = 30^\circ$$

$$\hat{x} = \frac{\widehat{CN}}{2} = \frac{\widehat{BN} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \hat{x} = \frac{30^\circ + 60^\circ}{2} = 45^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

$$\hat{TPN} = \frac{\widehat{NT}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{NT}}{2} \Rightarrow \widehat{NT} = 60^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

ت



$$\widehat{TMP} = \frac{\widehat{PT} - \widehat{NT}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{\widehat{PT} - 60^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{PT} = 100^\circ$$

می‌دانیم طول دو مماس رسم‌شده از یک نقطه بر دایره، باهم برابرند، بنابراین:

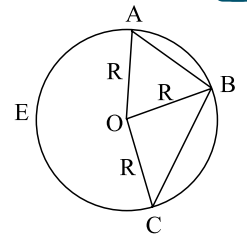
$$\triangle MTT' : MT = MT' \Rightarrow \widehat{MTT'} = \widehat{MT'T} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$$

$$(\widehat{MTT'}) = \frac{\widehat{TT'}}{2} = \frac{\widehat{NT} + \widehat{NT'}}{2} \Rightarrow 55^\circ = \frac{60^\circ + \widehat{NT'}}{2} \Rightarrow \widehat{NT'} = 50^\circ$$

$$\hat{x} = \frac{\widehat{NT'} + \widehat{PT}}{2} = \frac{50^\circ + 100^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\begin{cases} \triangle OAB : AB = R, OA = OB = R \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \\ \triangle OCB : BC = R\sqrt{2}, OB = OC = R \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{AEC} = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

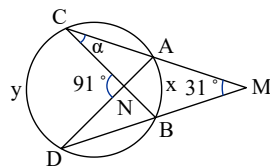


۶۶

$$\begin{cases} \hat{B} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{PN} - \widehat{PQ}}{2} = 80^\circ \\ \hat{C} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{PQ} + \widehat{PN} - \widehat{MN}}{2} = 70^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 150^\circ = \frac{2\widehat{QM} + 2\widehat{PN}}{2} \Rightarrow \widehat{PN} + \widehat{MQ} = 150^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{PN} + \widehat{MQ}}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$



$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 91^\circ \\ \frac{y-x}{2} = 31^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 182^\circ \\ y-x = 62^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ y = 122^\circ \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{x}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

۶۸ با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل داریم:

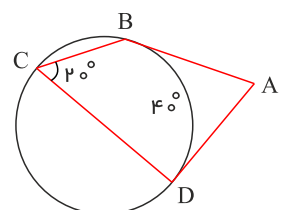
بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{AB} = 2y, \quad x = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{MC}}{2} \Rightarrow \widehat{MC} = 80^\circ \\ \hat{B} = \frac{\widehat{MD}}{2} \Rightarrow \widehat{MD} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{80^\circ + 60^\circ - 2y}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 140^\circ \Rightarrow x + y = 70^\circ$$

$$\begin{cases} \hat{C} = 20^\circ \\ \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{320^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{280^\circ}{2} = 140^\circ$$



۶۹

۷۰

۷۱



$$a + b + c = 360^\circ, \quad b = 2a, c = 3a \Rightarrow a + 2a + 3a = 360^\circ$$

$$\Rightarrow a = 60^\circ, \quad b = 120^\circ, \quad c = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = \frac{c-b}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

۷۲

دایره $AB \Rightarrow z = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$$\hat{C} = \frac{x-z}{2} \Rightarrow 35^\circ \times 2 = x - 80^\circ \Rightarrow x = 150^\circ \Rightarrow \hat{AN} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$\triangle NOP: ON = OP$, (مرکزی) $\hat{NOP} = \hat{NP} = 100^\circ + 30^\circ = 130^\circ$

$$y = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$$

$$x + y + z = 150^\circ + 25^\circ + 80^\circ = 255^\circ$$

۷۳

$$\begin{cases} OF \parallel AE, AB \text{ مورب } \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{A} = 30^\circ \\ (\text{مرکزی}) \hat{BF} = 30^\circ \end{cases}$$

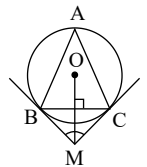
$$\hat{A} = \frac{\hat{BE} - \hat{DC}}{2} = \frac{30^\circ + \hat{EF} - x}{2} = 30^\circ \Rightarrow \hat{EF} - x = 30^\circ$$

از طرفی داریم $x + \hat{EF} = 90^\circ$ یعنی $x + 60^\circ + \hat{EF} + 30^\circ = 180^\circ$

$$x = 30^\circ, \hat{EF} = 60^\circ$$

۷۴ در مثلث ABC داریم:

$$AB = AC \Rightarrow \hat{AB} = \hat{AC} = 140^\circ \Rightarrow \hat{BC} = 360^\circ - 2 \times 140^\circ = 80^\circ$$



$$\hat{BMC} = \frac{\hat{BAC} - \hat{BC}}{2} = \frac{2 \times 140^\circ - 80^\circ}{2} = 100^\circ$$

$$\hat{OMC} = \frac{\hat{BMC}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

چون O از B و C به یک فاصله است، پس OM نیمساز $\hat{BMC}$ است:

۷۵

$$\begin{cases} \hat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow x + x + y = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 180^\circ \\ \hat{E} = 30^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x - y = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 80^\circ, y = 20^\circ$$

$$\hat{z} = \frac{\hat{DM} + \hat{ABC}}{2} = \frac{40^\circ + 180^\circ + 20^\circ}{2} = 120^\circ$$

۷۶

$$\left. \begin{aligned} (\text{محاطی}) \quad \hat{A} = \frac{\hat{CD}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \hat{CD} = 40^\circ \\ (\text{محاطی}) \quad \hat{B} = \frac{\hat{DE}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \hat{DE} = 80^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{CDE} = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{M} = \frac{\hat{CDE} - \hat{AB}}{2}, \quad (\text{محاطی}) \quad \hat{D} = \frac{\hat{AB}}{2} \Rightarrow \hat{M} + \hat{D} = \frac{\hat{CDE} - \hat{AB} + \hat{AB}}{2} = \frac{\hat{CDE}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M} + \hat{D} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

۷۷

$$\hat{M} = \frac{\hat{AC} + \hat{BD}}{2} \Rightarrow 90^\circ = \frac{2x + 3x + 10^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow 5x + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 34^\circ$$

چون شعاع OC عمود بر وتر است پس آن را نصف می‌کند و داریم:

$$\hat{AC} = \hat{BC} \Rightarrow 2x = y \Rightarrow y = 68^\circ$$

۷۸

الف



$$۱) \hat{M} = \frac{c-a}{2} = \frac{۱۵۰^{\circ} - ۶۰^{\circ}}{2} = ۴۵^{\circ}$$

$$۲) b+c+a=۳۶۰^{\circ} \Rightarrow a=۴۰^{\circ}$$

$$\hat{M} = \frac{c-a}{2} = \frac{۲۰۰^{\circ} - ۴۰^{\circ}}{2} = ۸۰^{\circ}$$

$$۳) \hat{M} = \frac{c-a}{2} = \frac{۷۴^{\circ}}{2} = ۳۷^{\circ}$$

$$۴) a=x \Rightarrow \begin{cases} b=۴x \\ c=۷x \end{cases} \Rightarrow x+۴x+۷x=۳۶۰^{\circ} \Rightarrow x=۳۰^{\circ}$$

$$\begin{cases} a=۳۰^{\circ} \\ c=۷ \times ۳۰^{\circ} = ۲۱۰^{\circ} \end{cases} \Rightarrow \hat{M} = \frac{c-a}{2} = \frac{۲۱۰^{\circ} - ۳۰^{\circ}}{2} = ۹۰^{\circ}$$

$$۱) \hat{M} = \frac{c-a}{2} \Rightarrow ۴۵ = \frac{۲۰۰^{\circ} - a}{2} \Rightarrow a = ۱۱۰^{\circ}$$

$$۲) \hat{M} = \frac{c-a}{2} \Rightarrow ۳۰ = \frac{c-۵۵^{\circ}}{2} \Rightarrow c = ۱۱۵^{\circ}$$

$$۳) \hat{M} = \frac{c-a}{2} \Rightarrow ۴۵ = \frac{۳a-a}{2} \Rightarrow a = ۴۵^{\circ}$$

$$۴) a+b+c=۳۶۰^{\circ} \Rightarrow a+c=۲۶۰^{\circ}$$

$$\hat{M} = \frac{c-a}{2} \Rightarrow ۶۰ = \frac{c-a}{2} \Rightarrow c-a=۱۲۰^{\circ}$$

$$\begin{cases} a+c=۲۶۰^{\circ} \\ c-a=۱۲۰^{\circ} \end{cases} \Rightarrow ۲c=۳۸۰^{\circ} \Rightarrow c=۱۹۰^{\circ} \Rightarrow a=۷۰^{\circ}$$

$$AN=BN=x; AE=BF=y, \hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{EF}}{2} = \frac{۱۸۰^{\circ} - \widehat{EF}}{2} = ۵۶^{\circ} \Rightarrow \widehat{EF} = ۶۸^{\circ}$$

$$\Rightarrow ۲y + ۶۸^{\circ} = ۱۸۰^{\circ} \Rightarrow y = ۵۶^{\circ}$$

$$\widehat{ANB} = ۱۸۰^{\circ} \Rightarrow x+x=۱۸۰^{\circ} \Rightarrow x=۹۰^{\circ}$$

$$\hat{C} = \frac{x+y}{2} = \frac{۹۰^{\circ} + ۵۶^{\circ}}{2} = ۷۳^{\circ}$$

$$CD=DE=AB = \frac{۳۶۰^{\circ}}{۸} = ۴۵^{\circ} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CE}}{2} = \frac{۴۵^{\circ} + ۹۰^{\circ}}{2} = ۶۷,۵^{\circ}$$

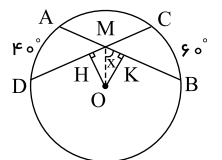
$$\hat{M} = \frac{\widehat{A'B'} + \widehat{C'D'}}{2} = \frac{\widehat{A'B} + \widehat{BB'} + \widehat{DD'} + \widehat{C'D}}{2} = \frac{\frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2}}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AD} + \widehat{DC}}{4} = \frac{۳۶۰^{\circ}}{4} = ۹۰^{\circ}$$

۸۰ دو وتر AB و CD مساوی‌اند، پس فاصله مرکز دایره O از AB و CD برابر است، پس OM نیمساز زاویه $\widehat{DMB}$ می‌باشد:

$$OH=OK, \hat{H}=\hat{K}=۹۰^{\circ} \Rightarrow \triangle OMH \cong \triangle OKK$$

$$\Rightarrow \widehat{OMK} = \frac{\widehat{DMB}}{2}$$



$$\widehat{AD} + \widehat{BC} = ۴۰^{\circ} + ۶۰^{\circ} = ۱۰۰^{\circ} \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = ۳۶۰^{\circ} - ۱۰۰^{\circ} = ۲۶۰^{\circ}$$

$$\widehat{DMB} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{۲۶۰^{\circ}}{2} = ۱۳۰^{\circ} \Rightarrow x = \frac{\widehat{DMB}}{2} = \frac{۱۳۰^{\circ}}{2} = ۶۵^{\circ}$$

$$(\text{محاطی}) \hat{A}_1 = \frac{\widehat{DC}}{2}, (\text{محاطی}) \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2}, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{CD}$$

$$(\text{ظلی}) \widehat{MDC} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

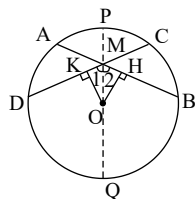


$$\begin{cases} \widehat{ACD} - \widehat{A}_1 = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 90^\circ \\ \widehat{M} = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 90^\circ \end{cases}$$

۸۴ می‌دانیم که وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند. داریم:

$$AB = CD \Rightarrow OH = OK$$

$$OH = OK, \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ, OM \text{ (وتر مشترک)} \xrightarrow{\text{تساوی وتر و یک ضلع قائمه}} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$



۸۵

$$(\text{ظلی}) \quad \widehat{B} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ, \quad (\text{ظلی}) \quad \widehat{A} = \frac{\widehat{AC}}{2} = x \Rightarrow \widehat{AC} = 2x$$

$$(\text{محاطی}) \quad \widehat{C} = 50^\circ = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 100^\circ$$

$$y = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2} \Rightarrow 2y = 2x + 60^\circ - 100^\circ \Rightarrow x - y = 40^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow 100^\circ + 60^\circ + 2x = 360^\circ \Rightarrow x = 100^\circ \Rightarrow 100^\circ - y = 40^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$$

۸۶

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 6x + 10^\circ = \frac{x + 90^\circ + 2x}{2} = \frac{3x + 90^\circ}{2} \Rightarrow$$

$$12x + 20^\circ = 3x + 90^\circ \Rightarrow 9x = 70^\circ \Rightarrow x = \frac{70^\circ}{9}$$

۸۷

$$(\text{مرکزی}) \quad \widehat{AOB} = \widehat{AMB}, \quad (\text{محاطی}) \quad \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \quad \widehat{AOB} = \widehat{AMB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 2\widehat{AMB}, \quad \widehat{AB} + \widehat{AMB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 120^\circ$$

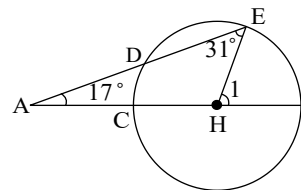
۸۸

$$(\text{ظلی}) \quad \widehat{Q} = 50^\circ = \frac{\widehat{QE}}{2} \Rightarrow \widehat{QE} = 100^\circ \Rightarrow x + y = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{A} = \frac{x - y}{2} \Rightarrow 60^\circ = \frac{x - y}{2} \Rightarrow x - y = 120^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x = 190^\circ, y = 70^\circ$$

