



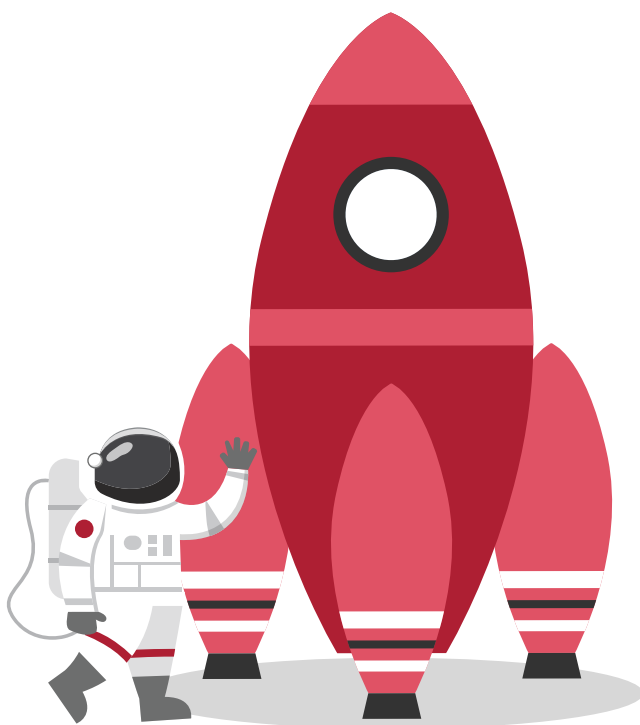
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

ریاضی و آمار ۳



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

ریاضی و آمار ۳ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان ریاضی : عارف بهرام نیا

فصل اول: آمار و احتمال

شمارش

۱) مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(3^2 + 3 \times 4 + 2 \times 3)$ باشد.

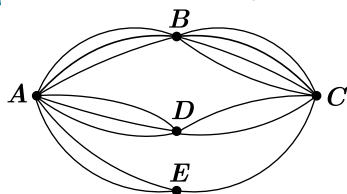
۲) با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (بامعنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۳) بین پنج شهر A, B, C, D و E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:



الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ (از هر شهر حداکثر یک بار عبور می کنیم).

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

۴) با ارقام زوج غیر صفر چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام و بزرگتر از ۷۰۰ می توان نوشت؟

۵) با ارقام "۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹" چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که:

الف) زوج باشد (تکرار مجاز نیست).

ب) فرد باشد (تکرار مجاز است).

۶) با ارقام "۱، ۲، ۳، ۵، ۷" چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۷) با ارقام "۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۵، ۳، ۲" چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟ اگر تکرار مجاز باشد، چند عدد می توان نوشت؟

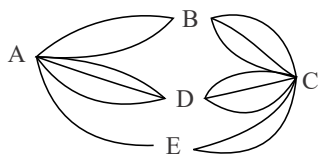


۸) سهام‌داران یک شرکت در دو گروه A و B دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۷ نفر در گروه A و ۸ در گروه B قرار داشته باشند، به چند طریق می‌توان:

- الف) یک نفر از گروه A یا یک نفر از گروه B را انتخاب کرد.
 ب) یک تیم شامل یک نفر از گروه A و یک نفر از گروه B انتخاب کرد.

۹) یک دانشجو می‌خواهد از بین سه درس عمومی و چهار درس اختصاصی یک درس عمومی و یک درس اختصاصی انتخاب کند، به چند طریق این عمل امکان‌پذیر است؟

۱۰) به چند طریق می‌توان فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین چهار خودکار با رنگ‌های متمایز، ۳ مداد با رنگ‌های متمایز و دو روان‌نویس با رنگ‌های متفاوت انتخاب کرد.



۱۱) بین ۵ شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه‌هایی موجود است. به چند طریق می‌توان: (از هر

شهر حداکثر یک بار عبور می‌کند.)

الف) از A به شهر C مسافرت کرد.

ب) از شهر A بدون عبور از شهر E به شهر C مسافرت کرد.

۱۲) اگر عملی به m طریق و عمل دیگری به n طریق انجام شود به‌طوری که دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، در این صورت به طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

۱۳) اگر از شهر A به شهر B سه راه و از شهر B به شهر C چهار راه موجود باشد، تعداد راه‌های ممکن برای سفر از شهر A به شهر C به طوری که از B یک بار عبور کنیم برابر راه است.

۱۴) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) تساوی $0! = (5, 5)C$ درست است.

ب) حاصل $P(5, 2)$ بزرگتر از $C(5, 2)$ است.

پ) در کارخانه‌ای ۳ مدل ماشین در ۵ رنگ و ۲ حجم موتور تولید می‌شود. برای خرید ماشین از این کارخانه ۱۰ انتخاب داریم.

۱۵) مجموعه‌ای دارای ۲۸ زیرمجموعه دوعضوی است. این مجموعه چند زیرمجموعه چهارعضوی دارد؟

۱۶) با حروف کلمه «ملایر» چند کلمه چهارحرفی (بدون تکرار حروف) می‌توان نوشت، به‌طوری که حرف «م» در اول و حرف «ل» در آخر بیاید؟

۱۷) تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ گویی به ۶ سؤال دو گزینه‌ای را به دست آورید. (پاسخ‌گویی به همه سؤال‌ها اجباری است.)



۱۸) روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۱۹) حاصل عبارت $\frac{6! + 5!}{4!}$ را به دست آورید.

۲۰) مقدار n در عبارت $\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{3}{2}$ را به دست آورید.

۲۱) تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است.

۲۲) در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز وجود دارد به چند طریق می‌توان سه مهره از جعبه خارج کرد به طوری که:

الف) هر سه قرمز باشند. ب) هر سه هم رنگ باشند.

۲۳) با حروف کلمه «شیرازه» چند کلمه سه حرفی بامعنی و بی‌معنی می‌توان نوشت؟

۲۴) حاصل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2!$

پ) $\frac{11!}{5! \times 2!}$

ب) $\frac{5!}{3!}$

ت) $\frac{6!}{4! \times 5!}$

۲۵) با حروف کلمه «جهان‌گیر» چند کلمه ۷ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که شامل «جهان» باشد؟

۲۶) مجموعه $\{1, 3, 7, 8, 9, 10\}$ چند زیرمجموعه چهار عضوی و چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

۲۷) به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر یک تیم ۶ نفره برای والیبال انتخاب کرد.

۲۸) روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد.

الف) چه تعداد مثلث با این ۱۰ نقطه می‌توان نوشت؟

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۲۹) مجموعه $A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ مفروض است.

الف) چند زیر مجموعه ۴ عضوی از A می‌توان نوشت؟

ب) چند زیر مجموعه سه عضوی شامل ۳ می‌توان نوشت؟

ج) چند زیر مجموعه دو عضوی فاقد ۵ می‌توان نوشت؟



۳۰ جای خالی را کامل کنید.

$$\frac{P(n, r)}{\square} = C(n, r)$$

۳۱ از بین ۷ دانش آموز دوازدهم و ۵ دانش آموز یازدهم به چند طریق می‌توان یک تیم چهار نفره انتخاب کرد به طوری که:

الف) سه دانش آموز از پایه دوازدهم و یک دانش آموز از پایه یازدهم باشد.

ب) حداکثر یک دانش آموز از پایه یازدهم باشد.

۳۲ در یک جعبه ۴ مهره سبز و ۶ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان دو مهره خارج کرد به طوری که:

الف) یک مهره قرمز و یک مهره سبز باشد.

ب) هر دو هم رنگ باشند.

۳۳ تابع بودن هر مورد را بررسی کنید.

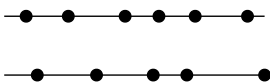
الف) رابطه بین شعاع دایره و مساحت آن

ب) رابطه بین هر فرد و اندازه قد او در یک زمان مشخص

ج) رابطه بین یک عدد طبیعی اول و مقسوم‌علیه‌های آن

د) رابطه بین هر داوطلب کنکور رشته‌ای خاص و رتبه کشوری‌اش در آن رشته

۳۴ مطابق شکل زیر، روی دو خط موازی ۱۱ نقطه مشخص شده است. با این نقاط حداکثر چند مثلث می‌توان رسم کرد به طوری که نقاط راس‌های مثلث‌ها باشند؟



۳۵ از تساوی $P(n, n-2) = 12$ مقدار n را به دست آورید.

۳۶ از بین ۹ کارمند می‌خواهیم ۵ نفر را برای اعزام به خارج انتخاب کنیم. اگر ۳ فرد به‌خصوص از میان آنها از قبل برای اعزام انتخاب شده باشند، تکمیل افراد اعزامی به چند طریق امکان‌پذیر است؟

احتمال

۳۷ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید، طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟



۳۸ خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند.

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۳۹ هریک از اعداد دورقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می توان نوشت، روی کارتهایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت

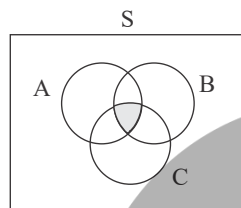
را به طور تصادفی خارج می کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

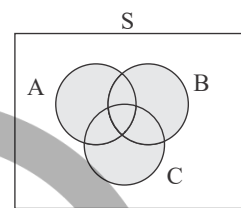
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۴۰ برای هریک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه ای بنویسید.



(الف)



(ب)

۴۱ هریک از اعداد فرد طبیعی کوچکتر از ۲۰ را روی یک کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها به طور تصادفی یک کارت را

برمی داریم؛ مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴۲ سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو ظاهر شد، آنگاه تاس را می ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا مشخص کنید.

۴۳ تعداد عضوهای فضای نمونه سه بار پرتاب یک تاس چند برابر تعداد عضوهای فضای نمونه پرتاب سه سکه باهم است؟



۴۴ خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است:

الف) فضای نمونه جنسیت فرزندان این خانواده.

ب) پیشامد A که هر سه فرزند از یک جنسیت باشند.

پ) پیشامد B که فقط یک دختر داشته باشند.

ت) پیشامد C که حداقل دو پسر داشته باشند.

ث) پیشامد D که حداکثر یک پسر داشته باشند.

۴۵ هر یک از ارقام ۱، ۲، ۰۰۰، ۷ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن، یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است:

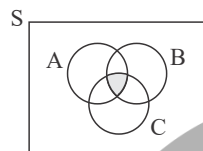
الف) فضای نمونه این پدیده تصادفی.

ب) پیشامد A که عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.

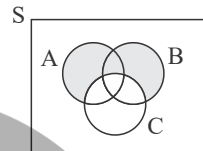
پ) پیشامد B که عدد روی کارت اول باشد.

ت) پیشامد $A \cup B$ را بنویسید.

۴۶ برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

۴۷ هر یک از اعداد طبیعی کمتر از ۲۱ را روی ۲۰ کارت نوشته و پس از مخلوط کردن، یک کارت به تصادف بر می‌داریم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه این پدیده تصادفی.

ب) پیشامد A که عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

پ) پیشامد B که روی کارت مجذور کامل باشد.

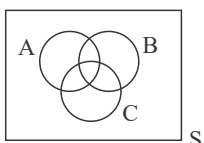
ت) پیشامدهای $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ را بنویسید.

۴۸ تاسی را پرتاب می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد رو شده فرد و اول باشد.

ب) عدد رو شده زوج ولی اول نباشد.

ج) عدد رو شده فرد ولی اول نباشد.



۴۹ با توجه به شکل، پیشامد $(A \cup B) - C$ را هاشور بزنید.

۵۰ در پرتاب دو تاس با هم پیشامد آن‌که دو تاس یکسان یا مجموع هر دو تاس ۴ باشد را بنویسید.



۵۱) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه پرتاب دو تاس.

ب) پیشامد A که مجموع دو تاس ۱۱ شود.

ج) پیشامد B که حاصلضرب دو تاس کمتر از ۱۲ شود.

د) پیشامد $B - A$.

۵۲) یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبه:

الف) فضای نمونه پرتاب دو بار سکه.

ب) پیشامد A که حداقل یکبار رو بیاید.

پ) پیشامد B که تعداد رو و پشت‌ها یکسان ظاهر شده باشد.

ت) پیشامد $A \cap B$.

۵۳) یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه پرتاب تاس.

ب) پیشامد A که عدد روشده زوج باشد.

ج) پیشامد B که عدد روشده بیشتر از ۴ باشد.

د) پیشامد $B - A$.

۵۴) هر از فضای نمونه را یک پیشامد می‌گوییم.

۵۵) $\emptyset$ یک پیشامد است.

۵۶) پیشامد S را در فضای نمونه S یک پیشامد می‌نامیم.

۵۷) هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک می‌نامیم.

۵۸) به پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن قبل از اجرای آزمایش به‌طور پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم.

۵۹) مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) پدیده تصادفی

ب) فضای نمونه

پ) پیشامد

۶۰) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.



الف پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، پدیده تصادفی است.

ب اگر پدیده‌ای تصادفی نباشد، قطعی است.

پ ϕ یک پیشامد حتمی است.

ت همواره داریم $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

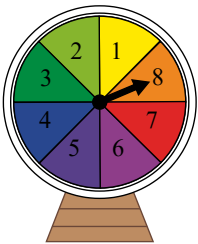
۶۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

الف در پرتاب تاس پیشامد زوج آمدن و فرد آمدن ناسازگارند.

ب پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که A و B رخ دهند.

پ در پرتاب یک سکه $A = \{\text{ر، پ}\}$ یک پیشامد حتمی است.

۶۲ عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد



که: الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

۶۳ از بین ۷ زن و ۳ مرد یک تیم سه نفره انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر سه هم‌جنس باشند.

ب) دوتا زن و یک مرد باشد.

۶۴ در یک جعبه، ۱۲ لامپ وجود دارد که ۹ تای آن سالم است. دو لامپ به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر دو سالم باشد.

ب) یکی سالم و یکی ناسالم باشد.

۶۵ یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) تاس زوج باشد.

ب) تاس زوج و سکه رو بیاید.

۶۶ اگر $A = \phi$ باشد مقدار $P(A)$ برابر است.



۶۷ اگر باشد، آنگاه $P(A) \leq P(B)$

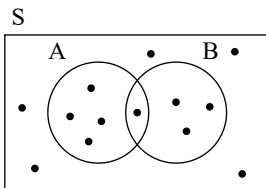
۶۸ در کیسه‌ای ۴ مهره آبی، ۶ مهره قرمز و ۲ مهره سبز قرار دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند، چقدر است؟

۶۹ می‌خواهیم از بین ۳ گروه ۲ نفره که در هر گروه دو نفر برادر دوقلو هستند، ۳ نفر را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال آنکه در ۳ نفر انتخاب‌شده هیچ دو نفری برادر دوقلو نباشند. کدام است؟

۷۰ از بین اعداد طبیعی کوچکتر از ۲۵، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد انتخاب شده عدد اول نباشد، را به دست آورید.

۷۱ شخصی در یک آزمون استخدامی شرکت می‌کند. اگر نسبت احتمال استخدام شدن او به احتمال استخدام نشدن او $\frac{5}{12}$ باشد، احتمال استخدام شدن او چقدر است؟

۷۲ با توجه به شکل مقابل، احتمال رخ دادن پیشامد $(A - B)'$ را محاسبه کنید. (هر نقطه، نمایش یک عضو متمایز بوده و S فضای نمونه است.)



آمار

۷۳ گام‌های چرخه آمار در حل مسائل را نام ببرید.

۷۴ در یک کلاس ۳۰ نفره ۵ نفر نمره بالای ۱۷ آورده‌اند، در نمودار دایره‌ای زاویه مرکزی این دسته چقدر است؟

۷۵ در گام‌های مرتبط با چرخه آمار بعد از کدام گام به ارائه نمودار ما می‌پردازیم.

۷۶ گام‌های بعد و قبل از تحلیل داده‌ها در چرخه آمار را نام ببرید.

۷۷ داده‌های a و ۴ و ۶ و ۲ و ۵ و ۳ مربوط به تعداد ساعاتی است که دانش‌آموز در هر روز هفته (به غیر از جمعه) مطالعه کرده است. اگر دامنه تغییرات برابر ۱۰ باشد a را بدست آورید.

۷۸ در داده‌های زیر میانه و دامنه تغییرات را بدست آورید.

۸ و ۳ و ۱۶ و ۵ و ۲ و ۱۷ و ۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۵



۷۹ اگر اندازه جامعه ۱۰ باشد، چند نمونه ۳ عضوی می‌توان انتخاب کرد.

۸۰ اگر اندازه نمونه n و اندازه جامعه N باشد به تعداد طریق نمونه (تصادفی ساده) می‌توان انتخاب کرد.

۸۱ اگر تمام افراد را بررسی نکرده باشیم نتایج ما نیست.

۸۲ برای توصیف داده‌های کیفی گزارش با همیشه با گزارش همراه باشد.

۸۳ در داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای رسم کنید.

۲ و ۱۶ و ۱ و ۱۷ و ۱۵ و ۱۰ و ۹ و ۶ و ۴ و ۷ و ۳

۸۴ میانگین و انحراف معیار داده‌های زیر را بدست آورید.

۲ و ۸ و ۳ و ۷ و ۵

۸۵ اگر داده‌های دور افتاده داشته باشیم و شاخص مناسبی برای توصیف داده‌ها نمی‌باشند و بهتر است از استفاده کنیم.

۸۶ برای توصیف داده‌های کمی باید هر دو شاخص و گزارش شود.

۸۷ در زیر نمرات یک دانش‌آموز لیست شده است. در کدام ردیف اشتباه رخ داده است.

ردیف	نمره
۱	۱۷
۲	۱۵
۳	۵۱
۴	۱۸

۸۸ در اندازه‌گیری سعی می‌کنیم تا حد ممکن اطلاعات را به اطلاعات تبدیل کنیم.

۸۹ اندازه‌گیری یا سنجش برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است.

۹۰ طرح یک پرسش دقیق و شفاف گام رسیدن به پاسخ در یک بررسی آماری است.

۹۱ آخرین گام در چرخه مسائل آمار را نام برده و به‌طور مختصر توضیح دهید.

۹۲ چهارمین گام در چرخه آمار در حل مسائل را بیان و به‌طور مختصر توضیح دهید.



۹۳ سومین گام در چرخه آمار در مسائل را بیان و به طور مختصر توضیح دهید.

۹۴ دومین گام در چرخه آمار در حل مسائل را بیان و به طور مختصر توضیح دهید.

۹۵ گام اول چرخه آمار در حل مسائل را بیان کرده و به طور مختصر توضیح دهید

۹۶ در هر مورد اجرای نادرست کدام گام از چرخه آمار اتفاق افتاده است.
الف) مسئله به صورتی بیان شده که اجراکنندگان برداشت متفاوتی از اعداد پژوهش دارند.
ب) اندازه‌گیری افراد نمونه با دو واحد متفاوت انجام شده است.
پ) حذف تمامی داده‌های دورافتاده.

۹۷ اگر داده دورافتاده داشته باشیم تنها به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده نمی‌کنیم. در این موارد باید از نمودار استفاده کنیم.

۹۸ اگر داده‌ها از میانگین انحراف معیار بزرگتر می‌شود.

۹۹ اگر داده‌ها به میانگین نزدیک‌تر شوند، انحراف معیار

۱۰۰ داده‌های داده‌هایی است که تفاوت بسیار زیادی با سایر داده‌ها داشته باشد.

۱۰۱ دامنه میان چارکی برابر تفاضل و است.

۱۰۲ با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته، بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟
۱- پیاده یا با دوچرخه
۲- با وسایل حمل‌ونقل عمومی
۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی / کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای / نسبتی - اسمی / ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و آماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟



ث آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا دقیقاً همین نتایج حاصل می‌شد یا امکان داشت حداقل نتایج کمی تغییر کند؟ توضیح دهید.

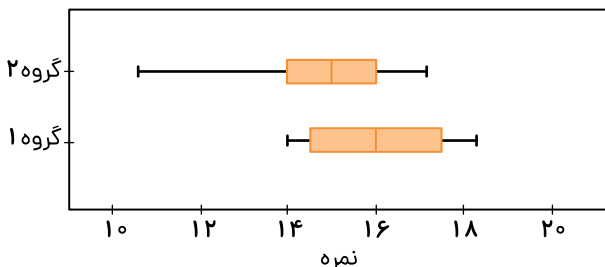
۱۰۳ در هر یک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب‌شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هر یک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

الف مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون
نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

پ مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.
نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۱۰۴ «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم‌زمان هستیم، در واقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تشنه خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت فرستاده می‌شود.»
سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.



پ از مقایسهٔ کمینهٔ گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرد؟

ت در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

ث در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

ج نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

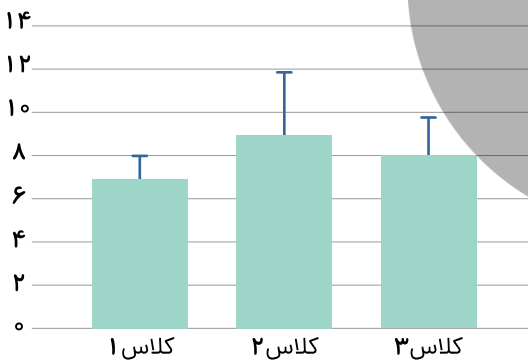
۱۰۵ در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش‌آموز علوم انسانی پایهٔ یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب با فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف این داده‌ها را طوی تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

ب فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۱۰۶ با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایهٔ دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفتهٔ گذشته بر حسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهندهٔ میانگین و میلهٔ خط نشان‌دهندهٔ انحراف معیار است.)



الف چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که از دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفتهٔ گذشته می‌پرسیم آیا آنها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

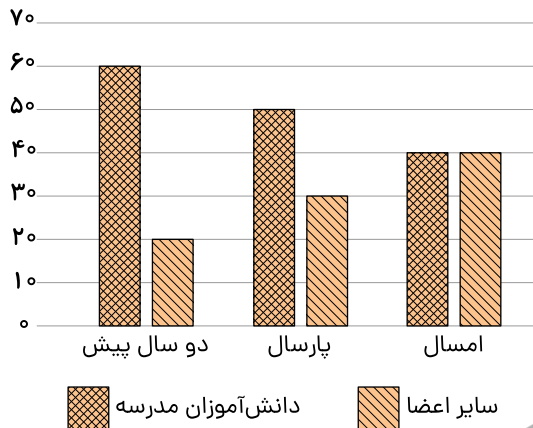
ب نوع (کمی / کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای / نسبی - اسمی / ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.



پ با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

ت چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟



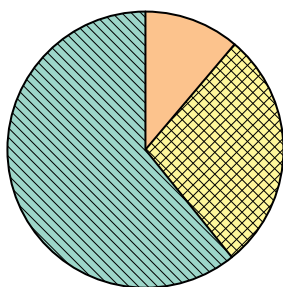
۱۰۷ مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتابخوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.

الف سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده‌شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت به نظر شما به عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟



۱۰۸ فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای روبه‌رو نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه ۴۰ تا ۶۰ سال است.)

