



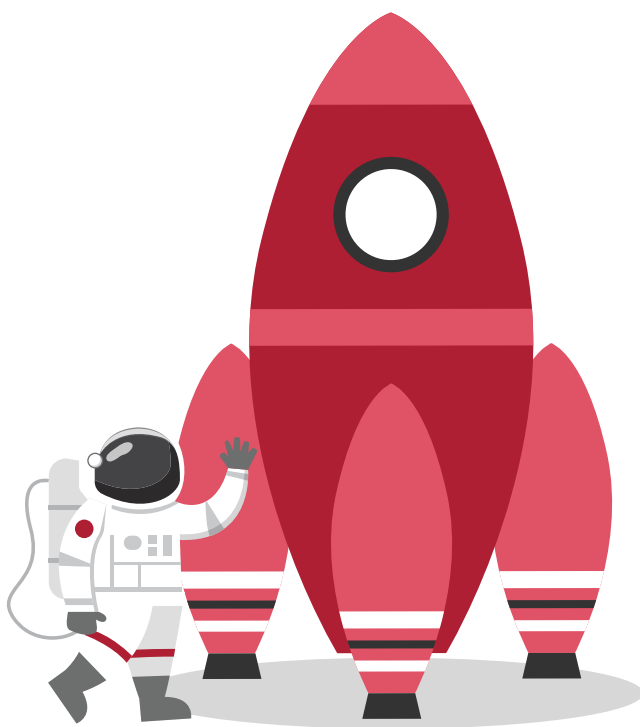
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

ریاضی و آمار ۲



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

ریاضی و آمار ۲ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان ریاضی : عارف بهرامنیا

فصل اول : منطق و استدلال ریاضی

گزاره ها و ترکیب گزاره ها

۱ ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(2 < 3) \wedge (4 \times 3 = 12)$ ب) $(5 > 3) \wedge (4 + 3 = 10)$

پ) $(3 < 2) \wedge (1,2 + 2,8 = 4)$ ت) $(\sqrt{9} = \pm 3) \wedge (\frac{x+2}{x+3} = \frac{2}{3})$

۲ اگر گزاره ای درست، q گزاره ای نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

- ۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$
- ۲) $(p \vee q) \vee r$
- ۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$
- ۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$
- ۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$
- ۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
- ۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

۳ کدامیک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

- الف) شما چند سال دارید؟
- ب) عدد ۲ عددی اول است.
- پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است.
- ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.
- ث) $2 + 3 \times 4 = 20$
- ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. ($n \in N$)
- چ) سیب قرمز از سیب زرد خوشمزه تر است.
- ح) لطفاً تخته را پاک کن.



- ۴) نوع ترکیب هر کدام از گزاره‌های زیر را مشخص کنید، سپس آن‌ها را با نماد گزاره‌ها بنویسید.
الف) الهه خواهر الهام است و الهه دختر ارژنگ است.
ب) ۲ عددی اول است یا ۳ عددی زوج است.

- ۵) در جای خالی چه گزاره‌ای (درست یا نادرست) قرار دهیم تا ارزش گزاره ترکیبی حاصل درست باشد؟
الف) عدد ۳۶ مربع کامل است و
ب) یا عدد ۱ عددی اول است.

- ۶) عکس نقیض گزاره شرطی زیر را بنویسید.
«اگر به مدرسه بروم آنگاه در درس‌هایم موفق می‌شوم.»

- ۷) در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ اگر p باشد، آنگاه ارزش گزاره شرطی به انتقای مقدم درست است.

- ۸) دلیل نادرستی هر یک از جملات زیر را بیان کنید.
الف) هر جمله خبری که فقط در حال حاضر، ارزش درستی یا نادرستی آن را بدانیم، یک گزاره است.
ب) تنها راه برای بیان نقیض یک گزاره آن است که فعل جمله را نفی کنیم.
پ) هر جمله خبری یک گزاره است.
ت) $(n \in N)n^2$ یک عدد زوج است، یک گزاره است.

- ۹) با رسم جدول ارزشی، درستی قوانین دموگان را نشان دهید.
الف) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
ب) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

- ۱۰) ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.
الف) - مجموعه اعداد گویا Q $(3 \in Q) \vee (2 \times 3 = 6)$
ب. - اعداد صحیح Z $(2 \notin Z) \vee (2 \in \text{اعداد اول})$

- پ. - $(\frac{5}{5} = 1) \vee (\frac{0}{7} \neq 0)$
ت. - اعداد گنگ Q' $(\sqrt{2} - 1 \notin Q') \vee (\frac{1}{2} \neq \frac{2}{4})$

- ۱۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) ارزش گزاره $(p \vee \sim p)$ ، همواره است.

ب) $Sign(-1000) = \dots\dots\dots$

پ) در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر p نادرست باشد، گزاره شرطی دارای ارزش درست است.



ت اگر $x \in Z$ باشد، حاصل عبارت $[x] + [-x]$ خواهد بود.

۱۲ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

الف

$$(p \vee r) \Rightarrow p$$

ب

$$(q \wedge r) \Rightarrow r$$

پ

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$$

ت

$$(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$$

ث

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

ج

$$(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$$

چ

$$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

ح

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$$

خ

$$(r \Rightarrow p) \wedge p$$

۱۳ اگر p را گزاره «۲ تنها عدد اول زوج است» و q را گزاره «هر مستطیلی یک مربع است» در نظر بگیریم، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف $p \wedge q$



ب $\sim (q \vee p)$

پ $\sim p \vee \sim q$

۱۴ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳	 اگر و تنها ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر آنگاه و برعکس.	✓	
۵	یک چهارضلعی مربع است، اگر و تنها آن چهارضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس.		

۱۵ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر آنگاه	✓	
۵	اگر آنگاه		✓
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر آنگاه ۹۹ اول است.		✓

۱۶ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴، عددی فرد یا عددی اول است.		
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا	✓	
۴	 یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.	✓	
۵	 یا		✓



- ۱۷) در هریک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هریک از گزاره‌های نقیض را مشخص کنید.
- الف) عدد ۵ زوج است.
- ب) تساوی « $2 \times 2 = 4$ » برقرار است.
- پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است.
- ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.
- ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد.
- ج) $(5 \times 4) > (3 \times 7)$

- ۱۸) با دو گزاره زیر گزاره‌های ترکیبی خواسته شده را بنویسید.
- عدد ۲، عددی اول است - $\sqrt{5}$ عددی گویا است
- الف) ترکیب عطفی
- ب) ترکیب فصلی

- ۱۹) در جای خالی چه گزاره‌ای (درست یا نادرست) قرار دهیم تا ارزش گزاره ترکیبی حاصل نادرست باشد؟
- الف) عدد π عددی گنگ است و
ب) عدد $\sqrt{5}$ عددی گویا است یا

- ۲۰) با توجه به گزاره‌های r, q, p گزاره‌های مرکب زیر را با عبارت کلامی بنویسید.
- $\sqrt{8}$ عددی گنگ است: p ، ۱۴ عددی فرد است: q ، ۲۴ مضرب ۳ است: r
- الف) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
- ب) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$

- ۲۱) گزاره را تعریف کنید و یک مثال برای آن بزنید.

- ۲۲) ترکیب فصلی دو گزاره زمانی درست است که و زمانی نادرست است که

- ۲۳) ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که و زمانی نادرست است که

- ۲۴) گزاره $p \vee \sim p$ گزاره‌ای همواره و گزاره $p \wedge \sim p$ گزاره‌ای همواره است.

- ۲۵) $p \vee q$ را ترکیب دو گزاره p و q می‌نامند.

- ۲۶) نقیض گزاره p را به صورت نمایش می‌دهند.

- ۲۷) ترکیب شرطی دو گزاره زمانی نادرست است که مقدم باشد و تالی نادرست باشد.



۲۸ در جدول وضعیت ارزشی ۳ گزاره p ، q و r در چند حالت حداقل دو گزاره درست است؟

۲۹ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

ب) $p \wedge \sim p$

الف) $p \vee \sim p$

۳۰ در هر حالت ارزش گزاره‌های p و q را تعیین کنید (درست $\equiv T$ و نادرست $\equiv F$)

ب) $(\sim p \vee q) \equiv F$

الف) $\sim (\sim p \vee \sim q) \equiv T$

۳۱ گزاره مرکبی از ترکیب $(2n - 1)$ گزاره ساده تشکیل شده به طوری که جدول ارزشی گزاره‌ها دارای ۳۲ ردیف است، n را بیابید.

۳۲ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) یک، عدد طبیعی است و دو قطر مستطیل مساوی هستند.

ب) یک، عدد اول است و دو قطر متوازی‌الاضلاع مساوی هستند.

پ) هر مربعی مستطیل است یا $\sqrt{-2}$ عضو اعداد حقیقی است.

ت) عدد π گویا است یا هر لوزی، مربع است.

۳۳ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

پ) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

ب) $7,1 \times 2,8 = 19,17$

الف) عدد ۲۷۱ اول است.

ج) عدد ۱۳ گویا است.

ث) عدد ۱۲ زوج است.

ت) $2 \neq 5$

۳۴ شش گزاره بنویسید، که سه تا از آنها دارای ارزش درست و سه تای آنها ارزش نادرست داشته باشند، سپس سه جمله بنویسید که گزاره نباشند.

۳۵ درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف

$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

ب

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

پ

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت

$(p \Rightarrow p) \equiv T$



ث

$$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

ج

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

۳۶ برای هریک از موارد زیر یک مثال بزنید.

الف گزاره ساده درست:

ب ترکیب دو شرطی نادرست:

پ ترکیب شرطی نادرست:

۳۷ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را بدون تشکیل جدول مشخص کنید.

الف $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \vee r)$

ب $\sim r \Leftrightarrow \sim p \vee q$

پ $(p \Rightarrow q) \vee (\sim q \Leftrightarrow p)$

۳۸ اگر p گزاره‌ای نادرست، q گزاره‌ای دلخواه و r گزاره‌ای درست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف $r \Rightarrow q$

ب $(p \wedge q) \Rightarrow p \vee q$

پ $(\sim p \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

ت $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

۳۹ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف گزاره شرطی $p \vee \sim p$ ، همواره درست است.



ب اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند، آن تابع همانی است.

پ گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که گزاره p درست و گزاره q نادرست باشد.

ت اگر تابع ثابت باشد، دامنه تابع یک عضو دارد.

۴۰ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف ارزش گزاره «اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس.» نادرست است.

ب اگر $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، آنگاه $f(kx) = kf(x)$.

پ جمله «سیب قرمز، از سیب زرد خوشمزه‌تر است.» یک گزاره است.

ت اگر دامنه یک تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی باشد، آنگاه $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.

۴۱ یک جدول ارزش‌گذاری شامل ۵ گزاره ساده مختلف می‌باشد، تعداد ردیف‌های جدول ارزش آن کدام است؟

۴۲ درستی یا نادرستی هر گزاره را بررسی کنید.

الف ۲۱ عددی اول است و ۷ شمارنده ۴۲ است.

ب ۱۳ شمارنده اول ندارد یا حاصل جمع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.

پ هر عدد صحیح عددی گویا است و حاصل ضرب هر دو عدد گویا نیز عددی گویاست.

۴۳ جدول مربوط به ارزش‌گذاری n گزاره دارای ۵۱۲ ردیف است. جدول مربوط به ارزش‌گذاری $(n - 5)$ گزاره دارای چند ردیف است؟

۴۴ اگر گزاره‌ای نادرست و $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q$ گزاره‌ای درست باشد، ارزش گزاره $(p \vee r) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ را مشخص کنید.

۴۵ ارزش هر گزاره را مشخص کنید.

الف $(-5 \notin \mathbb{Z}) \wedge \left[\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} > (-1)^2 \right]$

ب معادله $x^2 - 16 = 0$ دو ریشه دارد یا ۲ بزرگتر از ۳ است

ج مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۵ عبارت‌اند از ۱، ۳، ۵، ۱۵ و میانه داده‌ها همان چارک اول است.

د $(\sqrt{49 - 25} = 7 - 5) \vee (\mathbb{Z} \subseteq N)$

۴۶ عکس نقیض گزاره «اگر $\sqrt{3}$ گنگ باشد، آنگاه ۳ فرد نیست.» را بنویسید.



۴۷) اگر ارزش گزاره $p \wedge (\sim q \vee r)$ درست باشد، ارزش گزاره $\sim r \Rightarrow \sim p \wedge (\sim q \vee r)$ را مشخص کنید.

۴۸) ارزش نقیض گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim q)$ را مشخص کنید.

۴۹) درستی یا نادرستی هر مورد را بررسی کنید.

الف) ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است؛ که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

ب) ترکیب دو شرطی به انتقای مقدم درست است.

پ) ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است؛ که هر دو گزاره نادرست باشند.

ت) ترکیب عطفی فقط وقتی نادرست است؛ که هر دو گزاره نادرست باشند.

۵۰) جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگترین معجزه پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.		
۲	اگر آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه		✓
۴	$4 \times 2 = 2^2 \Rightarrow 8^2 > 4^3$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		
۸	امام خمینی در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.		
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و	✓	
۱۰	اگر آنگاه و برعکس	✓	

۵۱) اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، جدول ارزش گزاره‌های p, q, r و s چند حالت دارد؟ رسم کنید.

استدلال ریاضی

۵۲) عبارتهای زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

الف) جذر یک عدد مثبت به اضافه خود آن عدد برابر ۶ است.

ب) مجموع هر عدد مثبت با معکوسش بزرگتر یا مساوی دو است.

پ) مجموع هر عدد منفی با معکوسش کوچکتر یا مساوی قرینه دو است.

ت) اختلاف مربع مجموع دو عدد از مربع تفاضل همان دو عدد با چهار برابر حاصل ضرب آن دو عدد مساوی است.



۵۳) نوع استدلال زیر را مشخص کنید و نتیجه‌گیری آن را بررسی کنید.

مقدمه (۱): اگر مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه متساوی‌الساقین هم می‌باشد.

مقدمه (۲): مثلث ABC متساوی‌الساقین است. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۵۴) با استفاده از جدول ارزش درستی نشان دهید استدلال به روش مغالطه معتبر نیست.

$$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$$

۵۵) ثابت کنید اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، آنگاه n فرد است.

۵۶) گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگتر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد مثبت، بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مکعب مجموع دو عدد بزرگتر یا مساوی مجموع مکعب آن دو عدد است.

ث) قرینه قرینه یک عدد، برابر خود آن عدد است.

۵۷) جملات فارسی را به زبان ریاضی و جملات ریاضی را به زبان فارسی (عبارت کلامی) بنویسید.

الف) مجموع مجذورات هر دو عدد حقیقی، عددی نامنفی است.

ب) اگر $\bar{x}$ میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد، آنگاه مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است.

پ) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}$

ت) $|a|^2 = |a^2|$



۵۸ سوال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

اگر $a = \frac{a-d}{c-d}$ آنگاه مطلوب است $d \cdot (a \neq 1)$.

استدلال‌های زیر را برای به دست آوردن d از برگه‌های امتحانی دانش‌آموزان آورده‌ایم. کدام یک از استدلال‌ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

(الف)

۱) $\cancel{a} = \frac{\cancel{a} - d}{c - d}$ ۲) $\circ = \frac{-d}{c - d}$ ۳) $d = \circ$

(ب)

۱) $a = \frac{a-d}{c-d}$ ۲) $ac - ad = a - d$ ۳) $ac - a = ad - d$

۴) $a(c-1) = (a-1)d$ ۵) $\frac{\cancel{a}(c-1)}{\cancel{a}-1} = d$ ۶) $-(c-1)$
 $= d$

(پ)

۱) $a = \frac{a-d}{c-d}$ ۲) $a(c-d) = a - d$ ۳) $ac - a = ad - d$

۴) $ac - a = (a-1)d$ ۵) $\frac{ac-a}{a-1} = d$

۵۹ مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان‌ها وارونه هستند، بررسی کنید (می‌توان همه لیوان

ها را وارونه کرد). آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر هست؟

۶۰ عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

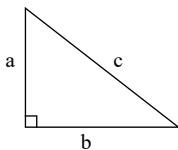
(الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

(ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی برابر مجموعشان است.

(ج) حاصل ضرب عددی در خودش، به علاوه ۳، بزرگتر از خودش است.

۶۱ دلیل نادرستی استدلال زیر را مشخص کنید.

وتر مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۶ و ۸ برابر ۱۴ است.



۱) $a^2 + b^2 = c^2$ ۲) $6^2 + 8^2 = c^2$ ۳) $\sqrt{6^2 + 8^2} = c$

۴) $6 + 8 = c$ ۵) $c = 14$



۶۲ گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگتر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد، بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد، بزرگتر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصف‌ری از معکوس خود بزرگتر یا مساوی با آن است.