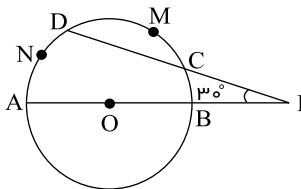
۸۹ در مثلث AEH زاویه $\widehat{H}_1$ زاویه خارجی است و با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است، پس:



$$\widehat{H}_1 = 31^\circ + 17^\circ = 48^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 48^\circ$$

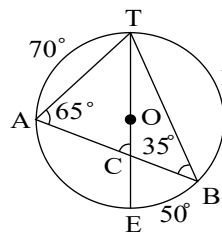
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BE} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 17^\circ = \frac{48^\circ - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 48^\circ - 34^\circ = 14^\circ$$

۹۰



$$\begin{cases} \widehat{BC} + \widehat{DC} + \widehat{AD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + 30^\circ + \widehat{AD} = 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{AD} = 150^\circ \\ \widehat{E} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AND} = 105^\circ$$

۹۱ زاویه‌های $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ محاطی هستند، پس با نصف کمان مقابل خودشان برابرند. در نتیجه:



$$\widehat{C} \text{ حال } \widehat{BE} = 50^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{TA} + \widehat{BE}}{2} = \frac{70^\circ + 50^\circ}{2} = 60^\circ$$

اما چون TE قطر است پس $\widehat{TBE} = 180^\circ$ است و در نتیجه:
زاویه بین دو وتر است، پس:

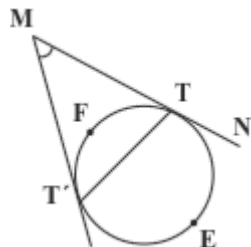


१५

$$B\hat{N}T = \frac{\hat{B}T + \hat{A}L}{\mathfrak{z}} \Rightarrow \mathfrak{f}x + \mathfrak{z}\mathfrak{A}^{\circ} = \frac{\mathfrak{q}x + \mathfrak{I}\mathfrak{V}^{\circ} + \mathfrak{I}\circ x - \mathfrak{I}\circ^{\circ}}{\mathfrak{z}}$$

$$\Rightarrow 12x + 56^\circ = 19x + 7^\circ \Rightarrow x = 7^\circ$$

$$B\hat{N}T = \mathfrak{f}x + \mathfrak{y}\lambda^\circ = \mathfrak{y}\circ^\circ$$



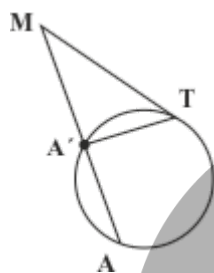
၄၃

از T به T' وصل می‌کنیم:

زاویه $\hat{NTT}'$ زاویه خارجی مثلث MTT' است.

$$N\hat{T}T' = \hat{M} + M\hat{T}'T$$

$$\Rightarrow \hat{M} = N\hat{T}T' - M\hat{T}'T = \frac{\widehat{TE}T'}{\underbrace{\quad}_2} - \frac{\widehat{TF}T'}{\underbrace{\quad}_2}$$



تذکر: زوایای $\hat{M}T'T, \hat{N}TT'$ ظلی هستند.

৭৮

از T به A' وصل می‌کنیم.

زاویه $\hat{A}TA'$ زاویه خارجی مثلث $TA'M$ است.

$$T\hat{A}'A = A'\hat{T}M + \hat{M}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = T\hat{A}'A - A'TM$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT}}{\text{r}} - \frac{\widehat{A'T}}{\text{r}} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{A'T}}{\text{r}}$$

زاویه $\hat{A}'A$ محاطی و زاویه $\hat{A'TM}$ ظلی است. پس:

၇၆

الف

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{160^\circ - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow \widehat{A'B'} = 120^\circ$$

ب

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 35^\circ = \frac{\widehat{AB} - 60^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 130^\circ$$

پ

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{d} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{A'B'} = \mathfrak{q}_0.$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{\mathfrak{r}} \Rightarrow \mathfrak{r}\hat{\omega}^\circ = \frac{\mathfrak{r}\widehat{A'B'} - \widehat{A'B'}}{\mathfrak{r}} = \widehat{A'B'}$$

99

الف

$$\left\{ \begin{array}{l} 100^\circ = \frac{x+y}{2} \rightarrow \\ 20^\circ = \frac{x-y}{2} \rightarrow \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x+y = 120^\circ \\ x-y = 40^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 100^\circ \\ y = 20^\circ \end{array} \right.$$

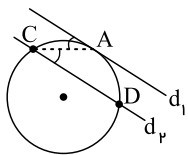




$$\begin{cases} x + y = 360^\circ \\ \frac{x - y}{2} = 62^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 360^\circ \\ x - y = 124^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 242^\circ \\ y = 118^\circ \end{cases}$$

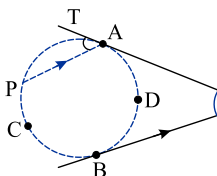
97

الف



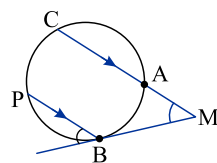
A را به C وصل می‌کنیم. از $d_p \parallel d_q$ و مورب بودن خط AC نتیجه می‌شود: $\hat{M}\hat{A}\hat{C} = \hat{A}\hat{C}\hat{D}$. از طرفی $\hat{M}\hat{A}\hat{C}$ ، زاویهٔ ظنی رو به کمان AD است؛

پس $\hat{M}\hat{A}\hat{C} = \frac{1}{2}\hat{A}\hat{C}$ و $\hat{A}\hat{C}\hat{D}$ ، زاویه محاطی مقابل به کمان AD است. پس $\hat{A}\hat{C}\hat{D} = \frac{1}{2}\hat{A}\hat{D}$ بنابراین از تساوی $\hat{M}\hat{A}\hat{C} = \hat{A}\hat{C}\hat{D}$ ،

$$\hat{AC} = \hat{AD} \text{ نتیجه می شود.}$$


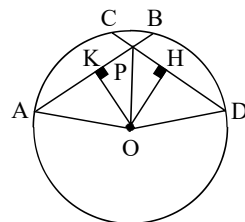
$$M \left\{ \begin{array}{l} AP \parallel MB \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{PCB} \quad , \hat{M} = \hat{P\hat{A}T} \\ \textcircled{\text{K}} \hat{P\hat{A}T} = \frac{\widehat{PA}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{PA}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{PCB}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

پ



$$\left\{ \begin{array}{l} PB \parallel MC \Rightarrow \hat{M} = \hat{B} \text{ , } \widehat{AB} = \widehat{PC} \\ \text{(ضلعی)} \hat{B} = \frac{PB}{۲} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{PB}}{۲} = \frac{\widehat{BPC} - \widehat{CP}}{۲} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{۲}$$

۹۸ می‌دانیم که شعاع عمود بر وتر آن را نصف می‌کند، بنابراین:



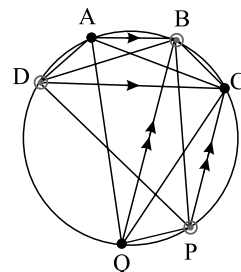
چون نقطه O از دو ضلع زاویه APD به یک فاصله است، پس روی نیمساز آن قرار دارد، یعنی: $\hat{A}PO = \hat{D}PO$.

99

الف در چهارضلعی $ABCD$ ، دو وتر AB و CD موازی‌اند، بنابراین کمان‌های بین این دو وتر برابرند، از آنجا که کمان‌های $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ برابر هستند، پس وترهای AD و

BC نیز برابرند. پس:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC$$



به همین ترتیب داریم:

$$PC \parallel BQ \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{PQ} \Rightarrow BC = PQ \Rightarrow BC \parallel PQ \Rightarrow \text{نور نقه متساوي الساقين} \Rightarrow AD = BC = PQ$$

ب در هر ذوزنقه متساوی الساقین قطرهای برابرند، بنابراین:



$$\begin{cases} ABCD \text{ دوزنقە متساوی الساقین} \Rightarrow AC = BD & (۱) \\ BCPQ \text{ دوزنقە متساوی الساقین} \Rightarrow PB = CQ & (۲) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \widehat{ACQ} = \frac{\widehat{ADQ}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DQ}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{DQ}}{2} \\ \widehat{PBD} = \frac{\widehat{PQD}}{2} = \frac{\widehat{PQ} + \widehat{DQ}}{2} = \frac{\widehat{PQ}}{2} + \frac{\widehat{DQ}}{2} \Rightarrow \widehat{ACQ} = \widehat{PBD} \quad (3) \\ \widehat{AD} = \widehat{BC} = \widehat{PQ} \end{cases}$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که دو مثلث $\triangle ACQ$ و $\triangle PBD$ به حالت تساوی دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت هستند.

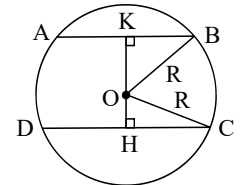
در حالت اول برای محاسبه بیشترین فاصله: می‌دانیم که شعاع عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند. داریم:

$$OH \triangleq OC = R, CH = \frac{CD}{2} = \frac{3}{4}R \Rightarrow OH^2 = OC^2 - CH^2 \Rightarrow OH^2 = R^2 - \frac{9}{16}R^2 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{7}}{4}R \quad (1)$$

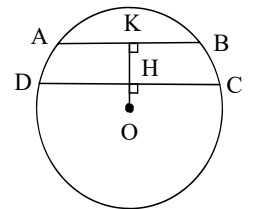
$$OK \triangleq OB = R, BK = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2} \Rightarrow OK^2 = OB^2 - BK^2 \Rightarrow OK^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{3}}{2}R \quad (2)$$

$$\Rightarrow HK = OH + OK = \frac{\sqrt{7}}{4}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$HK = OK - OH = \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{\sqrt{7}}{4}R$$

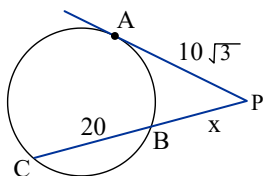


در حالت دوم برای محاسبه کمترین فاصله داریم:



۱۰۱

$$S' (\text{سایه زده}) = S(60^\circ \text{ قطاع}) - S(\text{مثلث}) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 4^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$



$$PA^2 = PB \times PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(x + 20) \\ 300 = x(x + 20) \Rightarrow x = 10 \Rightarrow PB = 10, PC = 30$$

۱۰۲

$$DC = 9, CM = 2DM \Rightarrow DM = 3, CM = 6$$

$$\text{روابط طولی: } DM \times MC = AM \times MB \Rightarrow \begin{cases} AM \times MB = 3 \times 6 = 18 \\ AM + MB = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = 2 \\ BM = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}$$

۱۰۳

$$AO = OB = BM = r, PQ = \frac{r}{2} \Rightarrow AO = OB = BM = 2, PQ = \frac{2}{2} = 1$$

$$MP \times MQ = MB \times MA \Rightarrow MP \times (MP + 1) = 2 \times 6$$

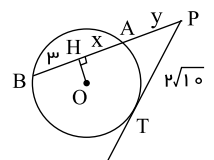
$$\Rightarrow MP^2 + MP - 12 = 0 \Rightarrow MP = 3$$

طبق فرض و روابط طولی در دایره داریم:

۱۰۴ می‌دانیم شعاع عمود بر یک وتر آن وتر را نصف می‌کند. پس: $x = 3$

از طرفی طبق روابط طولی در دایره می‌توان نوشت:

$$PT^2 = PA \cdot PB \Rightarrow (2\sqrt{10})^2 = y \times (y + 6)$$



$$\Rightarrow 40 = y^2 + 6y \Rightarrow y^2 + 6y - 40 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x + y = 3 + 4 = 7$$



۱۰۶ می‌دانیم که مماس‌های رسم‌شده بر دایره از نقطه M برابرند. داریم:

$$MT = MT_3, \quad MT = MT_4, \quad MT_4 = MT, \quad MT_1 = MT$$

$$\Rightarrow MT = MT_1 = MT_4 = MT_3 = MT_2 = \dots$$

۱۰۷ روابط طولی را در دو دایره می‌نویسیم:

$$C_1 \text{ در دایره } MT^2 = MC \cdot MD \Rightarrow \frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD} = \frac{MT'^2}{MT^2} = \left(\frac{MT'}{MT}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$C_2 \text{ در دایره } MT'^2 = MA \cdot MB$$

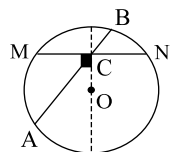
۱۰۸ طبق روابط طولی داریم:

$$\begin{cases} AM \times BM = DM \times ME \\ AN \times NC = NE \times DN \end{cases}, DM = MN = NE \Rightarrow AM \times MB = AN \times NC$$

$$\xrightarrow{AM=AN} BM = CN$$

۱۰۹ می‌دانیم که کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه C ، وتر MN عمود بر قطر گذرنده از C می‌باشد. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} BC + AC = 9 \\ AC = 2BC \end{cases} \Rightarrow AC = 6, BC = 3 \xrightarrow{\text{روابط طولی در دایره}} 6 \times 3 = MC \cdot NC \xrightarrow{MC=NC} MC^2 = 18 \Rightarrow MC = 3\sqrt{2}$$



حال طول وتر مینیمم MN دو برابر MC است:

$$MN = 6\sqrt{2}$$

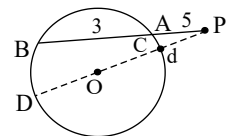
۱۱۰ با توجه به اینکه $PB = PA + AB$ داریم:

$$PT^2 = PA \cdot PB \Rightarrow PT^2 = 4(4 + 12) = 64 \Rightarrow PT = 8$$

۱۱۱ فرض می‌کنیم فاصله نقطه P تا مرکز دایره برابر d باشد. مطابق شکل نقطه P را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. در این صورت:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow 5 \times (5 + 3) = (d - R)(d + R) \Rightarrow d^2 - R^2 = 40$$

$$\Rightarrow d^2 = 40 + 16 \Rightarrow d = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 3 \times 6 = 2.5 \times MD \Rightarrow MD = 7.2$$

۱۱۲ دو مثلث MAB و MCD متشابه هستند:

$$\hat{B} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCD$$

$$\frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = 4$$

$$\begin{cases} ID \times IE = IS \times IN \\ IE = IN \end{cases} \Rightarrow ID = IS$$

۱۱۳ طبق روابط طولی داریم:

$$MT^2 = MO^2 - R^2$$

$$MT'^2 = MO^2 - (3R)^2 = MO^2 - 9R^2$$

$$\Rightarrow MT^2 - MT'^2 = MO^2 - R^2 - MO^2 + 9R^2 = 8R^2$$

$$MT' = 2R \Rightarrow MT^2 - 4R^2 = 8R^2 \Rightarrow MT^2 = 12R^2 \Rightarrow MT = \sqrt{12}R$$

۱۱۴ تنها در حالتی می‌توان با طول شعاع‌ها و خط‌المرکزین مثلث ساخت که دو دایره متقاطع باشند. داریم:

$$|R - R'| < d < R + R' \Rightarrow |2m - 5| < m + 1 < 2m - 1$$

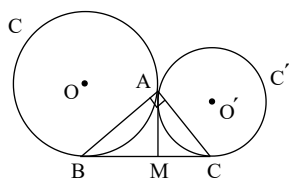
$$1)m + 1 < 2m - 1 \Rightarrow m > 2$$

$$2)|2m - 5| < m + 1 \Rightarrow -m - 1 < 2m - 5 < m + 1 \Rightarrow \frac{4}{3} < m < 6$$

بنابراین محدوده m به صورت $2 < m < 6$ می‌باشد.