۴۰ تا ۶۰ سال

الف با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟



- ب** مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.
- * بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- * گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- * هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.

۱۰۹ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

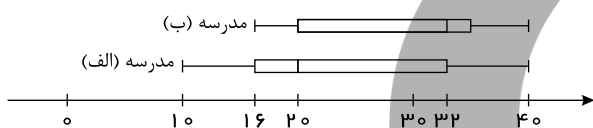
الف برای توصیف داده‌های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد برابر باشد.

ب مرتب کردن داده‌ها در گام دوم چرخه آمار اتفاق می‌افتد.

پ طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحله بیان مسئله صورت می‌گیرد.

ت پیشامد $B - A$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد و پیشامد A رخ ندهد.

۱۱۰ نمودار جعبه‌ای داده‌های مربوط به نمرات فلسفه دوازدهم انسانی در دو مدرسه به صورت زیر است. درستی یا نادرستی موارد زیر را بررسی کنید.



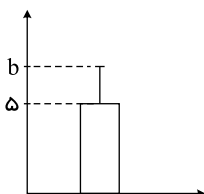
الف بهترین نمره فلسفه مربوط به مدرسه ب است.

ب میانگین نمرات فلسفه دو مدرسه برابر است.

پ به‌طور تقریبی می‌توان گفت ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه (الف) در درس فلسفه نمره‌ای کمتر از همه دانش‌آموزان مدرسه (ب) گرفته است.

ت چارک اول نمرات فلسفه مدرسه الف برابر میانه نمرات ریاضی مدرسه (ب) است.

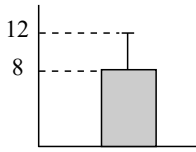
۱۱۱ نمودار میانگین و انحراف معیار داده‌های ۷ و ۶ و $a + 1$ و a و ۳ به صورت زیر است. مقدار $a + b$ را به دست آورید.





۱۱۲ برای تحلیل داده‌های ۲۹ و ۳۵ و ۳۷ و ۳۱ و ۲۴ و ۳۸ و ۲۸ کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی مناسب‌تر است؟

۱۱۳ با توجه به نمودار زیر نسبت میانگین به واریانس را به دست آورید.



۱۱۴ اگر در استفاده از شاخص‌ها و نمودارها اشتباه کرده باشیم، در کدام گام دچار اشتباه شده‌ایم و در چه گام‌هایی اثر دارد؟

۱۱۵ جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

سرعت (کیلومتر در ساعت)	$\frac{0}{10}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{30}{10}$	$\frac{40}{10}$	$\frac{50}{10}$	$\frac{60}{10}$	$\frac{70}{10}$	$\frac{80}{10}$	$\frac{90}{10}$	$\frac{100}{10}$	$\frac{110}{10}$	$\frac{120}{10}$
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۲۴۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هر چه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

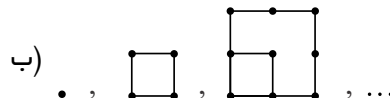
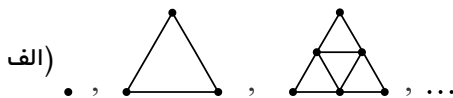
نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

۱۱۶ به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و ...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

فصل دوم: الگوهای خطی

مدل‌سازی و دنباله

۱۱۷ جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدامیک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟



۱۱۸ با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به دست

آورید.

الف) $a_2 + b_1$ ب) $c_2 - d_1$ ج) $b_2 + d_2$



۱۱۹ اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

- الف) نمودار تابع خطی را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.
 ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۱۲۰ اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

- الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر
 ب) میزان استفاده دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر یک ساعت
 ج) حجم مکعبی به ضلع x
 د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر
 هـ) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$

☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$

☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$

☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$

☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$

۱۲۱ با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی $\sqrt{k}$ نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

۱- به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_3 را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\sqrt{5}$

۲- آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

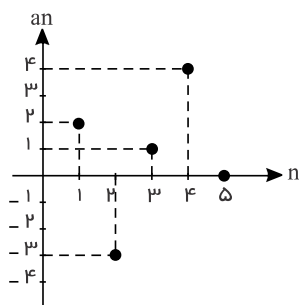
۱۲۲ جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $a_1 = 1$

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ و $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$, $a_1 = 1$



۱۲۳ با توجه به نمودار مقابل حاصل $a_5 + a_3 + a_4 - a_6$ را به دست آورید.

۱۲۴ جملات دو دنباله با جمله عمومی $a_n = n^2 + 3n$ و $b_n = (n+1)^2$ را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم. جمله دهم، از دنباله

حاصل را بیابید.



۱۲۵ مجموع ۵ جمله اول دنباله $a_n = \left[\frac{n+1}{2} \right]$ را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

۱۲۶ در یک دنباله، جمله عمومی به صورت $a_n = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & n \text{ فرد} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ زوج} \end{cases}$ است. مجموع جملات ۱۰ام، ۱۱ام و ۱۲ام را بیابید.

۱۲۷ در دنباله $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ مجموع ۲۴ جمله اول را بیابید.

۱۲۸ جمله $1 + 2n$ ام یک دنباله برحسب n به صورت $\frac{n+2}{2n-3}$ است، جمله ۱۱ام را بیابید.

۱۲۹ نمودار دنباله‌های $a_n = 2n + 1$ و $t_n = 2 - 3n$ را رسم کنید. جملات دنباله افزایشی یا کاهشی است؟

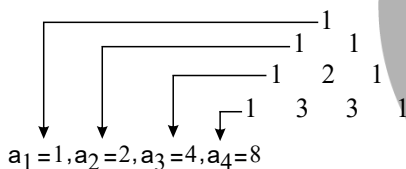
۱۳۰ برای جملات دنباله ۲، ۴، ۸، ۱۶، ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

۱۳۱ اگر $a_1 = 7$ و $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{7}{a_n})$ باشد مقدار a_3 را به دست آورید.

۱۳۲ با توجه به الگوی زیر، مجموع جمله‌های ششم و هفتم را به دست آورید.



۱۳۳ در دنباله $1, a_2, a_3, a_4, \dots$ مجموع جملات دهم و یازدهم را به دست آورید.

۱۳۴ در دنباله‌ای رابطه $a_{n+1} = \frac{a_n + 7}{2}$ برقرار است؛ اگر $a_1 = 7$ باشد، مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۳۵ کدام جمله دنباله $1 + 2n^2$ و $4n + 7$ با هم برابر است؟

۱۳۶ چندمین جمله از دنباله $a_n = \frac{n}{n^2 + 7}$ برابر $\frac{1}{8}$ است؟



دریاچه گهر، لرستان

۱۳۷) مطابق گزارش سازمان محیط‌زیست، به دلیل ورود پسماندهای صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط‌زیست دریاچه سالیانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به‌صورت طبیعی ختی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط‌زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است.

اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

دنباله‌های حسابی

۱۳۸) باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد. اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟



۱۳۹) مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

۱۳ و ۰۰۰ و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹ (ب) ۴۰۱ و ۰۰۰ و ۹ و ۵ و ۱ (الف)

۱۴۰) در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۱۴۱) برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)





۱۴۲) یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

۱۴۳) در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۱۴۴) اگر دنباله‌های حسابی زیر را داشته باشیم، مجموع ۲۰ جمله اول هر دنباله را حساب کنید.

الف) $a_1 = 2$, $d_1 = -6$

ب) $b_1 = 2$, $d_2 = 4$

۱۴۵) بین دو عدد ۵ و ۲۱، هفت عدد چنان درج کرده‌ایم که همه اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند. مجموع کل جملات دنباله را بیابید.

۱۴۶) اگر مجموع n جمله اول دنباله‌ای به صورت $S_n = 3n^2 - 8n$ باشد، حاصل $a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$ را بیابید.

۱۴۷) اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = 3n^2 - 8n$ باشد، a_8 را بیابید؟

۱۴۸) مجموع چند جمله از دنباله حسابی ۲، ۷، ۱۲، ... برابر ۸۷ است؟

۱۴۹) بین دو عدد ۱۷ و ۳۳ سه عدد به گونه‌ای درج کرده‌ایم که چهار عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند (با فرض $a_1 = 17$)، اختلاف مشترک را بیابید.

۱۵۰) بین ۷ و ۳۲ چهار جمله چنان درج کنید که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند، اختلاف مشترک بین اعداد را بیابید و جملات درج شده را مشخص کنید.

۱۵۱) اگر در یک دنباله حسابی $a_{n+1} = 3 + a_n$ باشد، اختلاف جملات پانزدهم و هفتم را بیابید.

۱۵۲) در دنباله حسابی ۱۰۰، -۹۶، ... چند جمله کوچکتر از ۷ وجود دارد؟

۱۵۳) جمله نهم یک دنباله حسابی ۴۲ و جمله بیستم آن ۷۵ است، جمله عمومی دنباله را بیابید.

۱۵۴) اگر در یک دنباله حسابی $a_7 - a_3 = 16$ و $a_7 + a_3 = 14$ باشد، جمله اول و اختلاف مشترک آن را به دست آورید؟

۱۵۵) جمله سوم یک دنباله حسابی ۱۱ و جمله ششم آن ۲۹ است، دنباله حسابی را مشخص کنید.

۱۵۶) در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۷۳ و جمله دوازدهم ۳۴ است، اختلاف مشترک دنباله را به دست آورید.

۱۵۷) مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارات $3m - 1$ و $m + 5$ و $2m - 4$ جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند.



۱۵۸ نشان دهید دنباله $1, \frac{10}{7}, \frac{13}{7}, \dots$ یک دنباله حسابی است.

۱۵۹ حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$4 + (4 + 0.25) + (4 + 0.5) + \dots + (4 + 4)$$

۱۶۰ در دنباله حسابی زیر، مجموع جملات داده شده را بیابید.

$$5, 12, 19, \dots, 103$$

۱۶۱ دنباله حسابی با اطلاعات زیر مفروض است، مجموع جملات را به دست آورید.

$$a_3 = 6, \quad a_6 = 7.5, \quad n = 20$$

۱۶۲ طول پله‌های یک نردبانی به طول یکنواخت از بالا به پایین از 25cm تا 40cm افزایش می‌یابد. اگر مجموع طول پله‌ها 5.85 متر باشد، تعداد پله‌ها چقدر است؟

۱۶۳ یک کارمند در ماه اول سال $1,000,000$ تومان حقوق می‌گیرد و هر ماه 2% از حقوق اولیه به حقوق ماه قبل وی اضافه می‌شود، در انتهای سال مجموع حقوق دریافتی سالانه وی چقدر است؟

۱۶۴ با توجه به دنباله حسابی $4, 11, 18, 25, \dots$ جمله 32 ام این دنباله را به دست آورید.

۱۶۵ جمله سیزدهم دنباله حسابی زیر را به دست آورید.

$$7, \dots, 53, 61, \dots$$

۱۶۶ دنباله $a_n = \frac{1}{4} + (x + 3)n$ مفروض است، بررسی کنید به ازای مقادیر مختلف x دنباله، در چه حالتی دنباله روند کاهشی، افزایشی و ثابت دارد؟

۱۶۷ میان دو عدد 23 و -7 ، پنج عدد قرار می‌دهیم به طوری که جملات حاصل، تشکیل دنباله کاهشی دهند. جمله سوم چند است؟

۱۶۸ نمودار دنباله‌های زیر را به ازای $n \leq 6$ رسم کنید.

الف) $a_n = \frac{-n}{3} + 5$ ب) $b_n = 2n - 3$

۱۶۹ با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 2$$



ب

$$a_{n+1} = a_n + 5, \quad a_1 = -1$$

پ

$$a_{n+1} = 5a_n + 1, \quad a_1 = -1$$

ت

$$a_{n+1} - a_n = n$$

۱۷۰) میان دو عدد a و b عدد n را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

الف) ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

ب) بر اساس رابطه به دست آمده، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد 1 و 18 قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

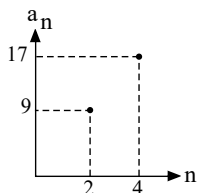
۱۷۱) تعداد صندلی‌های هر ردیف در آمفی‌تئاتر یک دانشگاه تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر ردیف پنجم 210 صندلی و ردیف پانزدهم 70 صندلی داشته باشد، اولین ردیف چند صندلی دارد؟

۱۷۲) مجموع چند جمله اول دنباله حسابی $2, 4, 6, \dots$ برابر 30 است؟

۱۷۳) اگر $p-1, -\frac{13}{2}, 2p$ به ترتیب از چپ به راست سه جمله اول یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت باشند، جمله چندم این دنباله برابر با 1 است؟

۱۷۴) مجموع جملات دنباله $203, 18, 13, 8, 3$ را به دست آورید.

۱۷۵) نمودار شکل زیر، برخی از جملات یک دنباله حسابی را نشان می‌دهد. جمله چندم این دنباله برابر 65 است؟





فصل سوم: الگوهای غیرخطی

دنباله هندسی

۱۷۶) میانگین داده‌های ۱۵، ۲۵، ۳۵، ۴۵ را به دست آورید.

۱۷۷) میانگین داده‌های ۵ - ۱۰ - ۳ - ۱۲ - ۹ - ۴ - ۲۰ را به دست آورید.

۱۷۸) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و a اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

۱) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} =$

۲) $\left(\frac{3^6}{3^6}\right)^{\frac{1}{2}} =$

۳) $5^{\frac{1}{6}} \times 5^{(-\frac{1}{6})} =$

۴) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} =$

۵) $(2^6)^{\frac{1}{3}} =$

۶) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} =$

۷) $3^{0.26} \times 3^{0.74} =$

۸) $(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} =$

۱۷۹) نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع

جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

۱۸۰) جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۱۸۱) اگر $x + 3$ و $x + 2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.



۱۸۲) نمودارهای $f(x) = 3^x$ ، $g(x) = 4^x$ و $h(x) = 5^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۸۳) نمودارهای $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ و $h(x) = (\frac{1}{5})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۸۴) اگر نیمه عمر C^{12} ، ۵۷۰۰ سال باشد، پس از چند قرن ۲۵٪ آن باقی می‌ماند؟

۱۸۵) نیمه عمر یک عنصر در حدود ۱۰۰ سال است. اگر پس از گذشت چهار قرن، فقط ۵ گرم از این عنصر باقی مانده باشد، مقدار اولیه عنصر چند گرم بوده است؟

۱۸۶) از ۲۴ گرم ماده یک عنصر بعد ۳۰ ساعت ۳ گرم باقی‌مانده است. نیمه عمر آن چند ساعت است؟

۱۸۷) اگر مقدار یک ماده هر ۱۰۰ سال به نصف خود برسد و پس از گذشت ۶ قرن ۲۰ گرم از این ماده باقی مانده باشد، مقدار اولیه آن چند گرم بوده است؟

۱۸۸) جمعیت کشوری در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهار میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (ساده کردن الزامی نیست)

۱۸۹) اگر تعداد باکتری‌های قسمتی از بدن ۷ میلیارد باکتری بوده و به‌طور نمایی تکثیر شود و پس از ۳۵ سال ۲ برابر شود، در ۷۰ سال بعد، چند میلیارد خواهد شد؟

۱۹۰) اگر مبلغ ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان در بانکی سرمایه‌گذاری کنیم که با نرخ ثابت سالانه ۲۰ درصد به ما سود می‌دهد، پس از ۳ سال چه مبلغی می‌توان برداشت کرد؟

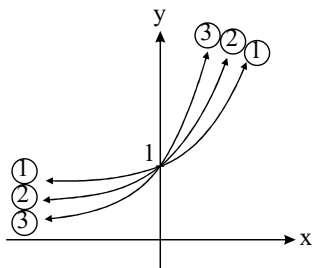
۱۹۱) اگر $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ و $g(x) = 2^x + 1$ باشد، موارد زیر را برای آنها بررسی کنید.

الف: افزایشی، کاهشی بودن
ب: محل برخورد با محور عرض‌ها

۱۹۲) دامنه تابع $f(x) = 5^{x-1} + 3$ را بدست آورید.



۱۹۳ با توجه به نمودارهای زیر $f(x) = 2^x$ ، $f(x) = 3^x$ و $f(x) = 4^x$ را روی آنها جایگذاری کنید.



۱۹۴ اگر نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۸ ساعت باشد و پس از طی یک شبانه‌روز ۵ گرم از آن باقی مانده باشد، مقدار اولیه آن چقدر بوده است؟

۱۹۵ حاصل ضرب ریشه مثبت چهارم $16^{\frac{1}{4}}$ و ریشه سوم $2\sqrt[3]{2}$ را بدست آورید.

۱۹۶ حاصل $2^{-\frac{1}{2}} + (\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}} \times (\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}}$ را بدست آورید.

۱۹۷ حاصل $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{3}}} + (\sqrt{1000})^0$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۱۹۸ ریشه دوم مثبت عدد $\frac{1}{3}$ را با خود آن مقایسه کنید.

۱۹۹ ریشه چهارم عدد ۲۵۶ را بدست آورید.

۲۰۰ حاصل ضرب ریشه سوم عدد 27×8 در ریشه چهارم عدد 81×8 را بدست آورید.

۲۰۱ اگر ریشه دوم عددی ۳- باشد، آن عدد و اگر ریشه سوم عددی ۳- باشد آن عدد است.

۲۰۲ اگر ریشه چهارم عدد $2x + 1$ برابر ۳- باشد، آن‌گاه ریشه دوم x را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۰۳ حاصل $\sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۰۴ a عددی منفی است، حاصل $\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^3}$ را بدست آورید.

۲۰۵ حاصل عبارت $\sqrt[5]{(\sqrt{3} - 1)^5} - \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{3})^6}$ را بدست آورید.



۲۰۶ حاصل $۸^{\frac{2}{3}} - ۲۷^{\frac{1}{3}}$ را بدست آورید.

۲۰۷ حاصل عبارت $۲۴۳^{\frac{2}{5}} - ۴(۱۰۰۰)^{\frac{1}{3}}$ را بدست آورید.

۲۰۸ اگر $y = ۱۲۵^k, x = ۵^{۳k-1}$ باشد، رابطه‌ای بین y, x را بیابید.

۲۰۹ x را در معادله $۳^{x+1} + ۳^x = ۳۶$ بدست آورید.

۲۱۰ ساده شده عبارت $A = ((-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$ را بدست آورید.

۲۱۱ حاصل عبارت $A = ۱۲۵^{\frac{1}{6}} \times ۱۲۵^{\frac{1}{2}} + ۱۶^{\frac{2}{6}}$ را بدست آورید.

۲۱۲ مقدار اولیه یک ماده gr ۲۰۰۰ است و مقدار آن بعد از t ساعت از رابطه $۳^t \times ۲۰۰۰$ بدست می‌آید. مقدار این ماده پس از ۱۸۰ دقیقه را بدست آورید.

۲۱۳ حاصل $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} - \sqrt{۳}\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}$ را بدست آورید.

۲۱۴ حاصل $\sqrt[4]{\frac{1}{9}} \times (۲۷^{\frac{5}{3}})^{\frac{2}{5}}$ را بدست آورید.

۲۱۵ اگر ریشه سوم A برابر $\frac{2}{3}$ باشد، ریشه دوم آن را بدست آورید.

۲۱۶ حاصل جمع چند جمله از دنباله هندسی $۲۴, ۱۲, ۶, \dots$ برابر -۲۰۴۶ است؟

۲۱۷ مجموع ده جمله از دنباله $\frac{1}{4}, ۱, ۲, \dots$ را به دست آورید.

۲۱۸ در دنباله $۲, ۶, ۱۸, \dots$ جمله هفتم و حاصل جمع هفت جمله اول را به دست آورید.

۲۱۹ واسطه هندسی بین دو عدد $۲ - \sqrt{۵}$ و $۲ + \sqrt{۵}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۲۲۰ واسطه هندسی بین جملات چهارم و دهم دنباله $\frac{4}{3}, ۲, ۳, \dots$ را به دست آورید.



۲۲۱ مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد و آن را با نشان می‌دهند.

۲۲۲ جمله‌های پنجم و هشتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ هستند. جمله یازدهم را به دست آورید.

۲۲۳ واسطه هندسی بین دو عدد $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ را به دست آورید.

۲۲۴ دنباله هندسی $\frac{1}{p}, 1, 2, \dots$ را در نظر بگیرید؛

الف) جمله هشتم را به دست آورید.

ب) اگر a_n جمله عمومی این دنباله باشد $\frac{a_{12}}{a_{10}}$ را به دست آورید.

۲۲۵ جمله عمومی یک دنباله هندسی $a_n = 3 \times 2^{3n-1}$ است. نسبت مشترک را بیابید.

۲۲۶ جملات دوم، ششم و دهم یک دنباله هندسی به صورت $x, 2 - x$ و $x + 2$ است. x را به دست آورید.

۲۲۷ در یک دنباله هندسی $a_1 = -2, a_{n+1} = -3a_n$ است.

الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید.

ب) جمله هشتم را به دست آورید.

۲۲۸ در دنباله هندسی $2, 6, 18, \dots$ اگر:

الف) به هر جمله ۲ واحد اضافه کنیم، آیا دنباله جدید هندسی است؟

ب) هر جمله را $\sqrt{2}$ برابر کنیم، آیا دنباله جدید هندسی است؟

۲۲۹ در یک دنباله هندسی جمله سوم برابر ۱۸ و نسبت مشترک $\sqrt{2}$ است. جمله ششم را به دست آورید.

۲۳۰ در دنباله هندسی $a_n = 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ نسبت مشترک را به دست آورید.

۲۳۱ جمله عمومی دنباله هندسی $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$ را بنویسید.

۲۳۲ در دنباله هندسی $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ ، مجموع جملات پنجم و ششم را به دست آورید.

۲۳۳ در دنباله هندسی با جمله اول -2 و نسبت مشترک $\sqrt{2}$ ، جمله هشتم را به دست آورید.



۲۳۴ جمله هفتم دنباله ۹۶, ۴۸, ۲۴, ۰۰۰ را به دست آورید.

۲۳۵ جمله اول یک دنباله هندسی ۱۰۲۴ است و هر جمله نسبت به جمله قبلی خود ۵۰ درصد کاهش می‌یابد. جمله پنجم را به دست آورید.

۲۳۶ مجموع چه تعداد از دنباله ۲۰, ۱۰, ۵, برابر ۱۵۵ می‌شود؟

۲۳۷ اگر جمله پنجم یک دنباله هندسی ۴۰ و نسبت مشترک ۵/۰ باشد، جمله هشتم را به دست آورید.

۲۳۸ اولین جمله از یک دنباله هندسی ۲۵۶ و نسبت مشترک $\frac{1}{3}$ است. چندمین جمله برابر ۲ است؟

۲۳۹ دنباله هندسی ۵۱۲, ۱, ۰۰۰, $\frac{1}{3}$ چند جمله دارد؟

۲۴۰ در یک دنباله هندسی $a_3 = ۲۷$ و $a_5 = ۲۴۳$ است. جمله نهم را به دست آورید.