۶۳ ثابت کنید اگر n عددی صحیح و n^2 زوج باشد؛ آن‌گاه n زوج است.

۶۴ خطای استدلال زیر را مشخص کنید.

۱) $9 = 9$

۲) $25 + 4 - 20 = 16 + 49 - 56$

۳) $5^2 + 2^2 - 2(5)(2) = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7)$

۴) $(5 - 2)^2 = (4 - 7)^2$

۵) $5 - 2 = 4 - 7$

۶) $3 = -3$

۶۵ در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.

طول: x

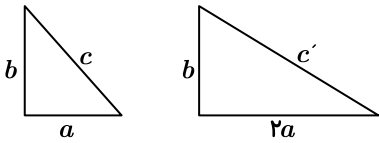
عرض: y

مساحت: $S = xy$

$$2(xy) = 2 \underbrace{xy}_S = 2S \rightarrow \text{مساحت دو برابر شده است.}$$



ب در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه a و b وتر c ، همانند شکل زیر اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو برابر می‌شود.



استدلال: می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو قضیه فیثاغورث به صورت زیر برقرار است:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم الزاویه جدید نیز می‌نویسیم:

$$c'^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 = 4(a^2 + b^2) = 4c^2 \Rightarrow c'^2 = 4c^2 \xrightarrow{\text{جذر}} c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است.

پ تساوی $2\sqrt{11} = \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}}$ برقرار است.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} &= \sqrt{\frac{12 \times \cancel{3} + 4 \times 16}{2 \times \cancel{3}}} = \sqrt{\frac{12 + \cancel{4} \times 16}{\cancel{3}}} = \sqrt{12 + 32} \\ &= \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

۶۶ با توجه به گزاره‌های داده شده، در صورت امکان نتیجه حاصل را مشخص کنید.

الف اگر باران به کوهستان نبارد، به سالی، دجله گردد خشک رودی. باران به کوهستان باریده، پس

ب اگر دو خدا وجود داشته باشد، زمین تباه می‌شود. زمین تباه نشده، پس

پ در مثلث‌های قائم الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است. در مثلث ABC ، زاویه A قائمه است، پس

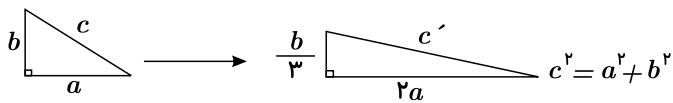
۶۷ در استدلال زیر در کدام مرحله خطا صورت گرفته است؟

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 2) = 0 &\Rightarrow (مرحله ۱) 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (مرحله ۲) 2x^2 = 4 \Rightarrow (مرحله ۳) x^2 = 2 \\ &\Rightarrow (مرحله ۴) x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۶۸ در استدلال $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \\ (-4)^2 > 0 \\ \therefore -4 > 0 \end{array} \right.$ ، نوع استدلال و نتیجه آن را مشخص کنید.



۶۹ در مثلث قائم الزاویه که طول اضلاع قائمه a و b و وتر c است، طول ضلع a را دو برابر و طول ضلع b را $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم، علی و رضا و حسن هر یک به ترتیب طول وتر را در حالت جدید به صورت زیر محاسبه کرده‌اند، کدام یک طول وتر جدید را درست محاسبه کرده است؟



علی : $c'^2 = (2a)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 4a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{4}{9}(a^2 + b^2) = \frac{4}{9}c^2 \Rightarrow c' = \frac{2}{3}c$

رضا : $c'^2 = (2a)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 4a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{4}{9}(a^2 + b^2) = \frac{4}{9}c^2 \Rightarrow c' = \sqrt{\frac{4}{9}}c$

حسن : $c'^2 = (2a)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 4a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{36a^2 + b^2}{9} = \frac{37}{9}(a^2 + b^2) = \frac{37}{9}c^2 \Rightarrow c' = \sqrt{\frac{37}{9}}c$

۷۰ نماد ریاضی عبارت «مجموع مجذور دو عدد بزرگتر یا مساوی مجذور مجموع آن دو عدد است» را بنویسید.

۷۱ در هر مورد از استدلال‌های زیر مشخص کنید خطا رخ داده یا نداده است؟

الف) $a = 2b + 1 \Rightarrow a^2 = 4b^2 + 4b + 1$ (ب) $a < b \Rightarrow ac^2 < bc^2$ (ج) $\frac{a}{8} = \frac{b}{4} \Rightarrow a = 2b$

د) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$

۷۲ با توجه به استدلال به کمک عکس نقیض یک گزاره شرطی، به جای اثبات گزاره شرطی « $a > b \Rightarrow a^3 > b^3$ » چه گزاره‌ای را ثابت کنیم؟



۷۳) در هر مورد نوع استدلال را مشخص کنید و درستی نتیجه را بررسی کنید.

الف) مقدمه ۱: اگر شخصی در امتحان کتبی رانندگی حداقل نمره ۲۶ را کسب کند، آنگاه می‌تواند در آزمون عملی شرکت کند.

مقدمه ۲: علی در آزمون عملی رانندگی شرکت نکرده است.

∴ : علی در آزمون کتبی رانندگی نمره کمتر از ۲۶ گرفته است.

ب) مقدمه ۱: اگر شاخص آلودگی در شهری بالاتر از ۱۵۰ باشد، آنگاه مدارس آن شهر تعطیل می‌شوند.

مقدمه ۲: شاخص آلودگی شهر تهران امروز ۱۶۰ است.

∴ : مدارس شهر تهران امروز تعطیل شده است.

ج) مقدمه ۱: اگر کسی از من متنفر باشد، آنگاه پشت سر من حرف می‌زند.

مقدمه ۲: سعید پشت سر من حرف زده است.

∴ : سعید از من متنفر است.

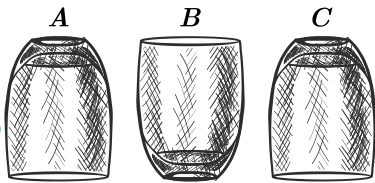
د) مقدمه ۱: اگر عددی مثبت باشد، آنگاه توان دوم آن عدد مثبت است.

مقدمه ۲: a^2 بزرگتر از صفر است.

∴ : a عددی مثبت است.

۷۴) عبارت «یک سوم از مربع نصف عددی برابر است با دو برابر آن عدد منهای یک چهارم عدد ۲۱» را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

۷۵) مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟



۷۶) در هر یک از استدلال‌های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

$$p: 3 > 0 \Rightarrow 4 > 1$$

$$p: 3 > 0$$

∴

خطوط L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند: $q \Rightarrow$ خطوط L_1 و L_2 موازی باشند: p

.....

خطوط L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. ∴

۷۷) ایراد استدلال زیر را یافته، راه حل درست آن را بنویسید.

«اگر میانگین نمرات یک کلاس ده نفره ۱۵ و میانگین نمرات یک کلاس پانزده نفره ۱۸ باشد، در این صورت میانگین نمرات این دو کلاس

$$\text{جمعا } \bar{x} = \frac{15 + 18}{2} = 16,5 \text{ است.}»$$

۷۸) در کدام مراحل استدلال زیر، اشتباه رخ داده است؟

$$-2 \quad (مرحله ۵) \rightarrow x = 6 \quad (مرحله ۴) \rightarrow -2x - x = 6 \quad (مرحله ۳) \rightarrow x = 6 - 2x \quad (مرحله ۲) \rightarrow \frac{6 - 2x}{x} = 1 \quad (مرحله ۱)$$



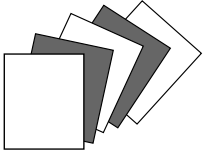
۷۹ اشتباه رخ داده در استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $(۹۹۹)^۲ = (۱۰۰۰ - ۱)^۲ = (۱۰۰۰)^۲ + (۱)^۲ = ۱۰۰۰۰۰۰ + ۱ = ۱۰۰۰۰۰۱$

ب) اگر هوا سرد شود، آنگاه برف می‌بارد. لیکن امروز برف می‌بارد، پس امروز هوا سرد است.

۸۰ پنج کارت یکسان که یک طرف آن‌ها سفید و طرف دیگرشان مشکی است، همانند شکل زیر در نظر بگیرید. اگر مجاز باشیم تا هر بار

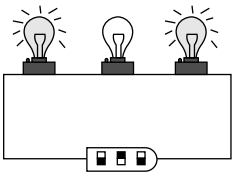
دو کارت را پشت و رو کنیم، به چند حالت می‌توان همه آن‌ها را در حالتی قرار داد که مشکی رو قرار گیرد؟ چرا؟



۸۱ سه لامپ، همانند شکل زیر داریم که یکی از آن‌ها خاموش است. می‌خواهیم همه آن‌ها را توسط کلیدی روشن کنیم، ولی مجاز

هستیم تا هر بار دقیقاً دو کلید را تغییر وضعیت دهیم.

با استدلال ریاضی نشان دهید که این کار امکان‌پذیر نیست.



فصل دوم : تابع

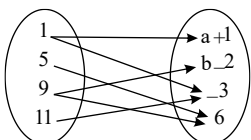
یادآوری مفهوم تابع و نحوه نمایش آن

۸۲ اگر $f = \{(m^۲ - ۴, ۵), (m^۲ - ۴, m^۲ - ۱۱), (۸ + m, ۲)\}$ یک تابع باشد، مقدار m را به دست آورید.

۸۳ جدول زیر را کامل کنید.

نمودار مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمودار پیکانی

۸۴ مقدار a, b را طوری تعیین کنید که نمودار پیکانی زیر یک تابع باشد.





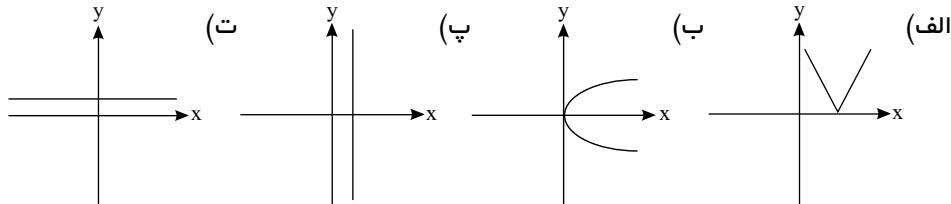
۸۵ با توجه به تابع زیر جاهای خالی را کامل کنید.

$$f = \{(3, \sqrt{5}), (7, 5, 2), (8, 3), (2, 3, 75)\}$$

$$f(3) = \dots$$

$$f(\dots) = 3, 75$$

۸۶ نمودار مختصاتی مربوط به کدامیک از روابط زیر یک تابع است.



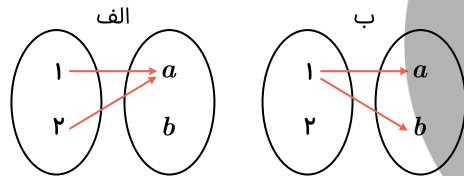
۸۷ در تابع $f(x) = \begin{cases} x & , x < -1 \\ x^2 & , -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & , x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $f(2)$

ب) $f(3) + f(-1)$

ج) $f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$

د) $f(\sqrt{2}) + f(5)$

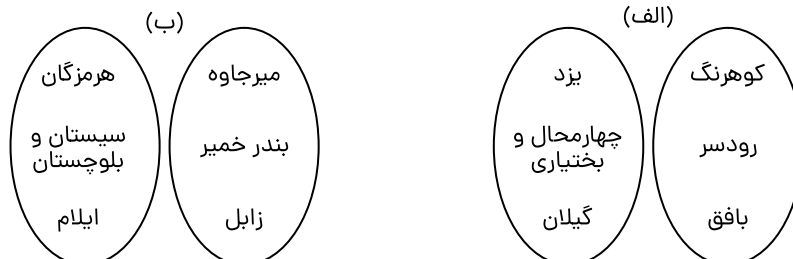


۸۸ کدامیک از ضابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟

۸۹ ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه خواسته‌شده را کامل کنید.

الف) در نمودار ون‌های زیر با توجه به «رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.» با فلش مشخص کنید، سپس

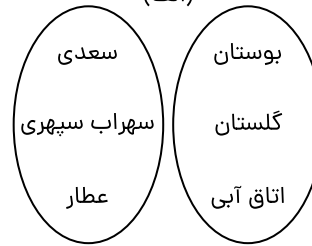
تعیین کنید کدام رابطه تعریف‌نشده تابع است؟



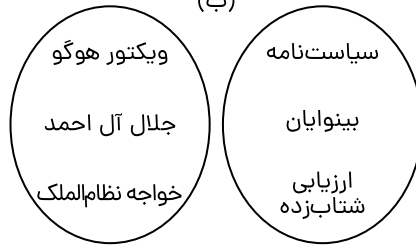


ب رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.

(الف)



(ب)



پ حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید.

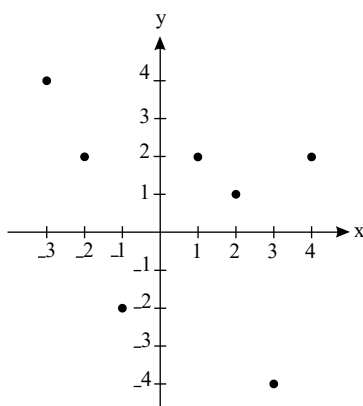
نمایش پیکانی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
	$\{ (,), (,), (,) \}$	
	$\{ (,), (,), (,) \}$	

با توجه به جدول بالا:

(الف) نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که

(ب) نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که

(ج) نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که



با توجه به نمودار مختصاتی زیر جاهای خالی را کامل کنید. $f(\dots) = -2$ $f(-2) = \dots$ **۹۰**

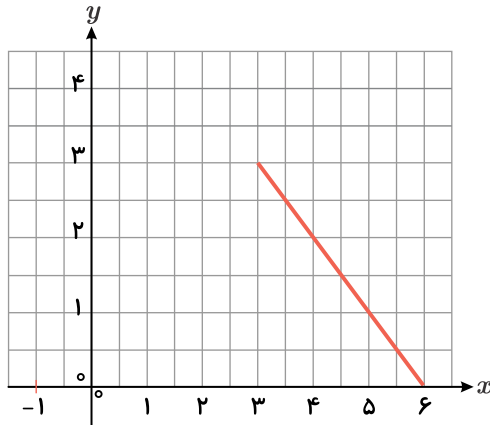
$$f(2) = \dots$$

$$f(-3) = \dots \quad f(\dots) = -4$$



۹۱ ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , -1 \leq x < 3 \\ \dots & , 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$



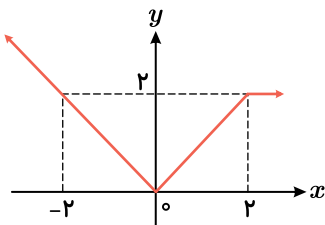
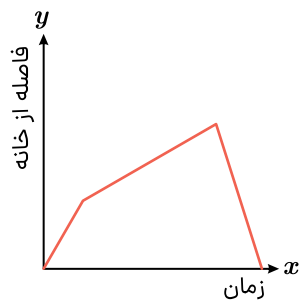
۹۲ نمودار روبه‌رو به کدام داستان مربوط است؟

الف) آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.

ب) علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.

ج) محمدرضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۹۳ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.





۹۴ با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر کدام یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

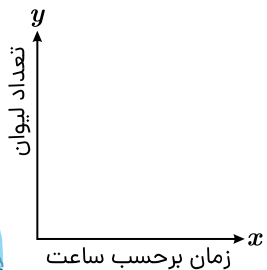
الف) به مناسبت روز درختکاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.



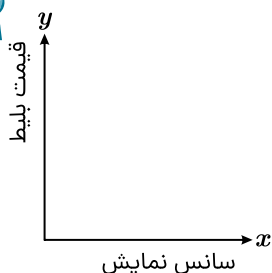
ب) هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.



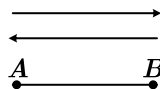
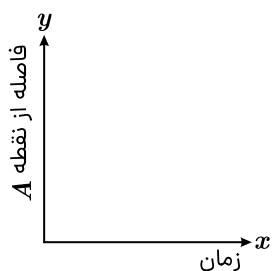
ج) شیر آبی که خراب است و در هر ساعت یک لیوان آب از آن چکه می‌کند.



د) بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.



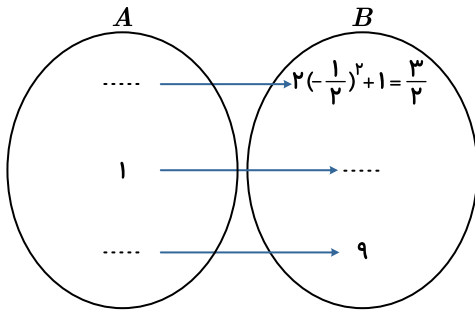
ه) متحرکی با سرعت ثابت از نقطه A تا نقطه B شروع به دوییدن می‌کند و دوباره به نقطه A برمی‌گردد.