۱۱۵ از A به نقطه M وسط BC وصل می‌کنیم. میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس: $AM = MC$. از آنجا که MC بر دایره C مماس است، پس AM نیز بر دایره

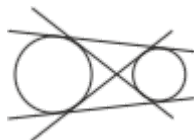
C' مماس می‌شود (مماس‌های رسم‌شده بر دایره برابرند). به همین ترتیب $AM = BM$ و BM مماس است پس AM بر دایره C مماس بر دایره C' است. در نتیجه دو دایره مماس خارج هستند.



۱۱۸

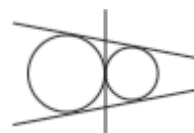
(a) متخارج

چهارتا مماس مشترک دارند.



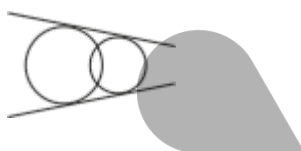
(b) مماس خارج

سه تا مماس مشترک دارند.



(c) متقاطع

دو تا مماس مشترک دارند.



(d) مماس داخل

یک مماس مشترک دارند.



(e) متداخل

مماس مشترک ندارند.

۱۱۹

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{14^2 - 2^2} = \sqrt{12 \times 16} = 12\sqrt{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{محیط} = 12\sqrt{3} + 6 + 8 + (6 + 8) = 26 + 12\sqrt{3} \\ \text{مساحت} = \frac{1}{2}(OT + O'T') \times TT' = \frac{1}{2}(12 + 6) \times 12\sqrt{3} = 108\sqrt{3} \end{array} \right.$$

۱۲۰

و طبق فرض داریم:

$$(1) \quad 2 = R - R' \quad \text{طول خط‌المركزين}$$

$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow \underbrace{(R - R')(R + R')}_{2} = 16 \Rightarrow R + R' = 8 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (1), (2) R = 5, R' = 3$$

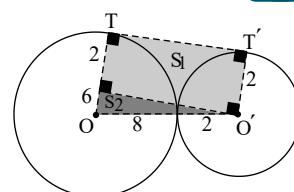
۱۲۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مماس مشترک داخلی} = \sqrt{15} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{64 - (R + R')^2} \\ \text{مماس مشترک خارجی} = 3\sqrt{5} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{64 - (R - R')^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (R + R') = 7 \\ (R - R') = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 4 \\ R' = 3 \end{cases}$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

با توجه به شکل داریم:



مساحت ذوزنقه $OO'T'T$ برابر است با:



$$OT \parallel O'T', OT = ۸, O'T' = ۲, TT' = ۸$$

$$S_{OO'TT'} = \frac{(۲ + ۸) \times ۸}{۲} = ۴۰$$

۱۲۳

$$۲r \text{ مثلث } ABC \text{ متساوی الاضلاع به ضلع } \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} (۲r)^۲ = \sqrt{۳}r^۲$$

$$(S') \text{ مساحت قسمت هاشور زده } = S_{\triangle ABC} - ۳ \times S_{\triangle \text{ قاعده}} = \sqrt{۳}r^۲ - ۳ \times \frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times \pi r^۲$$

$$S' = r^۲ \left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲} \right)$$

$۲r$ طول هر مستطیل $\Rightarrow$ چهار ضلعی‌ها مستطیل هستند

$$۱۲۰^\circ \text{ طول هر کمان } = \frac{۱۲۰}{۳۶۰} \times ۲\pi r = \frac{۲\pi r}{۳}$$

$$\text{طول نخ} = ۳ \times ۲r + ۳ \times \frac{۲\pi r}{۳} = ۶r + ۲\pi r = ۲r(۳ + \pi)$$

۱۲۴

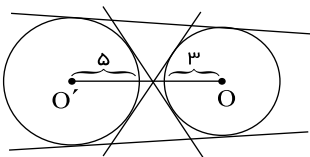
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{۲}, (\text{ظلی}) \hat{B} = \frac{\widehat{AB}}{۲} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A} \\ \hat{D} = \frac{\widehat{DC}}{۲}, (\text{ظلی}) \hat{C} = \frac{\widehat{DC}}{۲} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C}, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$$

۱۲۵

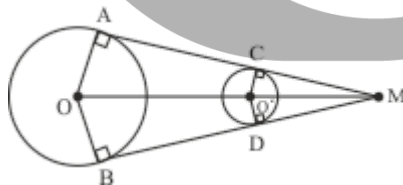
$$L = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} = \sqrt{۴۱^۲ - (۵ + ۴)^۲} = \sqrt{۱۶۰۰} = ۴۰$$

۱۲۶ تمام خطوطی که از O به فاصله ۳ هستند، خطوط مماس بر دایره C هستند و همچنین خطوطی که به فاصله ۵ از O' قرار دارند، خطوط مماس بر دایره C' هستند. بنابراین خطهایی این دو ویژگی را با هم دارند که بر هر دو دایره مماس باشند، یا به عبارت دیگر مماس مشترک دو دایره باشند، حال چون $OO' > R + R'$ است، دو دایره متخارج هستند و ۴ مماس مشترک دارند و ۴ خط راست با این ویژگی‌ها وجود دارد.



۱۲۷

پاره خط OO' را به M وصل می‌کنیم.



$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB \\ OM = OM \Rightarrow \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow \text{نیمساز زاویه } \hat{AMB} \text{ است} \\ MA = MB \\ O'C = O'D \\ O'M = O'M \Rightarrow \triangle O'DM \cong \triangle O'CM \Rightarrow \text{نیمساز زاویه } \hat{AMB} \text{ است} \\ MC = MD \end{array} \right.$$

چون هر زاویه یک نیمساز منحصر به فرد دارد پس $OM, O'M$ بر یکدیگر منطبقند و این بدان معناست که نقاط O, M, O' بر یک استقامت قرار دارند. پس خط‌المركزین و مماس‌های مشترک خارجی هم‌رسانند.

۱۲۸

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲}$$

$$= \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{۹ \times ۴} = ۱۲$$

۱۲۹

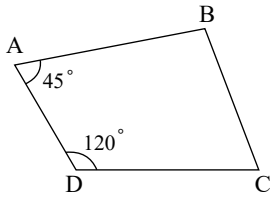
الف

$\frac{S}{P-a}$



ب

۷۵°



$$ABCD \text{ محاطی} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + \hat{C} = \hat{B} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} - \hat{B} = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

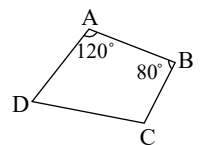
پ

$\sqrt{7}$

$$\sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{4^2 - (2 + 1)^2} = \sqrt{7}$$

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 6^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = 100^\circ \Rightarrow \hat{D} - \hat{C} = 94^\circ \end{cases}$$

۱۳۰ بقی شکل داریم:

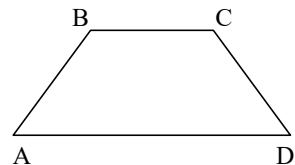


۱۳۱

محاطی است $\Rightarrow 180^\circ = \text{مجموع زوایای روبه‌رو} \Rightarrow$ اگر دوزنقه متساوی‌الساقین باشد (الف)

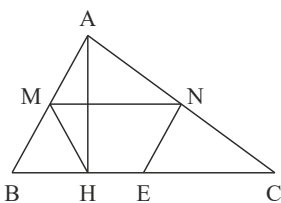
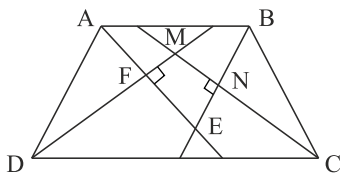
(ب) $180^\circ = \text{مجموع زوایای روبه‌رو} \Rightarrow$ اگر دوزنقه محاطی باشد

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \text{دوزنقه متساوی‌الساقین}$$



۱۳۲

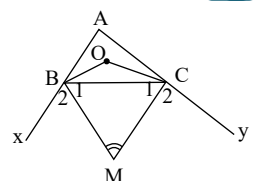
از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی دوزنقه $ABCD$ چهارضلعی $MNEF$ ایجاد می‌شود به‌طوری‌که $\hat{N} = \hat{F} = 90^\circ$ پس $MNEF$ محاطی است زیرا زوایای مقابل آن مکمل‌اند.



اگر M و N وسط اضلاع E و H پای ارتفاع باشد آنگاه چون میانه وارد بر وتر نصف وتر است، $NE = MH = \frac{AB}{2}$ و $MN \parallel BC$.

پس چهارضلعی $MNEH$ دوزنقه متساوی‌الساقین است. در دوزنقه متساوی‌الساقین زوایای مقابل مکمل‌اند پس نوع چهارضلعی، دوزنقه محاطی است.

۱۳۴



$$\begin{aligned} \hat{M} &= 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{B} + 180^\circ - \hat{C}) \\ &\Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - (180^\circ - \hat{A})) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \hat{A}) \Rightarrow \hat{M} = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}$$

از طرفی می‌دانیم که $\hat{B}\hat{O}\hat{C} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ پس:

$$\hat{M} + \hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ$$



پس $BOCM$ محاطی است.
راه دوم:

$$\begin{cases} \widehat{OBM} = \widehat{OBC} + \widehat{CBM} = \frac{\widehat{AB}x}{2} = 90^\circ \\ \widehat{OCM} = \widehat{OCB} + \widehat{BCM} = \frac{\widehat{AC}y}{2} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{OCM} + \widehat{OBM} = 180^\circ$$

پس $BOCM$ محاطی است.

۱۳۵) چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. داریم:

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ, \quad \widehat{BAD}' + \widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BAD}' \quad (1)$$

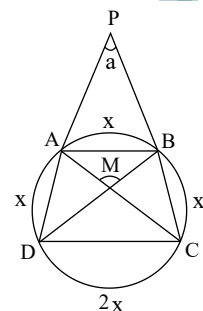
به همین شکل $ABC'D'$ محاطی است. داریم:

$$\widehat{BAD}' + \widehat{BC'D'} = 180^\circ, \quad \widehat{BAD}' + \widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC'D'} = \widehat{BAD} \quad (2)$$

$$\widehat{BAD} + \widehat{BAD}' = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC'D'} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow CD \parallel C'D' \Rightarrow CDC'D' \text{ نوزنقه}$$

۱۳۶) طبق فرض داریم:

$$\widehat{AB} = x, \quad CD = 2x, \quad \widehat{AD} = \widehat{BC} = x$$



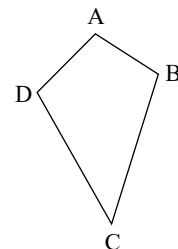
$$\Rightarrow 3x + 2x = 360^\circ \Rightarrow 5x = 360^\circ \Rightarrow x = 72^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 72^\circ, \widehat{CD} = 144^\circ$$

$$\widehat{P} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = \frac{144^\circ - 72^\circ}{2} = 36^\circ$$

۱۳۷) از وصل کردن وسطهای اضلاع مستطیل، لوزی به دست می‌آید و چون مجموع اضلاع روبه‌روی آن برابرند، پس لوزی محیطی می‌باشد.

۱۳۸) محیط هر چهارضلعی محیطی با دو برابر مجموع دو ضلع مقابلش برابر است:

$$ABCD \text{ محیط} = 2(AB + CD) \Rightarrow \text{محیط} = 2 \times 8 = 16$$



۱۳۹) $ABCD$ محیطی است و O محل هم‌رسمی نیمسازهای زوایای $ABCD$ است. داریم:

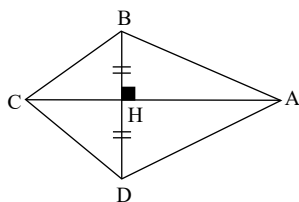
$$\widehat{OAB} = \frac{\widehat{A}}{2}, \quad \widehat{OBA} = \frac{\widehat{B}}{2} \Rightarrow \alpha = 180^\circ - (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}) = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$$

$$\widehat{OCD} = \frac{\widehat{C}}{2}, \quad \widehat{ODC} = \frac{\widehat{D}}{2} \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\widehat{OCD} + \widehat{ODC}) = 180^\circ - \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 360^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{2} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

۱۴۰

مطابق شکل AC : عمود منصف BD است. داریم:



$$BD \text{ عمود منصف } AC \Rightarrow AB = AD, BC = CD \Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.