۲۴۱ در یک دنباله هندسی جمله سوم $\frac{1}{3}$ و جمله دهم ۶۴ است. جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

۲۴۲ در یک دنباله هندسی $\frac{a_{n+1}}{a_n} = ۲$ و $a_1 = ۳$ است. مجموع چند جمله از این دنباله ۱۸۹ است؟

۲۴۳ جمله هشتم دنباله ۲, ۲, ۰۰۰, $۲\sqrt{۲}$ را به دست آورید.

۲۴۴ در دنباله هندسی ۱۲ + x, ۰۰۰, ۸ - x, جمله پنجم را به دست آورید. (می‌دانیم x عددی مثبت است)

۲۴۵ اگر تمام جمله‌های یک دنباله هندسی را در $\sqrt{۲}$ ضرب کنیم، نسبت مشترک در ضرب می‌شود.

۲۴۶ نیمه عمر یک ماده را تعریف کنید.

۲۴۷ در یک دنباله هندسی $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{۲}a_n \\ a_1 = \sqrt{۲} \end{cases}$ است. حاصل $a_3 + a_4$ را به دست آورید.

۲۴۸ در دنباله $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -۲$ و $a_1 = -۳$ واسطه هندسی بین جملات چهارم و هشتم را به دست آورید.

۲۴۹ در دنباله هندسی ۳, ۰۰۰, $۳\sqrt{۲}$, -۳ حاصل $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ را به دست آورید.



۲۵۰) اگر در یک دنباله هندسی، نسبت هر جمله به جمله قبلی برابر $\frac{1}{3}$ و مجموع چهار جمله اول آن ۱۵ باشد، جمله اول دنباله را به دست آورید.

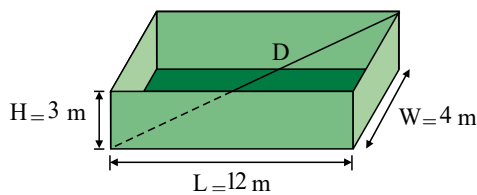
توان‌های گویا

۲۵۱) حاصل $\sqrt[3]{-125} - \sqrt{25}$ را بدست آورید.

۲۵۲) اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه H) به دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

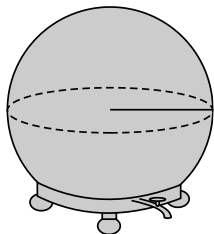
ب) اگر اندازه $L = W = H = 1\text{ m}$ باشد، اندازه D را به دست آورید.



۲۵۳) همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره v) به دست می‌آید.

الف) چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم v را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$



ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

۲۵۴) در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

۱) $8^x \times 9^5 = 72^5$

۲) $(0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7$

۳) $(3^x)^6 = \frac{1}{3^2}$

۴) $\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8$



۲۵۵ با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt[3]{5^3}$, $\sqrt[4]{5^2}$, $\sqrt{5}$ با هم برابرند.

۲۵۶ حاصل $(\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}} + 243^{-\frac{2}{3}}$ را بدست آورید.

۲۵۷ حاصل $(0.008)^{-\frac{2}{3}}$ را بدست آورید.

۲۵۸ اگر $a = 3\sqrt{3}$ باشد، حاصل $9a^{\frac{2}{3}}$ را بدست آورید.

۲۵۹ حاصل ضرب ریشه دوم 2^6 و ریشه منفی دوم 3^6 را بدست آورید.

۲۶۰ حاصل $(\frac{21}{10})^3 \times (\frac{1}{10})^5 \times (2,1)^6$ را بدست آورید.

۲۶۱ ریشه سوم عدد $125 -$ را بدست آورید.

۲۶۲ ریشه دوم عدد 25 را بدست آورید.

۲۶۳ ریشه دوم عدد -4 را بدست آورید.

۲۶۴ ریشه سوم عدد $\frac{3}{8}$ را بدست آورید.

۲۶۵ ریشه ششم عددی 3 است، ریشه دوم آن را بدست آورید.

۲۶۶ حاصل $\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{25}$ را بدست آورید.

۲۶۷ اگر مساحت یک کره $S = 4\pi R^2$ باشد، شعاع کره را از این رابطه برحسب مساحت به دست آورید.

۲۶۸ اگر طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیلی 5 , $2\sqrt{5}$, $\sqrt{19}$ باشد، قطر آن را بدست آورید.

۲۶۹ مقدار x را در تساوی $(3^x)^7 = \frac{1}{9^5} \times 27$ بدست آورید.

۲۷۰ حاصل $A = \frac{35^7 \times 49 \times 10^2}{14 \times \frac{1}{5} \times \sqrt[3]{128} \times 5^{10}}$ را بدست آورید.



۲۷۱ حاصل $\sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{2}$ را بدست آورید.

۲۷۲ اگر $2^{2x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{24}\right)^2 \times 4^{3x}$ باشد، مقدار 3^x چقدر است؟

۲۷۳ ریشه دوم عدد مثبت x با خودش برابر است. ریشه سوم عدد $2 + 6x$ را به دست آورید.

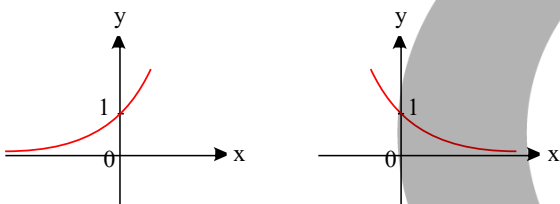
۲۷۴ حاصل عبارت $A = \sqrt[6]{(2 - 2\sqrt{2})^6} + \sqrt[5]{(2 - \sqrt{2})^5}$ را به دست آورید.

۲۷۵ مجموع ریشه پنجم عدد 0.000243 و ریشه چهارم مثبت عدد $\frac{16}{81}$ را به دست آورید.

۲۷۶ از تساوی $8 \times 2^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ مقدار x را به دست آورید.

تابع نمایی

۲۷۷ نمودار دو تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



۲۷۸ جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲٫۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱٫۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

۲۷۹ جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

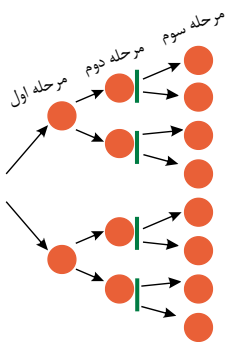
۲۸۰ اگر یکی از سهام‌داران یک شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهار میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام‌دار اضافه خواهد شد؟ ($r = 0.14$)



۲۸۱) نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

۲۸۲) نمودار توابع $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.

۲۸۳) در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است. اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل، ادامه پیدا کند:



الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

۲۸۴) نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۶ ساعت است. اگر ۹۶ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از یک شبانه‌روز چند گرم از آن تجزیه نشده باقی می‌ماند؟

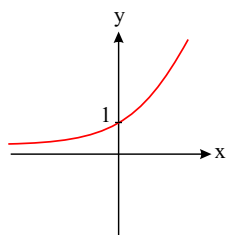
۲۸۵) اگر نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۴ روز باشد و در حال حاضر ۴ گرم از این ماده داشته باشیم، پس از گذشت چند روز فقط ۱ گرم از آن باقی می‌ماند؟

۲۸۶) اگر نیمه عمر کربن ۵۷۰۰ سال باشد و هم‌اکنون، کربن موجود در یک ماده ۱۲٫۵٪ مقدار اولیه‌اش باشد، قدمت این ماده چقدر است؟

۲۸۷) اگر نرخ افزایش قیمت میوه در شهر تهران ۲۰ درصد باشد، ۲ سال دیگر قیمت میوه‌ای که اکنون کیلویی ۱۰۰۰ تومان است به چند تومان خواهد رسید؟

۲۸۸) اگر نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۶ ساعت باشد، از ۴۰۰ gr آن ماده بعد از یک شبانه‌روز، چند گرم باقی می‌ماند؟

۲۸۹) اگر مبلغ ۱۰ میلیون ریال در یک بانک پس‌انداز داشته باشیم و پس از ۲ سال ۱۲,۱۰۰,۰۰۰ ریال برداشت کنیم، با توجه به اینکه نرخ سود سالانه بانک ثابت است، عدد آن را به دست آورید.



۲۹۰ اگر نمودار تابع $f(x) = (m-1)^x$ به صورت زیر باشد. حدود m را تعیین کنید.

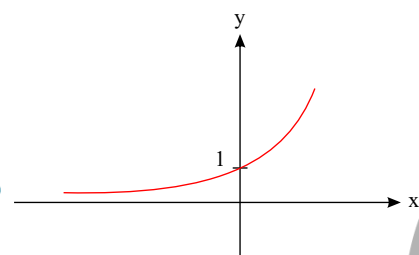
۲۹۱ جمعیت شهری یک میلیون نفر است و رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال است. جمعیت این شهر پس

از ده سال به چند نفر می‌رسد؟ $(1.06)^{10} \simeq 1.80$

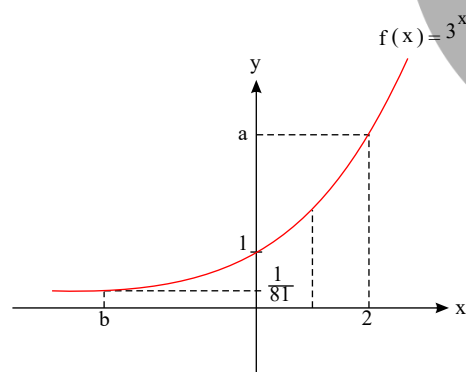
۲۹۲ بعد از گذشت ۳ نیمه‌عمر، چند درصد یک دارو در بدن باقی می‌ماند؟

۲۹۳ مقدار اولیه یک دارو ۸۰ میلی‌گرم است. بعد از ۴ نیمه‌عمر مقدار دارو در بدن چند میلی‌گرم می‌شود؟

۲۹۴ اگر نمودار $f(x) = (b-2)^x$ به صورت مقابل باشد، حدود b را مشخص کنید.



۲۹۵ در نمودار مقابل، حاصل ab را به دست آورید.



۲۹۶ در تابع نمایی $f(x) = a^x$ ، اگر $f(b) = \frac{1}{4}$ و $f(0) = \frac{b}{2}$ باشد، مقدار $f(-2)$ را محاسبه کنید.

۲۹۷ مقدار تابع $y = (\sqrt{3})^x$ با افزایش مقدار x و مقدار تابع $y = (\frac{1}{\sqrt{2}})^x$ با افزایش مقدار x

می‌یابد.



۲۹۸ نمودار $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^x + 1, & x \geq 0 \\ (5)^x, & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید.

۲۹۹ اگر $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \geq 0 \\ 3^x, & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = 2^x$ باشد. حاصل $\frac{(f \cdot g)(-2)}{(f + g)(2)}$ را به دست آورید.

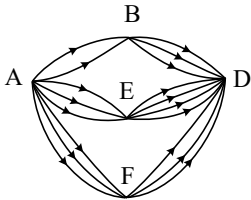
۳۰۰ تابع $f(x) = (m - 2)^x$ به ازای چه مقادیری از m ، افزایشی است؟





پاسخ نامه تشریحی

۱) مطابق شکل زیر، از شهر A به D چند راه وجود دارد؟



۲)

تعداد حروف کلمه ولایت برابر ۵ (و - ل - ا - ی - ت) است؛ بنابراین:

الف) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ب) $\frac{3 \times 4 \times 1}{ی} = 12$ (بدون تکرار)

$\frac{5 \times 5 \times 1}{ی} = 25$ (با تکرار)

پ) $\frac{1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{ل} = 6$ (بدون تکرار)

$\frac{1 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1}{ل} = 125$ (با تکرار)

۳)

مسیرهای ممکن را تعیین و تعداد راه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

الف) $A \rightarrow B \rightarrow C$ یا $A \rightarrow D \rightarrow C$ یا $A \rightarrow E \rightarrow C$
 $3 \times 4 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 12 + 6 + 2 = 20$

ب) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$
 $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 12 \times 12 = 144$

پ) $D \rightarrow A$ یا $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$
 $3 + 2 \times 4 \times 3 = 3 + 24 = 27$

۴)

ارقام زوج غیر صفر "۲، ۴، ۶، ۸" هستند. بنابراین:

تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از ۷۰۰ = $\frac{\text{صدگان}}{\downarrow} \times \frac{\text{دهگان}}{\downarrow} \times \frac{\text{یکان}}{\downarrow} = 6$
 ۸ می‌تواند باشد فقط از بین ۲ و ۴ و ۶ و ۸ انتخاب داریم یکی کمتر از قبلی

۵)

الف) $\frac{\text{صدگان}}{\downarrow} \times \frac{\text{دهگان}}{\downarrow} \times \frac{\text{یکان}}{\downarrow} = 80$
 از ۶ رقم اول یک زوج حذف شده
 پس ۵ تا برای دهگان و ۴ تا
 برای صدگان باقی می‌ماند

ب) $\frac{\text{صدگان}}{\uparrow} \times \frac{\text{دهگان}}{\uparrow} \times \frac{\text{یکان}}{\downarrow} = 72$
 دو فرد داریم (۹، ۱)

۶) تذکر: صفر در اولین رقم سمت چپ عدد یعنی ده‌ها را نمی‌تواند قرار داشته باشد.



$$\begin{array}{ccccccc} \text{دهزارگان} & & \text{هزارگان} & & \text{صنګان} & & \text{دهگان} & & \text{یکان} \\ \boxed{4} & \times & \boxed{4} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{1} = 96 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ \text{همه به جز صفر} & & \text{یکی از 4 تا کم شده} & & \text{یکی یکی کم می شود} & & & & \end{array}$$

پس 4 انتخاب داریم
صفر دوباره 4 تا می شود

۷

ارقام را از یکان به صد هزارگان

$$\begin{array}{ccccccc} \text{صد هزارگان} & & \text{ده هزارگان} & & \text{هزارگان} & & \text{صنګان} & & \text{دهگان} & & \text{یکان} \\ \boxed{1} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{4} & \times & \boxed{5} & \times & \boxed{6} = 720 = 6! \\ \text{بدون تکرار} & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{صد هزارگان} & & \text{ده هزارگان} & & \text{هزارگان} & & \text{صنګان} & & \text{دهگان} & & \text{یکان} \\ \boxed{6} & \times & \boxed{6} & \times & \boxed{6} & \times & \boxed{6} & \times & \boxed{6} & \times & \boxed{6} = 6^6 \\ \text{تکرار مجاز} & & & & & & & & & & \end{array}$$

۸

$$\begin{array}{ccc} \text{الف)} & \begin{array}{c} 7 \\ \downarrow \\ A \end{array} & + \begin{array}{c} 8 \\ \downarrow \\ B \end{array} = 15 \\ & \text{یک نفر از گروه } A & \text{یک نفر از گروه } B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ب)} & \begin{array}{c} 7 \\ \downarrow \\ A \end{array} & \times \begin{array}{c} 8 \\ \downarrow \\ B \end{array} = 56 \\ & \text{یک نفر از } A & \text{یک نفر از } B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{سه درس عمومی} & \times & \text{چهار درس اختصاصی} \\ 3 & \times & 4 = 12 \\ & \text{و} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{یک خودکار} & + & \text{یک مداد} \\ 4 & + & 3 = 9 \\ & \text{یا} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \quad (A \rightarrow B \rightarrow C) \text{ یا } (A \rightarrow D \rightarrow C) \text{ یا } (A \rightarrow E \rightarrow C) \\ (2 \times 3) + (3 \times 3) + (1 \times 2) = 6 + 9 + 2 = 17 \end{array}$$

ب) اگر بدون عبور از E باشد، یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ یا $A \rightarrow D \rightarrow C$ انتخاب می شود. بنابراین:

$$\begin{array}{l} (A \rightarrow B \rightarrow C) \text{ یا } (A \rightarrow D \rightarrow C) \\ (2 \times 3) + (3 \times 3) = 6 + 9 = 15 \end{array}$$

$m + n$

۱۳

$$\begin{array}{ccc} \text{از } B \text{ به } C & \times & \text{از } A \text{ به } B \\ \uparrow & & \uparrow \\ 3 & \times & 4 = 12 \end{array}$$

۱۴

الف درست

ب درست

$P(5, 2) = 5 \times 4 = 20$

$C(5, 2) = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

$\Rightarrow P(5, 2) > C(5, 2)$

پ نادرست

$$\text{تعداد حالات} = \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{2} = 30$$

۲ حجم موتور ۵ رنگ ۳ مدل ماشین

۱۵

می دانیم تعداد زیرمجموعه های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$ بنابراین:



$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow \underbrace{n(n-1)}_{8 \times 7 = \text{ضرب دو عدد متوالی}} = 56 \Rightarrow n = 8$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی برابر است با:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{\cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 70$$

۱۶

چهار خانه را در نظر می‌گیریم. کلمه ملایر پنج حرفی است. بنابراین خانه‌های سمت راست و چپ با حروف «م» و «ل» و هر کدام به یک طریق پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، دو خانه دیگر به ۳ و ۲ طریق تکمیل می‌گردد.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$$

۱۷

برای پاسخ به سؤال اول ۲ انتخاب، سؤال دوم ۲ انتخاب، ... و سؤال ششم نیز ۲ انتخاب خواهیم داشت که طبق اصل اساسی شمارش داریم:

$$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^6 = 64 \text{ تعداد حالات}$$

۱۸

الف) ۳ نقطه از بین ۱۲ نقطه انتخاب می‌کنیم:

$$C(12, 3) = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{\cancel{12} \times \cancel{11} \times \cancel{10}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 220$$

ب) ۲ نقطه از بین ۱۲ نقطه انتخاب می‌کنیم:

$$C(12, 2) = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

۱۹

$$\frac{6! + 5!}{4!} = \frac{6!}{4!} + \frac{5!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} + \frac{5 \times 4!}{4!} = (6 \times 5) + 5 = 30 + 5 = 35$$

$$\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{3}{2} = \frac{n(n-1)! \times (n-3)!}{(n-2)(n-3)! \times (n-1)!} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{n}{n-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3n - 6 = 2n$$

$$\Rightarrow 3n - 2n = 6 \Rightarrow n = 6$$

۲۰

$n!$

۲۱

۲۲

$$\text{هر سه قرمز (الف): } \binom{5}{3} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 10$$

$$\text{هر سه قرمز یا سه آبی} = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

۲۳) کلمه «شیرازه» شامل حروف "ش، ی، ر، ا، ز، ه" می‌باشد که دارای ۶ حرف است و سه حرف آن را انتخاب می‌کنیم. چون ترتیب مهم است تعداد این انتخاب‌ها از $P(6, 3)$ به دست می‌آید:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

۲۴

$$\text{الف) } 4! \times 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 24 \times 2 = 48$$

$$\text{ب) } \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 20$$

$$\text{پ) } \frac{11!}{5! \times 2!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 166320$$



$$\text{ت) } \frac{6!}{4! \times 0!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4}!}{\cancel{4}! \times 1} = 30$$

۲۵ «جهان» را یک بسته در نظر می‌گیریم.

"جهان" گ، ی، ر " حال ۴ شی داریم و ۴! جایگشت آن‌هاست.

$$\text{تعداد کلمات ۷ حرفی} = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

۲۶ تذکر: هر مجموعه n عضوی تعداد $\binom{n}{r}$ تا زیرمجموعه r عضوی دارد.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{\cancel{6} \times 5}{\cancel{2} \times 1} = 15$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی} = \binom{6}{2} = \frac{\cancel{6} \times 5}{\cancel{2} \times 1} = 15$$

۲۷ چون ترتیب مهم نیست از فرمول ترکیب حل می‌کنیم:

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{\cancel{8} \times 7}{\cancel{2} \times 1} = 28$$

۲۸

الف) برای تشکیل یک مثلث ۳ نقطه از ۱۰ نقطه را انتخاب می‌کنیم:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times \cancel{9} \times \cancel{8}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 120$$

ب) هر وتر از به هم وصل کردن دو نقطه متمایز روی دایره تشکیل می‌شود. پس از ۱۰ نقطه روی دایره، هر دو نقطه یک وتر تشکیل می‌دهد پس دو نقطه از ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم.

$$\text{تعداد وترها} = \binom{10}{2} = \frac{\cancel{10} \times 9}{\cancel{2} \times 1} = 45$$

۲۹

مجموعه A ، ۵ عضو دارد، بنابراین:

$$\text{الف) } \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

چون شامل ۳ است دو عضو دیگر را از بین ۴ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\text{ب) } \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

چون فاقد ۵ است، پس از ۴ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\text{ج) } \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

۳۰

$$\text{چون } C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

$r!$

۳۱

$$\text{الف) } \binom{7}{3} \times \binom{5}{1} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} \times 5 = 175$$

سه تا دوازدهم یکی یازدهم

هر ۴ تا دوازدهم یا یکی یازدهم و سه تا دوازدهم = حداکثر یک یازدهم (ب)

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{1} + \binom{7}{4} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} \times 5 + \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 175 + 35 = 210$$

۳۲



$$\text{الف)} \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 یک قرمز یک سبز

ب) هر دو سبز یا هر دو قرمز = هر دو هم رنگ

$$= \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = \frac{6 \times 5}{2} + \frac{4 \times 3}{2} = 15 + 6 = 21$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 ۲ قرمز ۲ سبز

۳۳ الف) تابع است چون می‌دانیم برای هر دایره با شعاع مشخص، فقط یک عدد به‌عنوان مساحت به‌دست می‌آید.

ب) تابع است چون هر فرد در یک زمان مشخص فقط دارای یک عدد برای قدش است.

پ) تابع نیست چون هر عدد طبیعی اول دو مقسوم‌علیه دارد.

ت) تابع است چون هر داوطلب کنکور، فقط یک رتبه کشوری در رشته‌اش دارد. اما هر عدد اول دارای ۲ مقسوم‌علیه است، خودش و یک.

۳۴

چون در رسم مثلث سه نقطه نمی‌تواند روی یک خط راست باشند، بنابراین:

$$\binom{6}{2} \binom{5}{1} + \binom{5}{2} \binom{6}{1} = 15 \times 5 + 10 \times 6 = 135$$

۳۵

طبق فرض داریم:

$$P(n, n-2) = 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-(n-2))!} = 12$$

$$\frac{n!}{2!} = 12 \Rightarrow n! = 12 \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = (4 \times 3) \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = 4! \Rightarrow n = 4$$

۳۶

۳ نفر خاص، قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید ۲ نفر دیگر را از بین ۶، $(9-3=6)$ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست به‌کمک فرمول ترکیب محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌های انتخاب} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 15$$

۳۷

$$\text{الف)} n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\text{ب)} A = \{(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ), (د, پ, د, د), (د, پ, د, پ), (پ, د, د, د), (پ, د, د, پ)\}$$

$$\text{پ)} C = \{(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ), (د, پ, د, د), (د, پ, د, پ), (پ, د, د, د), (پ, د, د, پ)\}$$

$$\text{ت)} A \cap C = \{(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ)\}$$

چون $A \cap C$ برابر $\emptyset$ نیست، پس A و C ناسازگار نیستند.