۹۵ اگر $A = \left\{-\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ و $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ F(x) = 2x^2 + 1 \end{cases}$ باشد با توجه به نمایش تابع در هر قسمت جاهای خالی را کامل کنید.



الف با توجه به نمایش پیکانی کامل کنید.

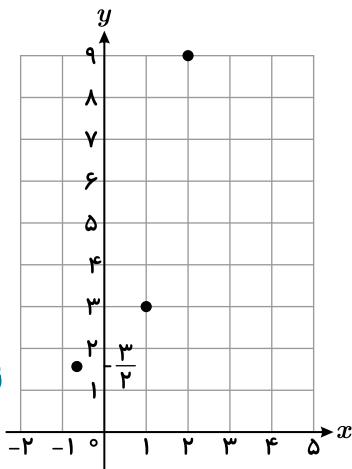


ب

با توجه به نمایش زوج مرتبی f آنگاه: $D_f = \{\dots, 1, \dots\}$ و $R_f = \{\frac{3}{2}, \dots, 9\}$

پ

با توجه به نمایش مختصاتی آن دامنه و برد تابع را بنویسید.

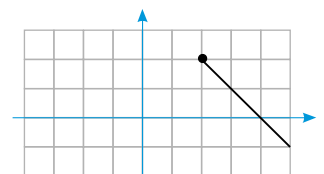


۹۶ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$ و برد آن شامل دو عضو باشد.

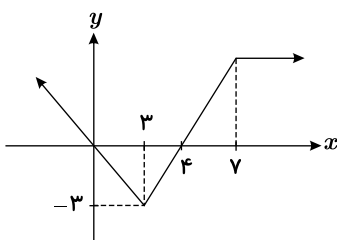
توابع چند ضابطه ای

۹۷ ضابطه تابع زیر و نمودار آن را کامل کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 2 \\ \dots, & x \geq 2 \end{cases}$$



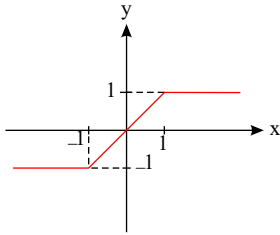
۹۸ با توجه به نمودار تابع f ، حاصل عبارت $f(-1) + f(1)$ را به دست آورید.



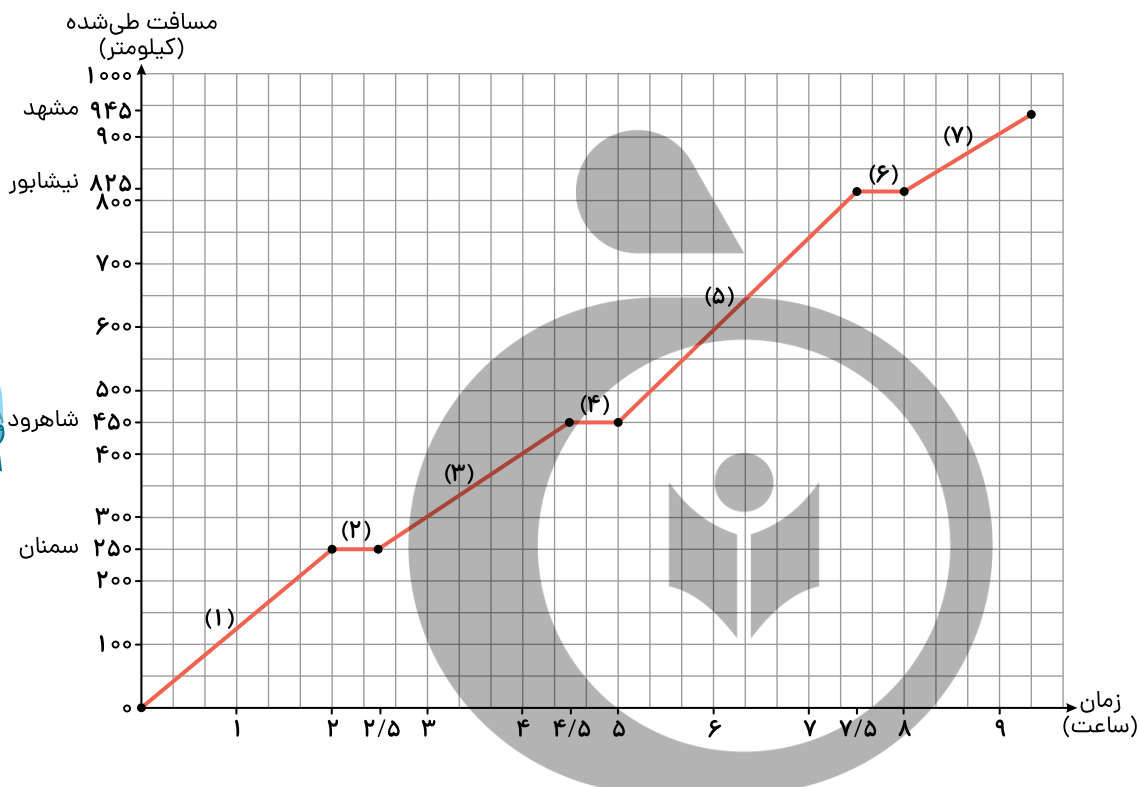


۹۹ نمودار تابع مربوط به یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا به پایین می‌ریزد را رسم کنید. (پس از یک ساعت شن از یک جهت تخلیه می‌شود).

۱۰۰ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



۱۰۱ نمودار زیر قطاری را نشان می‌دهد که از تهران به مشهد رفته است.



الف مفهوم قسمت‌هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟

ب ضابطه تابع «مکان - زمان» قطار از لحظه رسیدن به شاهرود تا لحظه ترک نیشابور را به دست آورید.

پ اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می‌رسد؟

۱۰۲ نمودار مختصاتی تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x > 1 \\ x^2 & , -1 < x \leq 1 \\ 3x + 1 & , x \leq -1 \end{cases}$$



۱۰۳ اگر $f(x) = \begin{cases} 3x + a & , \quad x \geq -1 \\ ax + 4 & , \quad x \leq -1 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(-2)$ چقدر می‌شود؟

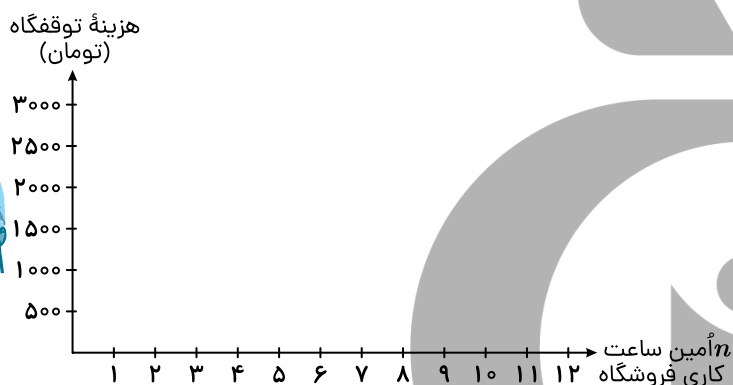
۱۰۴ در آمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.

الف: قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینه ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است
ب: بر اساس هوشمندسازی

۱۰۵ چهارشنبه: در این روز با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ صفحه ۲۵ کتاب درسی ضابطه تابع به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ 500 & n = 7 \\ 1000 & n = 8 \\ 1500 & n = 9 \\ 2000 & n = 10 \\ 2500 & n = 11 \\ 3000 & n = 12 \end{cases} \Leftrightarrow C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ (n - 6) \times 500 & 7 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

۱) نمودار این تابع را رسم کنید:



۲) درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

توابع ثابت و همانی

۱۰۶ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مجموعه برد آن را مشخص کنید.

۱۰۷ جاهای خالی را کامل کنید.

الف) هر عضو از دامنه تابع همانی به در برد تابع نظیر می‌شود.

ب) ضابطه تابع همانی به صورت است.

پ) نمودار مختصاتی تابع همانی به صورت در صفحه مختصات است.

ت) در نمایش زوج مرتبی تابع مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

۱۰۸ مقدار a, b را طوری مشخص کنید که ضابطه $f(x) = (a - 1)x^2 + bx + 4$ یک تابع ثابت باشد.



۱۰۹ اگر f تابع ثابت باشد، در این صورت مقادیر a, b را مشخص کنید.

$$f = \{(4, a+1), (a+1, 6), (9, a+b+1)\}$$

۱۱۰ اگر A یک تابع همانی باشد، در این صورت میانگین a, b, c را به دست آورید.

$$A = \{(5, a+2), (a, b), (c, 3a)\}$$

۱۱۱ اگر تابع $f(x) = k$ تابعی ثابت و $f(a) + f(b) = f(c)^2$ باشد، مقدار k را به دست آورید.

۱۱۲ اگر f یک تابع همانی باشد، جاهای خالی را کامل کنید.

$$f = \{(3, \dots), (\dots, 5/5), (3/25, \dots), (6, 6)\}$$

۱۱۳ مقدار a را طوری تعیین کنید که ضابطه $f(x) = (a-2)x + 4$ یک تابع ثابت باشد.

۱۱۴ اگر دو زوج مرتب $(9, 8)$ ، $(3, x^2 - 1)$ مربوط به یک تابع ثابت باشند، مقدار x را مشخص کنید.

۱۱۵ اگر مجموعه زوج مرتب‌های زیر مربوط به یک تابع ثابت باشد، در این صورت مقادیر a, b را مشخص کنید.

$$\{(7, 3a - b - 2), (2, 3a + 2b - 2), (3, 4)\}$$

۱۱۶ اگر زوج مرتب $(-3, x^2 - 4x + 1)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار x را مشخص کنید.

۱۱۷ مقادیر a, b, c را طوری تعیین کنید که ضابطه $f(x) = (a-b)x^2 + cx + 3 - b$ یک تابع همانی باشد.

۱۱۸ اگر f تابعی ثابت باشد، جاهای خالی را کامل کنید.

$$f = \{(1, \dots), (2, \dots), (3, 4)\}$$

۱۱۹ مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که ضابطه $f(x) = (a+2)x + b - 3$ یک تابع همانی باشد.

۱۲۰ الف) تابعی که برد آن فقط شامل یک عضو باشد تابع نام دارد.

ب) اگر f یک تابع ثابت باشد نمودار مختصاتی آن خطی موازی محور است.

پ) در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت f تمام مؤلفه‌های زوج مرتب‌ها با هم برابرند.

۱۲۱ اگر دو زوج مرتب $(5, 3a - b)$ ، $(7, 3a + b)$ مربوط به یک تابع همانی باشد، مقادیر a, b را به دست آورید.

۱۲۲ اگر f تابع همانی و g تابع ثابت باشد و داشته باشیم $1 = \frac{g(2)f(2)}{f(2) + g(2)}$ ، آنگاه:



الف (۲) g را بیابید.

ب حاصل $\frac{f(4) + g(4)}{g(4) + 1}$ را بیابید.

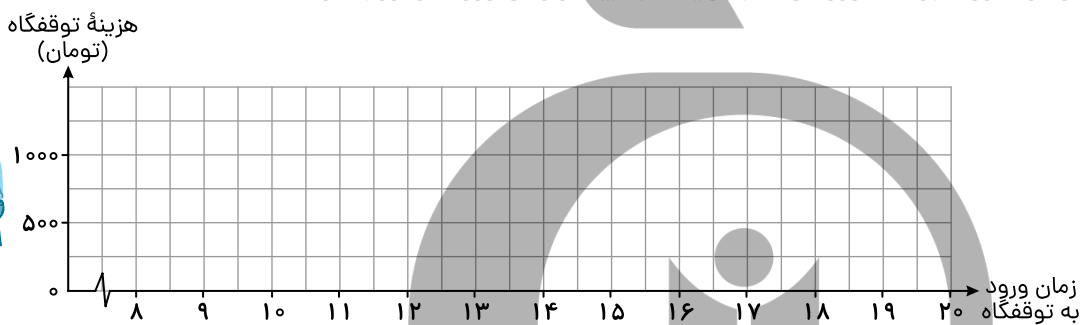
۱۲۳ اگر تابع $f(x) = (a - 3)x^2 + bx + c + 3$ ضابطه یک تابع همانی باشد، در این صورت حاصل $a + b + c$ چقدر است؟

۱۲۴ اگر تابع $f(x) = (a + 2)x^2 + (b - 3)x - 5$ یک تابع ثابت باشد، در این صورت حاصل $a + b$ چقدر است؟

۱۲۵ نمودار تابع ثابت $f(x) = \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ f(x) = 1 \end{cases}$ را رسم کنید. ($\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی و $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح است).

۱۲۶ با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یکشنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطه تابع را مشخص کنید.

توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یکشنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.



$$\begin{cases} C: A \rightarrow B \\ C(x) = \end{cases} \quad D = \{x \in R \mid \} \quad R = \{ \}$$

الف) دامنه نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یکشنبه دارد؟
ب) تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

۱۲۷ در تابع ثابت $f(x) = c$:

الف) مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(a + b)$ را مشخص کنید.

ب) اگر در این تابع $f(a + b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۱۲۸ اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به دست آورید.

۱۲۹ الف) حجم مکعب مستطیل با ابعاد ۱، ۱ و x با افزایش مقدار x چگونه تغییر می‌کند؟

ب) تابع حجم مکعب مستطیل را یافته و نوع آن را مشخص کنید.

پ) زمانی که حجم مکعب مستطیل ۸ است، مقدار x چقدر باید باشد؟ چرا؟



۱۳۰ رابطه $R = \{(0, -1), (b, 2a), (1, a - 2b)\}$ تابعی است که برد آن یک عضو دارد.

الف) نوع تابع را مشخص کنید.

ب) مقدار a و b را بیابید.

۱۳۱ مقادیر a و b را طوری بیابید که:

الف) تابع $f = \{(0, a - b), (a, b), (a + b, 2)\}$ همانی باشد.

ب) تابع $f = \{(b, a - 1), (a, 3a - b), (0, 2a + b)\}$ ثابت باشد.

۱۳۲ تابع زیر را در نظر بگیرید. (نمودار تابع روی یک خط قرار دارد.)

الف) ضابطه تابع را نوشته و نوع تابع را مشخص کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$(-۲)^۲ - ۳$	$۱ - \frac{1}{۲}$	۱	$۳^۰$	$(\sqrt{۲})^۲ - ۱$
		$\frac{1}{۲}$			

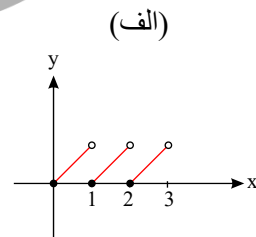
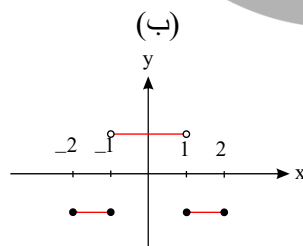
ب) مقدار عددی $\frac{۳f(۱۳۹۶) - ۵}{-f(۲۰۱۷)}$ را به دست آورید.

توابع پلکانی

۱۳۳ نمودار مختصاتی تابع پلکانی زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -۳, & x < ۰ \\ ۲, & ۰ \leq x < ۴ \\ ۰, & x \geq ۴ \end{cases}$$

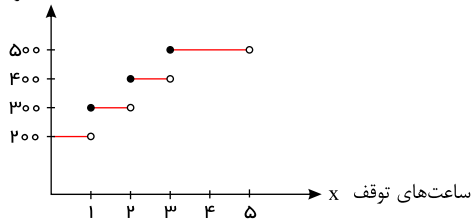
۱۳۴ کدامیک از نمودارهای زیر مربوط به یک تابع پلکانی است؟





۱۳۵) نمودار مختصاتی زیر مربوط به هزینه پارکینگ به ازای ساعت‌های توقف خودرو است. به ازای ۴ ساعت و نیم توقف در این پارکینگ

چه مبلغی باید پرداخت شود؟
 y هزینه پارکینگ (تومان)



۱۳۶) یک پارکینگ در ساعت ۱ تا ۳ صبح به ازای هر ساعت ۵۰۰ تومان و در ساعت ۳ تا ۶ صبح به ازای هر ساعت ۸۰۰ تومان و از ساعت

۶ صبح تا ۱۲ ظهر به ازای هر یک ساعت ۶۰۰ تومان دریافت می‌کند.

الف) ضابطه هزینه توقف در این پارکینگ را به صورت یک تابع پلکانی نمایش دهید.

ب) نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

پ) مساحت زیر این نمودار نشان‌دهنده چیست؟

۱۳۷) الف) نمودار مختصاتی تابع $f(x) = \text{sign}(x)$ را رسم کنید.