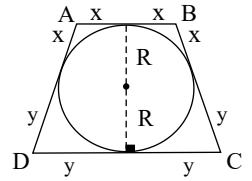
۱۴۱) چون سه نیمساز داخلی هم‌رسم هستند، پس نیمساز چهارم هم از محل هم‌رسمی می‌گذرد پس چهارضلعی محیطی است. در چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع روبه‌رو



برابرند. داریم:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow 3a - 1 + 4a = 5a - 3 + a^2 + 2 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \\ \Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$S = \frac{1}{2}(2x + 2y) \times (2R) \Rightarrow 45 = (x + y)(6) \Rightarrow x + y = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7,5 \Rightarrow AD = 7,5$$



۱۴۲

۱۴۳ می‌دانیم اگر از نقطه‌ای دو مماس بر دایره‌ای رسم شود طول آن مماس‌ها باهم برابر است. پس داریم:

$$\begin{cases} GO + LY = GQ + QO + LS + YS \\ OL + GY = OR + RL + GP + PY \end{cases}$$

می‌دانیم $PY = YS$, $LR = LS$ و $GP = GQ$, $OR = OQ$ پس تساوی $GO + LY = OL + GY$ برقرار است.

۱۴۴ از هریک از نقاط D, A, B, C دو مماس بر دایره رسم شده پس طول آن‌ها برابر است. بنابراین:

$$BQ = BP = 5, CQ = CR = 4, DS = RD = 6, AS = AP = 7$$

بنابراین محیط چهارضلعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AB + BC + CD + AD = 12 + 9 + 10 + 13 = 44$$

۱۴۵

الف نقطه O مرکز دایره محاطی است، بنابراین محل هم‌رسمی نیمسازهاست، پس می‌توان نتیجه گرفت که OA, OB, OC, OD نیمساز زوایای A, B, C, D هستند. داریم:

$$\begin{cases} ABCD \text{ دوزنقه متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \\ \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow \hat{AOM} = \hat{BOM} \quad (2) \\ OM \text{ مشترک} \quad (3) \end{cases}$$

$$(1), (2), (3) : \triangle AOM \cong \triangle BOM \Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{2}$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد مثلث‌های DON و CON هم‌نهشت هستند و داریم:

$$DN = CN = \frac{DC}{2}$$

ب مماس‌های رسم‌شده از رأس‌های A و B بر دایره محاطی به‌ترتیب زیر برابرند:

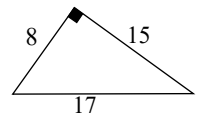
$$\begin{cases} AD = AQ + QD = AM + DN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB + CD}{2} \quad (1) \\ BC = BP + PC = BM + CN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB + CD}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) : AD = BC = \frac{AB + CD}{2}$$

۱۴۶ اعداد ۸ و ۱۵ و ۱۷ اعداد فیثاغورسی هستند: $17^2 = 15^2 + 8^2$

پس مثلث داده‌شده قائم‌الزاویه است و شعاع دایره محاطی آن برابر است با:

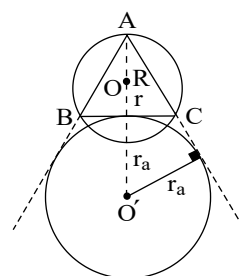
$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} \times 8 \times 15}{\frac{17+15+8}{2}} = \frac{8 \times 15}{40} = 3$$



۱۴۷ همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید، طول خط‌المركزین دایره محاطی (و همچنین محاطی) و محاطی خارجی روبه‌رو به رأس A همواره برابر $OO' = r + r_a$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$OO' = r + r_a, r = \frac{S}{P}, r_a = \frac{S}{P - a}$$





$$\begin{cases} r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \\ r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{3a}{2}-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1}a \end{cases}$$

$$\Rightarrow OO' = \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{1}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 2$$

۱۴۸

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{3a}{2}-a} = \frac{\sqrt{3}}{1}a = \frac{\sqrt{3}}{1} \times 1\sqrt{3} = 12$$

۱۴۹

در فرمول‌های مقابل S مساحت و p نصف محیط می‌باشد.

$$r_a = \frac{s}{p-a}, r_b = \frac{s}{p-b}, r_c = \frac{s}{p-c}, r = \frac{s}{p}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\frac{s}{p-a}} + \frac{1}{\frac{s}{p-b}} + \frac{1}{\frac{s}{p-c}} = \frac{p-a+p-b+p-c}{s} = \frac{3p-2p}{s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \Rightarrow h_a = \frac{2s}{a}, h_b = \frac{2s}{b}, h_c = \frac{2s}{c}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{a+b+c}{2s} = \frac{2p}{2s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

۱۵۰ طول مماس‌های رسم‌شده بر یک دایره از نقطه‌ای خارج آن باهم برابر است.

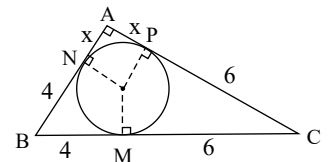
لذا داریم:

$$BM = BN = 4, CM = CP = 6, AN = AP = x$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (x+4)^2 + (x+6)^2 = 100$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 20x + 52 = 100 \Rightarrow x^2 + 10x - 24 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AC = 8, AB = 6$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} \times 6 \times 8}{\frac{6+8+10}{2}} = \frac{24}{12} = 2$$



۱۵۱

$$\begin{cases} \text{شعاع دایره محاطی داخلی } r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{3a}{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}a \\ \text{شعاع دایره محاطی } R = 2r \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3}a \end{cases}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$\text{همچنین: } r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{3a}{2}-a} = \frac{\sqrt{3}}{1}a, r_a = r_b = r_c = \frac{\sqrt{3}}{1}a$$

$$\Rightarrow \frac{r_a + r_b + r_c + r}{R} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{1}a + \frac{\sqrt{3}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{\frac{3}{1} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$$

۱۵۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول a داریم:

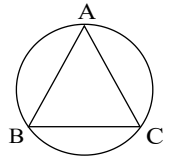
$$R = \frac{2}{3} \times h = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = (2)^2 = 4$$



۱۵۳ باید ضلع مثلث را پیدا کنیم تا از رابطه $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ مساحت مثلث به دست آید:

$$\pi R^2 = 4\pi\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 4\sqrt{3}$$



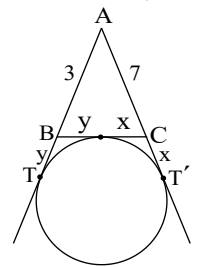
۱۵۴ حال اگر ارتفاع مثلث باشد آنگاه $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ و در نتیجه $R^2 = \frac{a^2}{3}$ و حال a هم معلوم می‌شود:

$$4\sqrt{3} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow a^2 = 12\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(12\sqrt{3})(\sqrt{3})}{4} = 9$$

۱۵۴ با توجه به اینکه $AT = AT'$ است، داریم: $3 + y = x + 7$

و همچنین $BC = 5$ در نتیجه $x + y = 5$ بنابراین:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9}{2}, x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{9}$$



۱۵۵ از نقطه B دو مماس BD و BE بر دایره رسم شده است پس $BD = BE$.

از نقطه C دو مماس CD و CF بر دایره رسم شده است پس $CD = CF$.

$$\begin{aligned} \triangle ABC : P_{ABC} &= AB + BC + AC = AB + BD + DC + AC \\ &= AB + BE + CF + AC = AE + AF \end{aligned}$$

بنابراین محیط مثلث ABC هیچ ارتباطی به محل نقطه D ندارد و همواره برابر مقدار ثابت $AE + AF$ می‌باشد.

۱۵۶ خارج از

۱۵۷ در چهارضلعی $ABCD$ قطرهای برابر و عمودمنصف یکدیگر هستند پس $ABCD$ مربع می‌باشد.

عمودمنصف‌های اضلاع مربع از وسط کمان‌های روبه‌رو می‌گذرند، بنابراین همه کمان‌های هشت ضلعی برابرند، پس اضلاع آن با هم برابرند یعنی هشت ضلعی حاصل منتظم است.

۱۵۸ فاصله مرکز دایره محیطی شش ضلعی منتظم تا یک ضلع برابر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع است. زیرا شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.

$$\text{محیط} = 12\sqrt{3} \Rightarrow 6a = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3}) = 3$$

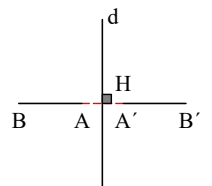
۱۵۹ در بازتاب، جهت حرکت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. بازتاب در حالت کلی، جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

۱۶۰

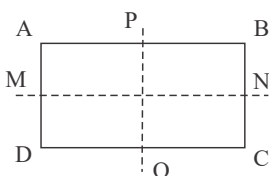
$$AB \perp d, \hat{H} = 90^\circ$$

$$AH = A'H, BH = B'H$$

$$\begin{cases} AB = BH - AH \\ A'B' = B'H - A'H \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



۱۶۱ مطابق شکل، اگر نقاط M و N و P و Q اواسط اضلاع مستطیل باشد، MN و PQ محور تقارن مستطیل خواهند بود. پس تنها ۲ بازتاب محوری وجود دارد.

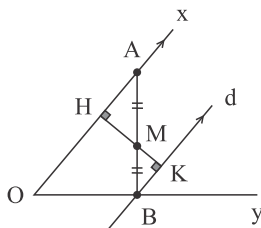




۱۶۲

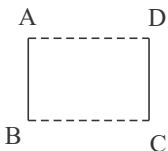
مطابق شکل، MH بر Ox عمود است. قرینه H نسبت به M ، نقطه K می‌باشد. از نقطه K خط d عمود بر HK می‌گذرانیم. $d \parallel Ox$ می‌باشد و Oy را در B قطع می‌کند.

دو مثلث MAH و MBK هم‌نهشت هستند، پس داریم: $AM = MB$.
در این روش از بازتاب مرکزی H نسبت به M استفاده کردیم.



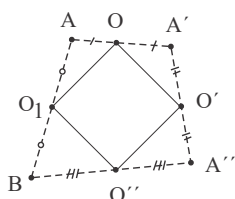
۱۶۳

مطابق شکل AB و CD موازی و مساوی‌اند و تنها در حالتی که محور تقارن بر AD عمود بوده و منصف آن باشد، بازتاب محوری یکدیگر هستند. بنابراین، $ABCD$ مستطیل می‌باشد.



۱۶۴

پاسخ: مطابق شکل، A' بازتاب A به مرکز O می‌باشد.
به همین ترتیب، A'' و B هم‌بازتاب A' و O' به مراکز O'' و O' می‌باشد.
در چهارضلعی $AA'A''B$ ، O و O' و O'' و O_1 وسط‌های اضلاع هستند.
پس $OO_1O'O''$ متوازی‌الاضلاع است که مساحت آن نصف $AA'A''B$ می‌باشد.

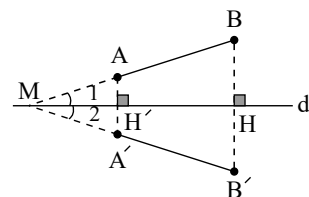


۱۶۵

الف

امتداد AB ، خط d را در نقطه M قطع می‌کند. نقطه B را نسبت به محور d بازتاب می‌کنیم تا B' به‌دست آید. MB' را رسم می‌کنیم. بازتاب نقطه A نسبت به خط d را پیدا می‌کنیم و ثابت می‌کنیم نقطه A' می‌باشد، به‌طوری که A' روی MB' قرار می‌گیرد. مثلث‌های MBB' و MAA' متساوی‌الساقین هستند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ, BH = B'H \Rightarrow BB' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MB = MB' & (1) \\ \hat{H}' = 90^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MA = MA' & (2) \end{cases}$$



از طرفی می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف d ، نیمساز زاویه M می‌باشد، پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و در نتیجه، A' روی MB' قرار دارد.
از طرفی از موارد (۱) و (۲) داریم:

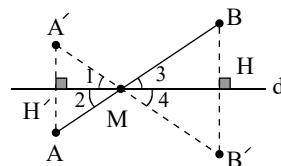
$$MB = MB', MA = MA' \Rightarrow MB - MA = MB' - MA' \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین در این حالت، بازتاب طولی می‌باشد.

ب

پاره‌خط AB محور بازتاب d را در نقطه M قطع می‌کند. بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' می‌باشد. MA' را رسم کرده و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم بازتاب نقطه B نسبت به خط d ، یعنی نقطه B' بر امتداد MA' واقع است. چون نقطه A' بازتاب A نسبت به خط d می‌باشد، داریم:

$$\hat{H}' = 90^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MA = MA', \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$



از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3 = \hat{M}_4 \\ BH = B'H, \hat{H} = 90^\circ \end{cases}$$

پس B' در امتداد MA' قرار دارد و همچنین مثلث MBB' متساوی‌الساقین خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + MB' \\ AM = A'M, BM = B'M \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین، بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d ، پاره‌خط $A'B'$ است و بازتاب طولی می‌باشد.

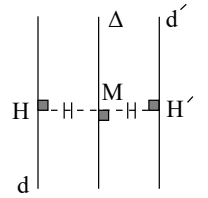
۱۶۶

در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) در این حالت، محور بازتاب (Δ) با خط موازی است و در نتیجه، بازتاب خط d (خط d') با آن موازی می‌باشد:



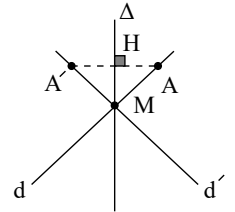
$$\widehat{M} = \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ, MH = MH' \Rightarrow d \parallel \Delta \parallel d'$$



در این حالت، شیب خط حفظ می‌شود (چون $d \parallel d'$ است).

ب) در این حالت، خط d و محور بازتاب Δ متقاطع‌اند. بازتاب خط d نسبت به محور Δ ، خط d' می‌باشد و d و d' در نقطه M متقاطع‌اند.

$$\Delta : \widehat{H} = 90^\circ, AH = A'H$$

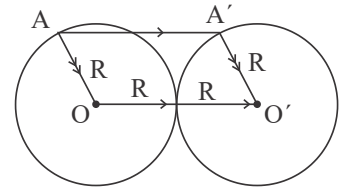


از آنجا که d و d' متقاطع هستند، پس موازی نبوده و در نتیجه، شیب خط d و d' یکسان نخواهد بود. بنابراین در این حالت، شیب خط حفظ نمی‌شود.