۳۸

$$\text{الف)} S = \{(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ), (د, پ, د, د), (د, پ, د, پ), (پ, د, د, د), (پ, د, د, پ), (پ, پ, د, د), (پ, پ, د, پ), (پ, پ, پ, د), (پ, پ, پ, پ)\}$$

$$\text{ب)} A = \{(د, د, د, د), (پ, پ, پ, پ)\}$$

$$\text{پ)} B = \{(د, د, پ, پ), (پ, د, پ, د), (پ, پ, د, د), (پ, پ, پ, پ)\}$$

$$\text{ت)} C = \{(د, د, پ, پ), (پ, د, پ, د), (پ, پ, د, د), (پ, پ, پ, پ)\}$$

$$\text{ث)} D = \{(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ)\}$$

۳۹

$$\text{الف)} \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

$$\text{ب)} \{12, 24, 42\}$$

$$\text{پ)} \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

۴۰ پیشامد A و B و C باهم اتفاق بیفتد.

$$\text{الف)} A \cap B \cap C = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$$

پیشامد A یا B یا C اتفاق بیفتد.

$$\text{پ)} A \cup B \cup C = \{x \in S | x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

۴۱

$$\text{الف)} S = \{1, 3, \dots, 19\}$$

$$\text{ب)} A = \{3, 9, 15\}$$

$$\text{پ)} B = \{1, 9\}$$



ت) $A \cap B = \{9\}$, $A - B = \{3, 15\}$

۴۲

الف) $S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), \dots, (ر, ۶), (پ, ر), (پ, پ)\}$

ب) $A = \{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶), (پ, ر), (پ, پ)\}$

۴۳

ن(س) = پرتاب اول $\times$ پرتاب دوم $\times$ پرتاب سوم

ن(س) = سکه اول $\times$ سکه دوم $\times$ سکه سوم

$\frac{n(S)}{n(S)} = \frac{\cancel{۳} \times \cancel{۳} \times \cancel{۳}}{\cancel{۳} \times \cancel{۳} \times \cancel{۳}} = ۲۷$

۴۴ الف

$S = \{(د,د,د), (پ,د,د), (د,پ,د), (پ,پ,د), (د,د,پ), (پ,د,پ), (د,پ,پ), (پ,پ,پ)\}$

ب

$A = \{(د,د,د), (پ,پ,پ)\}$

پ

$B = \{(پ,پ,پ), (پ,د,پ), (د,پ,پ)\}$

ت

$C = \{(پ,پ,پ), (پ,د,پ), (د,پ,پ), (د,د,د)\}$

ث

$D = \{(د,د,د), (پ,د,د), (د,پ,د), (د,د,پ)\}$

۴۵ الف

$S = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$

ب

$A = \{5\}$

پ

$B = \{2, 3, 5, 7\}$

ت

$A \cup B = \{2, 3, 5, 7\}$

۴۶ الف) A و B و C با هم اتفاق بیفتند.

$(A \cap B) \cap C$

ب) A یا B اتفاق بیفتد ولی C رخ ندهد.

$(A \cup B) - C$

۴۷ الف

$S = \{1, 2, \dots, 20\}$

ب

$A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

پ

$B = \{1, 4, 9, 16\}$

ت

$\begin{cases} A \cup B = \{1, 4, 8, 9, 12, 16, 20\} \\ A \cap B = \{4, 16\} \\ A - B = \{8, 12, 20\} \end{cases}$

۴۸ در پرتاب تاس فضای نمونه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ است. بنابراین داریم:

الف

الف) $\{3, 5\}$ فرد و اول



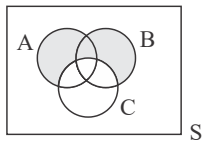
(ب)

 $\{4, 6\}$: زوج غیراول

(ج)

 $\{1\}$: فرد غیراول

۴۹



۵۰

$$A = \underbrace{\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}}_{\text{دو تاس یکسان}} , \underbrace{\{(1, 3), (3, 1)\}}_{\text{مجموع ۴}}$$

(۲, ۲) نیز مجموع ۴ دارد ولی چون در هر دو مشترک است یکبار نوشته شده است.

(الف) ۵۱

$$S = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

(ب)

$$A = \{(5, 6), (6, 5)\} \text{ :مجموع دو تاس ۱۱}$$

(ج)

$$B = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 5), (3, 1), \dots, (3, 3),$$

$$(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1)\}$$

(د) A و B هیچ اشتراکی ندارند پس:

(الف) ۵۲

$$B - A = B$$

$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

(ب)

$$A = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر)\}$$

(پ)

$$B = \{(ر, پ), (پ, ر)\}$$

(ت)

$$A \cap B = \{(ر, پ), (پ, ر)\}$$

(الف) ۵۳

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(ب)

$$A = \{2, 4, 6\}$$

(ج)

$$B = \{5, 6\}$$

(د)

$$B - A = \{5\}$$

۵۴ زیرمجموعه

۵۵ غیر ممکن یا نشدنی

۵۶ حتمی

۵۷ پیشامد

۵۸ قطع مشخص نیست.

۵۹

الف

پدیده یا آزمایشی که همه حالت‌های ممکن مشخص است اما نتیجه آن قبل از اجرا مشخص نباشد، پدیده تصادفی نامیده می‌شود.

ب

مجموعه تمام برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه نام دارد.

پ

هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک پیشامد است.

۶۰

الف نادرست



ب درست

پ نادرست

ت نادرست

۶۱

الف درست

ب نادرست

پ درست

۶۲

$$S = \{1, 2, \dots, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

الف) A پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد اول بایستد.

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow \text{احتمال مطلوب } P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب) B پیشامد اینکه یک عدد اول یا فرد نشان دهد.

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow \text{احتمال مطلوب } P(B) = \frac{5}{8}$$

پ) C پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد مضرب ۳ باشد.

$$C = \{3, 6\} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow \text{احتمال مطلوب } P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(الف) ۶۳

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times \cancel{9} \times \cancel{8}}{\cancel{7} \times \cancel{6} \times 1} = 120$$

$$n(A) = \binom{7}{3} + \binom{3}{3} = 35 + 1 = 36$$

$\downarrow$ $\uparrow$
 هر سه زن هر سه مرد

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$n(B) = \binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = 21 \times 3 = 63$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 دو تا زن یک مرد

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

(الف) ۶۴

$$n(S) = \binom{12}{2} = \frac{\cancel{12} \times 11}{2 \times 1} = 66$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{9}{2}}_{\text{هر دو سالم}} = \frac{9 \times \cancel{8}}{\cancel{7} \times 1} = 36$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{36}{66} = \frac{6}{11}$$

(ب)

$$n(B) = \binom{9}{1} \times \binom{3}{1} = 9 \times 3$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 یکی سالم یکی ناسالم



$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9 \times \cancel{7}}{\cancel{6} \times 22} = \frac{9}{22}$$

۶۵ الف

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 6)\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 12$$

$$\text{تاس زوج باشد: } A = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب

$$\text{تاس زوج و سکه رو: } B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6)\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۶۶ صفر

۶۷

$$A \subseteq B$$

۶۸

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد اعضای پیشامد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{4+6+2}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

$$n(A) = \binom{6}{3} + \binom{4}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} + \frac{4!}{1! \times 3!} = 20 + 4 = 24$$

۳ مهره قرمز ۳ مهره آبی

دقت کنید که ۳ مهره سبز نداریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{220} = \frac{6}{55}$$

۶۹

ابتدا برای محاسبه $n(S)$ ، ۳ نفر را از بین ۶ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

برای آنکه در ۳ نفر انتخاب شده هیچ دو نفری برادر دو قلو نباشند، از هر گروه ۱ نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

۷۰

۲۴ عدد طبیعی کوچکتر از ۲۵ وجود دارد، پس $n(S) = 24$ است:

$$25 \text{ اعداد اول کوچکتر از } 25: A' = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} \rightarrow n(A') = 9$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{9}{24} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{9}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

۷۱

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{5}{12} \Rightarrow 12P(A) = 5 - 5P(A) \Rightarrow 17P(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{17}$$

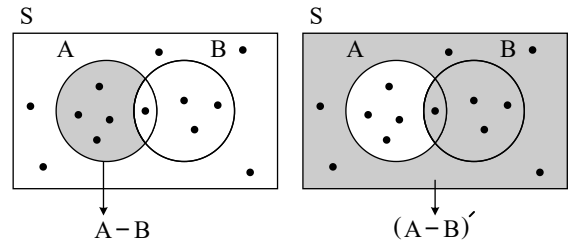
۷۲

تعداد کل نقاط برابر تعداد اعضای فضای نمونه است. بنابراین:

$$n(S) = 13$$

پیشامدهای $(A - B)$ و $(A - B)'$ را هاشور می‌زنیم و تعداد اعضای پیشامد مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} n(A - B)' = 9 \\ n(S) = 13 \end{cases} \Rightarrow P(A - B)' = \frac{9}{13}$$



۷۳- ۱- بیان مسئله

۷۳- ۲- طرح و برنامه‌ریزی

۷۳- ۳- گردآوری و پاکسازی داده‌ها

۷۳- ۴- تحلیل داده‌ها

۷۳- ۵- بحث و نتیجه‌گیری

۷۴

$$\text{زاویه مرکزی} = \frac{\text{تعداد افراد آن دسته}}{\text{تعداد کل}} \times 360^\circ = \frac{5}{30} \times 360^\circ = 60^\circ$$

۷۵- در گام تحلیل داده‌ها به سراغ نمودارها می‌رویم که بعد از گام گردآوری و پاکسازی داده‌ها می‌باشد.

۷۶- گام قبل گردآوری و پاکسازی داده‌ها است.

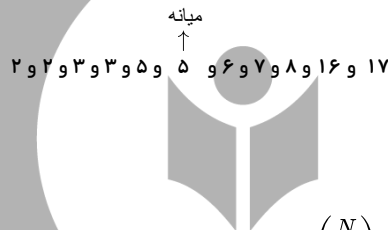
گام بعد بحث و نتیجه‌گیری است.

۷۷- چون دامنه برابر ۱۰ می‌باشد پس کمترین داده ۲ و a باید بزرگترین داده باشد، پس داریم:

$$10 = \max - \min$$

$$10 = a - 2 \Rightarrow a = 12$$

۷۸- ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.



پس دامنه تغییرات برابر است با:

$$R = \max - \min = 17 - 2 = 15$$

و میان ۵ است.

۷۹- تعداد نمونه‌های n عضو از جامعه‌ای N عضو به صورت $\binom{N}{n}$ می‌باشد. پس:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

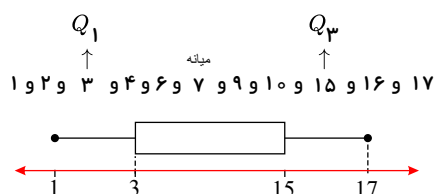
۸۰

$\binom{n}{r}$

۸۱- قطعی

۸۲- درصد - تعداد

۸۳- ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و مقدار Q_1 ، Q_2 و Q_3 را مشخص می‌کنیم:



۸۴- ابتدا میانگین را بدست می‌آوریم

$$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 3 + 8 + 2}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(5-5)^2 + (7-5)^2 + (3-5)^2 + (8-5)^2 + (2-5)^2}{5}} = \sqrt{\frac{0 + 4 + 4 + 9 + 9}{5}} = \sqrt{\frac{26}{5}}$$

۸۵- میانگین - انحراف معیار: میان - دامنه میان چارکی

۸۶- مرکزی - پراکندگی



۸۷) در ردیف ۳ نمره ۵۱ اشتباه وارد شده است.

۸۸) کیفی - کمی

۸۹) اولین قدم

۹۰) مهم‌ترین یا اولین

۹۱) گام آخر بحث و نتیجه‌گیری است.

در گام آخر به تفسیر نتایج بدست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی بدست می‌آوریم.

۹۲) گام چهارم: تحلیل داده‌ها است.

در این مرحله با استفاده از معیارها و نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را مشابه با هدف‌های کارمان نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.

۹۳) گام سوم: گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها است.

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباهات را تصحیح کرد.

۹۴) گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی است.

راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم به نمونه‌گیری شیوه اندازه‌گیری متغیر و نمونه‌گیری و چگونه تفسیر نتایج می‌اندیشیم.

۹۵) گام اول: بیان مسئله است.

مسئله‌ای که در دنیای واقعی به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم و با توجه به اهمیت موضوع و بودجه و زمان و سایر شرایط، جامعه آماری را محدود می‌کنیم.

۹۶) الف) بیان مسئله

ب) طرح و برنامه‌ریزی

پ) گردآوری داده‌ها و پاک‌سازی

۹۷) جعبه‌ای

۹۸) دورتر شوند.

۹۹) به صفر نزدیک می‌شود

۱۰۰) دور افتاده

۱۰۱) الف) Q_1 (چارک اول) و Q_3 (چارک سوم)

۱۰۲)

الف) جامعه آماری: کلاس ۲۸ نفره نمونه آماری: ۹ نفری که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند.

اندازه جامعه: ۲۸ نفر اندازه نمونه: ۹

ب) با روش پرسش‌نامه یا مصاحبه می‌توان داده‌ها را گردآوری کرد. مشکلات: ۱- ممکن است در طول هفته با هیچ‌کدام از این روش‌ها به مدرسه نیامده باشند. (مثلاً با موتورسیکلت پدر) ۲- ممکن است در طول هفته فقط یک بار از روش‌های مختلف استفاده کرده باشند. ۳- ممکن است به علت موقعیت جغرافیایی محل مورد نظر برخی از روش‌ها قابل قبول نباشد.

پ) متغیر تصادفی: شیوه‌های مختلف رفتن از منزل به مدرسه

نوع متغیر: کیفی مقیاس: ترتیبی (دقت کنید که در این مثال چون تأثیر وسیله حمل و نقل بر محیط‌زیست را خواسته پس بین وسایل ترتیبی وجود دارد. براساس تأثیر روی آلودگی)

ت) نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای و همچنین آماره‌ای چون مُد برای این گزارش مناسب است.

ث) خیر، زیرا در مقاطع مختلف از سال تحصیلی و فصل‌های مختلف بنابر شرایط جوی و اهمیت حضور به موقع در مدرسه دانش‌آموزان شیوه‌های مختلفی را برای رسیدن به مدرسه استفاده می‌کنند.

ج) امکان داشت نتایج تغییر کند، زیرا نتایج به‌دست‌آمده منحصر به نمونه‌ای است که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنند.

۱۰۳)

الف) این نمونه با جامعه تناسب ندارد، زیرا تعداد مدیران ارشد کم است و البته تنها به مدیران ارشد شیفت روز پرداخته شده است. در ضمن شرایط شغلی مدیران ارشد بسیار بهتر از دیگر کارمندان است.

پیشنهاد: بهتر است بر اساس شماره پرسنلی افراد شاغل (چه شیفت شب و چه شیفت روز) نمونه‌گیری انجام شود.

انتخاب نادرست نمونه، می‌تواند سبب نتیجه‌گیری اشتباه شود، به این صورت که شرایط شغلی همه افراد خوب است و همه رضایت کافی از شغلشان دارند.

ب) این نمونه با جامعه تناسب ندارد، زیرا ممکن است برخی مادران از برنامه‌های کودک اطلاعی نداشته باشند و یا بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح همه مادران در منزل حضور نداشته باشند. (بسیاری شاغل هستند).

پیشنهاد: بهتر است این نمونه در ساعات عصر (بین ۱۶ تا ۱۹) انجام شود تا مطمئن باشیم اکثریت مادران در منزل هستند و یا از کودکان نظرسنجی شود.

انتخاب نمونه نادرست می‌تواند سبب عدم پخش یک برنامه خوب و یا تولید یک برنامه کودک نامناسب شود.

پ) این نمونه با جامعه تناسب ندارد، زیرا اولاً فقط یک مدرسه خاص انتخاب شده است. دوماً انتخاب دانش‌آموزان به‌صورت داوطلبانه نامناسب است، زیرا اغلب دانش‌آموزان درس‌خوان داوطلب می‌شوند و سوم اینکه باید دانش‌آموزان پسر هم در نمونه حضور داشته باشند.

پیشنهاد: بهتر است برای نمونه‌گیری به تمام مدارس دخترانه و پسرانه پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر مراجعه کنیم و به‌طور تصادفی از روی شماره دانش‌آموزی چند نفر را از هر مدرسه انتخاب کنیم.



انتخاب نمونه نادرست و نتایج اشتباهی ناشی از آن می‌تواند در برنامه‌ریزی‌های تحصیلی و یا تفریحی دانش‌آموزان منطقه تأثیر منفی بگذارد.

۱۰۴

الف

میانۀ گروه ۱ با چارک سوم گروه ۲ برابر است؛ پس وضعیت عملکرد تحصیلی گروه یک بهتر است، زیرا تنها ۲۵ درصد از دانش‌آموزان گروه ۲ نمره‌ای بیشتر از ۱۶ گرفته‌اند ولی این عدد در گروه یک ۵۰ درصد است.

ب

پراکندگی گروه ۲ بیشتر است، زیرا $R_p = 17 - 11 = 6$ ولی $R_1 = 18.5 - 14 = 4.5$. همچنین $Q_1 = 14$ و $Q_2 = 16$ و $Q_3 = 17.5$ و $Q_4 = 18.5$. در گروه دو نمرات پراکندگی بیشتری دارند. البته در این گروه بیشتر نمرات حول میانه متمرکز شده‌اند.

پ

کمینه گروه ۱ با چارک اول گروه ۲ برابر است، یعنی ۲۵ درصد افراد گروه ۲ از کمترین نمره گروه ۱ نمرات کمتری دارند.

ت

در گروه ۲، زیرا داده کمینه با چارک اول فاصله زیادی دارد (داده دور افتاده وجود دارد) و این باعث می‌شود میانگین، تمرکز داده‌ها را به خوبی مشخص نکند.

ث

گروه (۱)، چون پراکندگی داده‌ها کمتر بوده و توزیع آنها حول میانه تقریباً متقارن است.

ج

به دانش‌آموزان پایه دوازدهم این مدرسه می‌توان تعمیم داد.

۱۰۵

الف

ابتدا چارک‌های همین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

۰ , ۴ , ۶ , ۱۰ , ۱۰ , ۱۲ , ۱۲ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۴ , ۱۶ , ۱۸ , ۲۰ , ۲۰ , ۲۲

Q_1 Q_2 Q_3

$$\bar{x} = \frac{0 + 4 + 6 + 10 + 10 + 12 + 12 + 12 + 13 + 14 + 16 + 18 + 20 + 20 + 22}{15} = 12.5$$

اگر به جای عدد ۲۲ عدد ۳۰ را در نظر بگیریم میانگین و انحراف معیار بالاتر می‌رود ولی Q_1 ، Q_2 و Q_3 تغییر نمی‌کنند، زیرا چارک‌ها به اندازه داده‌های بعد از Q_3 و قبل از Q_1 بستگی ندارند.

ب

کافیست یک عدد بیشتر از میانه و یک عدد کمتر از میانه اضافه کنیم طوری که میانگین این دو عدد با میانگین داده‌های قبلی برابر باشد؛ مثلاً دو عدد ۱۴ و ۱۱٫۲، زیرا میانگین آنها ۱۲٫۶ است.

۱۰۶

الف

فراموشی و عدم توجه دانش‌آموزان به میزان خواب در روزهای مختلف هفته و همچنین فعالیت‌های مختلف روزانه آنها می‌تواند میزان خواب را تغییر داده و نتایج را از واقعیت دور کند. بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم میزان خواب را در یک هفته یادداشت کرده و سپس بررسی را روی این داده‌ها انجام دهیم.

ب

نوع متغیر کمی و مقیاس آن نسبتی است

پ

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲٫۵	۱٫۵

ت

والدین دانش‌آموزان (با بررسی دقیق کیفیت و مدت خواب دانش‌آموزان)

نکته: اگر n تعداد کل داده‌ها و x_i یک داده با فراوانی f_i باشد، زاویه مربوط به این داده در نمودار دایره‌ای از رابطه $D = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$ به دست می‌آید. $\frac{f_i}{n}$ را فراوانی نسبی می‌گویند.

۱۰۷

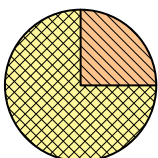
الف

۳۰ نفر

ب

۳۰ نفر، چون هر سال ۱۰ نفر کاهش یافته است.

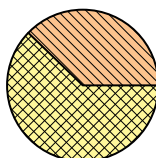
پ



دو سال پیش

$$\frac{60}{80} = \frac{?}{360^\circ}$$

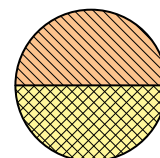
$$? = \frac{60 \times 360^\circ}{80} = 270^\circ$$



پارسال

$$\frac{50}{80} = \frac{?}{360^\circ}$$

$$? = \frac{50 \times 360^\circ}{80} = 225^\circ$$



امسال

$$\frac{40}{80} = \frac{?}{360^\circ}$$

$$? = \frac{40 \times 360^\circ}{80} = 180^\circ$$

ت

چون دانش‌آموزان تنها هنگامی که در مدرسه حضور دارند و بیشتر در ساعات تفریح یا ... می‌توانند برای ثبت نام مراجعه کنند اما افراد خارج از مدرسه این



محدودیت را ندارند، بنابراین آسان‌تر می‌توانند مراجعه کرده و عضو شوند. از طرف دیگر با افزایش آگاهی مردم از این موضع عضویت در کتابخانه بیشتر شد.

۱۰۸

الف

با توجه به اینکه طبق صورت سؤال 54° مربوط به گروه سنی زیر ۲۰ سال و 90° مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال است، پس: $216^\circ - 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$ مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است، داریم:

$$\frac{\frac{36}{100} \times 6}{\frac{36}{100}} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 60 \text{ است. } 60 \text{ سال است.}$$

ب

این موضوع که جمع‌آوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است می‌تواند نتایج را از واقعیت دور کرده باشد، زیرا در ساعات اداری بسیاری از افراد بین ۲۰ تا ۴۰ سال در دانشگاه‌ها یا محل کار حضور دارند.

۱۰۹

الف

نادرست

ب

نادرست

پ

درست

ت

درست

۱۱۰

الف

نادرست

ب

نادرست

پ

درست

درست. با توجه به اینکه کمترین نمره مدرسه (ب) برابر چارک اول مدرسه (الف) است. پس به طور تقریبی می‌توان گفت که ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه (الف) در درس فلسفه نمره‌ای کمتر از همه دانش‌آموزان مدرسه (ب) گرفته‌اند.

ت

نادرست

۱۱۱

با توجه به نمودار (ارتفاع مستطیل) میانگین برابر ۵ است. بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{3 + a + a + 1 + 6 + 7}{5} \Rightarrow 5 = \frac{2a + 17}{5} \Rightarrow 2a = 25 - 17 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} \Rightarrow b = 5 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a + b = 4 + 5 + \sqrt{2} = 9 + \sqrt{2}$$

چون داده‌ها به هم نزدیک هستند و داده دور افتاده نداریم، پس میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسب‌تری هستند.