ب) مقادیر $f(\frac{\sqrt{6}}{3})$, $f(\sqrt{5} - \sqrt{7})$, $f(-4,7)$, $f(5,3)$ را به دست آورید.

۱۳۸) هزینه برق مصرفی شهری با استفاده از جدول روبه‌رو محاسبه می‌شود.

الف) ضابطه هزینه برق مصرفی را مشخص کنید.

ب) نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

پ) اگر مصرف برق یک خانواده ۲۸۰ کیلووات ساعت باشد، هزینه برق مصرفی این خانواده را مشخص کنید.

مقدار مصرفی (kwh)	هزینه
۰ تا ۱۰۰	۲۰۰
۱۰۰ تا ۲۰۰	۳۰۰
۲۰۰ تا ۳۰۰	۴۰۰
۳۰۰ تا ۴۰۰	۶۰۰
۴۰۰ تا ۵۰۰	۸۰۰

۱۳۹) حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $[-5]$

ب) $[8,3]$

پ) $[2 - \sqrt{5}]$

ت) $[(\frac{4}{5})^2]$

۱۴۰) اگر $f(x) = [x]$ باشد، در این صورت مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(\pi + 3,1)$

ب) $f(\sqrt{27})$

پ) $f(\frac{\pi}{3})$

ت) $f(\frac{3}{\pi})$



۱۴۱) باتوجه به مقادیر جزء صحیح‌ها، مقادیر x را تعیین کنید.

الف) $[x] = 1$

ب) $[x + 2] = 5$

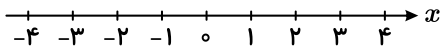
پ) $[x + 2] = -4$

۱۴۲) نمودار مختصاتی تابع $[x]$ را به‌ازای $-1 \leq x \leq 2$ رسم کنید.

۱۴۳) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{20}] =$$

۱۴۴) به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به‌دست آورید.



$$[2]$$

$$[0,7]$$

$$[-3,2]$$

$$[2,7]$$

$$[-0,7]$$

$$[-\pi]$$

$$[-2,7]$$

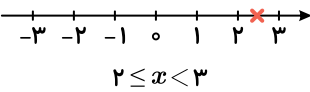
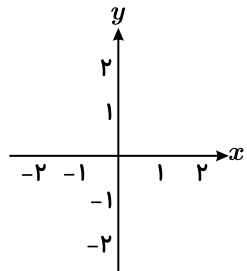
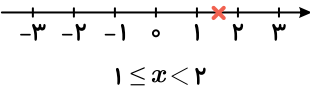
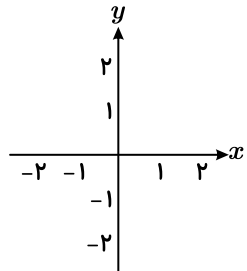
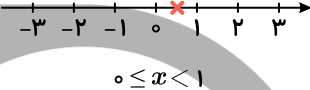
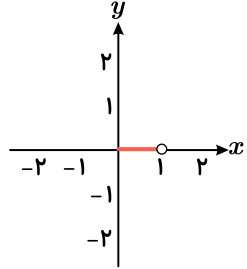
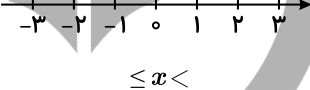
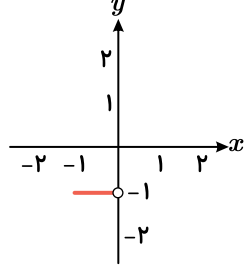
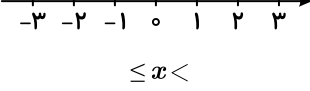
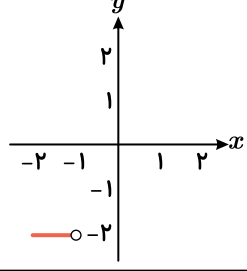
$$[-0,07]$$

$$[-2,2]$$



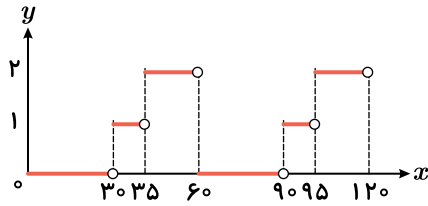


۱۴۵ با توجه به تابع $g(x) = [x]$ ، جدول زیر را کامل کنید.

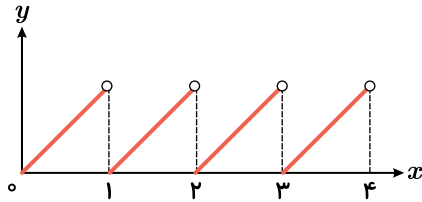
حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) =$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) =$	
 $0 \leq x < 1$	$g(x) =$	
 $-1 \leq x < 0$	$g(x) =$	
 $-2 \leq x < -1$	$g(x) =$	



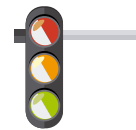
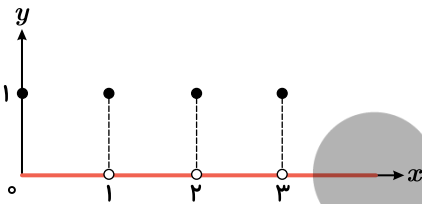
هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید. ۱۴۶



یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



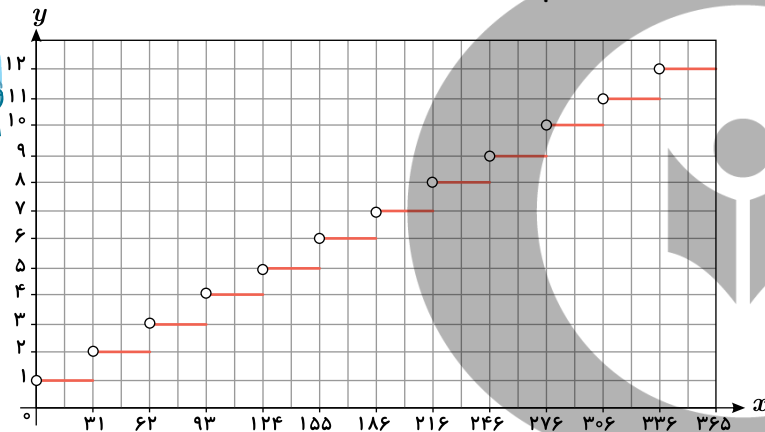
پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



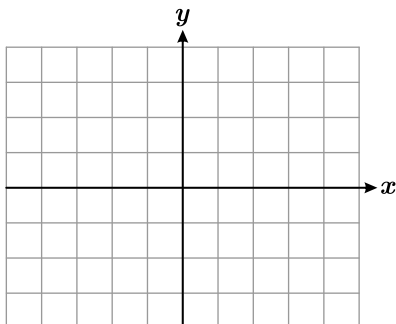
چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالت است.

نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ۱۴۷

ضابطه تابع را بنویسید؟



بر اساس ضابطه تابع پلکانی $y = f(x)$ نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید. ۱۴۸



$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



۱۴۹ جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱,۳۰۰,۰۰۰	معاف از مالیات
مزداد بر ۱,۳۰۰,۰۰۰ تا ۲,۵۰۰,۰۰۰	۱۰
مزداد بر ۲,۵۰۰,۰۰۰ تا ۴,۵۰۰,۰۰۰	۱۵
مزداد بر ۴,۵۰۰,۰۰۰	۲۵

الف) نمودار پیکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هریک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هرکدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید.

کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان

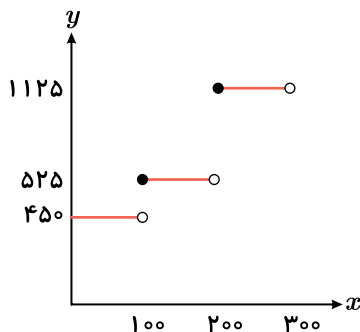
کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان

کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان

۱۵۰ با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

مقدار $f(x)$	مقدار x	ضابطه تابع
	$x = -۲,۳$ $x = ۵$	$f(x) = [x]$
	$x = ۱,۷$ $x = ۲,۳$	$f(x) = [-x]$
	$x = ۱$ $x = ۱,۳$ $x = ۱,۷$ $x = ۲$	$f(x) = [x] + [-x]$
	$x = ۱$ $x = ۰,۲$ $x = ۱,۳$	$f(x) = [۳x]$

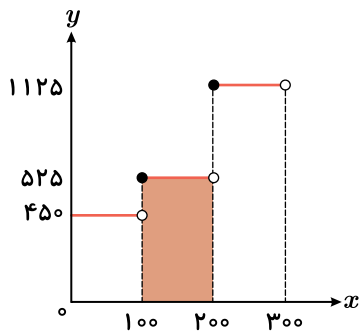
۱۵۱ به کمک نمودار پلکانی رسم‌شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه:



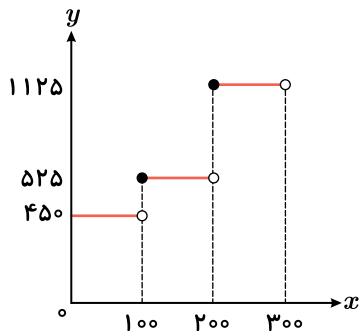
الف) هزینه 100 kWh اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده‌شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟



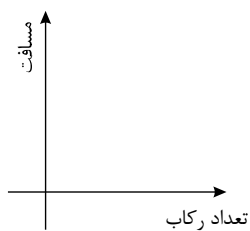
ب) مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟



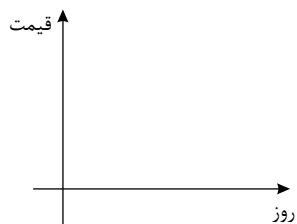
پ) هزینه کل برق مصرفی این خانه ($246,23 \text{ kWh}$) معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنیید و مقدار هزینه را مشخص کنید.



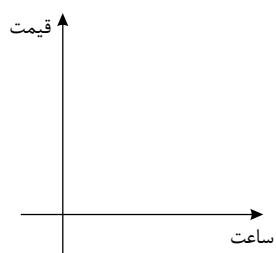
۱۵۲) با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات و توضیحات داده شده، نمودار هر حالت را رسم کنید.



الف) دوچرخه‌سواری با هر بار رکاب زدن، یک متر را طی می‌کند.



ب) قیمت خرید تضمینی گندم از کشاورزان در سال ۹۴، برابر ۱۲۷۰۵ ریال بود.



پ) قیمت سهام شرکت A، قبل از ظهر ۲۰ هزار تومان و بعد از ظهر ۲۲ هزار تومان شد.

۱۵۳) مخارج مکالمه تلفنی راه دور از تهران به مدینه برای کمتر از یک دقیقه ۴۰۰ تومان و برای هر دقیقه (یا بخشی از آن) اضافه ۲۵۰



تومان می‌باشد.

الف معادلهٔ مخارج (برحسب تومان) این مکالمه تلفنی را به‌عنوان تابعی از زمان t (برحسب دقیقه) بنویسید.

ب شخصی که $۴۱''$: $۷'$ صحبت کرده باشد، چقدر باید پرداخت کند؟

۱۵۴ در هریک از موارد زیر کلمهٔ مناسب را انتخاب کنید.

الف اگر در تابعی با متغیر x ، مقادیر تابع تغییر نکند، آن تابع $\frac{\text{همانی}}{\text{ثابت}}$ است.

ب توابع ثابت و همانی، نمونه‌هایی از توابع $\frac{\text{خطی}}{\text{چندضابطه‌ای}}$ هستند و تابع $\text{sign}(x)$ نمونه‌ای از توابع $\frac{\text{ثابت}}{\text{چندضابطه‌ای}}$ است.

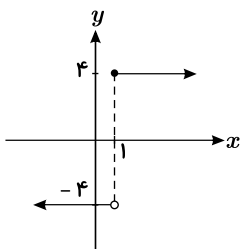
۱۵۵ در تابع پلکانی $f(x) = \begin{cases} (3k-2)x+1 & , x \geq 0 \\ 3k+4 & , x < 0 \end{cases}$ مقدار $f(-2)$ را به دست آورید.

۱۵۶ حاصل عبارت $A = \frac{3[x] - 4[-x]}{\sqrt{[x]} + [2x]}$ را به‌ازای $x = 4,8$ به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

۱۵۷ اگر $\text{sign}(-2x+5) = -1$ باشد، محدودهٔ x را به دست آورید.

۱۵۸ حاصل $\text{sign}(x-1)$ را به‌ازای $1 < x \leq 3$ به دست آورید.

۱۵۹ نمودار زیر مربوط به تابع پلکانی $f(x) = \begin{cases} (m-8)x+2n & , x \geq 1 \\ k-6 & , x < 1 \end{cases}$ است، حاصل $k+m+n$ را به دست آورید.



۱۶۰ اگر $f(x) = \frac{[x]+1}{[x]-1}$ باشد، در این صورت حاصل $f(\pi) - f(\sqrt{5})$ برابر چقدر است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۱۶۱ اگر $0 < x < 1$ باشد، در این صورت حاصل $[x^2 - 1]$ چقدر است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)



۱۶۲ نمودار دو تابع $f(x) = \text{sign}(x)$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید، دو نمودار چند نقطه برخورد (تلاقی) دارند؟

۱۶۳ درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.
 الف) اگر $x = 2,2$ و $y = -1,4$ باشد، $[x + y] = [x] + [y]$.
 ب) اگر $x = -2,2$ باشد، $[2x] = 2[x]$.
 ج) اگر $x = 2$ و $y = 1,5$ باشد، $[xy] = [x][y]$.
 د) اگر $x = -1,3$ و $y = -2,8$ باشد، $[x - y] = [x] - [y]$.

۱۶۴ مقدار مساحتی که بین نمودار تابع پلکانی $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x < 5 \\ 4, & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$ و محور x ها ایجاد می‌شود، کدام است؟ (مساحت مستطیل‌هایی که از عمود کردن نقاط مرزی بر محور x ها به دست می‌آید).

تابع قدر مطلق

۱۶۵ حاصل عبارت‌های زیر را بدون نماد قدر مطلق بنویسید.

- الف) $|3|$
- ب) $|-5|$
- پ) $|4 - 5|$
- ت) $|8 - 3|$
- ث) $|\sqrt{5} - 1|$

۱۶۶ حاصل عبارت‌های زیر را بدون نماد قدر مطلق بنویسید.

- الف) $|3 - \sqrt{5}|$
- ب) $|\sqrt{7} - 4|$
- پ) $|10 - \sqrt{3}|$
- ت) $|\sqrt{28} - 6|$

۱۶۷ نمودار تابع $y = -|x - 4| + 1$ محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند، مجموع طول‌های این دو نقطه چقدر است؟

۱۶۸ در تابع $f(x) = a|x - 1| + 2[x]$ مقدار a را طوری بیابید که $f(-1) = 3$ باشد.

۱۶۹ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

- الف) $|\sqrt{3} - \sqrt{2}| + |2\sqrt{2} - \sqrt{3}|$
- ب) $|2 - \pi| + |4 - \pi|$



۱۷۰ اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$||-1| - |-3|| + |(-1)^n|$$

۱۷۱ اگر $f(x) = |2 - x| - |x - 2|$ باشد، در این صورت حاصل $f(\sqrt{5})$ را به دست آورید.

۱۷۲ تابع $f(x) = |x + 3|$ را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید و سپس نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۱۷۳ توابع زیر را به کمک نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ رسم کنید.

الف) $f(x) = |x - 2|$

ب) $f(x) = |x + 1|$

۱۷۴ توابع زیر را به کمک نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ رسم کنید.

الف) $f(x) = |x| + 2$

ب) $f(x) = |x| - 1$

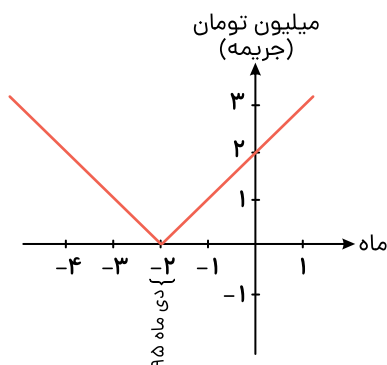
۱۷۵ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x + 2|$ را رسم کنید.

۱۷۶ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x| + 2$ را رسم کنید.

۱۷۷ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x - 1|$ را رسم کنید.

۱۷۸ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x| - 1$ را رسم کنید.