۱۶۷ دو خط متقاطع، شیب‌های یکسان ندارند. انتقال یافته هر خط با خط اولیه موازی است، پس دو خط متقاطع با هیچ انتقالی برهم منطبق نمی‌شوند.

۱۶۸ مطابق شکل داریم:

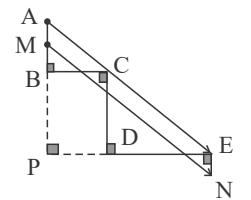
$$\begin{cases} OO' \parallel AA' \\ O'A' \parallel OA \end{cases}, OA = O'A' = R \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'} = 2R$$



بنابراین، بردار انتقال، بردار OO' به طول $2R$ است.

۱۶۹ مطابق شکل داریم:

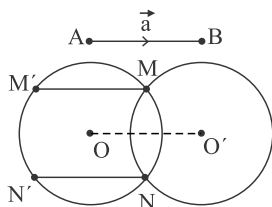
$$EN \parallel AM, EN = AM \Rightarrow AMNE \text{ متوازی‌الاضلاع: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AE}$$



پس برداری که M را بر N منطبق می‌کند، همان بردار $\overrightarrow{AE}$ است. داریم:

$$\begin{cases} AP = AB + BP = 2 + CD = 2 + 4 = 6 \\ PN = PD + DE = 3 + 5 = 8 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 6 + 8 \Rightarrow AE = 14$$

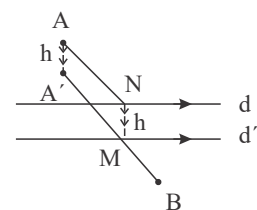
۱۷۰



پاسخ: مطابق شکل، دایره C را با بردار $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ انتقال می‌دهیم تا دایره‌ای به مرکز O' و شعاع R به دست آید.

دو دایره حداکثر در دو نقطه (M و N) می‌توانند متقاطع باشند. MM' و NN' وترهای موازی با AB و به طول a می‌باشند.

۱۷۱



پاسخ: اگر عرض رودخانه h باشد، A را با بردار $\overrightarrow{AA'} = h$ در راستای عمود بر رودخانه و به طرف نقطه B انتقال می‌دهیم. $A'B$ در d' را در M قطع می‌کند.

MN پل مورد نظر است، زیرا $AA'MN$ متوازی‌الاضلاع است و طول مسیر $ANMB$ همان طول مسیر $AA'B$ است.

این مسیر، کوتاهترین است. بنابراین از انتقال استفاده می‌کنیم.

۱۷۲

$$\Delta ABC \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ, AC = CB$$



الف) پس می‌توان گفت که نقطه B دوران یافته A به مرکز C و زاویه $60^\circ -$ است. به همین ترتیب:

$$\triangle CDE \Rightarrow \widehat{DCE} = 60^\circ, \quad CD = CE$$

نتیجه می‌گیریم که نقطه E دوران یافته D به مرکز C و زاویه $60^\circ -$ است.

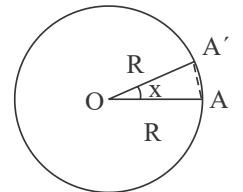
ب) با استفاده از قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که AD تحت دوران به مرکز C و زاویه $60^\circ -$ روی BE تصویر می‌شود. دوران طولی است، پس $AD = BE$. همچنین می‌دانیم که زاویه بین خط و دوران یافته آن به اندازه دوران است، پس: $\angle AFB = 60^\circ$.

$$\begin{cases} T(A) = B \\ T(D) = E \end{cases} \Rightarrow T(AD) = BE$$

۱۷۳) مطابق شکل، زوایای دوران را x در نظر می‌گیریم. از آنجا که دوران طولی است، پس وترهای ایجاد شده برابرند، پس کمان‌های حاصل مساوی‌اند و هر کدام $\frac{360^\circ}{n}$ هستند. داریم:

$$x = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow S_{\triangle OA'A'} = \frac{1}{2} \times R \times R \times \sin x = \frac{R^2}{2} \times \sin \frac{360^\circ}{n}$$

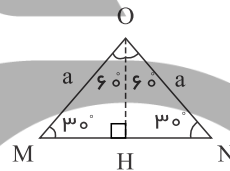
$$\Rightarrow S_n = n \times S_{\triangle OA'A'} = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$



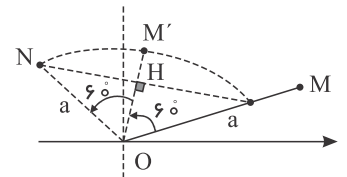
۱۷۴) می‌دانیم که تحت یک دوران، زاویه بین خط و دوران یافته آن همان زاویه دوران است. بنابراین پس از دوران هم زاویه بین دو خط α خواهد بود.

۱۷۵)

مطابق شکل داریم:



$$\triangle OMN (\hat{M} = 30^\circ): OH = \frac{a}{2}, MH = HN = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow MN = \sqrt{3}a$$

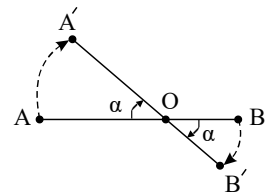


۱۷۶) مطابق شکل، مرکز دوران نقطه O روی AB است و زاویه دوران α می‌باشد. داریم:

$$AB = AO + OB$$

$$A'B' = A'O + OB'$$

$$AO = A'O, OB = OB' \Rightarrow AB = A'B' \quad (1)$$



۱۷۷)

دوران‌ها عبارتند از:

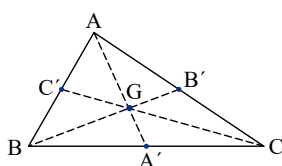
۱- مثلث $AB'A_p$ دوران یافته ABC به مرکز A و زاویه $90^\circ -$ (ساعتگرد).

۲- مثلث $AA''A_p$ دوران یافته ABC به مرکز A و زاویه 180° .

۳- مثلث $AA'A_1$ دوران یافته ABC به مرکز A و زاویه 90° (پادساعتگرد) یا $270^\circ -$ (ساعتگرد).

۱۷۸) می‌دانیم که محل هم‌رسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. داریم:

$$\frac{GA'}{GA} = \frac{1}{2}, \quad \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{GC'}{GC} = \frac{1}{2}$$



مطابق شکل بالا بنابراین، A' ، B' ، C' مجانس‌های A و B و C به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ هستند.

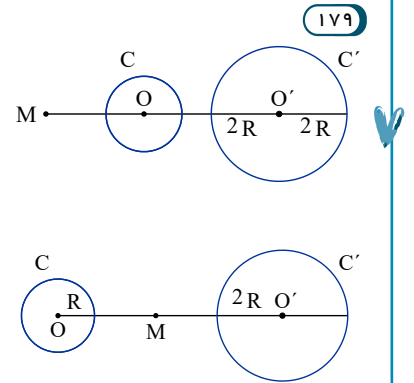


$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$$

الف) $k = 2 \Rightarrow MO' = 2OM, R' = 2R$

ب) $k = -2 \Rightarrow MO' = 2OM, R' = 2R$

پ) $k = \frac{1}{2}$

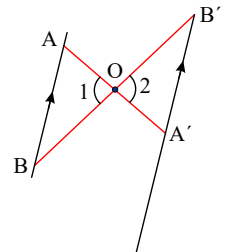


این قسمت مانند (الف) می باشد فقط مرکز متجانس M و C تصویر C' می باشد.

۱۸۰ الف) چون $k < 0$ است، پس به شکل زیر می باشد.

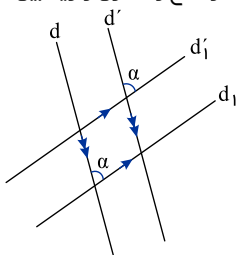
$$OA' = k \times OA, OB' = k \times OB$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}, \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$



$\Delta AOB \sim \Delta A'OB' \Rightarrow \hat{B}' = \hat{B}, \hat{A}' = \hat{A} \Rightarrow AB \parallel A'B'$

ب) اگر زاویه بین دو خط متقاطع برابر با α باشد، از آنجا که مجانس خط با آن خط موازی می باشد، پس زاویه بین مجانس های دو خط همان زاویه بین دو خط (α) می باشد.



۱۸۱ طبق شکل داریم:



$$OM' = 5OM \Rightarrow MM' = 6OM$$

۱۸۲ دو مثلث متشابه اند و نسبت تشابه مثلث دومی به اولی همان نسبت محیط آنهاست. داریم:

$$k = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow \frac{\text{شعاع دایره تصویر}}{\text{شعاع دایره اولیه}} = 3 \Rightarrow \frac{\text{مساحت دایره تصویر}}{\text{مساحت دایره اولیه}} = 3^2 = 9$$

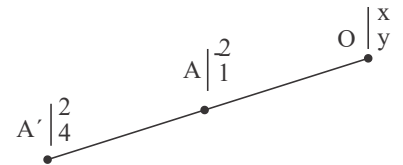
$$\Rightarrow \frac{S'}{16\pi} = 9 \Rightarrow S' = 9 \times 16\pi \Rightarrow \pi \times R'^2 = 9 \times 16\pi \Rightarrow R' = 12$$

۱۸۳ مطابق شکل:

$$k = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = (2-x, 4-y), \overrightarrow{OA} = (-2-x, 1-y)$$

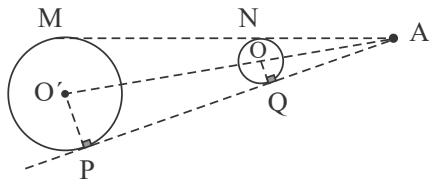
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA'} = 5 \times \overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{cases} 2-x = 5(-2-x) = -10-5x \Rightarrow x = -3 \\ 4-y = 5(1-y) = 5-5y \Rightarrow y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow O \begin{vmatrix} -3 \\ \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$



۱۸۴

دو دایره دارای شعاع‌های متفاوتند پس تنها به وسیلهٔ تجانس می‌توان دو دایره را برهم منطبق کرد. مطابق شکل تجانس با مرکزیت محل برخورد مماس‌های خارجی و خط‌المركزین و همچنین ضریب تجانس $k = \frac{AO'}{AO}$ ، می‌توان دو دایره را برهم منطبق کرد.



۱۸۵ اگر A' مجانس نقطه A به ضریب k باشد، داریم:

$$\overline{OA'} = k \times \overline{OA}$$

اگر A'' مجانس نقطه A' به ضریب m باشد، داریم:

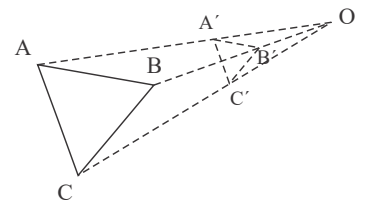
$$\overline{OA''} = m \times \overline{OA'} \Rightarrow \overline{OA''} = m \times (k \times \overline{OA}) = mk \cdot \overline{OA}$$

پس نقطه A'' مجانس A به همان مرکز و ضریب mk است.

۱۸۶ مطابق شکل، مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم انعکاسی مثلث ABC به مرکز تجانس O و ضریب k است، داریم:

$$k = \frac{OA'}{AA'} = 3 \Rightarrow \frac{OA'}{OA' + AA'} = \frac{OA'}{OA} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{S(\triangle A'B'C')}{S(\triangle ABC)} = \left(\frac{OA'}{OA}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{16}{9} S(\triangle A'B'C')$$



۱۸۷ گزینه «۲»: دو خط متقاطع شیب‌های نابرابر دارند، بنابراین نمی‌توانند انتقال‌یافته یکدیگر باشند (انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند). به همین ترتیب، چون تجانس هم شیب خط را حفظ می‌کند، پس دو خط متقاطع نمی‌توانند مجانس یکدیگر باشند.

۱۸۸ الف) داریم:

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ} = \frac{1}{2}$$

بنابراین در تجانس به مرکز A و نسبت $k = 2$ ، مثلث AMN بر مثلث APQ تصویر می‌شود.

ب)

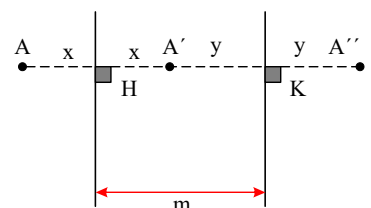
$$\begin{cases} AM = MP = 2PB \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{4}{5} \\ AN = NQ = 2QC \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{4}{5}$$

بنابراین در تجانس به مرکز A و نسبت $k = \frac{5}{4}$ ، مثلث APQ بر مثلث ABC تصویر می‌شود.

۱۸۹ پاسخ:

$$AH = A'H = x, A'K = A''K = y, x + y = m$$

$$AA'' = 2(x + y) = 2m$$



$$BB'' = CC'' = 2m$$

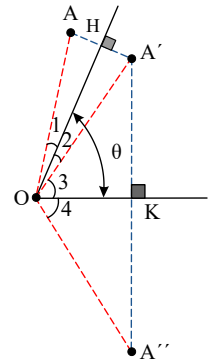
به همین ترتیب داریم:



می‌توان نتیجه گرفت که $\triangle A''B''C''$ تصویر $\triangle ABC$ ، نتیجه انتقالی با بردار $2m$ و راستای عمود بر محورهای بازتاب می‌باشد.

۱۹۰ الف) بازتاب، اندازه زاویه را حفظ می‌کند. داریم:

$$\begin{cases} A \text{ بازتاب } A' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_r \\ A' \text{ بازتاب } A'' \Rightarrow \hat{O}_r = \hat{O}_f \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}A'' = r(\hat{O}_r + \hat{O}_f) = 2\theta$$



ب) به همین ترتیب داریم:

$$B\hat{O}B'' = C\hat{O}C'' = 2\theta$$

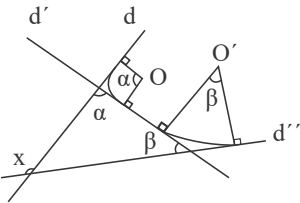
پ) از آنجا که داریم:

$$OA = OA'', A\hat{O}A'' = 2\theta$$

پس A'' دوران یافته A به مرکز O و زاویه 2θ می‌باشد. پس $A''B''C''$ دوران یافته $\triangle ABC$ به مرکز O و زاویه 2θ می‌باشد.