۱۱۳

با توجه به نمودار، میانگین برابر ۸ و انحراف معیار برابر $12 - 8 = 4$ است. بنابراین:

$$\sigma^2 = 16 \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\sigma^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

استفاده از شاخص‌ها و نمودارها در گام چهارم تحلیل داده‌ها است که اشتباه در آن باعث اشتباه در گام پنجم یعنی بحث و نتیجه‌گیری می‌شود.

۱۱۵

اشکال این نتیجه‌گیری این است که تصور می‌شود هرچه سرعت اتومبیل بیشتر باشد، احتمال تصادف کردن آن کمتر می‌شود، در حالی‌که می‌دانیم سرعت بیشتر امنیت را پایین می‌آورد.

اشتباهاتی که سبب ایجاد چنین تصویری شده عبارت‌اند از: ۱- عدم نمونه‌گیری از یک منطقه خاص: در چنین مواردی باید یک منطقه خاص را انتخاب کنیم و تصادفات را بررسی کنیم نه آنکه تصادفات تمام مناطق را یکجا بیابیم. مثلاً درون شهر، بیرون شهر و ...

۲- عدم بیان کل خودروهای عبوری از منطقه با سرعت‌های مختلف: مثلاً اگر تعداد خودروهای عبوری از یک منطقه با سرعت ۶۰ تا ۷۰ کیلومتر در ساعت ۳۰۰ تا بوده و ۱۵۰ تا از آنها تصادف کرده باشند، یعنی نیمی از آنها تصادف کرده‌اند. در حالی‌که اگر تعداد خودروهای با سرعت ۱۲۰ - ۱۱۰ کیلومتر در ساعت برابر ۱۳ تا بود که ۱۰ تا از آنها تصادف کرده‌اند یعنی بیش از نیمی از آنها تصادف کرده‌اند.

۳- عدم بیان زمان و علت تصادف: در بسیاری از تصادفات عواملی به جز سرعت خودرو تأثیرگذارند. برای نتیجه‌گیری درست باید به عوامل مختلف تصادف هم توجه شود.

۱۱۶

مسئله: «بررسی تأثیر منفی زبان مادری عربی روی میزان یادگیری مفاهیم درسی فارسی در دانش‌آموزان دختر پایه سوم ابتدایی در مدرسه‌ای خاص از شهر سوسنگرد.»

۱۱۷

جملات هریک از دنباله‌ها که برابر با رأس الگوهست را می‌نویسیم:

الف) $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ و $a_3 = 6$

ب) $a_1 = 1$ و $a_2 = 4$ و $a_3 = 9$



$$a_{n+1} = a_n + (n+1) \text{ و } a_1 = 1$$

$$a_2 = a_{1+1} = a_1 + (1+1) = 1 + (2) = 3$$

$$a_3 = a_{2+1} = a_2 + (2+1) = 3 + (3) = 6$$

پس الگوی مورد نظر الگوی «الف» است.

۱۱۸ با توجه به دنباله‌های روبه‌رو داریم: $d_n = n^2 - 1$ و $c_n = \frac{1}{3n-1}$ و $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ و $a_n = 3^n$

الف) برای به دست آوردن عبارت زیر در دنباله b_n با جایگذاری $n=1$ و در دنباله a_n با جایگذاری $n=2$ حاصل را به دست می‌آوریم.

$$a_2 + b_1 = (3)^2 + (-\frac{1}{2})^{1+1} = 9 + (-\frac{1}{2})^2 = 9 + \frac{1}{4} = \frac{36+1}{4} = \frac{37}{4}$$

ب) برای به دست آوردن عبارت روبه‌رو در دنباله c_n با جایگذاری $n=2$ و در دنباله d_n با جایگذاری $n=1$ حاصل را به دست می‌آوریم.

$$c_2 - d_1 = \frac{1}{3(2)-1} - ((1)^2 - 1) = \frac{1}{6-1} - (1-1) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

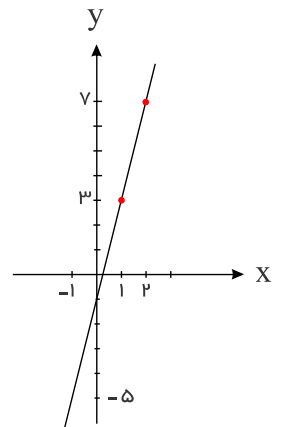
ج) برای به دست آوردن عبارت روبه‌رو در دنباله b_n با جایگذاری $n=4$ و در دنباله d_n با جایگذاری $n=2$ حاصل را به دست می‌آوریم.

$$b_4 + d_2 = (-\frac{1}{2})^{4+1} + ((2)^2 - 1) = (-\frac{1}{2})^5 + 3 = -\frac{1}{32} + 3 = \frac{-1+96}{32} = \frac{95}{32}$$

۱۱۹ الف) برای رسم نمودار تابع خطی و دنباله، دو جمله اول دنباله را به دست می‌آوریم، خطی که از این دو نقطه $(1, a_1)$ و $(2, a_2)$ می‌گذرد، نمودار تابع خطی و نقاط با

طول‌های اعداد طبیعی نمودار دنباله است:

$$a_n = y = 4x - 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 7 \end{array}$$



با در نظر گرفتن آن‌که دامنه دنباله $\mathbb{N}$ است، تنها نقاط قرمز رنگ نمودار دنباله است.

ب) رابطه بازگشتی از مقایسه دو جمله متوالی حاصل می‌شود:

$$f(2) - f(1) = 7 - 3 = 4$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + 4 \quad \text{رابطه بازگشتی} \quad , \quad \begin{cases} a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ a_n = 4n - 1 \end{cases} \quad \text{نمایش تابعی دنباله}$$

شیب خط عددی است که با افزودن آن به هر جمله، جمله بعدی را به دست می‌آوریم.

۱۲۰ الف) ارتفاع تا ۱۵ کیلومتر ($\mathbb{R}$)

ب) استفاده از اینترنت در هر یک ساعت ($\mathbb{N}$)

ج) ضلع x ($\mathbb{R}$)

د) بیست سال اخیر ($\mathbb{N}$)

هـ) شماره ماه‌های سال ($\mathbb{N}$)

۱۲۱ -۱

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n}) \quad , \quad a_1 = k$$

الف) $\sqrt{2} \Rightarrow a_1 = k = 2$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{2}{a_1}) \xrightarrow{a_1=2} a_2 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \frac{2}{a_2}) \xrightarrow{a_2=\frac{3}{2}} a_3 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{9+8}{6}) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12} \simeq 1,41$$

ب) $\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = k = 3$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{3}{a_1}) \xrightarrow{a_1=3} a_2 = \frac{1}{2}(3 + \frac{3}{3}) = \frac{1}{2} \times (4) = 2$$



$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{3}{a_1}) \xrightarrow{a_1=2} a_2 = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \times (\frac{7}{2}) = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$ج) \sqrt{5} \Rightarrow a_1 = k = 5$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{5}{a_1}) \xrightarrow{a_1=5} a_1 = \frac{1}{2}(5 + \frac{5}{5}) = \frac{1}{2} \times (6) = 3$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{5}{a_1}) \xrightarrow{a_1=3} a_2 = \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{3}) = \frac{1}{2} \times (\frac{14}{3}) = \frac{14}{6} \approx 2,33$$

۲- بله زیرا ماشین حساب حاصل جذر را فقط به صورت اعشاری نشان می‌دهد و گرد می‌کند. اما در این روش جذر یک عدد را به صورت عددی گویا نشان می‌دهد و می‌توان به جذر یک عدد نزدیک شد.

۱۲۲

پاسخ: با جایگذاری اعداد طبیعی به جای n ، دنباله‌های بازگشتی را تا جمله پنجم ادامه می‌دهیم:

$$الف) a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{3}a_1 \xrightarrow{a_1=-2} a_2 = \frac{1}{3} \times (-2) = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{3}a_2 \xrightarrow{a_2=-\frac{2}{3}} a_3 = \frac{1}{3} \times (-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{9}$$

$$\xrightarrow{n=3} a_4 = \frac{1}{3}a_3 \xrightarrow{a_3=-\frac{2}{9}} a_4 = \frac{1}{3} \times (-\frac{2}{9}) = -\frac{2}{27}$$

$$\xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{3}a_4 \xrightarrow{a_4=-\frac{2}{27}} a_5 = \frac{1}{3} \times (-\frac{2}{27}) = -\frac{2}{81}$$

$$ب) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{1+a_1} \xrightarrow{a_1=1} a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{1+a_2} \xrightarrow{a_2=\frac{1}{2}} a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{n=3} a_4 = \frac{1}{1+a_3} \xrightarrow{a_3=\frac{2}{3}} a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{1+a_4} \xrightarrow{a_4=\frac{3}{5}} a_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$ج) a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \xrightarrow{n=1} a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\xrightarrow{n=2} a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$د) a_{n+1} = a_n + (-1)^n \xrightarrow{n=1} a_2 = a_1 + (-1)^1 \xrightarrow{a_1=1} a_2 = 1 + (-1) = 0$$

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = a_2 + (-1)^2 \xrightarrow{a_2=0} a_3 = 0 + 1 = 1$$

$$\xrightarrow{n=3} a_4 = a_3 + (-1)^3 \xrightarrow{a_3=1} a_4 = 1 + (-1) = 0$$

$$\xrightarrow{n=4} a_5 = a_4 + (-1)^4 \xrightarrow{a_4=0} a_5 = 0 + 1 = 1$$

۱۲۳ با توجه به نمودار داریم:

n	۱	۲	۳	۴	۵
a_n	۲	-۳	۱	۴	۰

بنابراین داریم:

$$a_2 + a_3 + a_4 - a_5 = -3 + 1 + 4 - 0 = 2$$

۱۲۴ جمله دهم دنباله حاصل مجموع جمله a_1 و b_1 است، بنابراین:

$$a_n = n^2 + 3n \xrightarrow{n=10} a_{10} = 10^2 + 3(10) = 100 + 30 = 130$$

$$b_n = (n+1)^2 \xrightarrow{n=10} b_{10} = (10+1)^2 = 11^2 = 121$$

جمله دهم دنباله جدید مجموع ۱۳۰ و ۱۲۱ است:

$$130 + 121 = 251$$

۱۲۵ با جایگذاری اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ در جمله عمومی دنباله، جملات را می‌یابیم.



$$a_n = \left[\frac{n+1}{2} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n=1 \rightarrow a_1 = \left[\frac{1+1}{2} \right] = [1] = 1 \\ n=2 \rightarrow a_2 = \left[\frac{2+1}{2} \right] = \left[\frac{3}{2} \right] = 1 \\ n=3 \rightarrow a_3 = \left[\frac{3+1}{2} \right] = \left[\frac{4}{2} \right] = 2 \\ n=4 \rightarrow a_4 = \left[\frac{4+1}{2} \right] = \left[\frac{5}{2} \right] = 2 \\ n=5 \rightarrow a_5 = \left[\frac{5+1}{2} \right] = \left[\frac{6}{2} \right] = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$$

جمله عمومی دنباله یک رابطه دو ضابطه‌ای است که اگر n فرد باشد، مقدار جمله را از ضابطه بالایی و اگر n زوج باشد، مقدار جمله را از ضابطه پایینی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_{2o} &\xrightarrow[\text{ضابطه پایینی}]{\text{زوج } n} a_n = \frac{n}{2} \Rightarrow a_{2o} = \frac{2o}{2} = 1o \\ a_{21} &\xrightarrow[\text{ضابطه بالایی}]{\text{فرد } n} a_n = \frac{n+3}{2} \Rightarrow a_{21} = \frac{21+3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ a_{22} &\xrightarrow[\text{ضابطه پایینی}]{\text{زوج } n} a_n = \frac{n}{2} \Rightarrow a_{22} = \frac{22}{2} = 11 \end{aligned}$$

مجموع این سه جمله برابر است با:

$$a_{2o} + a_{21} + a_{22} = 1o + 12 + 11 = 33$$

با نوشتن جملات اول تا ۲۴ام، مجموع آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ \left. \begin{array}{l} n=1 \rightarrow a_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \\ n=2 \rightarrow a_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ n=3 \rightarrow a_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ \vdots \\ n=24 \rightarrow a_{24} = \sqrt{25} - \sqrt{24} \end{array} \right\} &\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{24} = \\ &(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{24} - \sqrt{23}) + (\sqrt{25} - \sqrt{24}) \\ &= \sqrt{25} - \sqrt{1} = 5 - 1 = 4 \end{aligned}$$

با توجه به متن سوال جمله عمومی دنباله به صورت $a_{2n+1} = \frac{n+2}{2n-3}$ است.

برای آنکه جمله ۱۱ام (a_{11}) را بیابیم، ابتدا $2n+1$ را برابر ۱۱ قرار می‌دهیم تا مقدار n مشخص شود:

$$2n+1 = 11 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

حال با قرار دادن $n = 5$ در رابطه جمله عمومی، جمله a_{11} پیدا می‌شود.

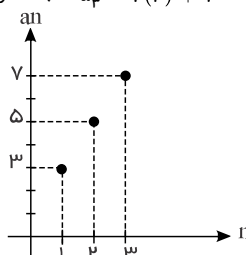
$$a_{2n+1} = \frac{n+2}{2n-3} \xrightarrow{n=5} a_{11} = \frac{5+2}{2(5)-3} = \frac{7}{7} = 1$$

از هر یک از دنباله‌ها چند جمله اول را می‌یابیم، سپس با توجه به جملات نمودار را رسم می‌کنیم.

$$a_n = 2n+1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=1 \rightarrow \text{جمله اول} \quad a_1 = 2(1)+1 = 3 \\ n=2 \rightarrow \text{جمله دوم} \quad a_2 = 2(2)+1 = 5 \\ n=3 \rightarrow \text{جمله سوم} \quad a_3 = 2(3)+1 = 7 \end{array} \right.$$

n	۱	۲	۳
a_n	۳	۵	۷

حال با توجه به مقادیر به دست آمده نمودار a_n را رسم می‌کنیم:



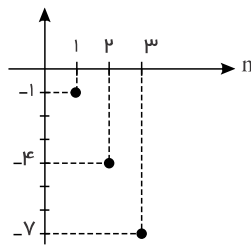
با توجه به افزایش مقادیر جملات پس a_n افزایشی است، زیرا با افزایش n ، a_n نیز افزایش می‌یابد.

حال در دنباله t_n سه جمله اول دنباله t_n را می‌یابیم:



$$t_n = 2 - 3n \quad \begin{cases} n=1 \rightarrow \text{جمله اول} & t_1 = 2 - 3(1) = -1 \\ n=2 \rightarrow \text{جمله دوم} & t_2 = 2 - 3(2) = 2 - 6 = -4 \\ n=3 \rightarrow \text{جمله سوم} & t_3 = 2 - 3(3) = 2 - 9 = -7 \end{cases}$$

n	۱	۲	۳
t_n	-۱	-۴	-۷



سپس با توجه به مقادیر به دست آمده نمودار t_n را رسم می‌کنیم:

با توجه به اینکه با افزایش n ، مقدار جملات (t_n ها) کاهش می‌یابد، بنابراین دنباله t_n کاهشی است.

الف) با توجه به جملات دنباله مشخص می‌شود که هر جمله ۲ برابر جمله قبلی است، یعنی اگر هر جمله را در ۲ ضرب کنیم جمله بعدی به دست می‌آید. بنابراین رابطه بازگشتی به صورت زیر است:

$$a_{n+1} = 2a_n \quad (a_1 = 2)$$

ب) چون هر جمله از ۲ برابر کردن جمله قبل به دست می‌آید، بنابراین رابطه به صورت 2^n خواهد بود.

$$\left. \begin{matrix} a_1 = 2^1 \\ a_2 = 2^2 \\ a_3 = 2^3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_n = 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

۱۳۱

با استفاده از رابطه بازگشتی داده‌شده، جملات دوم و سوم را به دست می‌آوریم:

$$n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{V}{a_1}) = \frac{1}{2}(2 + \frac{V}{2}) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \frac{V}{a_2}) = \frac{1}{2}(4 + \frac{V}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{23}{4} = \frac{23}{8}$$

۱۳۲

با توجه به مثلث خیامپاسکال داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \leftarrow & 1 & & & & \\ a_2 & \leftarrow & 1 & 1 & & & \\ a_3 & \leftarrow & 1 & 2 & 1 & & \\ a_4 & \leftarrow & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ a_5 & \leftarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ a_6 & \leftarrow & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ a_7 & \leftarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

مجموع اعداد در جمله ششم برابر:

$$a_6 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

مجموع اعداد در جمله هفتم برابر:

$$a_7 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

بنابراین مجموع جملات شش و هفت برابر:

$$a_6 + a_7 = 32 + 64 = 96$$

۱۳۳

این دنباله یک دنباله بازگشتی به نام فیبوناچی است که دو جمله اول آن ۱ و بقیه جملات از مجموع دو جمله قبلی به دست می‌آیند ($a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$). بنابراین جملات این دنباله به صورت زیر هستند.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$$

جمله یازدهم
جمله دهم

مجموع جملات دهم و یازدهم برابر است با:

$$a_{10} + a_{11} = 55 + 89 = 144$$

۱۳۴ با توجه به رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{a_n + V}{2}$ بقیه جملات دنباله را به دست می‌آوریم.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + V}{2} \xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{a_1 + V}{2} \xrightarrow{a_1=V} a_2 = \frac{V + V}{2} = V \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{a_2 + V}{2} \xrightarrow{a_2=V} a_3 = \frac{V + V}{2} = V$$

به همین ترتیب تمام جملات دنباله برابر ۷ است، بنابراین مجموع ۱۰ جمله اول آن برابر $10 \times 7 = 70$ است.



۱۳۵

$$a_n = b_n \Rightarrow 2n^2 + 1 = 4n + 7 \Rightarrow 2n^2 - 4n - 6 = 0 \Rightarrow 2(n^2 - 2n - 3) = 0 \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n - 3)(n + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 & \text{ق ق} \\ n = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۳۶

جمله عمومی را برابر $\frac{1}{8}$ قرار می‌دهیم تا n (شماره جمله) را بیابیم:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 7} = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} n^2 + 7 = 8n \Rightarrow n^2 - 8n + 7 = 0$$

عبارت درجه دوم را با کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\Rightarrow (n - 7)(n - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n - 7 = 0 \Rightarrow n = 7 \\ n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1 \end{cases}$$

۱۳۷

$$\left. \begin{array}{l} \text{میزان فاضلاب اولیه} = 250 \\ \text{میزان افزایش سالانه} = 15 \\ \text{میزان کاهش سالانه} = \frac{10}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 250 \\ a_{n+1} = \left(\frac{9}{10}a_n\right) + 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = 250, a_2 = 240, a_3 = 231, a_4 = 222.9, a_5 = 215.61, a_6 = 209.049$$

میزان مواد آلوده پس از دو سال همان $a_3 = 231$ تن و پس از پنج سال $a_6 = 209.049$ تن است.

۱۳۸ اگر عرض نخستین پله را برابر با جمله اول (a_1) ، عرض آخرین پله را برابر با جمله n ام (a_n) در نظر بگیریم هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر می‌شود که برابر اختلاف مشترک جملات دنباله (d) است. بنابراین:

$$a_1 = 125, a_n = 45, d = -10$$

↓
کوتاه‌تر می‌شود

جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 125 + (n - 1)(-10)$$

$$a_n = 125 - 10n + 10 = 135 - 10n$$

تعداد پله‌های نردبان برابر n است؛ پس داریم:

$$a_n = 45 = 135 - 10n \Rightarrow 45 - 135 = -10n \Rightarrow \frac{-90}{-10} = \frac{-10n}{-10} \Rightarrow n = 9 \rightarrow \text{تعداد پله‌های نردبان}$$

مقدار چوب لازم برای ساخت پله‌ها برابر است با مجموع جملات دنباله حسابی:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{9}{2}(125 + 45) = \frac{9}{2} \times (170) = 765 = 765 \text{ m}$$

(سانتی‌متر مربع چوب برای ساخت پله‌ها)

۱۳۹ برای به‌دست آوردن مجموع عددهای زیر پس از اطمینان از حسابی بودن دنباله‌ها به کمک جمله اول، جمله آخر و تعداد جملات، مجموع جملات را به دست می‌آوریم.

الف $1, 5, 9, \dots, 401$ $a_1 = 1, d = 4, a_n = 401$

$$\begin{cases} d = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4 \\ d = a_3 - a_2 = 9 - 5 = 4 \end{cases} \text{ دنباله حسابی است}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1)4$$

$$a_n = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$$

$$a_n = 401 = 4n - 3 \Rightarrow 4n = 401 + 3 \Rightarrow 4n = 404 \Rightarrow n = 101$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{101}{2}(1 + 401) = \frac{101}{2} \times 402 = 101 \times 201 = 20301$$

ب $89, 85, 81, \dots, 13$ $a_1 = 89, d = -4, a_n = 13$

$$\begin{cases} d = a_2 - a_1 = 85 - 89 = -4 \\ d = a_3 - a_2 = 81 - 85 = -4 \end{cases} \text{ دنباله حسابی است}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 89 + (n - 1)(-4)$$

$$a_n = 89 - 4n + 4 = -4n + 93$$

$$a_n = 13 = -4n + 93 \Rightarrow -4n = 13 - 93 \Rightarrow \frac{-4n}{-4} = \frac{-80}{-4} \Rightarrow n = 20$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{20}{2}(89 + 13) = 10 \times (102) = 1020$$

۱۴۰ وزن اولیه صفحه را برابر با جمله اول دنباله حسابی در نظر می‌گیریم. هر هفته ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم می‌شود بعد از یک هفته مقدار a_7 به دست می‌آید پس بعد از ۶ هفته مقدار a_7 را باید به دست آوریم؛ یعنی اختلاف مشترک دنباله حسابی $d = -1875$ است.

$$a_1 = 12500, d = -1875$$

↓
کاهش



برای نوشتن جمله عمومی داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ \Rightarrow a_n &= 12500 + (n-1)(-1875) \\ \Rightarrow a_n &= 12500 - 1875n + 1875 = 14375 - 1875n \\ \Rightarrow a_7 &= 14375 - 1875 \times (7) = 14375 - 13125 = 1250 \quad (\text{مقدار } a_7 \text{ برابر وزن صفحه پس از شش هفته است.}) \end{aligned}$$

۱۴۱ اگر فاصله اولین چرخ تا موتور را برابر جمله اول و فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی را اختلاف مشترک و ۱۲ چرخ را تعداد کل جملات در دنباله حسابی در نظر بگیریم، مساحت کل آبیاری برابر است با مساحت دایره‌ای که میله به مرکز موتور حرکت می‌کند و شعاع این دایره همان a_n با معلومات زیر است.