۱۷۹ با توجه به نمودار:



الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.
ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هریک از نیم‌خطها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

ج) به کمک تعریف تابع قدرمطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.
د) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟
افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟

۱۸۰ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |2x - 3|$

ب) $y = |3x + 1|$



۱۸۱ با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع «الف» و کدام نمودار، تابع «ب» را مشخص می‌کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $y = |x| + 2$

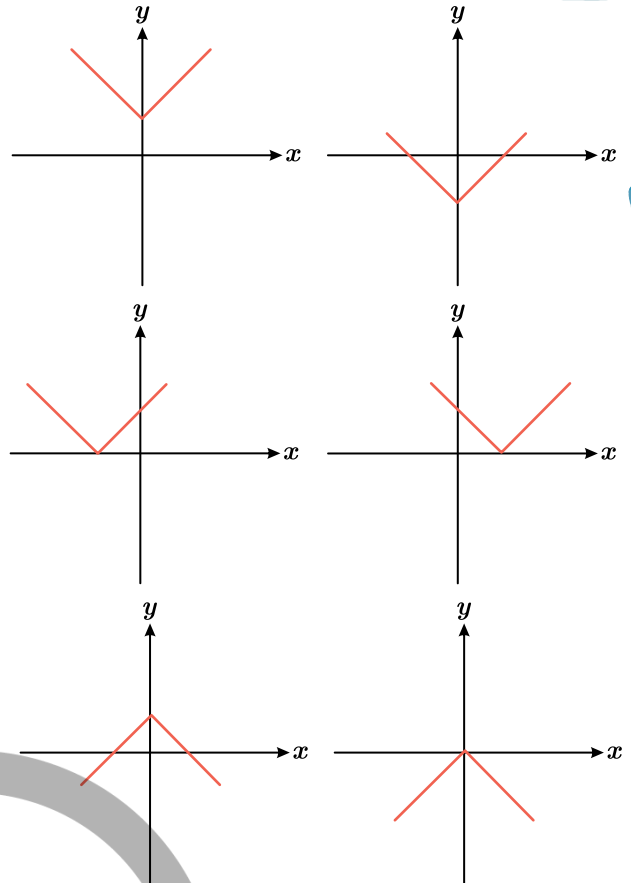
ب) $y = |x| - 3$

الف) $y = |x + 1|$

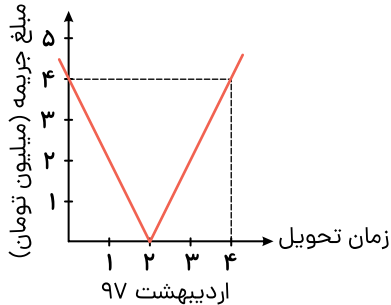
ب) $y = |x - 4|$

الف) $y = -|x|$

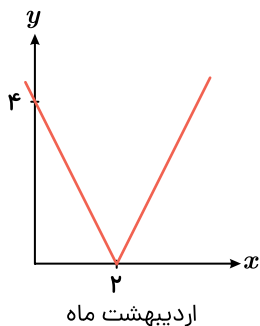
ب) $y = -|x| + 1$



۱۸۲ پلی که روی رودخانه سیمینهرود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در اردیبهشت ۹۷ افتتاح شود. اگر احداث زودتر از موعد مقرر انجام شود به دلیل نگهداری و عدم استفاده موجب خسارت است و همچنین تاخیر در تحویل موجب ضرر وزارت راه است و براساس قرارداد به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل پیمانکار متعهد است یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند. با توجه به نمودار:



الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.





ب به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هریک از نیم‌خطها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

پ به کمک تعریف تابع قدرمطلق، تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -2x + 4, & x < 2 \end{cases}$ را با یک ضابطه بیان کنید.

ت شیب خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

۱۸۳ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کنید.

ب آیا می‌توان بدون نوشتن تابع دوضابطه‌ای، براساس نمودار $y = |x|$ ، نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

پ نمودار $y = |x - 3|$ و $y = |x + 1|$ را با انتقال رسم کنید.

ت نمودار $y = |x| + 1$ را چگونه می‌توان براساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟

۱۸۴ نمودار تابع $y = |-\frac{1}{2}x + 8|$ را رسم کنید.

اعمال جبری بر روی توابع

۱۸۵ اگر $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

ب $f \times g$

الف $f + g$

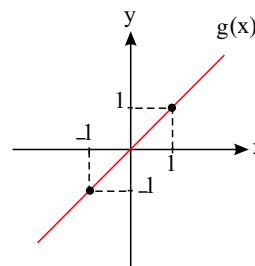
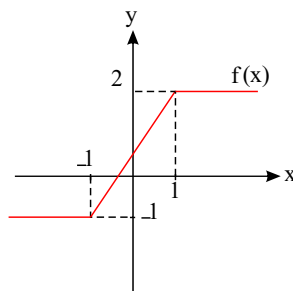
د $\frac{f}{g}$

ج $\frac{g}{f}$

و $g - f$

ه $f - g$

۱۸۶ با توجه نمودار مختصاتی تابع $f(x)$ و $g(x)$ مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

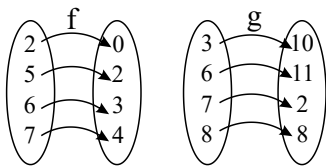


الف $(f + g)(1)$

ب $(f - g)(1)$

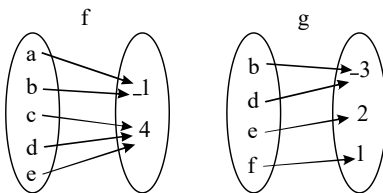


۱۸۷ اگر $f(x) = 3x + a$ و $g(x) = x - 4$ و $(f + g)(x) = 4x - 2$ باشد در این صورت مقدار a را به دست آورید.



۱۸۸ با توجه به نمودار و دو تابع f و g توابع خواسته شده را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

الف) $f + g$ ب) $g - f$



۱۸۹ با توجه به دو تابع f و g توابع خواسته شده را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید. الف)

الف) $f - g$ ب) $f \times g$

۱۹۰ با توجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2 - 1$ و $f_2(x) = x + 1$:

الف) ضابطه توابع زیر را به دست آورید:

a) $f_2(x) = (f_1 + f_2)(x) = (x^2 - 1) + (x + 1) =$

b) $f_2(x) = (f_1 - f_2)(x)$

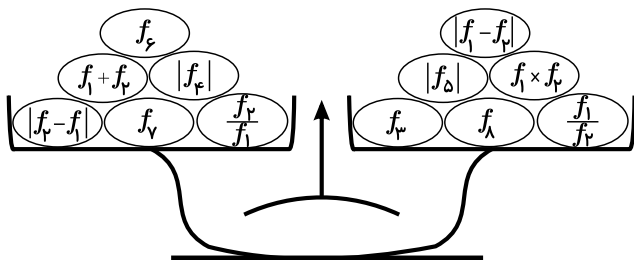
c) $f_2(x) = (f_2 - f_1)(x)$

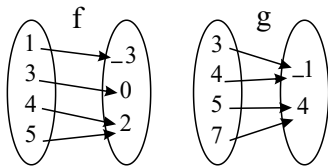
d) $f_2(x) = (f_1 \times f_2)(x)$

e) $f_2(x) = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)$

f) $f_2(x) = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x)$

ب) اگر مقادیر تابع‌های f_3 تا f_8 به ازای $x = 2$ نمادهای وزنه‌های ترازو باشند، چرا دو کفه ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟





۱۹۱ با توجه به دو تابع f و g توابع خواسته شده را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید. الف) $\frac{f}{g}$ ب) $\frac{g}{f}$

۱۹۲ با توجه به دو تابع f و g توابع زیر را مشخص کنید.

$$f = \{(-3, 2), (-2, 6), (-1, 4), (2, 5)\}$$

$$g = \{(-3, -8), (-2, -6), (-1, -4), (5, 2)\}$$

الف) $f + g$ ب) $g - f$

۱۹۳ با توجه به دو تابع f و g توابع خواسته شده را مشخص کنید.

$$f = \{(-3, 2), (-2, 6), (-1, 4), (2, 5)\}$$

$$g = \{(-3, -8), (-2, -6), (-1, -4), (5, 2)\}$$

الف) $f \times g$ ب) $\frac{f}{g}$

۱۹۴ اگر $(\frac{f}{g})(x) = x^2 - 1$ و $f(x) = x - 1$ در دامنه تعریفشان باشند، ضابطه تابع $g(x)$ که کسری گویا با صورت واحد است را مشخص کنید. ($x \neq \pm 1$)

۱۹۵ با توجه به دو تابع f و g توابع خواسته شده را به دست آورید.

$$f = \{(0, 1), (2, 0), (3, 1)\}$$

$$g = \{(0, 0), (2, 3), (3, -1)\}$$

الف) $\frac{f}{g}$ ب) $\frac{g}{f}$

۱۹۶ در هر قسمت با توجه به دو تابع f و g توابع خواسته شده را مشخص کنید.

$$f(x) = x - 2$$

$$g(x) = 6 - 2x$$

الف) $f \times g$ ب) $\frac{f}{g}$ پ) $\frac{g}{f}$



۱۹۷ در هر قسمت با توجه به دو تابع f و g دامنه و ضابطه توابع خواسته شده را مشخص کنید.

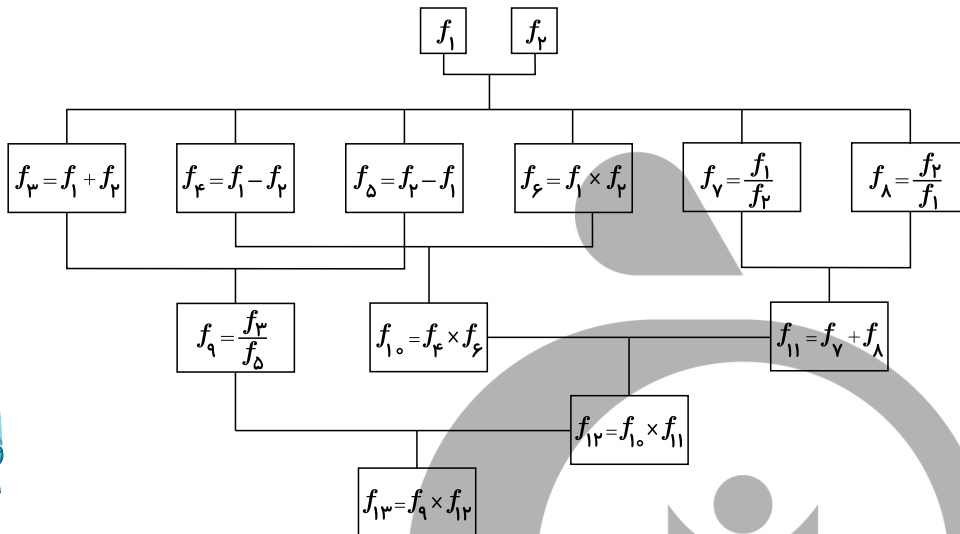
$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = 5 - 3x$$

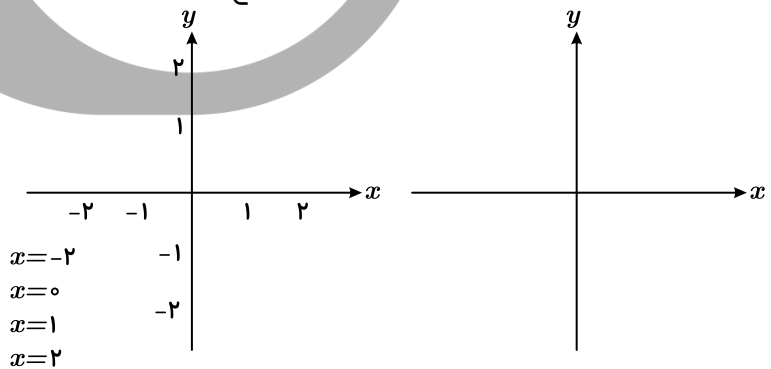
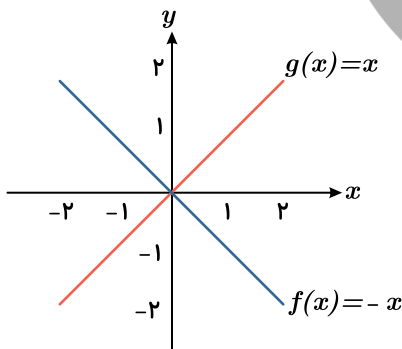
الف) $f + g$ ب) $g - f$ پ) $f - g$

۱۹۸ اگر $f(x) = 4x - 2$ و $g(x) = x - 1$ باشد، در این صورت ضابطه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ را مشخص کنید.

۱۹۹ با توجه به ضابطه $f_1(x) = x + 1$ و $f_2(x) = x - 1$ درخت زیر را به ازای $x = 2$ کامل کنید.



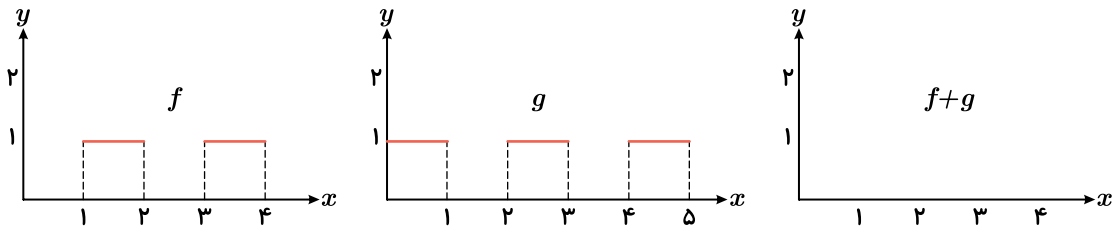
۲۰۰ به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f + g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده، مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $(f + g)$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



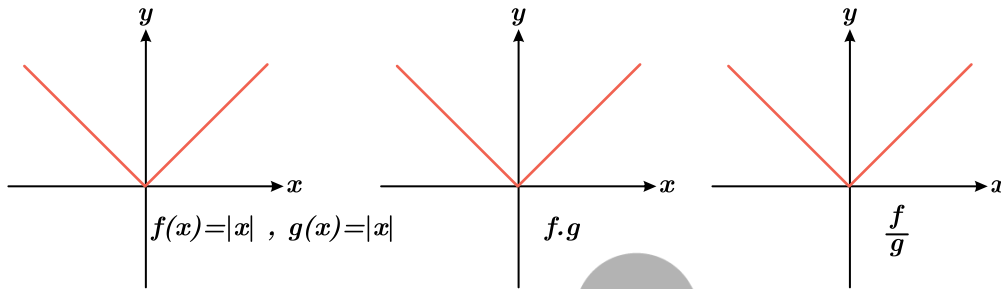


۲۰۱ در هر قسمت از سؤال با توجه به نمودار توابع f و g ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

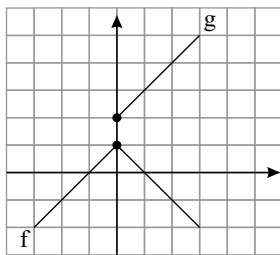
(الف)



(ب)



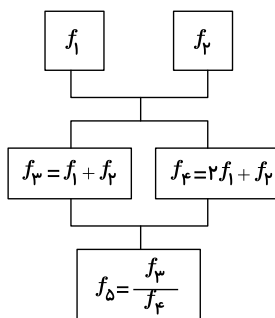
۲۰۲ نمودار دو تابع f و g به شکل مقابل است:



الف نمودار تابع $f + g$ را برای نقاط ۰، ۱، ۲ رسم کنید.

ب نمودار تابع $f + g$ را در حالت کلی رسم کنید.

۲۰۳ اگر $f_1(x) = 2x - 1$ و $f_2(x) = x + 3$ باشند، باتوجه به نمودار درختی زیر $f_5(4)$ را به دست آورید.

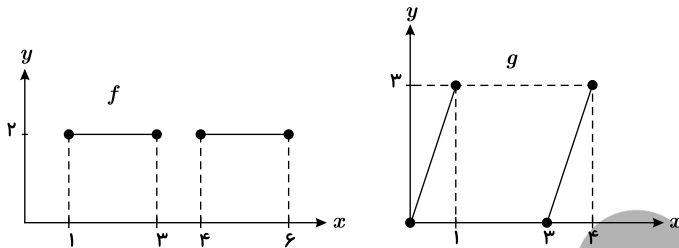




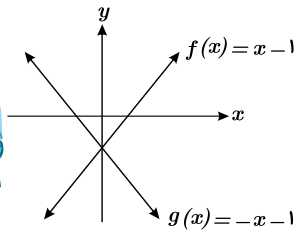
۲۰۴ شرکتی دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع سود و درآمد برای تولید x تن آجر در کارخانه A به ترتیب از راست به چپ $-x^2 + 4x - 3$ و $-x^2 + 8x$ و در کارخانه B به ترتیب از راست به چپ $\frac{-x^2}{2} + 5x - \frac{9}{2}$ و $\frac{-x^2}{2} + 6x$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان)، تابع هزینه این شرکت را به دست آورید.