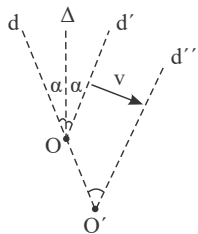
۱۹۱

مطابق شکل، به مرکز O و تحت زاویه α ، خط d دوران یافته و به خط d' تبدیل می‌شود. d' را به مرکز O' و زاویه β دوران می‌دهیم تا d'' حاصل شود. زاویه بین خط و دوران یافته آن همان زاویه دوران است. مطابق شکل، زاویه x برابر است با $\alpha + \beta$.



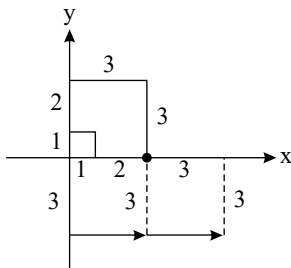
۱۹۲

مطابق شکل d' بازتاب d به محوریت Δ است. زاویه بین d و Δ طبق فرض α است. پس زاویه بین d' و Δ هم α است. تحت بردار $\vec{V}$ ، d' را انتقال می‌دهیم تا d'' به دست آید. می‌دانیم که $d'' \parallel d'$ است. پس زاویه بین d با d'' برابر است با زاویه بین d و d' که این زاویه برابر 2α است.

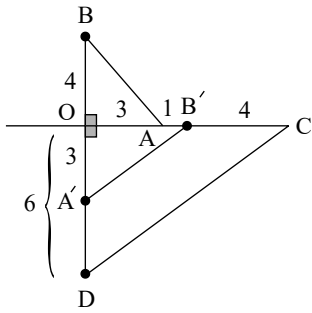


۱۹۳ اگر مرکز تجانس روی خط قرار گیرد، مجانس خط بر آن منطبق می‌شود. اگر محور بازتاب، همان خط یا محور عمود بر خط باشد، بازتاب خط بر خود آن منطبق خواهد شد. با انتقال خط تحت برداری موازی با خط، تصویر انتقال بر خط منطبق خواهد شد.

۱۹۴ از آنجا که مطابق شکل، ابعاد مربع کوچک در تصویر آن، ۳ برابر شده است، پس حتماً تجانس جزو تبدیل‌ها خواهد بود. ابتدا تجانس به مرکز مبدأ مختصات و با ضریب $k = 3$ و سپس بازتاب نسبت به محور x و سپس انتقال با برداری به طول ۳ موازی محور x ‌ها خواهیم داشت.



۱۹۵ ابتدا به مرکز O و زاویه -90° ، مثلث OAB را دوران می‌دهیم تا مثلث $OA'B'$ به دست آید. حال مجانس $\triangle OA'B'$ به مرکز O و نسبت تجانس $k = \frac{OC}{OB'} = \frac{OD}{OA'} = 2$ را به دست می‌آوریم تا مثلث OCD به دست آید.



الف) بنابر مسائل هم‌محیطی، کافی است که در رأس‌هایی که زوایا بیشتر از 18° هستند، بازتاب محوری انجام شود:

F' بازتاب F $\Rightarrow$ محور بازتاب AE
 $\Rightarrow AF = AF'$, $EF = EF'$

C' بازتاب C $\Rightarrow$ محور بازتاب BD
 $\Rightarrow BC = BC'$, $DC = DC'$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } ABCDEF = \text{محیط } ABC'DEF' \\ S_{ABC'DEF'} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

E' بازتاب E $\Rightarrow$ محور بازتاب DF
 $\Rightarrow DE = DE'$, $FE = FE'$

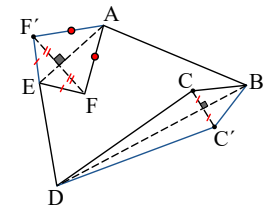
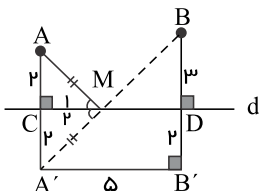
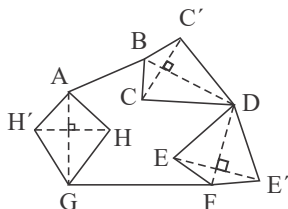
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } ABCDEF = \text{محیط } ABC'DE'F \\ S_{ABC'DE'F} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم باید بازتاب D را نسبت به محور AC بدست آوریم. بدین ترتیب چهارضلعی جدید محیطش با محیط $ABCD$ برابر است و مساحت آن از مساحت $ABCD$ بیشتر است. به این ترتیب داریم:

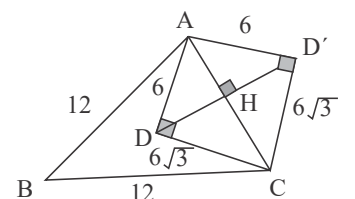
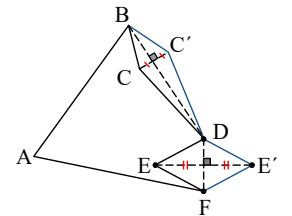
$$\triangle ADC : AC^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow AC = 12$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

$$2S_{\triangle ADC} = 2 \times 18\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$



ب)



افزایش مساحت برابر است با:

۱۹۸

مطابق شکل با استفاده از بازتاب محوری، رأس‌های C و E و H بازتاب شده و نقاط C' و E' و H' به‌دست می‌آید. از آنجا که بازتاب محوری طولیاست، پس محیط شکل جدید تغییر نمی‌کند ولی مساحت آن افزایش می‌یابد.

۱۹۹

مطابق شکل کوتاه‌ترین مسیر AMB است.

بازتاب A نسبت به d ، A' است.

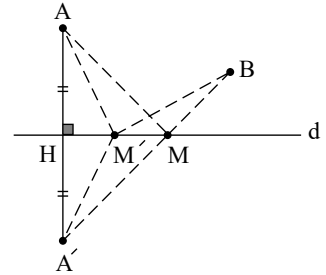
به این ترتیب مسیر AMB ، هم‌اندازه با $A'B$ است. داریم:



$$A'B^2 = \delta^2 + \delta^2 \Rightarrow A'B = \sqrt{\delta^2 + \delta^2} \Rightarrow A'B = \delta\sqrt{2}$$

۲۰۰ ابتدا قرینه نقطه A نسبت به رودخانه (خط d) را به دست می آوریم (A'). پاره خط $A'B$ ، خط d را در نقطه M قطع می کند. ادعا می کنیم که کوتاه ترین مسیر AMB می باشد. برای اثبات این ادعا، نقطه دلخواه دیگری مثل M' را روی خط d در نظر می گیریم، داریم:

$$\begin{cases} AA' \text{ عمود منصف } d \Rightarrow AM = A'M \\ AA' \text{ عمود منصف } d \Rightarrow AM' = A'M' \\ AM + BM = A'M + BM \Rightarrow AMB = A'B \\ AM' + BM' = A'M' + BM' \Rightarrow AM'B = A'M' + BM' \end{cases}$$

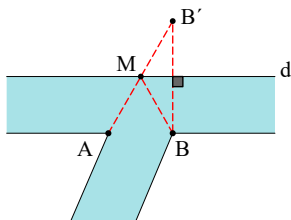


در مثلث $A'M'B$ ، طبق قضیه وجود مثلث، $A'B$ از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است، پس:

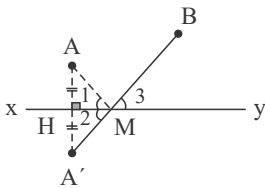
$$A'B < A'M' + M'B \Rightarrow A'MB < A'M'B$$

این یعنی کوتاه ترین مسیر همان $A'B$ یا AMB می باشد.

۲۰۱



این مسأله به این معناست که روی خط d ، نقطه M را طوری بیابیم که مسیر AMB کوتاه ترین باشد. برای این کار، بازتاب B نسبت به d (B') را یافته و به A وصل می کنیم. طبق مسأله هرون مسیر AMB کوتاه ترین مسیر می باشد. پس اسکله سوم در M قرار می گیرد.

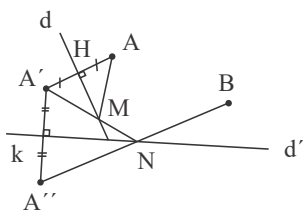


۲۰۲ مطابق شکل بازتاب A نسبت به محور xy نقطه A' می باشد. $A'B$ ، xy را در M قطع می کند.

داریم:

$$AH = A'H, \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2, \hat{M}_2 = \hat{M}_3 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_3$$

۲۰۳

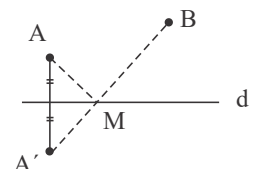


مطابق شکل بازتاب A نسبت به d ، A' و سپس بازتاب A' نسبت به d' ، A'' است. مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. بنابراین دو بار از بازتاب محوری استفاده شده است.

۲۰۴ مطابق شکل، بازتاب A نسبت به d ، A' است.

$A'B$ ، d را در M قطع می کند. داریم:

$$\begin{cases} AM + MB = A'M + MB = A'B \\ AM = A'M \end{cases}$$



بنابراین، کوتاه ترین مسیر $A'B$ است که مسیر مستقیم است. تبدیل استفاده شده، بازتاب محوری است.

۲۰۵

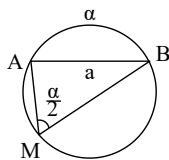
$$\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ + \hat{C} \Rightarrow \sin \hat{B} = \sin(90^\circ + \hat{C}) = \cos \hat{C}$$

$$\text{قضیه سینوس ها: } b = 2R \times \sin \hat{B} = 2R \times \cos \hat{C}$$

۲۰۶



مطابق شکل داریم:



$$\hat{M} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{قضیه سینوس‌ها در } \triangle MAB : 2R = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

(R شعاع دایره محیطی $\triangle MAB$)

این شعاع، شعاع دایره نیز می‌باشد.

از نقطه دلخواه M روی محیط دایره به A و B وصل می‌کنیم.

داریم:

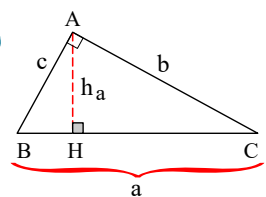
$$\hat{AMB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow 2R = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 12$$

$\Rightarrow R = 6$ (شعاع دایره محیطی $\triangle MAB$ و شعاع دایره)

حال اگر از نقطه دلخواه N روی محیط دایره به C و D وصل کنیم، داریم:

$$\hat{CND} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow 2R = \frac{x}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot c$$

$$\Rightarrow bc = a \cdot h_a$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h_a^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

$$\text{قانون سینوس‌ها: } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{a + b + c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \frac{2P}{2R} = \frac{P}{R}$$

می‌دانیم که:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

$$\begin{cases} b = 2R \times \sin \hat{B} \\ c = 2R \times \sin \hat{C} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2R \times \sin \hat{B} \times 2R \times \sin \hat{C} \times \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$$

طبق قانون سینوس‌ها داریم:

$$2R = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2R = 16 \Rightarrow R = 8$$

$$\hat{A} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ, \hat{C} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

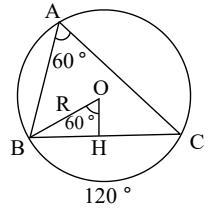


۲۱۳

$$\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \hat{BOH} = 60^\circ$$

$$BC = 2R \times \sin 60^\circ \Rightarrow 2\sqrt{3} = 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 2$$

$$\hat{BOH} : OH = R \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$



۲۱۴ طبق نامساوی مثلث داریم:

$$b - c < a < b + c$$

$$\Rightarrow \text{قضیه سینوسها: } 2R \sin \hat{B} - 2R \sin \hat{C} < 2R \sin \hat{A} < 2R \sin \hat{B} + 2R \sin \hat{C}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{B} - \sin \hat{C} < \sin \hat{A} < \sin \hat{B} + \sin \hat{C}$$

۲۱۵ الف. در مثلث ABH داریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}, AC = 2R \times \sin \hat{B} \Rightarrow AC = 2R \times \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB \times AC = AH \times 2R \Rightarrow bc = h_a \times 2R \quad (1)$$

ب. به همین شکل با رسم ارتفاع‌های رأس‌های B و C و با استفاده از نتیجه قسمت (الف) داریم:

$$AB \times BC = h_b \times 2R \Rightarrow ac = h_b \times 2R \quad (2)$$

$$AC \times BC = h_c \times 2R \Rightarrow ab = h_c \times 2R \quad (3)$$

با جمع کردن روابط (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$ab + ac + bc = 2R(h_a + h_b + h_c)$$

۲۱۶

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad \text{قانون سینوسها:}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R, \quad \frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \cos \hat{C}} = 2R$$

$$\Rightarrow \sin \hat{C} = \cos \hat{C} \Rightarrow \tan \hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

$$\text{قانون سینوسها: } a = \sqrt{3}b \Rightarrow 2R \sin \hat{A} = \sqrt{3} \times 2R \sin \hat{B}$$

$$\sin \hat{A} = \sqrt{3} \sin \hat{B}, \hat{A} = 2\hat{B} \Rightarrow \sin 2\hat{B} = \sqrt{3} \sin \hat{B}$$

$$2 \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} = \sqrt{3} \sin \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\sin \hat{A} = \sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ \end{cases}$$

$$\triangle ABH : \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{h}{AB} \Rightarrow AB = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{2h}{\sqrt{3}} \\ \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \frac{1}{2} \Rightarrow BH = \frac{2h}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

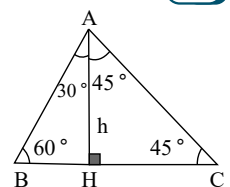
$$\Rightarrow BH = \frac{h}{\sqrt{3}}, AB = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle ACH : \begin{cases} AC = \sqrt{2}h \\ CH = h \end{cases}$$

$$BC = 2\sqrt{3} + 2 = BH + CH = \frac{h}{\sqrt{3}} + h = h\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$$