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, \quad d = 5, \quad n = 12 \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= 3 + 11 \times 5 = 58 \Rightarrow S = \pi \times 58 \times 58 = 3364\pi \end{aligned}$$

۱۴۲ با داشتن جمله یازدهم و نوزدهم، جمله اول و اختلاف مشترک را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 52 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 52 \Rightarrow a_1 + (11-1)d = 52 \Rightarrow a_1 + 10d = 52 \\ a_{19} &= 92 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 92 \Rightarrow a_1 + (19-1)d = 92 \Rightarrow a_1 + 18d = 92 \\ \Rightarrow a_{19} - a_{11} &= a_1 + 18d - (a_1 + 10d) = 92 - 52 \Rightarrow 8d = 40 \Rightarrow d = 5 \\ a_{11} &= 52 \Rightarrow a_1 + 10d = 52 \xrightarrow{d=5} a_1 + 10(5) = 52 \Rightarrow a_1 + 50 = 52 \Rightarrow a_1 = 2 \end{aligned}$$

برای جمله عمومی از طریق عبارت $a_n = a_1 + (n-1)d$ داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \xrightarrow{d=5} a_n = 2 + (n-1)5 = 2 + 5n - 5 = 5n - 3 \\ \Rightarrow a_n &= 5n - 3 \end{aligned}$$

جمله ۳۰ام برابر است با:

$$a_{30} = 5(30) - 3 = 150 - 3 = 147$$

۱۴۳ برای یافتن اینکه کدام جمله دنباله ۵۵۵ است، در ابتدا جمله عمومی دنباله را به دست می‌آوریم. با داشتن جمله اول و اختلاف مشترک داریم:

$$\begin{aligned} a_1 &= -5, \quad d = 8 \\ a_n &= a_1 + (n-1)d = -5 + (n-1)8 = -5 + 8n - 8 = 8n - 13 \Rightarrow a_n = 8n - 13 \end{aligned}$$

پس برای یافتن جمله‌ای که برابر با ۵۵۵ است، داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= 555 \Rightarrow 8n - 13 = 555 \Rightarrow 8n = 555 + 13 \Rightarrow 8n = 568 \Rightarrow n = \frac{568}{8} \Rightarrow n = 71 \\ \Rightarrow a_{71} &= 555 \end{aligned}$$

۱۴۴ جملات هریک از دنباله‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a_n &\Rightarrow 2, -4, -10, -16, -22 \\ b_n &\Rightarrow 2, 6, 10, 14, 18, 22 \end{aligned}$$

الف) مجموع جملات برابر است با:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ S_{an} &= \frac{n}{2}(2 \times (2) + (n-1)(-6)) = \frac{n}{2}(4 - 6n + 6) = \frac{n}{2}(-6n + 10) \\ \Rightarrow S_{70} &= 10 \times (-120 + 10) = -1100 \end{aligned}$$

ب)

$$S_{bn} = \frac{n}{2}(2 \times (2) + (n-1)4) = \frac{n}{2}(4 + 4n - 4) = \frac{n}{2}(4n) = 2n^2 \Rightarrow S_{70} = 2 \times 70^2 = 800$$

۱۴۵ تعداد کل جملات دنباله حاصل برابر ۹ تا است:

$$\begin{aligned} &5, \underbrace{\dots, 21}_{\text{هفت عدد}} \\ n &= 7 + 2 = 9 \end{aligned}$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_9 &= \frac{9}{2}(21 + 5) = \frac{9}{2} \times (26) = 9 \times (13) = 117 \end{aligned}$$

۱۴۶ برای محاسبه $a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$ می‌توانیم از مجموع جملات کمک بگیریم.

$$\begin{aligned} a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} &= S_{13} - S_9 \\ S_n &= 3n^2 - 8n \Rightarrow \begin{cases} S_{13} = 3 \times (13)^2 - 8 \times (13) = 3 \times (169) - 104 = 507 - 104 = 403 \\ S_9 = 3 \times (9)^2 - 8 \times (9) = 3 \times (81) - 72 = 243 - 72 = 171 \end{cases} \\ S_{13} - S_9 &= 403 - 171 = 232 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} = 232$$

برای به دست آوردن جمله پنجم بدون نوشتن جمله عمومی می‌توانیم از مجموع جملات کمک بگیریم. (۱۴۷)

$$S_5 - S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) =$$

$$\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + a_5 - \cancel{a_1} - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} - \cancel{a_4} = a_5$$

با استفاده از $S_n = 3n^2 - 8n$ حاصل S_5 و S_4 را به دست می‌آوریم.

$$S_n = 3n^2 - 8n \Rightarrow \begin{cases} S_5 = 3 \times (5)^2 - 8 \times (5) = 75 - 40 = 35 \\ S_4 = 3 \times (4)^2 - 8 \times (4) = 48 - 32 = 16 \end{cases}$$

$$a_5 = S_5 - S_4 = 35 - 16 = 19$$

جمله پنجم برابر ۱۹ است.

(۱۴۸) در دنباله حسابی روبه‌رو با به دست آوردن جمله اول و اختلاف مشترک، مجموع جملات دنباله را می‌نویسیم.

$$2, 7, 12, \dots$$

$$a_1 = 2, \quad d = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{a_1=2, d=5} S_n = \frac{n}{2}(2 \times (2) + (n-1)(5))$$

برای به دست آوردن تعداد جملات مجموع جملات $S_n = \frac{n}{2}(4 + 5n - 5) = \frac{n}{2}(5n - 1)$ را برای ۸۷ قرار می‌دهیم.

$$\frac{5n^2}{2} - \frac{n}{2} = 87 \xrightarrow{\times 2} 5n^2 - n - 174 = 0$$

$$5n^2 - n - 174 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(5)(-174) = 3481 + 1 = 3481 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 59$$

$$n_{1,2} = \begin{cases} n_1 = \frac{1+59}{10} = \frac{60}{10} = 6 \\ n_2 = \frac{1-59}{10} = \frac{-58}{10} \end{cases}$$

غی قی

غیرقابل قبول است چون تعداد جملات دنباله عددی طبیعی است. $\frac{-58}{10}$

(۱۴۹) اختلاف مشترک دنباله حسابی که m واسطه حسابی بین جملات a و b آن درج کرده‌ایم برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

پس با داشتن $a_1 = 17$ و $a_6 = 33$ داریم:

$$d = \frac{33 - 17}{6 - 1} = \frac{16}{5} = 3.2$$

اختلاف مشترک دنباله برابر ۴ است.

(۱۵۰) اختلاف مشترک دنباله حسابی که m واسطه حسابی بین جملات a و b آن درج کردیم برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{m+1} \Rightarrow d = \frac{32 - 7}{4 + 1} = \frac{25}{5} = 5$$

پس جملات دنباله حسابی حاصل برابر است با:

$$7, 7 + 5, 7 + 2 \times (5), 7 + 3 \times (5), 7 + 4 \times (5), 7 + 5 \times (5)$$

$$7, 12, 17, 22, 27, 32$$

(۱۵۱) اگر $a_{n+1} = 3 + a_n$ فرمول بازگشتی دنباله حسابی باشد، اختلاف مشترک برابر است با:

$$a_{n+1} = 3 + a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3 \Rightarrow d = 3$$

با گسترده کردن جملات پانزدهم و هفتم داریم:

$$a_{15} = a_1 + (15-1)d = a_1 + 14d$$

$$a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$$

$$a_{15} - a_7 = a_1 + 14d - (a_1 + 6d) = \cancel{a_1} + 14d - \cancel{a_1} - 6d = 8d$$

$$\Rightarrow a_{15} - a_7 = 8d \xrightarrow{d=3} a_{15} - a_7 = 8 \times (3) = 24$$

(۱۵۲) در دنباله حسابی روبه‌رو جمله عمومی را می‌نویسیم:

$$-100, -96, \dots$$

$$a_1 = -100, \quad d = a_2 - a_1 = -96 - (-100) = -96 + 100 = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -100 + (n-1)4 = -100 + 4n - 4$$

$$\Rightarrow a_n = 4n - 104$$

اکنون می‌خواهیم تعداد جملات کوچکتر از ۷ را بدست آوریم، پس جمله عمومی دنباله را کوچکتر از ۷ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow a_n = 4n - 104 < 7$$



$$4n - 104 < 7 \Rightarrow 4n < 7 + 104 \Rightarrow 4n < 111 \Rightarrow n < \frac{111}{4}$$

$$n < 27,7$$

بنابراین ۲۷ جمله از دنباله فوق کوچکتر از ۷ هستند.

با استفاده از اطلاعات داده شده جمله اول و اختلاف مشترک را به دست می‌آوریم. (۱۵۳)

$$a_9 = 42, \quad a_{20} = 75$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{20} - a_9}{20 - 9} = \frac{75 - 42}{20 - 9} = \frac{33}{11} = 3$$

با قرار دادن جمله مشترک در معادله روبه‌رو جمله اول را به دست می‌آوریم.

$$a_9 = a_1 + 8d = 42 \xrightarrow{d=3} a_9 = a_1 + 8 \times (3) = 42 \\ \Rightarrow a_1 + 24 = 42 \Rightarrow a_1 = 42 - 24 = 18$$

با استفاده از تعریف جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \xrightarrow[d=3]{a_1=18} a_n = 18 + (n - 1)3 = 18 + 3n - 3 \\ \Rightarrow a_n = 3n + 15$$

(۱۵۴) با استفاده از جمله عمومی $a_n = a_1 + (n - 1)d$ داریم:

$$a_7 - a_6 = 16 \Rightarrow a_1 + 6d - (a_1 + 5d) = 16 \Rightarrow \cancel{a_1} + 6d - \cancel{a_1} - 5d = 16 \\ \Rightarrow 4d = 16 \Rightarrow d = 4$$

بنابراین اختلاف مشترک دنباله برابر است با: ۴

$$a_7 + a_6 = 14 \Rightarrow a_1 + d + a_1 + 5d = 14 \Rightarrow 2a_1 + 6d = 14 \\ \xrightarrow{d=4} 2a_1 + 4 \times (4) = 14 \Rightarrow 2a_1 + 16 = 14 \Rightarrow 2a_1 = 14 - 16 \\ \Rightarrow 2a_1 = -2 \Rightarrow a_1 = -1$$

و جمله اول برابر است با: -۱

(۱۵۵) با در نظر گرفتن جمله عمومی دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ، جمله اول و اختلاف مشترک دنباله را می‌نویسیم.

$$a_7 = 11, \quad a_9 = 29 \\ d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_7}{9 - 7} = \frac{29 - 11}{9 - 7} = \frac{18}{2} = 9$$

برای به دست آوردن جمله اول در جمله عمومی به‌ازای $n = 3$ و به‌جای $a_7 = 11$ جایگزین می‌کنیم.

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d = 11 \Rightarrow a_7 = a_1 + (6)(9) = 11 \\ a_1 + 54 = 11 \Rightarrow a_1 = 11 - 54 = -43$$

پس جملات دنباله برابر است با:

$$-43, -43 + 9, -43 + 2(9), \dots \\ \rightarrow -43, -34, -25, \dots$$

(۱۵۶) در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = a_1 + (n - 1)d$ داریم:

$$a_5 = 73 \Rightarrow a_5 = a_1 + (5 - 1)d = 73 \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = 73 \\ a_{12} = 34 \Rightarrow a_{12} = a_1 + (12 - 1)d = 34 \Rightarrow a_{12} = a_1 + 11d = 34$$

از تفاضل a_5 و a_{12} مقدار اختلاف مشترک برابر است با:

$$a_{12} - a_5 = a_1 + 11d - (a_1 + 4d) = 34 - 73 \\ \Rightarrow \cancel{a_1} + 11d - \cancel{a_1} - 4d = -39 \Rightarrow 7d = -39 \Rightarrow d = -\frac{39}{7}$$

(۱۵۷) اگر a, b, c سه جمله متوالی از دنباله حسابی را داشته باشیم، واسطه حسابی آن برابر است با:

$$b = \frac{a + c}{2} \\ a, b, c \Rightarrow a + c = 2b$$

پس برای جملات متوالی $2m - 4, m + 5, 3m - 1$ داریم:

$$m + 5 = \frac{(3m - 1) + (2m - 4)}{2} \\ (3m - 1) + (2m - 4) = 2(m + 5) \\ 3m - 1 + 2m - 4 = 2m + 10 \\ 5m - 5 = 2m + 10 \Rightarrow 5m - 2m = 10 + 5 \\ 3m = 15 \Rightarrow m = 5$$



بنابراین مقدار m با ۵ برابر است.

۱۵۸ دنباله حسابی دنباله‌ای است که هر جمله آن جز جمله اول از افزودن مقداری ثابت به جمله قبل به دست آید.

پس کفایت نشان دهیم تفاضل هر دو جمله متوالی ثابت است:

$$1, \frac{10}{7}, \frac{13}{7}, \dots$$

$$\frac{10}{7} - 1 = \frac{10 - 7}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{13}{7} - \frac{10}{7} = \frac{13 - 10}{7} = \frac{3}{7}$$

پس دنباله مورد نظر دنباله حسابی است.

۱۵۹ برای محاسبه حاصل جمع داده شده، هر پراتنز را یک جمله از دنباله حسابی در نظر می‌گیریم که:

$$a_1 = 4, \quad d = a_7 - a_1 = 4 + 0,25 - 4 = 0,25$$

برای به دست آوردن تعداد جملات، می‌توانیم جمله عمومی را بنویسیم و مساوی با $(4 + 4)$ قرار دهیم تا n به دست آید.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 4 + (n - 1)0,25$$

$$\Rightarrow a_n = 4 + 0,25n - 0,25 = 3,75 + 0,25n$$

$$a_n = 4 + 4 = 8 \Rightarrow 3,75 + 0,25n = 8$$

$$\Rightarrow 0,25n = 8 - 3,75 \Rightarrow n = \frac{4,25}{0,25} = 17$$

اکنون مجموع را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = \frac{17}{2} \left(2 \times 4 + (17 - 1)0,25 \right) = \frac{17}{2} \left(8 + 4 \right) = \frac{17}{2} \times 12 = 102$$

۱۶۰ برای به دست آوردن مجموع جملات از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_1 = 5, \quad d = 12 - 5 = 7$$

شماره جمله $a_n = 103$ و تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 103 = 5 + (n - 1)7 \Rightarrow 103 = 7n - 2 \Rightarrow n = \frac{105}{7} = 15$$

بنابراین مجموع ۱۵ جمله را می‌خواهیم حساب کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2 \times 5 + (15 - 1)7) = \frac{15}{2}(10 + 98) = \frac{15}{2} \times 108 = 15 \times 54 = 810$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$S_{15} = 810$$

۱۶۱ برای به دست آوردن مجموع جملات ابتدا باید اختلاف مشترک و جمله اول را به دست آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{a_6 - a_3}{6 - 3} = \frac{7,5 - 6}{6 - 3} = \frac{1,5}{3} = 0,5$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_6 = 6 = a_1 + 5d \Rightarrow 6 = a_1 + 2(0,5)$$

$$6 = a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = 5$$

اکنون مجموع ۲۰ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 5 + (20 - 1)0,5) = 10(10 + 9,5) = 10 \left(\frac{20}{2} + \frac{19}{2} \right) = 10 \left(\frac{39}{2} \right) = \frac{10 \times 39}{2} = 5 \times 39 = 195$$

پس مجموع ۲۰ جمله اول برابر است با:

$$S_{20} = 195$$

۱۶۲

$$25, \dots, 40$$

به دلیل اینکه طول پله‌ها به طور یکنواخت تغییر می‌کند، پس اندازه پله‌ها تشکیل دنباله حسابی می‌دهند که کمترین آن‌ها ۲۵ سانتی‌متر و بیش‌ترین آن‌ها ۴۰ سانتی‌متر است.

مجموع جملات در دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

اکنون مجموع طول پله‌ها را داریم، کفایت با قرار دادن در فرمول S_n مقدار n را بدست آوریم:

نکته: ۵,۸۵ متر برابر است با ۵۸۵ سانتی‌متر



$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 585 = \frac{n}{2}(25 + 40)$$

$$(585) \times 2 = 65n$$

$$\Rightarrow 65n = 1170 \Rightarrow n = \frac{1170}{65} = 18$$

تعداد کل پله‌ها برابر با ۱۸ است.

۱۶۳) ۲ درصد از حقوق اولیه را حساب می‌کنیم که همان اختلاف مشترک (d) دنباله حسابی است:

$$1,000,000 \times \frac{2}{100} = 20,000$$

حقوق ماه اول: ۱,۰۰۰,۰۰۰، حقوق ماه دوم ۲۰,۰۰۰ + ۱,۰۰۰,۰۰۰، ...

$$1,000,000, 1,000,000 + 20,000, 1,000,000 + 2(20,000), \dots$$

$$a_1 = 1,000,000, d = 20,000$$

مجموع حقوق دریافتی سالانه وی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

۱۲ n تعداد ماه‌های سال است.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2(1,000,000) + (12-1)20,000) = 6(2,000,000 + (11) \times 20,000)$$

$$= 6(2,000,000 + 220,000) = 6 \times (2,220,000) = 13,320,000$$

مجموع حقوق دریافتی سالانه وی (تومان) $S_{12} = 13,320,000$ است.

۱۶۴) برای به دست آوردن جمله ۳۲ام، در ابتدا لازم است جمله عمومی را به دست آوریم:

$$\text{جمله اول } a_1 = 4$$

$$d = a_{n+1} - a_n \Rightarrow d = 18 - 11 = 7$$

جمله عمومی برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 4 + (n-1)7 \Rightarrow a_n = 4 + 7n - 7 \Rightarrow a_n = 7n - 3$$

اکنون برای به دست آوردن جمله ۳۲ام، $n = 32$ را قرار می‌دهیم:

$$a_n = 7n - 3 \xrightarrow{n=32} a_{32} = 7 \times (32) - 3 = 224 - 3 = 221$$

جمله ۳۲ام برابر است با:

$$a_{32} = 221$$

۱۶۵) در دنباله حسابی، می‌دانیم که اختلاف مشترک برابر با تفاضل دو جمله متوالی است، بنابراین:

$$d = 61 - 53 = 8, a_1 = 7$$

در نتیجه جمله عمومی دنباله ذکر شده برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_n = 7 + (n-1)8 \Rightarrow a_n = 7 + 8n - 8 \Rightarrow a_n = 8n - 1$$

برای به دست آوردن جمله سیزدهم کافیست در جمله عمومی به جای n مقدار ۱۳ را قرار دهیم:

$$a_n = 8n - 1 \xrightarrow{n=13} a_{13} = 8 \times (13) - 1 = 104 - 1 = 103$$

جمله سیزدهم دنباله حسابی صورت سوال برابر است با: $a_{13} = 103$

۱۶۶) ضریب n در جمله عمومی شیب نمودار را نشان می‌دهد که مثبت بودن شیب به منزله افزایشی بودن و منفی بودن شیب به منزله کاهشی بودن دنباله و صفر بودن شیب به منزله ثابت بودن دنباله است.

$$a_n = \frac{1}{4} + \underbrace{(x+3)}_{\text{شیب}} n$$

دنباله روند افزایشی دارد. $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow$

دنباله روند ثابتی را طی می‌کند. $x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$

دنباله روند کاهشی دارد. $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow$

۱۶۷) برای به دست آوردن اختلاف مشترک، هنگامی که m واسطه میان اعدادمان قرار می‌دهیم برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

برای کاهشی بودن دنباله باید $a > b$ باشد.

$$a, \underbrace{\dots}_{m}, b$$



$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{-7 - 23}{5 + 1} = \frac{-30}{6} = -5, \quad a_1 = 23$$

در نتیجه جمله عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$= 23 + (n - 1)(-5) = 23 + 5 - 5n = -5n + 28 \Rightarrow a_n = -5n + 28$$

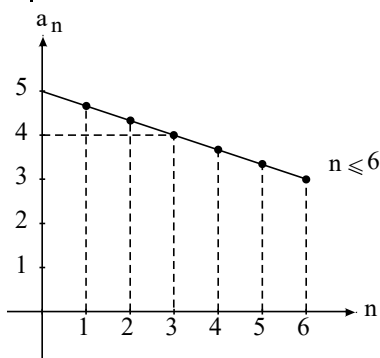
پس a_3 برابر است با:

$$n = 3 \Rightarrow a_n = -5n + 28 = -5(3) + 28 = -15 + 28 = 13$$

برای رسم نمودار دنباله، ابتدا دو نقطه دلخواه را به ضابطه دنباله داده و y را به دست می‌آوریم، سپس با وصل کردن دو نقطه به همدیگر نمودار تابع به دست می‌آید که به ازای n های طبیعی نمودار دنباله می‌شود. پس به ازای $n \leq 6$ نقاط دنباله را روی خط مشخص می‌کنیم. (البته می‌توان با محاسبه ۶ جمله اول نیز نقاط را مشخص کرده و نمودار دنباله را به ازای $n \leq 6$ رسم کرد.)