۲۰۵ اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 1$ باشند، دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

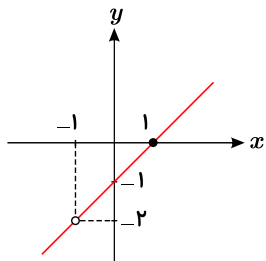
۲۰۶ با توجه به نمودار توابع f و g نمودار تابع $\frac{g}{f}$ را رسم کنید.



۲۰۷ با توجه به نمودار توابع f و g نمودار تابع $f \times g$ را به دست آورید.



۲۰۸ اگر $f(x) = x^2 - 1$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر است، حاصل $\frac{g(2)}{(f+g)(1)}$ را به دست آورید.



۲۰۹ اگر ضابطه تابع $f(x) = x^2 + 1$ و ضابطه تابع $(f - g)(x) = 4x - 3$ باشد، در این صورت ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۲۱۰ اگر دامنه تابع f به صورت $2 \leq x \leq 3$ و دامنه تابع g به صورت $-1 \leq x \leq 5$ باشد، در این صورت دامنه تابع $f + g$ را به دست آورید.

۲۱۱ اگر ضابطه تابع $f(x) = x^2 - 1$ و ضابطه تابع $(\frac{f}{g})(x) = x + 1$ در دامنه قابل تعریف و $g(x) \neq 0$ است، در این صورت ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.



۲۱۲ اگر تابع f به صورت $f = \{(2, 3), (-1, a+1), (1, -2)\}$ ، تابع g به صورت $g = \{(-2, 4), (1, a^2 + 1), (-1, 2a)\}$ و حاصل $(f - g)(-1) = 2$ باشد، در این صورت مقدار a را به دست آورید.

۲۱۳ اگر $D_f = \{x | -1 \leq x < 3\}$ و $D_g = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$ باشد، دامنه $f + g$ ، $f - g$ و $g \times f$ را مشخص کنید.

۲۱۴ اگر $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+3, & (x \geq -2) \\ x-1, & (x < -2) \end{cases}$ باشد، مقدار $(f + 3g)(x)$ را به ازای $x = f(0)$ حساب کنید.

۲۱۵ اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = 2 - 2x$ باشند، نمودار تابع های f ، g و $f + g$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۱۶ به سؤال های زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند، ضابطه تابع های زیر را به ساده ترین شکل بنویسید.

۱) $f_1(x) = (g - f)(x)$

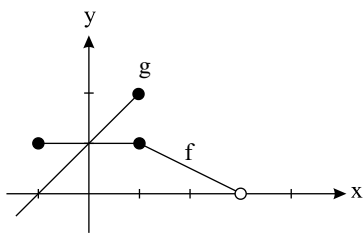
۲) $f_2(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

۳) $f_3(x) = \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

ب) حاصل $f_3 \times f_2 + 2f_1$ را به ازای $x = -2$ حساب کنید.

۲۱۷ مقدار هریک از توابع $f(x) = x$ ، $g(x) = x^2 - 1$ و $h(x) = x(x^2 - 1)$ را برای $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$ محاسبه کنید و با تشکیل جدولی، مقادیر به دست آمده برای $f(x) \times g(x)$ را با $h(x)$ مقایسه نمایید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۲۱۸ با توجه به نمودار داده شده، عبارت زیر را حساب کنید.



$$\frac{(3f + 2g)(1)}{(g \times f)(0)}$$

فصل سوم : آمار

شاخص های آماری، خط فقر و تورم

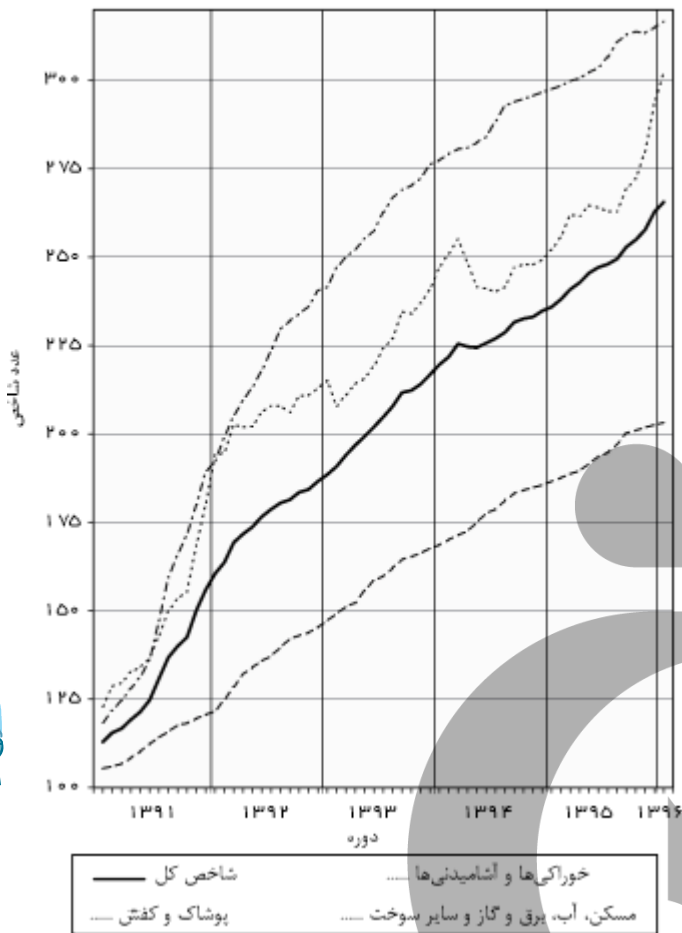
۲۱۹ افزایش شاخص بهای کالا و خدمات نشان دهنده هزینه کالاهای مصرفی است.

۲۲۰ شاخص پایه آموزش بر اساس و تعریف می شود.



۲۲۱ هزینه‌های زندگی خانواده آقای صالحی در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است. با توجه به نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی جدول زیر را کامل کنید.

شاخص کل بهای کالاها و خدمات مصرفی و برخی گروه‌های اصلی در مناطق شهری ایران
(۱۳۹۰=۱۰۰)



	۱۳۹۰	مهرماه ۱۳۹۳	دی‌ماه ۱۳۹۶
هزینه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها (برحسب هزار تومان)	۲۱۰	$\frac{۲۱۰ \times ۲۲۵}{۱۰۰} = ۴۷۲٫۵۰$	
هزینه کل (برحسب هزار تومان)	۸۵۰	$\frac{۸۵۰ \times ۲۰۲}{۱۰۰} = ۱۷۱۷$	

۲۲۲ نماتوپ یا شاخص توده بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیدید، یکی دیگر از شاخص‌های مهم آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبه آن باید وزن فرد را به کیلوگرم بر توان دوم قدش برحسب متر تقسیم کرد. جدول زیر، اطلاعات خانواده صالحی را نشان می‌دهد.

افراد خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی‌متر)
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۳
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴

اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام‌یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارند؟



۲۲۳ خانواده‌ای شش‌نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کنند. با توجه به تعریف خط فقر بین‌المللی درآمد ماهیانه این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشند؟

۲۲۴ در شهری با جمعیت فعال ۳۰۰۰۰۰ نفر و جمعیت بیکار ۲۴۰۰۰۰ نفر، نرخ بیکاری در این شهر چند درصد است؟

۲۲۵ شاخص پوسیدگی دندان در سال ۱۳۶۰ برابر با ۳ و در سال ۱۳۹۵ برابر با ۶ بوده است. شاخص پوسیدگی دندان در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

۲۲۶ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) شاخص

ب) شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی

۲۲۷ با توجه به جدول زیر، خط فقر را به روش نصف میانگین محاسبه کنید.

درآمد ماهیانه بر حسب هزار تومان	تعداد اعضای خانواده
۱۵۰۰	۳
۸۰۰	۲
۹۰۰	۲
۱۲۰۰	۳
۱۰۰۰	۲

۲۲۸ شاخص پایه آموزش برای کتابی با میانگین جملات ۷ کلمه‌ای و ۱۲ درصد کلمه سخت را محاسبه کنید. این کتاب، مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟

۲۲۹ شاخص پایه آموزش برای کتابی با میانگین طول جملات ۱۰ کلمه‌ای و ۱۸٪ کلمه سخت را محاسبه کنید. این کتاب برای دانش‌آموزان چه پایه‌ای مناسب است؟

۲۳۰ نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال جامعه را می‌نامند.

۲۳۱ شاخص توده بدنی (BMI) فردی با ۹۰ کیلوگرم وزن و ۱۸۰ سانتی‌متر قد را مشخص کنید.

۲۳۲ اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

۲۳۳ شاخص بهای کالاها و خدمات براساس تعداد متغیر محاسبه می‌شود.



۲۳۴) شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی

۲۳۵) در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات، محور طول‌ها نشان‌دهنده و محور عرض‌ها نشان‌دهنده است.

۲۳۶) مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) تورم ب) نرخ بیکاری ج) بیکار

۲۳۷) در سال ۱۳۹۶ حداقل میزان درآمد ماهیانه یک خانواده ۴ نفره برای اینکه زیر خط فقر بین‌المللی نباشد، باید چند دلار باشد؟

۲۳۸) خط فقر بین‌المللی را تعریف کنید.

۲۳۹) در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل هستند. در این منطقه، ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار هستند.

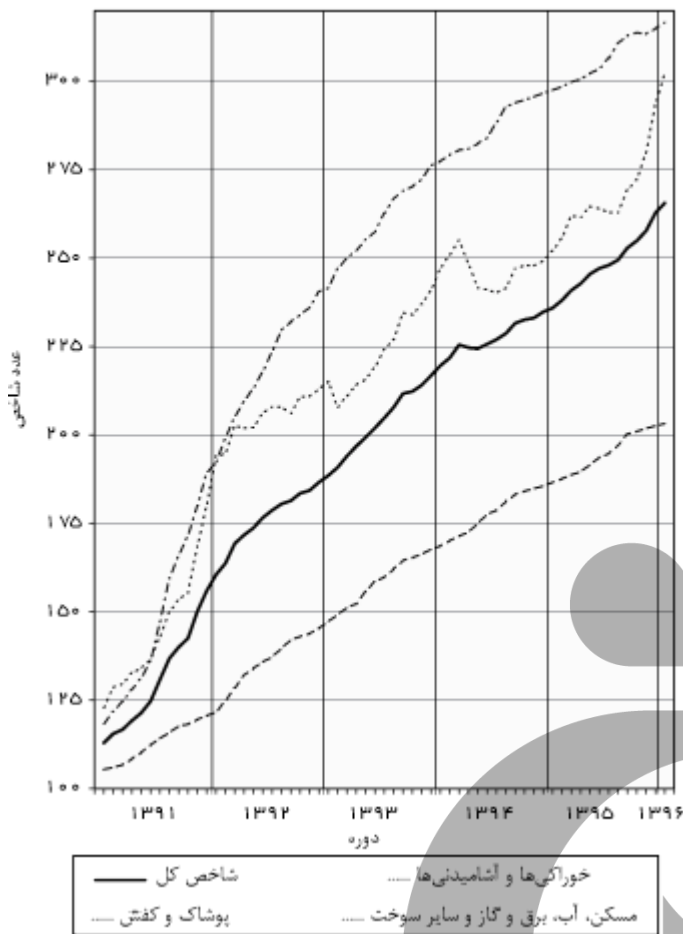
الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر با ۵ درصد باشد؟

۲۴۰) خانواده آقای صالحی در فروردین سال ۱۳۹۰، پانصد هزار تومان هزینه ماهیانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها داشته است. در همان تاریخ، هزینه ماهیانه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده دویست و پنجاه هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای نمودار شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی موارد زیر را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.



شاخص کل بهای کالاها و خدمات مصرفی و برخی گروه‌های اصلی در مناطق شهری ایران
(۱۳۹۰=۱۰۰)



الف هزینه ماهیانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌های این خانواده در خردادماه ۱۳۹۳:

ب هزینه ماهیانه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده در مهرماه ۱۳۹۵:

۲۴۱ در موقع خرید کتاب‌های داستان معمولاً به سطح کتاب برای رده سنی مشخص‌شده، توجه می‌کنیم. به نظر شما چگونه این کار را انجام می‌دهند؟ آیا نظر افراد با تجربه برای تعیین سطح یک متن به‌خصوص همیشه یکسان است؟ ارزیابی آنها کیفی است یا کمی؟ یکی از شاخص‌های خوانایی که سال‌های تحصیل خواننده متون انگلیسی را تخمین می‌زند، به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{شاخص پایه آموزش} = ۰.۴ \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات «دشوار»})$$

که منظور از کلمات «دشوار» کلمات دوهجا بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان است. این شاخص، عددی بین ۱ تا ۱۲ است که نشان‌دهنده پایه تحصیلی است.

الف برای کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمه سخت، شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید. این کتاب، مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟ پاسخ: این کتاب مناسب دانش‌آموزانی است که پایه را به پایان رسانده‌اند.



ب مزایا و محدودیت‌های این شاخص چیست؟

پ همان‌گونه که متوجه شده‌اید، این شاخص بر اساس دو آمار از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام ببرید.

۲۴۲ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف مزیت خط فقر بین‌المللی نسبت به خط فقری که در داخل کشور محاسبه می‌شود، آن است که را فراهم می‌کند.

ب هر چه قیمت‌ها افزایش یابند، پولمان کاهش می‌یابد.

پ نرخ بیکاری عبارت است از به

ت شاخص سلامت برای فردی با ۵۳ کیلوگرم وزن و ۱۷۰ سانتی‌متر قد برابر است که نشان‌دهنده آن است که شخص دارد.

۲۴۳ کلمه مناسب را با توجه به توضیحات داده‌شده، انتخاب کنید.

«تورم - شاخص - شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی - شاخص سلامت - خط فقر - نرخ بیکاری»

الف این شاخص به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد، تا بتوان مقایسه‌ای بین سال‌های مختلف انجام داد.

ب شاخصی است که درآمد افرادی که حداقل درآمد را برای زندگی ندارند، مشخص می‌کند.

پ تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را می‌گویند.

ت با توجه به افراد شاغل برای چهار زیرگروه رشته‌های تحصیلی ممکن است که یکسان نباشد.

۲۴۴ خانواده آقای حسینی در شهریورماه ۸۹، ۲۰۰ هزار تومان هزینه ماهیانه پوشاک و کفش داشته و در همان تاریخ هزینه ماهیانه خوراکی و آشامیدنی‌های این خانواده ۳۰۰ هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای جدول‌های زیر، موارد خواسته‌شده را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

شاخص بهای خوراکی و آشامیدنی (۱۳۹۰=۱۰۰)

سال \ ماه	خرداد	شهریور	بهمن
۸۹	۷۵	۷۸	۸۵
۹۳	۲۱۲	۲۲۰	۲۲۸
۹۴	۲۵۵	۲۳۰	۲۴۹

شاخص بهای پوشاک و کفش (۱۳۹۰=۱۰۰)

سال \ ماه	خرداد	شهریور	بهمن
۸۹	۷۸	۸۰	۸۸
۹۳	۲۵۰	۲۵۸	۲۷۳
۹۴	۲۸۱	۲۸۵	۲۹۵

الف هزینه ماهیانه پوشاک و کفش این خانواده در بهمن ۹۳ و شهریور ۹۴:



ب) نرخ تورم هزینه خوراکی و آشامیدنی‌ها در بهمن ۹۴ نسبت به بهمن ۹۳:

پ) در چه سالی و در چه کالاهایی قیمت‌ها کاهش یافته است؟

۲۴۵) خط فقر بین‌المللی توسط بانک جهانی در سال جاری، در حدود چهار هزار تومان (۱٫۲۵ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است.

الف) در فعالیت قبل، چند خانوار، درآمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند.

ب) اگر درآمد یک خانوار سه نفری در یک ماه، دو میلیون تومان باشد، این خانوار طبق این تعریف چه وضعیتی دارد؟

پ) متوسط درآمد ماهانه یک خانوار سه‌نفره در ماه، باید حداقل چقدر باشد تا شخص فقیر نباشد؟

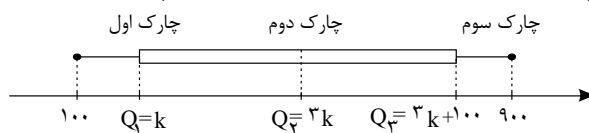
ت) در فعالیت قبل میزان یارانه را با خط فقر بین‌المللی برای هر یک از کارکنان محاسبه کنید.