۲۱۷

۲۱۸





$$\Rightarrow h\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right) = 2(\sqrt{3}+1) \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

$$AB = 4, AC = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\Delta ABC} = 2\sqrt{3} + 2 + 4 + 2\sqrt{6}$$

۲۱۹ طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$a = 2R \sin \hat{A}, b = 2R \sin \hat{B}, c = 2R \sin \hat{C} \Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = \frac{2R(\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C})}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

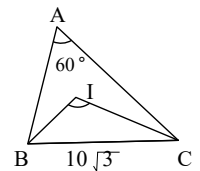
۲۲۰ هر مثلثی که سه رأس آن روی محیط دایره می‌باشد، دایره به شعاع R ، دایره محیطی آن است. بنابراین باید مثلث‌هایی را نام ببریم که رأس‌های آنها روی محیط دایره است. داریم:

$$\Delta ABE, \Delta ACD, \Delta ABC, \Delta ADE, \Delta BDE, \Delta BDC, \Delta BAD, \Delta BCE, \Delta CAE, \Delta CDE$$

۲۲۱ در شکل مقابل، I محل هم‌رسمی نیمسازهاست. داریم:

$$\hat{I} = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$2R_{\Delta BIC} = \frac{10\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow 2R_{\Delta BIC} = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R_{\Delta BIC} = 10$$



۲۲۲ طبق قانون سینوس‌ها داریم:

$$2R_{\Delta ACD} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 8 \Rightarrow R_{\Delta ACD} = 4$$

$$\begin{cases} 2R_{\Delta ABC} = \frac{BC}{\sin \hat{A}_1} \\ 2R_{\Delta ACD} = \frac{CD}{\sin \hat{A}_2} = \frac{2BC}{\sin \hat{A}_2} \end{cases}, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \sin \hat{A}_2$$

$$\Rightarrow 2R_{\Delta ACD} = 2 \times 2R_{\Delta ABC} \Rightarrow R_{\Delta ACD} = 2R_{\Delta ABC} = 4 \Rightarrow R_{\Delta ABC} = 2$$

$$\text{قانون سینوس‌ها: } b = \sqrt{2}a \Rightarrow 2R \times \sin \hat{B} = \sqrt{2} \times 2R \times \sin \hat{A}$$

$$\sin \hat{B} = \sqrt{2} \times \sin 30^\circ = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ \end{cases}$$

$$b = \sqrt{3}a \Rightarrow 2R \sin \hat{B} = \sqrt{3} \times 2R \times \sin \hat{A}$$

$$\sin \hat{B} = \sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ \end{cases}$$

$$c = 2R \times \sin \hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2R \times \sin 90^\circ \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2 \\ 4 = 2R \times \sin 30^\circ \Rightarrow R = 4 \end{cases}$$

$$b = 2R \sin \hat{B} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \\ b = 8 \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

بیشترین مقدار $b = 4\sqrt{3}$ است.



قانون سینوسها: $\frac{x+1}{\sin 30^\circ} = \frac{2x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{x+1}{\frac{1}{2}} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2}(x+1) = 2x$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 2x \Rightarrow 2x - \sqrt{2}x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} + 1$$

قانون سینوسها: $2R = \frac{a}{\sin \hat{A}}, 2R' = \frac{a}{\sin 2\hat{A}}$

$$\Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin 2\hat{A}} = \frac{\sin \hat{A}}{2 \sin \hat{A} \times \cos \hat{A}} = \frac{1}{2 \cos \hat{A}}$$

$$\frac{R'}{R} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2 \cos \hat{A}} = 1 \Rightarrow 2 \cos \hat{A} = 1 \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

قانون سینوسها در $\triangle ABC$: $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$

قانون سینوسها در $\triangle ACD$: $\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 2$

قانون سینوسها در $\triangle ABP$: $\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R_1 \Rightarrow 2R_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6 \Rightarrow R_1 = 3$

می‌دانیم که: $\frac{R_1}{R_{\triangle APC}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{R_r} = \frac{6}{10} \Rightarrow R_r = 5$

می‌دانیم: $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$

طبق قضیه سینوسها: $\frac{R_{\triangle APB}}{R_{\triangle APC}} = \frac{2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{AB}{AC}$

۲۳۰ (قطر دایره محیطی مثلث) $2R$

$$\frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = \frac{2R \sin \hat{A} + 2R \sin \hat{B} + 2R \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{a \times h_a}{2} = \frac{b \times c}{2} \end{cases} \Rightarrow bc = a \times h_a \Rightarrow b^2 c^2 = a^2 \times h_a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2 \times h_a^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

۲۳۱ $\frac{1}{h_a^2}$ (ارتفاع وارد بر وتر)

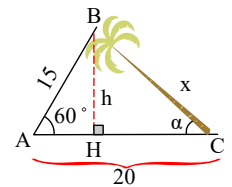


$$\text{الف) } x^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \times 15 \times 20 \times \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}$$

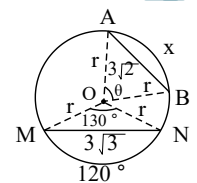
$$\Rightarrow x^2 = 225 + 400 - 300 \Rightarrow x = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

$$\text{ب) } \frac{15}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{325}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{15}{\sin \alpha} = \frac{5\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

$$\text{پ) } h = 15 \times \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{قضیه کسینوس ها} \quad \Delta \text{ در } MON : (3\sqrt{3})^2 = r^2 + r^2 - 2r \times r \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 27 = 3r^2 \Rightarrow r = 3$$



$$\Delta OAB : (3\sqrt{2})^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos \theta$$

$$18 = 9 + 9 - 18 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$$

$$\text{الف) } BC^2 = 81, AC^2 = 36, AB^2 = 100 \Rightarrow 81 < 100 + 36 = 136$$

$$\Rightarrow BC^2 < AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ \text{ (حاده)}$$

$$\text{ب) } BC^2 = 81, AC^2 = 16, AB^2 = 64 \Rightarrow 81 > 16 + 64 = 80$$

$$\Rightarrow BC^2 > AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ \text{ (منفرجه)}$$

$$\text{پ) } BC^2 = 289, AC^2 = 225, AB^2 = 64 \Rightarrow 289 = 225 + 64$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \text{ (قائمه)}$$

$$\text{الف) } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \hat{A} > 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} < 0$$

$$\cos \hat{A} < 0 \Rightarrow -2bc \cdot \cos \hat{A} > 0 \Rightarrow \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}_{a^2} > b^2 + c^2$$

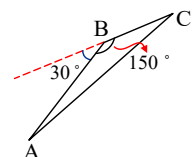
$$\text{ب) } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} > 0$$

$$\cos \hat{A} > 0 \Rightarrow -2bc \cdot \cos \hat{A} < 0 \Rightarrow \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}_{a^2} < b^2 + c^2$$

$$\text{پ) } \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$AB = 60 \times 1 = 60, \quad BC = 40 \times \frac{5}{13} = 20, \quad \widehat{ABC} = 150^\circ$$

۲۳۶) طبق فرض و شکل زیر داریم:



$$\text{قضیه کسینوس ها} : AC^2 = 20^2 + 60^2 - 2 \times 20 \times 60 \times \underbrace{\cos 150^\circ}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow AC^2 = 400 + 3600 + 1200\sqrt{3}$$

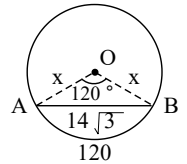
$$\Rightarrow AC^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{4000 + 1200\sqrt{3}}$$

۲۳۷) با توجه به شکل داریم:



$$\text{قضیه کسینوسها: } (14\sqrt{3})^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 14^2 \times 3 = 2x^2 + x^2 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 14^2 \Rightarrow x = 14$$



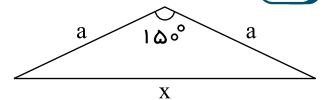
۲۳۸

$$\text{می دانیم: } b^2 + c^2 = (b+c)(b^2 + c^2 - bc) = a^2(b+c)$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

۲۳۹ اندازه زاویه داخلی ۱۲ ضلعی منتظم برابرست با:



$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{12} = 150^\circ$$

$$\text{قانون کسینوسها: } x^2 = a^2 + a^2 - 2a \times a \times \underbrace{\cos 150^\circ}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a^2 + \sqrt{3}a^2 = (2 + \sqrt{3})a^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}a$$

۲۴۰ می دانیم در هر متوازی الاضلاع، مجموع مربعات قطرها برابر است با مجموع مربعات چهارضلعی، یعنی:

$$\text{مجموع مربعات قطرها} = 2(a^2 + b^2) = 2 \times 5^2 = 50$$

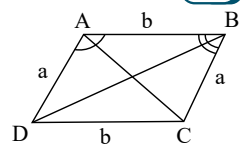
$$ABCD : \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow -\cos \hat{A} = \cos \hat{B}$$

$$\text{قضیه کسینوسها در } \triangle ABD : BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{A}$$

$$\text{قضیه کسینوسها در } \triangle ABC : AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \underbrace{\cos \hat{B}}_{-\cos \hat{A}} = a^2 + b^2 + 2ab \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$$



۲۴۱

۲۴۲

$$\text{قانون کسینوسها: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$(1) \hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos \hat{A} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}_{a^2} < b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \underbrace{|b-c|}_{\text{وجود مثلث}} < a < \sqrt{b^2 + c^2}$$

در مورد (۲)، $\cos \hat{A} = 0$ و در مورد (۳) $\cos \hat{A} < 0$ است و به روش مشابه ثابت می شود.

۲۴۳ می دانیم که:

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \sqrt{b^2 + c^2} < a < b + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} < x - 1 < 3 + 4 \Rightarrow 5 < x - 1 < 7 \Rightarrow 6 < x < 8$$

۲۴۴

$$\text{قانون سینوسها: } \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{BC}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \sqrt{6}$$

$$\text{قانون کسینوسها: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}}$$



$$\Rightarrow (\sqrt{6})^2 = AB^2 + 4 - 2AB \times 2 \times \frac{-1}{2} \Rightarrow AB^2 + 2AB - 2 = 0$$

$$AB = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{قانون کسینوس ها: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} = b^2 + c^2 + bc$$

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^2 = 4 + 9 - 6 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

$$AB = 9 \times \frac{1}{3} = 3km, \quad AC = 15 \times \frac{1}{3} = 5km$$

$$\text{قانون کسینوس ها: } BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} = 9 + 25 + 15 = 49 \Rightarrow BC = 7km$$

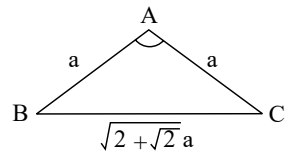
$$\hat{A} = 180^\circ - (15^\circ + 30^\circ) = 135^\circ \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \underbrace{\cos 135^\circ}_{-\cos 45^\circ}$$

$$BC^2 = 400 + 800 - 2 \times 20 \times 20 \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2000 \Rightarrow BC = 20\sqrt{5}$$

۲۴۹ در n ضلعی منتظم، کوچکترین قطر، قطری است که نزدیکترین رأسها را بهم وصل می‌کند، بنابراین داریم:

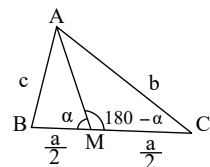
$$\triangle ABC \text{ قضیه کسینوس ها در: } (\sqrt{2} + \sqrt{2}a)^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \times \cos \hat{A} \Rightarrow (2 + \sqrt{2})a^2 = 2a^2(1 - \cos \hat{A})$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 135^\circ, \quad \hat{A} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 135^\circ \Rightarrow \frac{360^\circ}{n} = 45^\circ \Rightarrow n = 8$$



۲۵۰ طبق رابطه میانهها داریم:

$$\begin{cases} 3^2 + 4^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2} \times 5^2 \\ 4^2 + 6^2 = 2m_b^2 + \frac{1}{2} \times 3^2 \\ 3^2 + 6^2 = 2m_c^2 + \frac{1}{2} \times 4^2 \end{cases} \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(3^2 + 4^2 + 6^2) = \frac{3}{4} \times 61 = \frac{183}{4}$$



۲۵۱ در دو مثلث AMB و AMC قانون کسینوسها را می‌نویسیم. داریم:

$$\begin{cases} \triangle AMB : c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a \times \frac{a}{2} \times \cos \alpha = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - m_a \times a \times \cos \alpha \\ \triangle AMC : b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a \times \frac{a}{2} \times \underbrace{\cos(180^\circ - \alpha)}_{-\cos \alpha} = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + m_a \times a \times \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2 \times \frac{a^2}{4} \Rightarrow b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

دو رابطه دیگر هم به همین ترتیب، اثبات می‌شود.