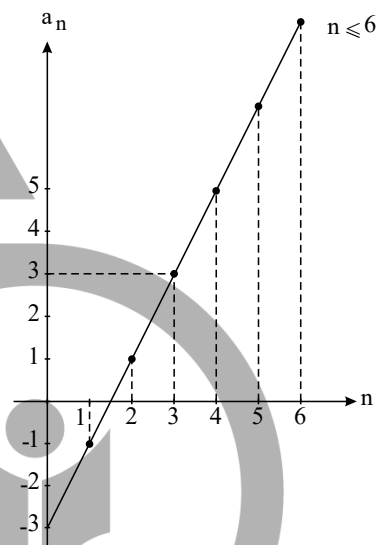
الف) $a_n = \frac{-n}{3} + 5 \Rightarrow y = \frac{-x}{3} + 5$

x	۰	۳
y	۵	۴



ب) $b_n = 2n - 3 \Rightarrow y = 2x - 3$

x	۰	۳
y	-۳	۳



$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad a_3 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 - a_1 &= \frac{1}{2} - 2 = \frac{1 - 4}{2} = \frac{-3}{2} \\ a_3 - a_2 &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{دنباله حسابی نیست.}$$

$$a_1 = a_1 + 5 = -1 + 5 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 5 = 4 + 5 = 9$$

$$a_3 = a_2 + 5 = 9 + 5 = 14$$

$$\Rightarrow -1, 4, 9, 14, \dots$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 - a_1 &= 4 - (-1) = 5 \\ a_3 - a_2 &= 9 - 4 = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{دنباله حسابی است.}$$

$$a_1 = 5a_1 + 1 = 5 \times (-1) + 1 = -5 + 1 = -4$$

$$a_2 = 5a_1 + 1 = 5 \times (-4) + 1 = -20 + 1 = -19$$

۱۶۹

الف

ب

پ



$$a_5 = 5a_4 + 1 = 5 \times (-19) + 1 = -95 + 1 = -94$$

$$\Rightarrow -1, -4, -19, -94, \dots$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 - a_1 &= -4 - (-1) = -4 + 1 = -3 \\ a_3 - a_2 &= -19 - (-4) = -19 + 4 = -15 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{دنباله حسابی نیست.}$$

$$a_{1+1} - a_1 = a_2 - a_1 = 1$$

$$a_{2+1} - a_2 = a_3 - a_2 = 2$$

$$a_{3+1} - a_3 = a_4 - a_3 = 3$$

اختلاف هر دو جمله متوالی مقدار متفاوتی می‌شود، پس دنباله حسابی نیست. $\times$

۱۷۰

الف

پاسخ: اگر n عدد بین a و b داشته باشیم:

جملات دنباله تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، پس یعنی تفاضل هر دو جمله متوالی آن برابر با مقدار ثابت $d = a_n - a_{n-1}$ (اختلاف مشترک) است.

$$\underbrace{\overset{d}{a}, \overset{d}{a_1}, \overset{d}{a_2}, \dots, \overset{d}{a_n}, b}_{n+2}$$

تعداد کل جملات برابر با $n + 2$ است، یعنی $b = a_{n+2}$ و $a = a_1$ داریم:

$$b - a = a_{n+2} - a_1 = a_1 + (n+1)d - a_1 = (n+1)d$$

$$\Rightarrow b - a = (n+1)d$$

اختلاف مشترک برابر است با:

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 10 \\ b &= 18 \\ n &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = \frac{b - a}{n + 1} \Rightarrow d = \frac{18 - 10}{3 + 1} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow 10, 12, 14, 16, 18$$

در دنباله حسابی تعداد منتهی‌ها $a_8 = 210$ و $a_{15} = 70$ است، پس برای به دست آوردن اختلاف مشترک داریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{a_8 - a_{15}}{8 - 15} = \frac{210 - 70}{8 - 15} = \frac{140}{-7} = -20$$

از طرفی در جمله عمومی دنباله داریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

پس با جای‌گذاری در جمله پنجم برای a_1 داریم:

$$a_8 = a_1 + (8 - 1)(-20)$$

$$a_8 = a_1 + (7)(-20) \Rightarrow 210 = a_1 + (-140) \Rightarrow a_1 = 210 + 140 \Rightarrow a_1 = 350$$

$$\text{اختلاف مشترک: } d = 4 - 2 = 2, a_1 = 2$$

مجموع n جمله اول از دنباله حسابی با جمله اول a_1 برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\Rightarrow 30 = \frac{n}{2}(4 + (n - 1) \times 2)$$

$$\Rightarrow 30 = \frac{n}{2}(4 + 2n) \Rightarrow 30 = n + n^2$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Rightarrow (n - 5)(n + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \text{ ق ق} \\ n = -6 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$a, b, c \xrightarrow{\text{شرط دنباله حسابی}} 2b = a + c \text{ یا } b = \frac{a + c}{2}$$

$$2p, -\frac{13}{2}, p - 1 \Rightarrow -\frac{13}{2} = \frac{2p + (p - 1)}{2} \Rightarrow 3p - 1 = -13 \Rightarrow 3p = -12 \Rightarrow p = -4$$

$$\Rightarrow \text{جملات دنباله: } -8, -\frac{13}{2}, -5, \dots \Rightarrow a_1 = -8$$



$$d = -\frac{13}{2} - (-8) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$a_n = 1, \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 1 = -8 + (n-1)1,5$$

$$1 = -8 + 1,5n - 1,5 \Rightarrow 1,5n = 10,5 \Rightarrow n = \frac{10,5}{1,5} = 7$$

$$a_1 = 3, \quad d = 5, \quad a_n = 203$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 203 = 3 + (n-1) \times 5 \Rightarrow n-1 = \frac{200}{5} = 40 \Rightarrow n = 41$$

$$S_{41} = \frac{41}{2}(2 \times 3 + 40 \times 5) = 4223$$

۱۷۴

۱۷۵

با توجه به نمودار جمله دوم برابر ۹ و جمله چهارم برابر ۱۷ است:

$$\times (-) \begin{cases} a_4 = a_1 + d = 9 \\ a_6 = a_1 + 3d = 17 \\ 2d = 8 \rightarrow d = 4 \end{cases}$$

$$a_1 + 4 = 9 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$\text{جمله عمومی: } a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1) \times 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$$

$$a_n = 65 \Rightarrow 4n + 1 = 65 \Rightarrow 4n = 64 \Rightarrow n = 16$$

۱۷۶ میانگین داده‌ها برابر است با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها:

$$\bar{x} = \frac{15 + 25 + 35 + 45}{4} = 30$$

۱۷۷ میانگین داده‌ها برابر است با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها:

$$\bar{x} = \frac{20 + 4 + 9 + 12 + 3 + 10 + 5}{7} = \frac{63}{7} = 9$$

۱۷۸

$$1) \quad 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$$

$$2) \quad \left(\frac{3^6}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

$$3) \quad 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{(-\frac{1}{2})} = 5^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})} = 5^0 = 1$$

$$4) \quad 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = (4^2)^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$5) \quad (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$$

$$6) \quad \left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} = \frac{a^2}{a^1} = a^1 = a$$

$$7) \quad 3^{0,26} \times 3^{0,74} = 3^{0,26+0,74} = 3^1 = 3$$

$$8) \quad (m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{2}{3}} \cdot n^1 \cdot m^1 \cdot n^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{5}{3}} \cdot n^{\frac{5}{2}} = (mn)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(mn)^5} = \sqrt[6]{(mn)^4 mn} m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{2}} \sqrt{mn}$$

۱۷۹

$$\text{جمله عمومی دنباله هندسی } a_n = a_1 r^{n-1}, \quad a_n = 6$$

$$6 = 1536 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 256 = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2^8 = 2^{n-1} \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

جمله نهم برابر ۶ می‌باشد.

$$\text{جمله عمومی دنباله هندسی } S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_9 = 1536 \times \frac{(1-\frac{1}{2})^9}{1-\frac{1}{2}} = \cancel{3072}^6 \times \frac{511}{512} = 3066$$

۱۸۰ جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ است:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_3 = 27 \Rightarrow a_1 r^2 = 27 \quad (1)$$

و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است:



$$a_5 = 243 \Rightarrow a_1 r^4 = 243 \quad (2)$$

دو طرف روابط (۱) و (۲) را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{27}{243} = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} \Rightarrow r = 3$$

نسبت مشترک به دست آمده را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$a_1 (3)^2 = 27 \Rightarrow a_1 = \frac{27}{9} = 3$$

بنابراین جمله هفتم برابر است با:

$$a_7 = a_1 r^6 = 3 \times 3^6 = 3^7 = 2187$$

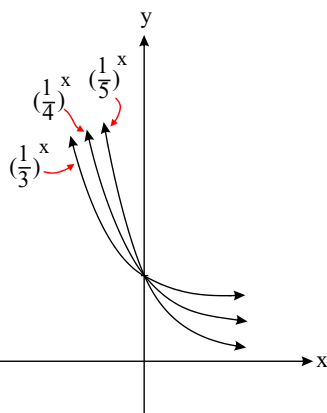
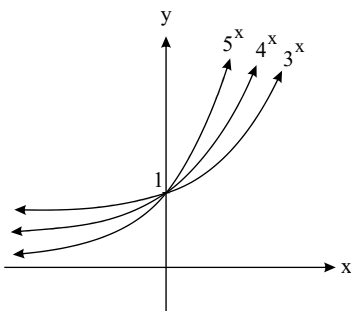
۱۸۱ اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، همواره خواهیم داشت: $b^2 = ac$ بنابراین:

$$(x+2)^2 = x(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x$$

$$x = -4$$

۱۸۲



۱۸۳



$$1 \xrightarrow{\frac{5700}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\frac{5700}{4}} \frac{1}{4} = 25\%$$

$$2 \times 5700 = 11400 \text{ (سال)} = 114 \text{ (قرن)}$$

۱۸۴

۱۸۵ از آخر به اول سؤال، فلش‌گذاری می‌کنیم:

$$80gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 40gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 20gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 10gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 5gr$$

پس مقدار اولیه این عنصر، $80gr$ بوده است.

۱۸۶ از آخر سؤال به اول سؤال فلش‌گذاری می‌کنیم:

$$24gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 12gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 6gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 3gr$$

پس طی ۳ دوره زمانی $24gr$ به $3gr$ رسیده است؛ بنابراین نیمه‌عمر برابر است با $\frac{30}{3} = 10$ ساعت.

۱۸۷ بهتر است با استفاده از فلش‌گذاری از آخر به اول سؤال برگردیم:

$$1280gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 640gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 320gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 160gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 80gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 40gr \xleftarrow[100 \text{ سال}]{\times 2} 20gr$$

در نتیجه مقدار اولیه $1280gr$ است.



۱۸۸

با توجه به رشد منفی از دستور نمایی $f(t) = c(1-r)^t$ استفاده می‌کنیم.

$$f(t) = c(1-r)^t = 40,000,000 \times \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{18} = 40,000,000 \times (0.99)^{18}$$

ابتدا ضریب رشد آن‌ها را به دست می‌آوریم: ۱۸۹

$$f(t) = c(1+r)^t \xrightarrow{\text{پس از ۳۵ سال ۲ برابر می‌شود}} 2c = c(1+r)^{35} \Rightarrow 2 = (1+r)^{35} \quad (1)$$

حال اگر بخواهیم این تعداد را پس از ۷۰ سال پیدا کنیم:

$$f(70) = 2(1+r)^{70} = 2((1+r)^{35})^2 \stackrel{\text{با توجه به (1)}}{=} 2(2)^2 = 2 \times 4 = 8$$

روش دوم:

$$\begin{array}{ccc} \text{۳۵ سال} & & \text{۳۵ سال} \\ ۷ \text{ میلیارد} & \xrightarrow{\times 2} & ۱۴ \text{ میلیارد} \xrightarrow{\times 2} ۲۸ \text{ میلیارد} \end{array}$$

۱۹۰

با توجه به فرمول رشد نمایی و مقادیر داده شده مسئله را حل می‌کنیم.

$$f(t) = c(1+r)^t$$

$$f(3) = 100,000,000 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right)^3 = 100,000,000 \times (1.2)^3 = 100,000,000 \times 1.728 = 172,800,000 \text{ تومان}$$

الف: تابع $f(x)$ چون a یا همان $\frac{1}{3}$ از ۱ کوچکتر است کاهشی و $g(x)$ افزایشی است. ۱۹۱

ب) برای تعیین محل برخورد منحنی با محور عرض‌ها (y) کافی است به متغیر x عدد صفر بدهیم.

$$f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$g(0) = 2^0 + 1 = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

هر عددی را می‌توانیم به جای x قرار دهیم، بنابراین داریم: ۱۹۲

دامنه: $D_f: \mathbb{R}$

$$(1): f(x) = 2^x$$

$$(2): f(x) = 3^x$$

$$(3): f(x) = 4^x$$

$$40gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۸ ساعت}} 20gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۸ ساعت}} 10gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۸ ساعت}} 5gr$$

بهتر است روش فلش‌گذاری و از آخر به اول سؤال را حل کنیم: ۱۹۳

مقدار اولیه ۴۰ گرم بوده است. ۱۹۴

$$\sqrt[3]{16^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{(2^4)^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} \\ (\sqrt{1000})^0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} + 1$$

۱۹۵ ریشه دوم مثبت $\frac{1}{3}$ برابر $\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ است که چون مخرج کسر کوچکتر شده کل کسر بزرگتر می‌شود به عبارتی اعداد بین صفر و یک ریشه دوم مثبتشان از



خودشان بزرگتر است.

۱۹۹

با توجه به تعریف ریشه چهارم داریم:

$$x^4 = 256 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{256} = \pm \sqrt[4]{2^8} = \pm 2^2 = \pm 4$$

۲۰۰

$$\text{ریشه سوم عدد } 270 = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{10^3}} = \frac{3}{10}$$

$$\text{ریشه چهارم عدد } 81000 = \sqrt[4]{\frac{81}{10000}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{10^4}} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0.09$$

۲۰۱

$$\text{طرفین به توان ۲} \Rightarrow -\sqrt{x} = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{طرفین به توان ۳} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -3 \Rightarrow x = -27$$

۲۰۲

$$\sqrt[4]{2x+1} = -3 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴}} 2x+1 = 81 \Rightarrow 2x = 80 \Rightarrow x = 40$$

$$x \text{ ریشه دوم} = \pm \sqrt{40} = \pm \sqrt{2^3 \times 5} = \pm \sqrt{2^2 \times 2 \times 5} = \pm 2\sqrt{10}$$

۲۰۳

$$\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |1-\sqrt{5}| + |\sqrt{5}-2| = -(1-\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-2) = -1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5} - 3$$

داخل قدر مطلق مثبت اسلخل قدر مطلق منفی است

۲۰۴

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a^3} = a \\ \sqrt[3]{a^3} = |a| = -a \Rightarrow \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^3} = a - a = 0 \end{cases}$$

a منفی است.

۲۰۵

$$\sqrt[5]{(\sqrt{3}-1)^5} = \sqrt{3}-1$$

$$\sqrt[6]{(2-2\sqrt{3})^6} = |2-2\sqrt{3}| = -(2-2\sqrt{3}) = -2+2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}-1 - (-2+2\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1+2-2\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}$$

۲۰۶

$$\left. \begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} &= (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3 \times 2}{3}} = 2^2 = 4 \\ 27^{\frac{1}{3}} &= (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3 \times 1}{3}} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{1}{3}} = 4 - 3 = 1$$

۲۰۷

$$\left. \begin{aligned} 243^{\frac{2}{5}} &= (3^5)^{\frac{2}{5}} = 3^2 = 9 \\ 1000^{\frac{1}{3}} &= (10^3)^{\frac{1}{3}} = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 243^{\frac{2}{5}} - 4(1000)^{\frac{1}{3}} = 9 - 4 \times 10 = 9 - 40 = -31$$

۲۰۸

$$\frac{y}{x} = \frac{125^k}{5^{3k-1}} = \frac{(5^3)^k}{5^{3k-1}} = \frac{5^{3k}}{5^{3k-1}} = 5^{3k-3k+1} = 5 \Rightarrow y = 5x$$

۲۰۹

$$3^{x+1} + 3^x = 36 \Rightarrow 3^x \times 3^1 + 3^x = 36 \Rightarrow 3^x(3+1) = 36 \Rightarrow$$

$$3^x \times 4 = 36 \Rightarrow 3^x = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

۲۱۰



$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} &= (2^{-4})^{\frac{1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

۲۱۱

$$\left\{ \begin{aligned} 125^{\frac{1}{5}} &= (5^3)^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{3}{5}} = \sqrt{5} \\ 125^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{125} \\ 16^{\frac{3}{4}} &= (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8 \end{aligned} \right. \Rightarrow \sqrt{5} \times \sqrt{125} = \sqrt{5 \times 5^3} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$$

$$A = 25 + 8 = 33$$

۲۱۲ اولاً ۱۸۰ دقیقه معادل $\frac{180}{60} = 3$ ساعت است؛ پس داریم:

۲۱۳

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|2-\sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|1-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2-\sqrt{3} - \sqrt{3}(-1+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = -1$$

۲۱۴

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{1}{9}} &= \sqrt[4]{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^2}} = 3^{-\frac{1}{2}} \\ \left(27^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{5}} &= \left((3^3)^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{3 \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{5}} = 3^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3^{-\frac{1}{2}} \times 3^2 = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

۲۱۵

$$\sqrt[3]{A} = \frac{2}{3} \Rightarrow A = \frac{2^3}{3^3}$$

$$A \text{ ریشه دوم: } \pm\sqrt{A} = \pm\sqrt{\frac{2^3}{3^3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2}{9}\sqrt{6}$$

۲۱۶ با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله‌های هندسی خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= 6 \\ r &= \frac{-12}{6} = -2 \Rightarrow S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \\ S_n &= -2046 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow -2046 = 6 \times \frac{1-(-2)^n}{1+2} = 6 \times \frac{1-(-2)^n}{3}$$

$$\Rightarrow -1023 = 1-(-2)^n \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Rightarrow (-2)^n = (-2)^{10} \Rightarrow n = 10$$

۲۱۷ می‌دانیم مجموع جملات دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به‌دست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= 2 \\ r &= \frac{1}{2} \Rightarrow S_{10} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1023}{1024} = 2 \times \frac{1023}{1024} \times 2 = \frac{1023}{256} \\ n &= 10 \end{aligned} \right.$$

۲۱۸ ابتدا نسبت مشترک را به‌دست آورده و سپس خواهیم داشت:

$$a_1 = 2$$

$$r = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_7 = 2 \times 3^6 = 1458$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_7 = 2 \times \frac{1-3^7}{1-3} = 2 \times \frac{1-3^7}{-2} = 3^7 - 1 = 2186$$



۲۱۹ می‌دانیم اگر b واسطه هندسی بین a و c باشد $b^2 = ac$ است. بنابراین:

$$b^2 = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 4 - 5 = -1 \Rightarrow b^2 = -1 \quad \text{غیر ممکن}$$

چون به رابطه غیر قابل قبول رسیدیم پس نمی‌توان واسطه هندسی بین این دو عدد تعیین کرد.

۲۲۰ ابتدا جملات چهارم و دهم دنباله داده شده را به دست می‌آوریم:

$$a_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_1 r^3 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 3 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{9} = \frac{8}{3^2} \\ r = \frac{2}{3} \Rightarrow a_{10} = a_1 r^9 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{512}{3^8} \end{cases}$$

واسطه هندسی بین دو عدد a و c برابر است با: $b^2 = ac$

$$b^2 = \frac{512}{3^8} \times \frac{8}{3^2} = \frac{2^9 \times 2^3}{3^8 \times 3^2} = \frac{2^{12}}{3^{10}} \Rightarrow b = \pm \frac{2^6}{3^5} = \pm \frac{64}{243}$$

۲۲۱ نیمه عمر یک دارو - $\frac{t}{2}$

۲۲۲ با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_5 = 12 \Rightarrow a_1 r^4 = 12 \\ a_8 = 96 \Rightarrow a_1 r^7 = 96 \end{aligned} \xrightarrow{\text{طرفین را بر هم تقسیم می‌کنیم}} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$r = 2$ را در یکی از رابطه‌های بالا جایگزین می‌کنیم:

$$a_1 r^4 = 12 \Rightarrow a_1 \times 2^4 = 12 \Rightarrow a_1 \times 16 = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

بنابراین جمله یازدهم برابر است با:

$$a_{11} = a_1 r^{10} = \frac{3}{4} \times 2^{10} = 3 \times 2^8 = 768$$

۲۲۳ می‌دانیم واسطه هندسی بین دو عدد a و c را اگر b بنامیم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$b^2 = ac$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$b^2 = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \Rightarrow b^2 = 5 - 3 = 2 \Rightarrow b = \pm \sqrt{2}$$

۲۲۴ با استفاده از جمله اول و نسبت مشترک به سوالات پاسخ می‌دهیم:

$$a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(الف)

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_8 = a_1 r^7 = \frac{1}{2} \times 2^7 = 64$$

(ب)

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = \frac{a_1 r^{11}}{a_1 r^9} = r^2 = 2^2 = 4$$

۲۲۵ کافی است جملات اول و دوم را به دست آوریم تا از تقسیم آن‌ها نسبت مشترک به دست آید:

$$\begin{cases} n = 1 \rightarrow a_1 = 3 \times 2^{3(1)-1} = 3 \times 2^2 \\ n = 2 \rightarrow a_2 = 3 \times 2^{3(2)-1} = 3 \times 2^5 \\ r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3 \times 2^5}{3 \times 2^2} = 2^3 = 8 \end{cases}$$

۲۲۶ جملات دوم، ششم و دهم جملاتی متساوی الفاصله هستند، زیرا:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{ششم} & & & \text{دوم} \\ & & & b & & & a \\ & & & & & & c \end{array}$$

بنابراین بین آن‌ها رابطه $b^2 = ac$ برقرار است:

$$x^2 = (x+2)(2-x) \Rightarrow x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

۲۲۷ با توجه به $a_{n+1} = -3a_n$ به این نتیجه می‌رسیم که هر جمله -3 برابر جمله قبل است، پس $r = -3$ و $a_1 = -2$ است.

(الف)

$$a_n = a_1 r^{n-1} = -2 \times (-3)^{n-1}$$

(ب)

$$a_8 = a_1 r^7 = -2 \times (-3)^7 = -2 \times (-2187) = 4374$$

۲۲۸ (الف) با اضافه کردن ۲ واحد به هر جمله، دنباله زیر ایجاد می‌شود:



۴, ۸, ۲۰, ...

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{و} \quad r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

چون نسبت مشترک ثابت نیست، پس دنباله به دست آمده هندسی نیست.

(ب) با ضرب نمودن $\sqrt{2}$ در هر جمله، دنباله زیر ایجاد می‌شود:

$2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 18\sqrt{2}, \dots$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 3 \quad \text{و} \quad r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{18\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = 3$$

پس دنباله به دست آمده هندسی است.

(۲۲۹) با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n = 18 \Rightarrow a_1 r^{n-1} = 18 \xrightarrow{r=\sqrt{2}} a_1 \times (\sqrt{2})^{n-1} = 18 \Rightarrow a_1 \times 2 = 18 \Rightarrow a_1 = 9$$

بنابراین جمله ششم برابر است با:

$$a_6 = a_1 r^5 = 9 \times (\sqrt{2})^5 = 9 \times \sqrt{32} = 9 \times 4\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$$

(۲۳۰) کافی است جملات اول و دوم را به دست آوریم.

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1-1} = 20$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2-1} = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$$

بنابراین نسبت مشترک برابر است با:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{40}{3}}{20} = \frac{40}{3} \times \frac{1}{20} = \frac{2}{3}$$

(۲۳۱) کافی است نسبت مشترک را به دست آوریم و به کمک فرمول جمله عمومی دنباله هندسی، جمله عمومی این دنباله را بدست آوریم.

$$r = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}}, a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^{n-2} \times 4} = 4^{2-n}$$

(۲۳۲) جمله عمومی به ما داده شده است، بنابراین به راحتی می‌توان جملات پنجم و ششم را به دست آورد:

$$a_5 = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$$

$$a_6 = 2 \times 3^{6-1} = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$$

$$a_5 + a_6 = 162 + 486 = 648$$

(۲۳۳) با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توان نوشت:

$$a_n = a_1 r^{n-1}, a_1 = -2, r = \sqrt{2}$$

$$a_8 = a_1 r^7 = -2 \times (\sqrt{2})^7 = -2 \times (\sqrt{2})^6 \times \sqrt{2} = -2 \times 2^3 \times \sqrt{2} = -16\sqrt{2}$$

(۲۳۴) ابتدا نسبت مشترک را محاسبه کرده و با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی، جمله هفتم به دست می‌آید:

$$a_1 = 96$$

$$r = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_7 = a_1 r^6 = 96 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 96 \times \frac{1}{64} = \frac{96}{64} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

(۲۳۵) هر جمله $\frac{50}{100}$ - جمله قبلی خود است، پس نسبت مشترک $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ است و $a_1 = 1024$ است. بنابراین:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_5 = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1024}{2^4} = \frac{2^{10}}{2^4} = 2^6 = 64$$

(۲۳۶) می‌دانیم مجموع جملات دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$a_1 = 5, r = \frac{10}{5} = 2, S_n = 155, n=?$$

$$155 = 5 \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow -31 = 1-2^n \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$



۲۳۷ جمله پنجم ۴۰ است بنابراین:

$$a_5 = a_1 r^4 = 40 \quad (1)$$

نسبت مشترک $r = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ است پس با جایگذاری در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 40 \Rightarrow a_1 \times \frac{1}{16} = 40 \Rightarrow a_1 = 16 \times 40 = 640$$

جمله هشتم را نیز با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توان اینگونه نوشت:

$$a_8 = a_1 r^7 = 640 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{640}{128} = 5$$

۲۳۸ می‌دانیم جمله n ام دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \\ a_1 &= 256 \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 2 = 256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{256} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8 \\ r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنابراین هشتمین جمله این دنباله برابر ۲ است.