ث) چه موقع دو روش محاسبه خط فقر، تفاوت زیادی با هم دارند؟ چرا؟

۲۴۶) درآمد ماهانه ۴ خانواده به صورت زیر است. در این جامعه ۴ خانواری، اگر خط فقر با استفاده از میانگین محاسبه شود، دولت ماهانه چقدر باید به خانواده افراد زیر خط فقر یارانه بپردازد تا درآمد افراد زیر خط فقر به خط فقر برسد؟

ردیف	درآمد ماهانه (میلیون تومان)	تعداد اعضای خانوار
۱	۲	۴
۲	۱٫۴	۷
۳	۲٫۲	۲
۴	۲٫۴	۳

۲۴۷) نمودار جعبه‌ای درآمد افراد جامعه‌ای به شکل زیر است. خط فقر به کمک میانه در این جامعه ۳۰۰ هزار تومان در ماه به ازای هر نفر تعیین شده است. مقدار دامنه میان‌چارکی درآمد افراد را به دست آورید. (اعداد نمودار برحسب هزار تومان هستند.)





۲۴۸ با توجه به جدول زیر شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی در سال ۱۳۹۶ نسبت به سال پایه ۱۳۹۴ را به طور تقریبی به دست آورید.

ردیف	قیمت کالا در سال ۱۳۹۴	قیمت کالا در سال ۱۳۹۶	میزان مصرف
۱	۶۰۰	۸۰۰	۱۰
۲	۱۲۰۰	۱۵۰۰	۲۰
۳	۸۰۰	۹۰۰	۱۰

۲۴۹ اگر قیمت کالایی در سالهای ۹۲ و ۹۷ را به ترتیب ۲۰ هزار و ۲۵ هزار تومان فرض کنیم، تورم این کالا از سال ۹۲ تا ۹۷ چند درصد بوده است؟

۲۵۰ مقدار جزء صحیح شاخص سلامت شخصی به وزن ۹۰ کیلوگرم و قد ۱۸۰ سانتی متر را به دست آورید.

۲۵۱ اگر قیمت کالایی در سال ۱۳۹۶ برابر ۹۰۰ تومان و شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی نسبت به سال پایه برابر ۱۲۰ باشد و میزان مصرف این کالا ۸۵ کیلوگرم باشد، در این صورت قیمت این کالا در سال پایه چند تومان بوده است؟

۲۵۲ نرخ بیکاری یک منطقه برابر ۱۵٪ است. اگر جمعیت فعال این منطقه برابر ۶۰۰۰۰۰۰ نفر باشد، چند نفر بیکار در این منطقه وجود دارد؟

۲۵۳ اگر شاخص بهای کالایی در سال ۱۳۹۰، برابر ۱۲۲ و شاخص بهای همان کالا در سال ۱۳۹۶ برابر ۱۸۶ باشد، تورم این کالا در طی این شش سال تقریباً چند درصد است؟ (سال ۱۳۸۸ سال پایه است.)

۲۵۴ به نظر می رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان دهنده شدن هزینه اقلام خوراکی و است.



۲۵۵ خط فقر را باتوجه به جدول زیر به دو روش ذکر شده محاسبه کنید. هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را براساس نصف میانه محاسبه کند. به هر یک از کارکنان، چه مقدار یارانه بدهند که خانواده او حداقل درآمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

ردیف	درآمد ماهانه	تعداد اعضای خانوار	متوسط درآمد اعضای خانوار
۱	۱۰۰۰	۳	
۲	۳۰۰۰	۴	
۳	۱۰۰۰	۱	
۴	۴۰۰۰	۵	
۵	۳۰۰۰	۱	
۶	۳۰۰۰	۷	
۷	۲۰۰۰	۳	
۸	۱۰۰۰	۴	
۹	۲۰۰۰	۲	
۱۰	۱۰۰۰	۱	

۲۵۶ با توجه به نتایج نمونه‌گیری از متوسط هزینه زندگی روزانه افراد دو شهر A و B ، خط فقر هرکدام از شهرها را ابتدا جداگانه به کمک میانه و سپس باهم به کمک میانگین محاسبه کنید و در هر حالت مشخص کنید که چه تعداد از افراد مشمول دریافت یارانه می‌شوند؟
 شهر A : ۱۰۰ نفر با درآمد ۳۰۰۰ تومان، ۲۰۰ نفر با درآمد ۷۰۰۰ تومان، ۵۰۰ نفر با درآمد ۸۰۰۰ تومان، ۴۰۰ نفر با درآمد ۱۰۰۰۰ تومان، ۲۰۰ نفر با درآمد ۱۵۰۰۰ تومان، ۱۰۰ نفر با درآمد ۳۰۰۰۰ تومان.
 شهر B : ۱۰۰ نفر با درآمد ۴۰۰۰ تومان، ۲۰۰ نفر با درآمد ۹۰۰۰ تومان، ۹۰۰ نفر با درآمد ۲۰۰۰۰ تومان، ۸۰۰ نفر با درآمد ۲۵۰۰۰ تومان.



۲۵۷ هزینه‌های زندگی خانواده‌ای در سال ۱۳۸۵ در جدول زیر آمده است.

مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها

متوسط سال	آبان	تیر	ماه سال
۲۴	۲۷	۲۳	۱۳۸۵
۱۰۰	۱۰۱	۹۷	۱۳۹۰
۱۲۷	۱۳۲	۱۳۰	۱۳۹۵

خوراکی آشامیدنی‌ها

متوسط سال	آبان	تیر	ماه سال
۴۴	۴۷	۴۳	۱۳۸۵
۱۰۰	۱۰۱	۹۷	۱۳۹۰
۲۲۷	۲۳۲	۲۳۰	۱۳۹۵

با توجه به جدول شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، جدول زیر را کامل کنید.

سال	۱۳۸۵	تیر ماه ۱۳۹۰	آبان ماه ۱۳۹۵
(هزینه برحسب هزار تومان)			
خوراکی آشامیدنی	۱۱۰		
مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها	۸۰		

۲۵۸ با توجه به داده‌های جدول زیر، شاخص تودهٔ بدنی را محاسبه کرده و مشخص کنید کدامیک از آنها از وزن مطلوبی برخوردار هستند؟

قد (سانتی‌متر)	وزن (کیلوگرم)	سن (سال)	افراد
۱۸۰	۵۰	۲۱	آرمین
۱۶۵	۷۶	۴۵	فرزاد
۱۷۰	۷۰	۳۰	مهران

۲۵۹ فرض کنید در سال ۱۳۸۵ مهریهٔ فردی ۵۰۰ سکه بوده، با احتساب آنکه در آن سال هر سکه ۱۶۷ هزار تومان قیمت داشته، ارزش این مهریه را در سال ۱۳۹۲ بیابید. (متوسط شاخص کل در سال ۸۵ و ۹۲ به ترتیب ۱۰۰ و ۱۷۶ است)

سری‌های زمانی، درون‌یابی و برون‌یابی

۲۶۰ انحراف معیار داده‌های زیر را محاسبه کنید.

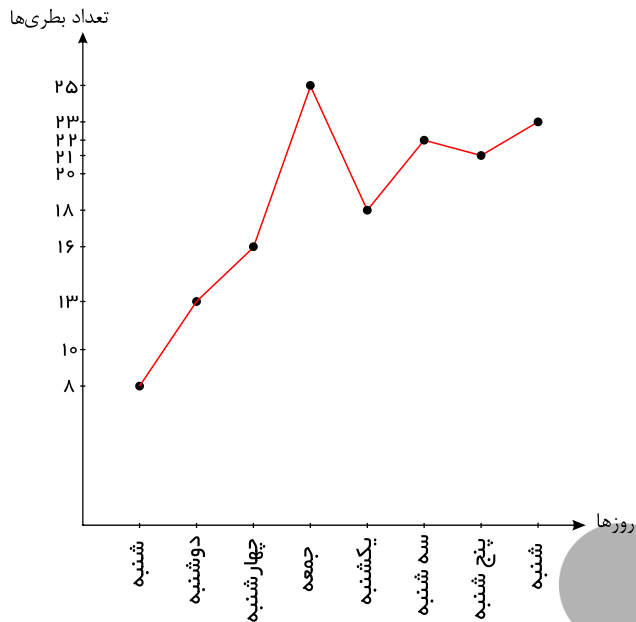
۲۲ و ۱۹ و ۱۷ و ۱۵ و ۱۳ و ۱۰

۲۶۱ یک دهه‌دار تعداد بطری‌های آب فروخته‌شده، از شروع فصل گرما را یک روز در میان مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

روز	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه	یکشنبه	سه‌شنبه	پنجشنبه	شنبه
تعداد بطری‌ها	۸	۱۳	۱۶	۲۵	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳



الف سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.



ب تعداد بطری‌های فروخته‌شده در روزهای فرد را درون‌یابی کنید.

پ تعداد بطری‌های فروخته‌شده دوشنبه از هفته دوم را برون‌یابی کنید.

۲۶۲ تعداد سفارشات یک شرکت خدماتی در جدول زیر آمده است:

ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
تعداد سفارش	۵۰	۹۰	۶۰	۳۰	۲۰

الف نمودار سری زمانی تعداد سفارشات این شرکت را رسم کنید.

ب تعداد سفارشات این شرکت خدماتی را در ساعت ۹ به روش درون‌یابی خطی تخمین بزنید.

۲۶۳ تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت‌شده را می‌نامند.

۲۶۴ در نمودار سری زمانی محور طول‌ها نشان‌دهنده است.

۲۶۵ درون‌یابی که به‌وسیله یک پاره‌خط انجام شود نام دارد.



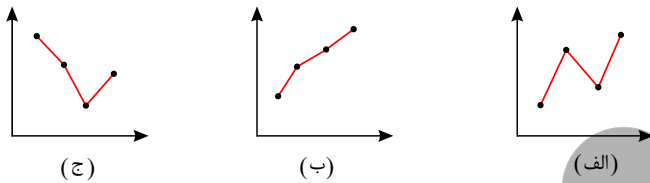
۲۶۶ میزان اینترنت مصرفی یک شرکت در جدول زیر آمده است.

اسفند	بهمن	دی	آذر	آبان	مهر	ماه
۳۰	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰	۴۰	اینترنت مصرفی برحسب گیگابایت

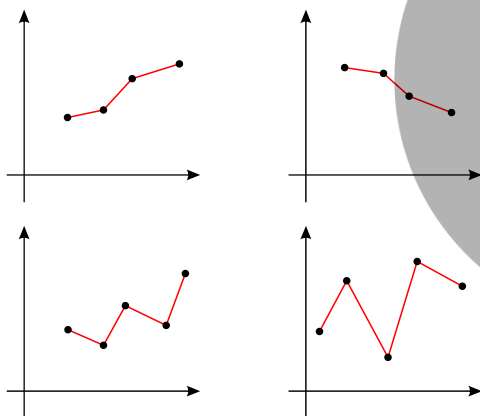
نمودار سری زمانی مربوط به میزان اینترنت مصرفی این شرکت را رسم کنید.

۲۶۷ اگر مقدار داده‌ای با درونیابی ۴۲۰۰ به‌دست‌آمده و مقدار خطای درونیابی برابر ۵۰۰ باشد. مقدار واقعی این داده چه مقدار یا مقادیری می‌تواند باشد؟

۲۶۸ در کدام‌یک از نمودارهای سری زمانی زیر، درونیابی و برون‌یابی خطی بهتری انجام می‌شود؟ دلیل خود را توضیح دهید.



۲۶۹ داده‌های جمع‌آوری شده در کدام قسمت سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.
الف) تعداد ماشین‌هایی که در برخی از ساعت‌های مختلف یک روز از یک خیابان خاص تردد دارند.
ب) تعداد مراجعین در هر ساعت از روز به یک شرکت خدماتی



۲۷۰ اگر نمودارهای شکل زیر یک سری زمانی باشند، در کدام حالت درونیابی و برون‌یابی خطی بهتری امکان‌پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۲۷۱ کدام‌یک از داده‌های زیر سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در هر ماه در ۱۰ سال گذشته
ب) تعداد مشتریان یک تاجر برحسب مدت زمانی که صرف بازاریابی می‌کند.
ج) تعداد ساعتهایی که در معرض نور مستقیم خورشید قرار داریم؛ شدت آفتاب سوختگی

۲۷۲ میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر «آ و ب» برحسب میلی‌متر در جدول زیر آمده است:



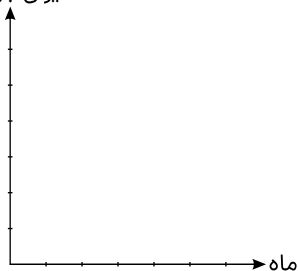
شهر (ب)	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر (آ)	۱۵	۲۰	۳۰	۳۵	۳۰	۳۰			
شهر (ب)	۲۳۰	۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۱۰			

الف جدول را کامل کنید.

ب میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.

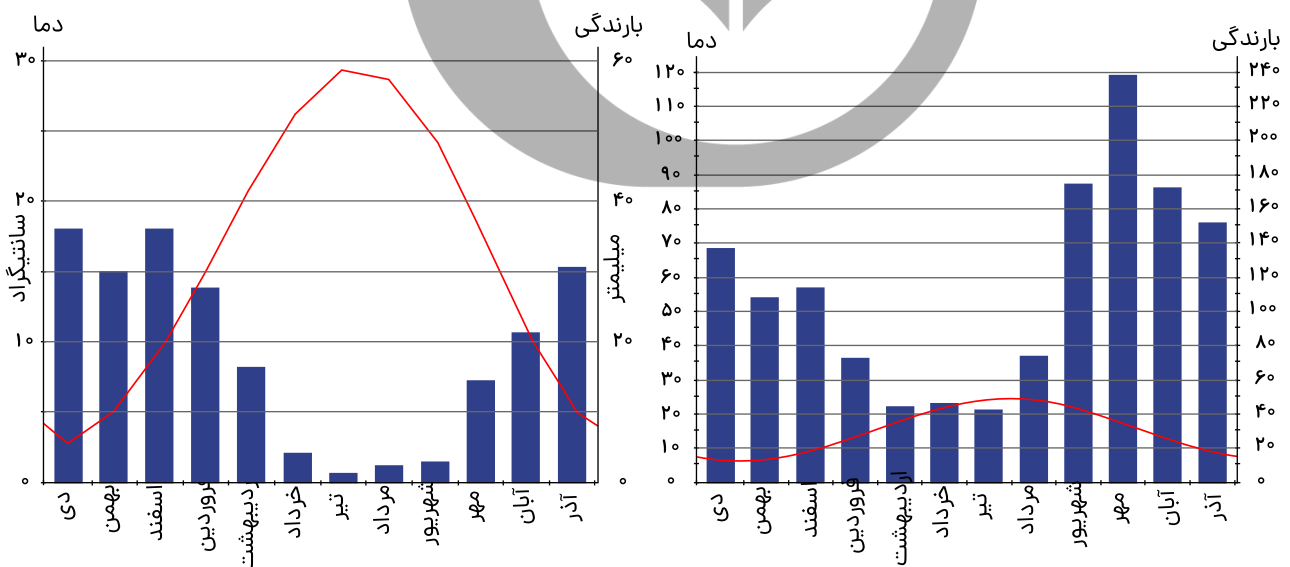
پ نمودار پراکنش‌نگاشت هر دو شهر را برحسب ماه‌های سال با یک مقیاس بر روی یک محور رسم کنید. نقاط را به هم وصل کنید. برای مشخص شدن هر شهر از یک رنگ متفاوت استفاده کنید.

میزان بارندگی



ت کدام شهر میزان بارندگی بیشتری در پاییز نسبت به زمستان دارد؟

۲۷۳ نمودار پراکنش‌نگاشت دما و نمودار میله‌ای بارندگی‌های دو شهر «آ و ب» را با مقیاس‌های متفاوت برای یک‌سال خاص در یک محور رسم کرده‌ایم.

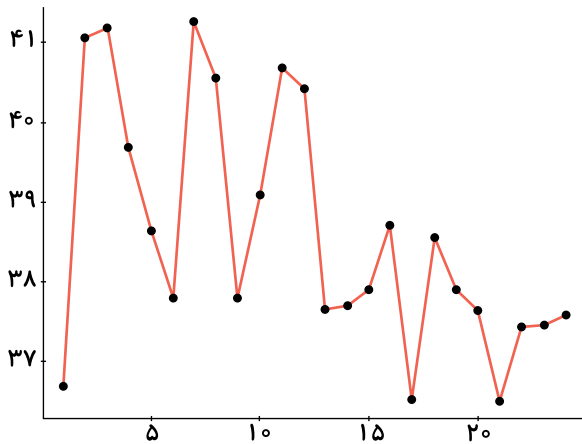


الف در چه فصلی از سال بارندگی بیشتر است؟



ب متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آیا در تمام ماه‌های سال به همین نحو است؟

۲۷۴ سری زمانی زیر، نشان‌دهندهٔ ۶ روز درجهٔ حرارت بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده و درمانش با آنتی‌بیوتیک آغاز شده است.