۲۵۲ از رابطه میانهها داریم:



$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}) \Rightarrow \begin{cases} m_b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}) \\ m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}) \end{cases}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2}a^2) = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

رابطه استوارت: $4^2(1-x) + 6^2 \times x = \underbrace{(x+1-x)}_1(3^2 + x(1-x))$

$$121 - 16x + 36x = 72 + 64x - 18x^2 \Rightarrow -18x^2 + 44x - 56 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 0 \Rightarrow (2x-7)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3.5 \end{cases}$$

۲۵۳

رابطه استوارت: $3^2 \times 4 + 5^2 \times 2 = 6(x^2 + 2 \times 4)$

$$36 + 50 = 6x^2 + 48 \Rightarrow 6x^2 = 38 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

۲۵۴

نیمساز $AD \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC+AB} = \frac{12}{12+16} = \frac{3}{7}$

$$7AB = 3AC + 3AB \Rightarrow 4AB = 3AC \rightarrow AB = \frac{3}{4}AC$$

محیط $\triangle ABC = AB + AC + BC = \frac{3}{4}AC + AC + 28 = 70 \Rightarrow \frac{7}{4}AC = 70 - 28 = 42 \Rightarrow AC = 24cm \Rightarrow AB = \frac{3}{4} \times 24 = 18cm$

۲۵۵

طبق قضیه نیمسازها داریم:

الف) $\hat{A}_1 = \hat{A}_r$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$, AD : وتر مشترک $\Rightarrow \triangle ADH \cong \triangle ADH' \Rightarrow DH = DH'$

ب) $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} \times DH' \cdot AB}{\frac{1}{2} \times DH \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$ (۱)

پ) $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \cdot AH''}{\frac{1}{2} \times CD \cdot AH''} = \frac{BD}{CD}$ (۲)

(۱) , (۲) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

۲۵۶

$\triangle AMB$: MQ نیمساز: $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{BM}$, $BM = MC$

$\triangle AMC$: MP نیمساز: $\frac{AP}{CP} = \frac{AM}{MC}$

$\Rightarrow \frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{CP} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$

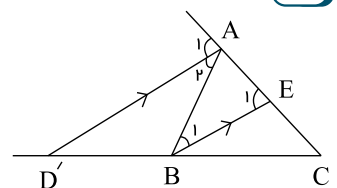
۲۵۷

$$\begin{cases} BE \parallel AD' \text{ و } AB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_r , \hat{A}_1 = \hat{A}_r \\ BE \parallel AD' \text{ و } AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow AE = AB$

$BE \parallel AD' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{D'B}{D'C} = \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AC}$

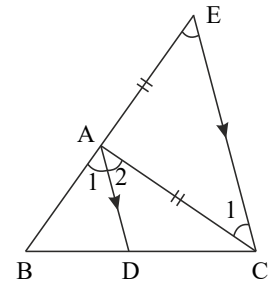
۲۵۸ مطابق شکل داریم:



۲۵۹ مطابق شکل، $CE \parallel AD$ است. داریم:



$$\begin{cases} AD \parallel CE \text{ و } BE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \\ AD \parallel CE \text{ و } AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{C}_1 \end{cases}, \hat{A}_1 = \hat{A}_r \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \Rightarrow AE = AC$$

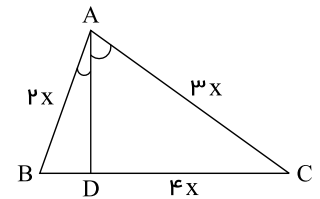


$$AD \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$AD \Rightarrow \text{قضیه نیمسازها} : \frac{BD}{DC} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BD = \frac{2 \times 5x}{5} = \frac{8}{5}x$$

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{8}{5}x}{5x} = \frac{8}{25} = \frac{2}{5}$$

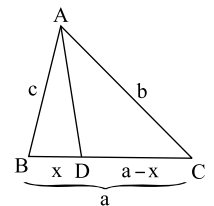
۲۶۰



۲۶۱

$$AD \Rightarrow \frac{x}{a-x} = \frac{c}{b} \Rightarrow bx = ac - cx \Rightarrow (b+c)x = ac \Rightarrow x = BD = \frac{ac}{b+c}$$

$$\Rightarrow CD = a - x = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$$



۲۶۲ AD نیمساز و M وسط BC است. داریم:

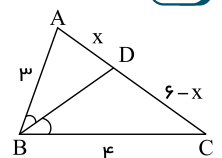
$$\frac{4}{8} = \frac{x}{6-x} \Rightarrow 2x = 6 - x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow BD = 2, BM = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow DM = 3 - 2 = 1$$

$$BD \text{ نیمساز} : \frac{3}{4} = \frac{x}{6-x} \Rightarrow 3x = 18 - 3x \Rightarrow x = \frac{18}{6} = 3$$

$$AD = \frac{18}{6}, DC = \frac{24}{6}$$

۲۶۳



۲۶۴

طبق قضیه نیمسازها داریم:

$$AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{21}{30} = \frac{2x}{3x-1} \Rightarrow 63x - 21 = 60x \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

۲۶۵

$$\triangle ABD : \hat{A}_1 = \hat{A}_r \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DM}$$

$$\triangle BCD : \hat{C}_1 = \hat{C}_r \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{BC}{CD} = \frac{BM}{DM}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

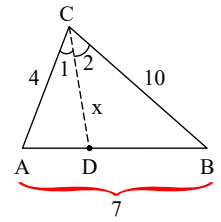
۲۶۶



$$x^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD \quad (1)$$

$$\text{قضیه نیمسازها} : \frac{AD}{BD} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2}{5}BD$$



$$AD + BD = 7 \Rightarrow \frac{2}{5}BD + BD = 7 \Rightarrow \frac{7}{5}BD = 7 \Rightarrow BD = 5 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow (1) : x^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow x = \sqrt{30}$$

۲۶۷ پاسخ: اگر D پای نیمساز داخلی زاویه A باشد، داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{3}{8} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}\sqrt{2}$$

$$CD = 5\sqrt{2} - \frac{21}{8}\sqrt{2} = \frac{35}{8}\sqrt{2}$$

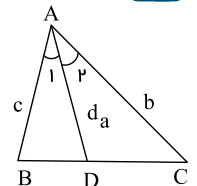
$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} - \frac{21}{8}\sqrt{2} \times \frac{35}{8}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 30 - \frac{735}{32} = \frac{225}{32} \Rightarrow AD = \frac{15}{4\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

$$d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times \cos \frac{60^\circ}{2}}{7} = \frac{12\sqrt{3}}{7}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_r = \frac{\hat{A}}{2}$$

$$S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$$



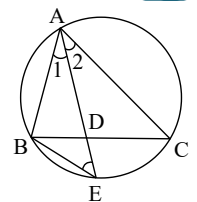
۲۶۸ با نوشتن مساحت سینوسی برای مثلث ABC داریم:

$$\frac{1}{2} \times d_a \times c \times \sin \frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2} \times d_a \times b \times \sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2}bc \times 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\hat{A}}{2} \times d_a(b+c) = \frac{1}{2}bc \cdot 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow (b+c)d_a = 2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_r, \hat{C} = \hat{E} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABE$$



$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - AD \cdot DE$$

$$\text{روابط طولی در دایره} : AD \cdot DE = BD \cdot DC \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$



$$P = \frac{a + a + a}{3} = \frac{3}{3}a$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{4}a\left(\frac{3}{4}a - a\right)\left(\frac{3}{4}a - a\right)\left(\frac{3}{4}a - a\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$P_1 = \frac{15 + 4 + 13}{3} = 16$$

$$S_1 = \sqrt{16(16 - 4)(16 - 13)(16 - 15)}$$

$$S_1 = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24$$

$$P_r = \frac{11 + 13 + 20}{3} = 22, \quad S_r = \sqrt{22(22 - 11)(22 - 13)(22 - 20)}$$

$$\Rightarrow S_r = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 2 \times 3 \times 11 = 66$$

$$S_{ABCD} = 66 + 24 = 90$$

$$(1): 15^2 = 4^2 + 13^2 - 2 \times 4 \times 13 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 225 = 16 + 169 - 104 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-40}{104} = \frac{-5}{13}$$

$$(2): 20^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \times 11 \times 13 \times \cos \beta \Rightarrow 400 = 121 + 169 - 286 \cos \beta$$

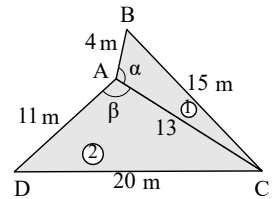
$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{-110}{286} = \frac{-5}{13} \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\text{دستور هرون: } p = \frac{3 + 5 + 7}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2} - 3\right)\left(\frac{15}{2} - 5\right)\left(\frac{15}{2} - 7\right)} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{15}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4} \times 3 \times h \Rightarrow h = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

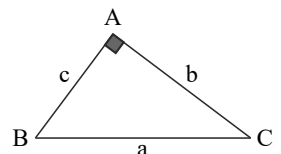
۲۷۲ طبق رابطه مساحت در هرون داریم:



با نوشتن قضیه کسینوس ها داریم:

۲۷۳

۲۷۴



$$\text{می دانیم: } S_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow p(p - a) = \left(\frac{a + b + c}{2}\right)\left(\frac{a + b + c}{2} - a\right)$$

$$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{b + c - a}{2} = \frac{1}{4}((b + c)^2 - a^2)$$

$$\text{قانون الزاویه: } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow p(p - a) = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc - a^2) = \frac{bc}{2} \Rightarrow S = p(p - a)$$

$$\text{دستور هرون: } S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow S = \sqrt{S} \times \sqrt{(p - b)(p - c)} \Rightarrow S = (p - b)(p - c)$$

۲۷۵ از B به D وصل می کنیم. داریم:

$$\triangle ABD: \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = (\sqrt{48})^2 + 11^2 = 48 + 121 = 169$$



$$\Rightarrow BD = 13 \Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 11 \times \sqrt{48} = 22\sqrt{3}$$

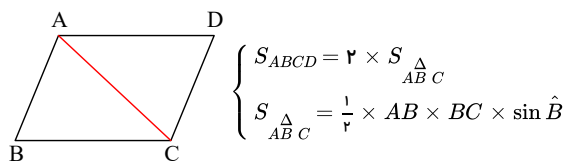
$$\text{در } \triangle BDC \text{ دستور هرون } p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{21 \times (21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = 84 \Rightarrow S_{ABCD} = 84 + 22\sqrt{3}$$

$$P = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{21 \times (21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = 84$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}, P = \frac{a+b+c}{2}$$



$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} \Rightarrow S_{ABCD} = AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

$$\text{الف) } BC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 60^\circ = 36 + 100 - 60 = 76 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

$$\text{ب) } S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

$$\text{پ) } S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 10 \times 2\sqrt{19} \times \sin \hat{B} = 15\sqrt{3} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}xy \sin \hat{D}, \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \sin \hat{B} = \sin \hat{D}$$

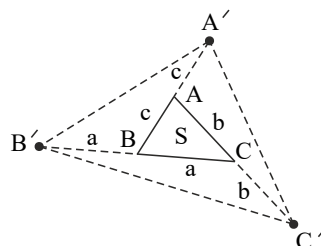
$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}zt \sin \hat{B}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy \sin \hat{D} + \frac{1}{2}zt \sin \hat{B} = \frac{1}{2}(xy + zt) \sin D$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} \times AD \times AE \times \sin \hat{A}} = \frac{AB}{AD} \times \frac{AC}{AE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\hat{MAA'} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \hat{BAC}) \Rightarrow \hat{MAA'} = 180^\circ - \hat{BAC} \Rightarrow \sin \hat{MAA'} = \sin \hat{BAC}$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle MA'A'} = \frac{1}{2}AM \times AA' \times \sin \hat{MAA'} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \hat{BAC} = S_{\triangle ABC}$$



۲۷۶ با استفاده از دستور هرون داریم:

۲۷۷

۲۷۸

۲۷۹

۲۸۰

از A به C وصل می‌کنیم. داریم:

۲۸۱

۲۸۲

۲۸۳

فرض می‌کنیم $S_{\triangle ABC} = S$ داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{رابطه سینوسی مساحت: } \frac{S_{\triangle A'AC'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times c \times 2b \times \sin \hat{A}'AC'}{\frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \hat{B}AC} = 2 \Rightarrow S_{\triangle A'AC'} = 2S \\ \hat{A}'AC' + \hat{B}AC = 180^\circ \Rightarrow \sin \hat{A}'AC' = \sin \hat{B}AC \end{array} \right.$$

به همین ترتیب:

$$S_{\triangle BB'} = 2S, \quad S_{\triangle B'C'C'} = 2S \Rightarrow S_{\triangle A'B'C'} = 4S$$

۲۸۴ با نوشتن رابطه سینوسی مساحت داریم:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD}, \quad (\sin \hat{BOC} = \sin \hat{AOD} = \sin \alpha)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}OA \times OB \times \sin \alpha + \frac{1}{2}OB \times OC \times \sin \alpha + \frac{1}{2}OC \times OD \times \sin \alpha + \frac{1}{2}OA \times OD \times \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}OB(OA + OC) \sin \alpha + \frac{1}{2}OD(OA + OC) \sin \alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC(OB + OD) \sin \alpha = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$$

۲۸۵ با نوشتن رابطه سینوسی در مساحت داریم:

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \hat{A} = ab \sin \hat{A}$$

$$S_{ABCD} = 4 \times S_{\triangle BOC} = 4 \times \frac{1}{2} \times OB \times OC \times \sin \alpha \Rightarrow S_{ABCD} = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{c}{2} \times \frac{d}{2} \times \sin \alpha = \frac{1}{2}cd \times \sin \alpha$$

۲۸۶ مساحت مستطیل برابر است با نصف حاصل ضرب قطرها در سینوس زاویه بین قطرها:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 36\sqrt{3}$$

۲۸۷

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \sin \hat{A}$$

بیشترین مقدار مساحت زمانی است که $\sin \hat{A} = 1$ باشد. داریم:

$$\max(S) = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$$

۲۸۸

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin \hat{A} = 15\sqrt{3} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$$

۲۸۹

$$\triangle AMN: AM = AN = MN = 2 \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{\triangle AMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = \frac{15\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

۲۹۰

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \underbrace{\sin 30^\circ}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$



$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{S_{\triangle APC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\triangle APC} = 3$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

رابطه سینوسی مساحت : $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin \hat{A}} = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN}$$

$$\Rightarrow S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{5} S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{S_{BMNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{5}$$

$$\hat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

رابطه سینوسی مساحت : $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 9 \times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{8}{S}\right) \times 2S \Rightarrow \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 16 \Rightarrow h_a + h_b + h_c = 16$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}, \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{5}{3}, \frac{h_b}{h_c} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} = \frac{5}{3} + \frac{6}{5} = \frac{43}{15}$$

$$\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

باید ثابت کنیم که:

داریم:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$$

از آنجایی که $b - c < a < b + c$ پس:

$$\frac{b}{2S} - \frac{c}{2S} < \frac{a}{2S} < \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} \Rightarrow \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

برای ارتفاع‌های دیگر هم می‌توان به همین ترتیب، ثابت کرد.