۲۳۹ باید بینیم جمله چندم این دنباله ۵۱۲ است.

$$a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, a_n = 512$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 512 = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} \Rightarrow 1024 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^{10} = 2^{n-1} \Rightarrow 10 = n-1 \Rightarrow n = 11$$

بنابراین ۱۱ جمله دارد.

۲۴۰ با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توان نوشت:

$$a_7 = 27 \rightarrow a_1 r^6 = 27 \quad (1)$$

$$a_5 = 243 \rightarrow a_1 r^4 = 243 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{27}{243} = \frac{1}{9} \Rightarrow r = \pm 3$$

این نسبت مشترک را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$a_1 \times (\pm 3)^6 = 27 \Rightarrow a_1 \times 9 = 27 \Rightarrow a_1 = 3$$

بنابراین جمله نهم برابر است با:

$$a_9 = a_1 r^8 = 3 \times (\pm 3)^8 = 3^9$$

۲۴۱ با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_7 = \frac{1}{r^6} \rightarrow a_1 r^6 = \frac{1}{r^6} \quad (1)$$

$$a_{10} = 64 \rightarrow a_1 r^9 = 64 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^6} = \frac{\frac{1}{r^6}}{64} = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} \Rightarrow r^6 = 2^7 \Rightarrow r = 2$$

$r = 2$ را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم تا a_1 به‌دست آید:

$$a_1 \times 2^6 = \frac{1}{2^6} \Rightarrow a_1 \times 64 = \frac{1}{2^6} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2^6 \times 64} = \frac{1}{8}$$

بنابراین جمله عمومی این دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{8} \times 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{2^3} = 2^{n-4} \Rightarrow a_n = 2^{n-4}$$

۲۴۲ از عبارت $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ به این نتیجه می‌رسیم که حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبلی برابر ۲ است، بنابراین نسبت مشترک ۲ است. پس:

$$a_1 = 3, r = 2, S_n = 189, n = ?$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow 189 = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow 189 = -3 \times (1-2^n)$$

$$\Rightarrow -63 = 1-2^n \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

۲۴۳ نسبت مشترک را محاسبه می‌کنیم و بعد به کمک جمله عمومی، جمله هشتم را بدست می‌آوریم.

$$a_1 = 4$$



$$r = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$$

جمله هشتم برابر است با:

$$a_8 = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^7 = 4 \times \frac{(\sqrt{2})^8}{2^7} \sqrt{2} = \frac{4 \times 2^4}{2^7} \sqrt{2} = \frac{2^5}{2^3} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۴۴ ابتدا x را به دست می آوریم، اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ است:

$$x^2 = (8 - x)(12 + x)$$

حل معادله درجه دوم به کمک تجزیه:

$$x^2 = 96 + 8x - 12x - x^2 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 8)(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$x = 6 \xrightarrow{\text{دنباله را می نویسیم}} 2, 6, 18, \dots$$

$$a_1 = 2, r = 3$$

$$\Rightarrow a_8 = a_1 r^7 = 2 \times 3^7 = 2 \times 2187 = 4374$$

۲۴۵ بهتر است مثالی بزنیم؛ دنباله $2, 4, 8, 16, \dots$ را در نظر بگیرید؛ نسبت مشترک $r = \frac{4}{2} = 2$ است. حال همه جمله ها را در $\sqrt{2}$ ضرب می کنیم:

$2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 16\sqrt{2}, \dots$ و سپس نسبت مشترک را به دست می آوریم:

$$r = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$$

پس نسبت مشترک تغییری نمی کند.

۲۴۶ مدت زمانی است که مقدار آن ماده به نصف مقدار اولیه خود می رسد.

۲۴۷ از $a_{n+1} = \sqrt{2} a_n$ به این نتیجه می رسیم که هر جمله $\sqrt{2}$ برابر جمله قبل از خود است، پس $r = \sqrt{2}$ است و $a_1 = \sqrt{2}$ می باشد:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_1 r = \sqrt{2} \times (\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \\ a_3 = a_1 r^2 = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{بنابراین: } a_2 + a_3 = 2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2} + 1)$$

۲۴۸

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -2 \xrightarrow{\text{یعنی هر جمله تقسیم بر جمله قبل خود برابر ۲- است.}} r = -2$$

$$a_1 = -3$$

$$\text{جمله چهارم } a_4 = a_1 r^3 = -3 \times (-2)^3 = -3 \times -8 = 24$$

$$\text{جمله هشتم } a_8 = a_1 r^7 = -3 \times (-2)^7 = -3 \times -128 = 384$$

بنابراین اگر b واسطه هندسی بین این دو عدد باشد، آنگاه داریم:

$$b^2 = 24 \times 384 \Rightarrow b = \pm 96$$

۲۴۹ می دانیم نسبت مشترک برابر است با:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3\sqrt{2}}{-3} = -\sqrt{2}$$

پس:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۵۰

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2}, S_5 = 15$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow 15 = \frac{a_1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow 15 = \frac{a_1\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}}$$



$$\Rightarrow -\frac{15}{2} = -\frac{15}{16}a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{16 \times 15}{2 \times 15} = 8$$

۲۵۱

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5 \\ \sqrt[3]{25} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{-125} - \sqrt[3]{25} = -5 - 5 = -10$$

۲۵۲ الف

$$D = (3^2 + 12^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}} = (9 + 144 + 16)^{\frac{1}{2}} = 169^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13$$

(ب)

$$D = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ می‌دانیم حجم کره برابر است با: } \frac{4}{3}\pi r^3$$

۲۵۳

$$\xrightarrow{\frac{3}{4} \times \text{طرفین}} \frac{3}{4}v = \pi r^3 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \pi} \frac{3v}{4\pi} = r^3$$

طرفین تساوی را به توان $\frac{1}{3}$ می‌رسانیم.

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(ب)

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{4\pi} \times \frac{32\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$$

۲۵۴

$$1) 8^x \times 9^5 = 72^5 = (8 \times 9)^5 = 8^5 \times 9^5 \Rightarrow x = 5$$

$$2) (0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7 \Rightarrow (0.36)^{x-2} = (0.36)^7$$

$$x - 2 = 7 \Rightarrow x = 9$$

$$3) (3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$4) \frac{x^5 \times 15^2}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^4 \Rightarrow \frac{x^5 \times 3^2 \times 5^2}{3^7} = 5^4 \Rightarrow \frac{x^5}{3^5} = 5^2 \Rightarrow x^5 = 3^5 \times 5^2 = 15^5 \Rightarrow x = 15$$

$$\text{می‌دانیم } \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}} \text{ است.} \quad 255$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

۲۵۶

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3^3}{2^3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3^{-1}}{2^{-1}} = \frac{2}{3} \\ 243^{-\frac{2}{5}} = (3^5)^{-\frac{2}{5}} = 3^{5 \times -\frac{2}{5}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

۲۵۷

$$(0.008)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^3}{10^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2^{-2}}{10^{-2}} = \frac{10^2}{2^2} = \frac{100}{4}$$

۲۵۸



$$a = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} \Rightarrow 9a^{\frac{2}{3}} = 9(\sqrt{27})^{\frac{2}{3}} = 9((27)^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} \\ = 9 \times 27^{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = 9 \times 27^{\frac{1}{3}} = 9 \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 9 \times 3 = 27$$

۲۵۹

$$\left. \begin{array}{l} \text{ریشه سوم } 2^6: \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4 \\ \text{ریشه منفی دوم } 3^6: -\sqrt[2]{3^6} = -3^3 = -27 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \times -27 = -108$$

۲۶۰

$$(2/1)^6 \times (\frac{21}{10})^3 \times (\frac{1}{10})^5 = (2/1)^6 \times (2/1)^3 \times (2/1)^5 = (2/1)^{14}$$

۲۶۱

با توجه به تعریف ریشه سوم داریم:

$$x^3 = -125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

۲۶۲

با توجه به تعریف ریشه دوم داریم:

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

۲۶۳ اعداد منفی ریشه دوم ندارند، زیرا عدد منفی نمی‌تواند زیر رادیکال یا فرجه زوج قرار گیرد.

۲۶۴ ابتدا عدد مخلوط داده شده را به کسر تبدیل می‌کنیم و سپس آن را تجزیه کرده و خواهیم داشت:

$$3\frac{3}{8} \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \frac{8 \times 3 + 3}{8} = \frac{27}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}$$

۲۶۵

$$\sqrt[6]{x} = 6 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۶}} x = 3^6$$

$$x \text{ ریشه دوم} = \pm\sqrt[2]{3^6} = \pm 3^{\frac{6}{2}} = \pm 3^3 = \pm 27$$

۲۶۶

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = \sqrt{2} \\ \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^4} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

۲۶۷

$$S = 4\pi R^2$$

$$R^2 = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

۲۶۸ قطر مکعب مستطیل با طول و عرض و ارتفاع a, b, c از رابطه $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ بدست می‌آید، بنابراین:

$$\text{طول قطر} = \sqrt{(\sqrt{19})^2 + (2\sqrt{5})^2 + 5^2} = \sqrt{19 + 20 + 25} = \sqrt{64} = 8$$

۲۶۹

$$(3^x)^y = \frac{1}{9^5} \times 27$$

$$\Rightarrow 3^{yx} = \frac{1}{(3^2)^5} \times 3^3 = \frac{1}{3^{10}} \times 3^3 = \frac{1}{3^7} = 3^{-7}$$

$$\Rightarrow yx = -7$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7}{y} = -1$$

۲۷۰

$$A = \frac{(\delta \times \gamma)^2 \times \gamma^2 \times (2 \times \delta)^2}{(2 \times \gamma) \times \delta^{-1} \times \sqrt{2^2 \times \delta^{10}}} = \frac{\delta^2 \times \gamma^2 \times \gamma^2 \times 2^2 \times \delta^2 \times \delta}{2 \times \gamma \times 2 \times \delta^{10}} = \frac{\gamma^4 \times \delta^{10} \times 2^2}{\gamma \times 2^2 \times \delta^{10}} = \gamma^4$$

۲۷۱



$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{2} \\ & \sqrt[3]{3^4} + 2\sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{3^3 \times 2} - 2\sqrt[3]{2} \\ & 3\sqrt[3]{3} + 2 \times 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} \\ & = 7\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

۲۷۲

$$\begin{aligned} 3^{2x} \times \left(\frac{1}{24}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} &= 2^{2x+2} \Rightarrow 3^{2x} \times (3 \times 8)^{-2} \times 3^2 = 2^{2x+2} \Rightarrow 3^{2x} \times 2^{-6} = 2^{2x+2} \\ \Rightarrow 3^{2x-6} &= 2^{2x+2} \Rightarrow 6x - 6 = 2x + 2 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \\ 3^x &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

۲۷۳

طرفین به توان ۲ $\pm\sqrt{x} = x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0$

چون x مثبت است، پس $x = 0$ نیست. $x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases} \checkmark$

ریشه سوم $(6x+2)$: $\sqrt[3]{6(1)+2} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

۲۷۴

$$2 - 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \sqrt[6]{(2 - 2\sqrt{2})^6} = |2 - 2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} - 2 \quad (1)$$

$$\sqrt[5]{(2 - \sqrt{2})^5} = 2 - \sqrt{2} \quad (2)$$

بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow A = 2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

۲۷۵

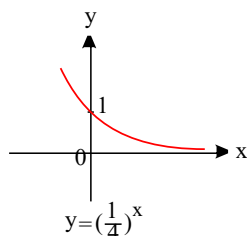
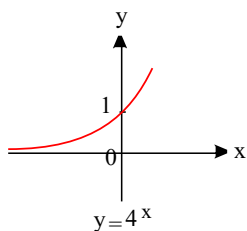
$$(0.3)^5 = 0.00243 \Rightarrow \text{ریشه پنجم} = 0.3 = \frac{3}{10}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow \frac{16}{81} \text{ ریشه چهارم مثبت} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{مجموع خواسته شده} = \frac{3}{10} + \frac{2}{3} = \frac{9+20}{30} = \frac{29}{30}$$

۲۷۶

$$8 \times 2^{x+1} = 2^{-x} \Rightarrow 2^3 \times 2^{x+1} = 2^{-x} \Rightarrow 2^{x+4} = 2^{-x} \Rightarrow x+4 = -x \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

۲۷۷



۲۷۸ (الف و ب)



سال	جمعیت موش‌ها	جمعیت گربه‌ها
۰	۲۳۵۷۶	۱۵۷۸۶
۱	۲۲۹۸۶	۱۶۰۷۰
۲	۲۲۴۱۱	۱۶۳۵۹
۳	۲۱۸۵۱	۱۶۶۵۳
۴	۲۱۳۰۵	۱۶۹۵۳
۵	۲۰۷۷۲	۱۷۲۵۸
۶	۲۰۲۵۳	۱۷۵۶۹
۷	۱۹۷۴۷	۱۷۸۸۵
۸	۱۹۲۵۳	۱۸۲۰۷
۹	۱۸۷۷۲	۱۸۵۳۵
۱۰	۱۸۳۰۲	۱۸۸۶۹



ستون اول:

$$f(t) = c(1+r)^t \text{ موش‌ها}$$

$$f(1) = 23576(1 - 0.025)^1 = 23576 = 22986.6 \approx 22986$$

$$f(1) = 15786 \times (1 + 0.018)^1 = 15786 \times 1.018 = 16070.148 \approx 16070$$

پ) پس از ده سال جمعیت گربه‌ها از موش‌ها بیشتر می‌شود.

ت) بین سال نهم و دهم جمعیت گربه‌ها و موش‌ها برابر می‌شود.

ث) تعداد گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود، پس همه موش‌ها از بین می‌روند ولی چون تعداد گربه‌ها خیلی زیاد می‌شود، جزیره را پر می‌کنند.

۲۷۹

$$f(t) = c(1+r)^t = 1000000 \times (1 + 0.06)^{10} = 1000000 \times (1.6)^{10} = 109,951,163$$

۲۸۰

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(10) = 4000000 \times (1.14)^{10} = 148288852.6$$

بنابراین میزان افزایش سرمایه پس از ۱۰ سال برابر است با:

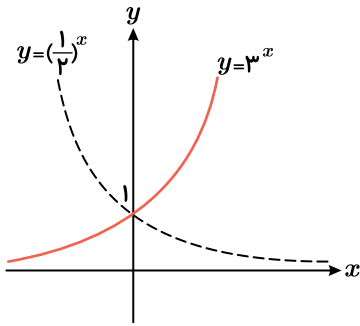
$$148288852.6 - 40000000 = 108288852.6$$

۲۸۱

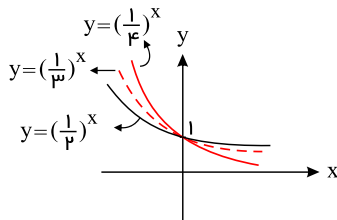


نمودار $y = 3^x$ افزایشی و $y = (\frac{1}{3})^x$ کاهشی است.

هر ۲ نمودار محور y ها در $y = 1$ قطع می کنند و محور x ها را قطع نمی کنند.
دو نمودار نسبت به محور y ها قرینه اند.



هر سه نمودار محور y ها را در $y = 1$ قطع می کنند و هر سه محور x ها را قطع نمی کنند. همچنین هر ۳ نمودار کاهشی اند.



الف) پس از ۱۱ مرحله $2^{11} = 2048 \Rightarrow 2^x = 2048 \Rightarrow x = 11$

ب) در مرحله هشتم $2^8 = 256$ سلول تکثیر شده است.

پ) بله: $y = 2^x$

۲۸۴

۶ گرم باقی می ماند. $6gr \Rightarrow 12gr \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 24gr \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 48gr \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 96gr$

روز ۲۸ = 14×2 : مدت زمان $1gr \Rightarrow 2gr \xrightarrow{14 \text{ روز}} 4gr$

ب) بهتر است با استفاده از روش فلش گذاری، سوال را از آخر به اول حل کنیم:

$$12,5 \xrightarrow[\times 2]{5700 \text{ سال}} 25 \xrightarrow[\times 2]{5700 \text{ سال}} 50 \xrightarrow[\times 2]{5700 \text{ سال}} 100 \text{ درصد اولیه}$$

قرن ۱۷۱ = سال $17100 = 3 \times 5700$: مدت زمان

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(t) = 1000(1 + \frac{20}{100})^2 = 1000 \times (1,2)^2 = 1000 \times 1,44 = 1440 \text{ (تومان)}$$

$400gr \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 200gr \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 100gr \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 50gr \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 25gr$

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow 12,100,000 = 10,000,000(1+r)^2$$

$$\Rightarrow \frac{121}{100} = (1+r)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{11}{10} = 1+r \Rightarrow r = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$$

۲۹۰ از شکل می توان نتیجه گرفت تابع $f(x) = a^x$, $a > 1$ است:

$$m - 1 > 1 \Rightarrow \boxed{m > 2}$$

$$f(t) = c(1+r)^t$$

$$f(10) = 1,000,000 \times (1 + \frac{6}{100})^{10} = 1,000,000 \times (1,06)^{10} \simeq 1,000,000 \times 1,780 = 1,780,000$$

۲۹۲ می دانیم بعد از هر نیمه عمر مقدار دارو نصف می شود، بنابراین اگر مقدار اولیه را ۱ فرض کنیم:

$$1 \xrightarrow{\text{بعد از یک نیمه عمر}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بعد از یک نیمه عمر}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{بعد از یک نیمه عمر}} \frac{1}{8}$$

پس بعد از ۳ نیمه عمر $\frac{1}{8}$ آن باقی می ماند و برحسب درصد خواهیم داشت:

$$\frac{1}{8} \times 100 = 12,5\%$$

پس ۱۲,۵ درصد دارو باقی می ماند.



۲۹۳ بعد از هر نیمه عمر مقدار دارو نصف می‌شود، بنابراین:

$$۸۰^{mg} \longrightarrow ۴۰^{mg} \longrightarrow ۲۰^{mg} \longrightarrow ۱۰^{mg} \longrightarrow ۵^{mg}$$

بنابراین بعد از گذشت ۴ نیمه‌عمر ۵ میلی‌گرم از آن در بدن باقی می‌ماند.

۲۹۴

چون تابع نمایی داده‌شده، افزایشی است، پس حتماً پایه بزرگ‌تر از یک است. بنابراین:

$$b - ۲ > ۱ \Rightarrow b > ۳$$

۲۹۵

چون $f(x) = ۳^x$ است با توجه به نقاط داده‌شده داریم:

$$f(۲) = a \Rightarrow ۳^۲ = a \Rightarrow a = ۹$$

و از طرفی داریم:

$$f(b) = \frac{1}{۸۱} \Rightarrow ۳^b = \frac{1}{۸۱} \Rightarrow ۳^b = \frac{1}{۳^۴} = ۳^{-۴} \Rightarrow b = -۴$$

$$\Rightarrow ab = ۹ \times -۴ = -۳۶$$

۲۹۶

$$f(x) = a^x \Rightarrow f(b) = a^b = \frac{1}{۴} \quad (۱) \quad , \quad f(۰) = a^۰ = ۱ = \frac{b}{۲} \Rightarrow b = ۲ \quad (۲)$$

رابطه (۲) را در (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$a^۲ = \frac{1}{۴} \xrightarrow{a>۰} a = \frac{1}{۲}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{۲}\right)^x \rightarrow f(-۲) = \left(\frac{1}{۲}\right)^{-۲} = (۲^{-۱})^{-۲} = ۲^۲ = ۴$$

۲۹۷ افزایش-کاهش. زیرا:

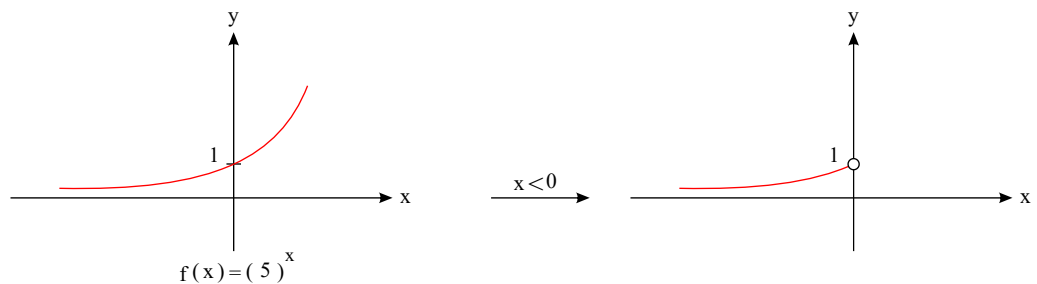
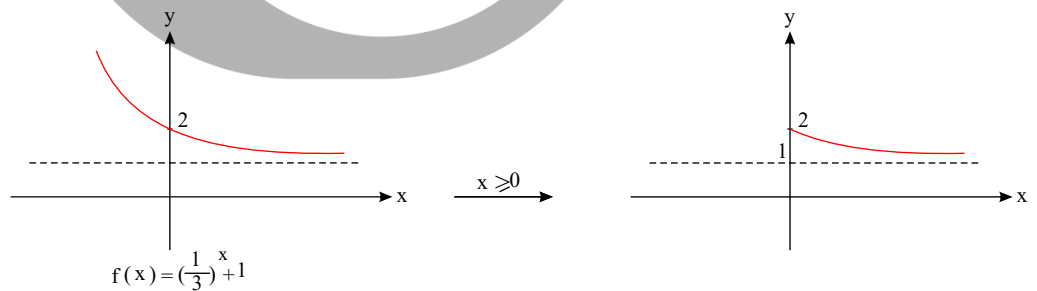
در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > ۱$ باشد، با افزایش تعداد x ، افزایش می‌یابد و اگر $۰ < a < ۱$ باشد با افزایش مقدار x ، کاهش می‌یابد بنابراین خواهیم داشت:

$$y = (\sqrt{۳})^x \xrightarrow{\sqrt{۳}>۱} \text{افزایش می‌یابد.}$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{۲}}\right)^x \xrightarrow{۰<\frac{1}{\sqrt{۲}}<۱} \text{کاهش می‌یابد.}$$

۲۹۸

برای رسم نمودار تابع f ، هر ضابطه را در دامنه خودش رسم می‌کنیم. بنابراین:



۲۹۹

$$f(-۲) = ۳^{-۲} = \frac{1}{۳^۲} = \frac{1}{۹}$$



$$g(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$g(2) = 2^2 = 4$$

$$\frac{(f \cdot g)(-2)}{(f + g)(2)} = \frac{f(-2)g(-2)}{f(2) + g(2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{4}{1}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1 + 16}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{17}{4}} = \frac{4}{36 \times 17} = \frac{1}{153}$$

۳۰۰

می‌دانیم $f(x) = a^x$ به‌ازای $a > 1$ افزایشی است. پس:

$$m - 2 > 1 \Rightarrow m > 3$$