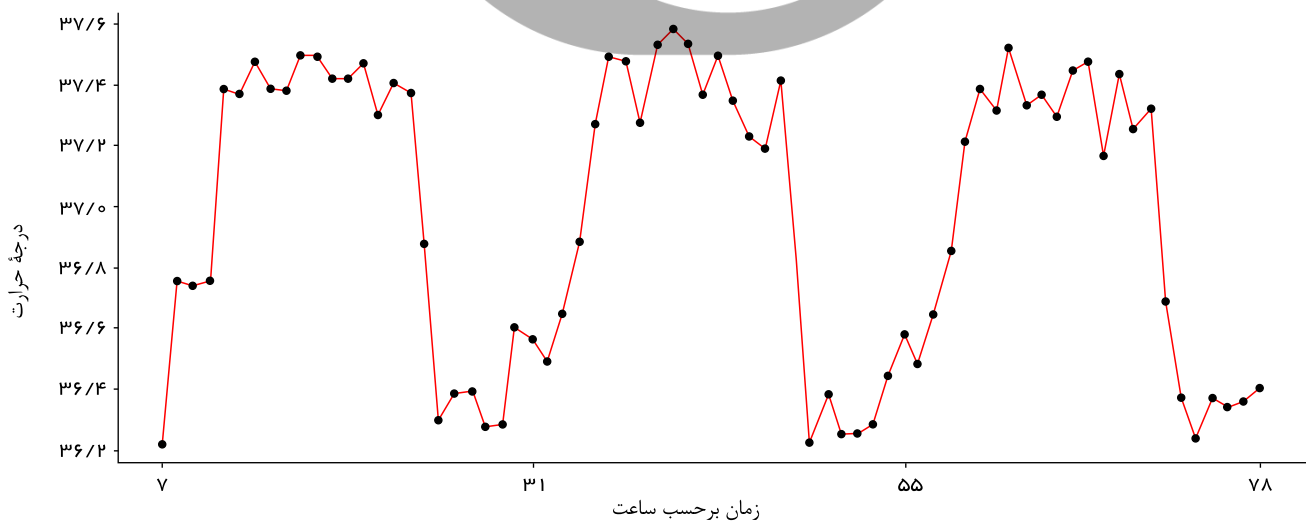
الف هر روز چند درجهٔ حرارت خوانده‌شده ثبت شده است؟

ب درجهٔ حرارت بیمار در لحظهٔ بستری شدن چند درجه است؟

پ پس از چند روز درجهٔ حرارت بیمار به حالت طبیعی بازگشته است؟

ت اگر اولین زمان ثبت درجهٔ حرارت ساعت ۷ صبح باشد، نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده‌تر به نظر می‌رسد؟ کدام‌یک جزئیات بیشتری را نشان می‌دهد؟

۲۷۵ درجهٔ حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۳ روز از ۷ صبح اندازه‌گیری شده است.



الف بیشترین دمای بدن چقدر است؟



ب دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.

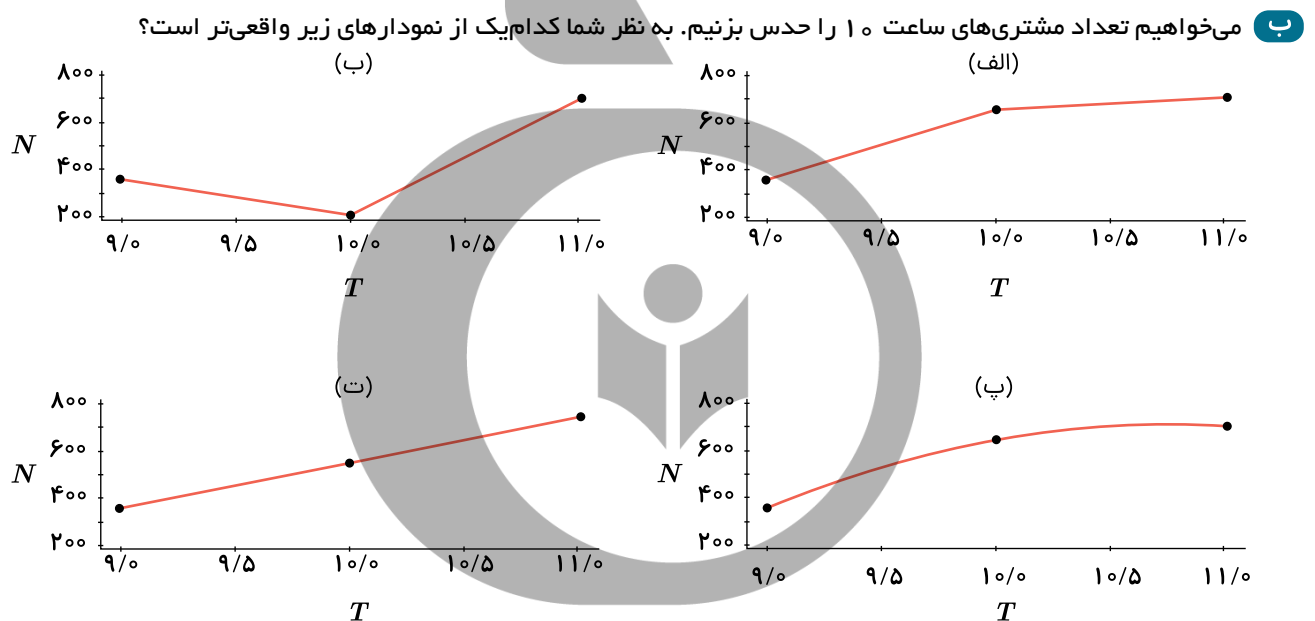
پ آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟

ت این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی)

۲۷۶ در یک مرکز خرید، تعداد مشتری‌های بین ساعت ۹ تا ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است:

ساعت (T)	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
تعداد مشتری (N)	۳۵۰	۷۵۰	۸۰۰	۶۵۰	۳۰۰	۵۰۰	۲۵۰

الف نمودار سری زمانی را رسم کنید.



پ اگر فرض کنیم تعداد مشتری‌های در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است به سؤال قبل پاسخ دهید.

۲۷۷ می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون‌یابی کنیم. فرض می‌کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است.

الف معادله خط بین دو ساعت (۹, ۳۵۰) و (۱۱, ۷۵۰) را به دست آورید.

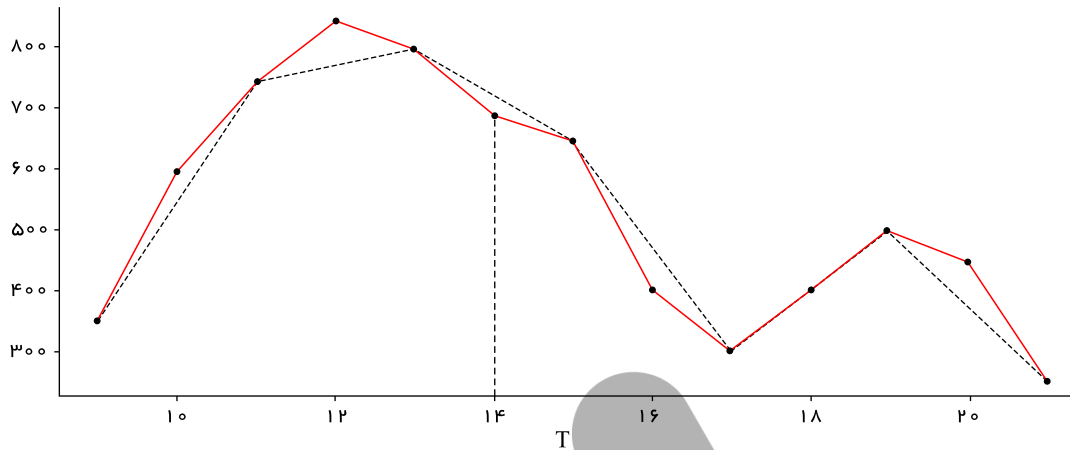
ب خط را رسم کنید.



پ مقدار این خط در ساعت ۱۰ چقدر است؟

ت این مقدار به درون‌یابی کدام‌یک از شکل‌های فعالیت قبل (صفحه ۶۶ کتاب درسی) نزدیک‌تر است؟

ث خطای درون‌یابی بقیه نقاط را از روی شکل محاسبه کنید.



۲۷۸ میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی برحسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

سال x	۵	۴	۳	۲	۱
فروش y	۱۹	۱۵	۱۱	۹	۶

الف نمودار سری زمانی را رسم کنید.

ب فروش در سال هفتم را حدس بزنید.

پ میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی نمودار نمایش دهید.

ت یک خط از نقطه میانگین‌ها به نقطه (۵، ۱۹) وصل کنید. معادله خط را به دست آورید.

ث اگر به جای x در معادله، مقدار ۶ قرار دهید، عدد به دست آمده چقدر است؟ آیا می‌توان این مقدار را به عنوان تخمین فروش در سال آینده تصور کرد؟

۲۷۹ میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) برحسب درصد در جدول زیر آمده است.

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درآمد	۱۹٫۵	۲۹	۳۸٫۵	۴۸	۵۸	۶۷



الف سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه برون‌یابی کنید.

۲۸۰ تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر در جهان مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است.

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف سری زمانی آن را رسم کنید.

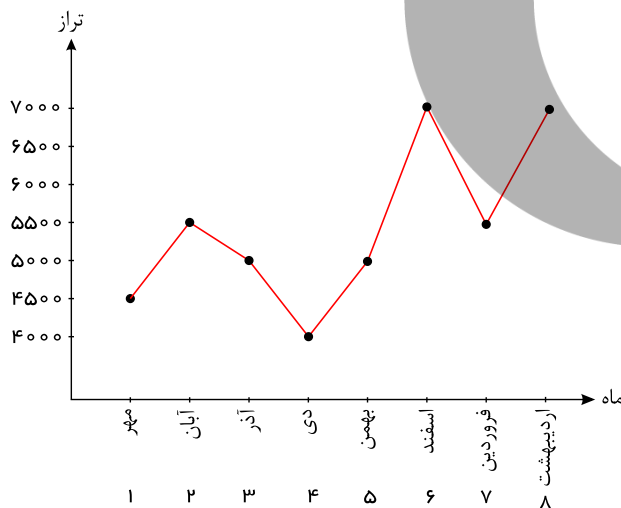
ب میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

پ معادله خطی را که نقطه (۱۰ و ۲۱) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

ت با استفاده از خطی که معادله آن را به دست آورده‌اید، تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر را در سال یازدهم در جهان برون‌یابی کنید.

ث اگر بدانیم در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون‌یابی چقدر است؟

۲۸۱ میانگین تراز درس ریاضی و آمار یک دانش‌آموز در ماه‌های مختلف در نمودار زیر مشخص شده است.



الف با توجه به دو ماه دی و اسفند، تراز این دانش‌آموز را در ماه بهمن به روش درون‌یابی خطی به دست آورید.

ب خطای درون‌یابی خطی در ماه بهمن را مشخص کنید.

۲۸۲ تعداد بازدیدکنندگان یک سایت در ساعت‌های مختلف روز در جدول زیر آمده است.



ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
تعداد بازدیدکنندگان	۳۰۰	۴۰۰	۴۵۰	۶۰۰	۵۰۰	۴۰۰	۳۰۰

الف نمودار سری زمانی مربوط به تعداد بازدیدکنندگان از این سایت را رسم کنید.

ب تعداد بازدیدکننده‌گان در ساعت ۱۳ را به روش درونیابی خطی تخمین بزنید.

۲۸۳ میزان اینترنت مصرفی یک شرکت در جدول زیر آمده است.

ماه	اسفند	بهمن	دی	آذر	آبان	مهر
اینترنت مصرفی بر حسب گیگابایت	۳۰	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰	۴۰

الف نمودار پراکنش نگاشت این جدول را رسم کنید.

ب انحراف معیار داده‌ها را حساب کنید.

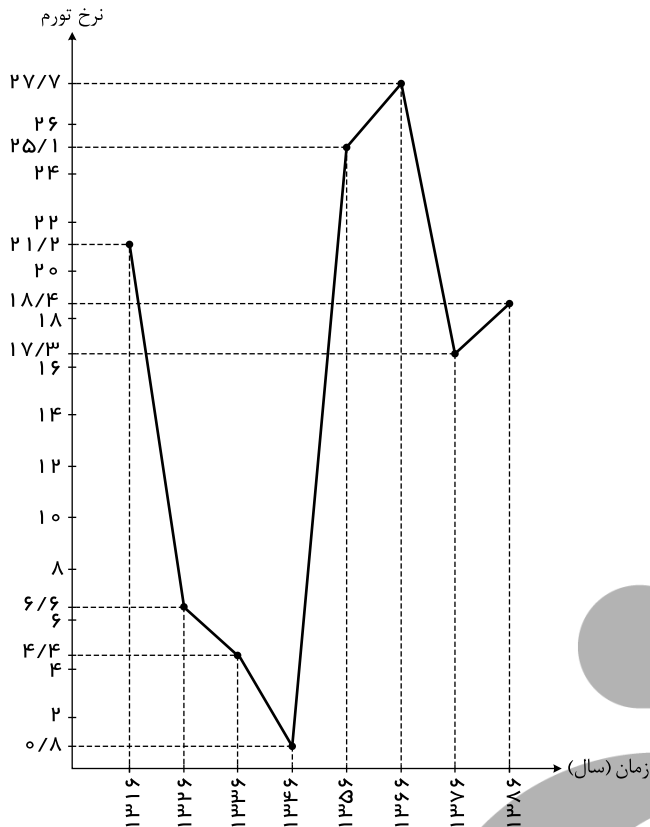
۲۸۴ نرخ تورم در ایران بین سال‌های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول زیر داده شده است.

نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال
۱۸/۴	۱۳۸۶	۱۷/۳	۱۳۷۶	۲۷/۷	۱۳۶۶	۲۵/۱	۱۳۵۶	۰/۸	۱۳۴۶	۴/۴	۱۳۳۶	۶/۶	۱۳۲۶	۲۱/۲	۱۳۱۶
۲۵/۴	۱۳۸۷	۱۸/۱	۱۳۷۷	۲۸/۹	۱۳۶۷	۱۰/۰	۱۳۵۷	۱/۵	۱۳۴۷	۱/۰	۱۳۳۷	۱۱/۱	۱۳۲۷	۸/۸	۱۳۱۷
۱۰/۸	۱۳۸۸	۲۰/۱	۱۳۷۸	۱۷/۴	۱۳۶۸	۱۱/۴	۱۳۵۸	۳/۶	۱۳۴۸	۱۳/۰	۱۳۳۸	۲/۳	۱۳۲۸	۸/۰	۱۳۱۸
۱۲/۴	۱۳۸۹	۱۲/۶	۱۳۷۹	۹/۰	۱۳۶۹	۲۳/۵	۱۳۵۹	۱/۵	۱۳۴۹	۷/۹	۱۳۳۹	-۱۷/۲	۱۳۲۹	۱۳/۸	۱۳۱۹
۲۱/۵	۱۳۹۰	۱۱/۴	۱۳۸۰	۲۰/۷	۱۳۷۰	۲۲/۸	۱۳۶۰	۵/۵	۱۳۵۰	۱/۶	۱۳۴۰	۸/۳	۱۳۳۰	۴۹/۵	۱۳۲۰
۳۰/۵	۱۳۹۱	۱۵/۸	۱۳۸۱	۲۴/۴	۱۳۷۱	۱۹/۲	۱۳۶۱	۶/۳	۱۳۵۱	۰/۹	۱۳۴۱	۷/۲	۱۳۳۱	۹۶/۲	۱۳۲۱
۳۴/۷	۱۳۹۲	۱۵/۶	۱۳۸۲	۲۲/۹	۱۳۷۲	۱۴/۸	۱۳۶۲	۱۱/۲	۱۳۵۲	۱/۰	۱۳۴۲	۹/۲	۱۳۳۲	۱۱۰/۵	۱۳۲۲
۱۵/۶	۱۳۹۳	۱۵/۲	۱۳۸۳	۳۵/۲	۱۳۷۳	۱۰/۴	۱۳۶۳	۱۵/۵	۱۳۵۳	۴/۵	۱۳۴۳	۱۵/۹	۱۳۳۳	۲/۷	۱۳۲۳
۱۱/۹	۱۳۹۴	۱۰/۴	۱۳۸۴	۴۹/۴	۱۳۷۴	۶/۹	۱۳۶۴	۹/۹	۱۳۵۴	۰/۳	۱۳۴۴	۱/۷	۱۳۳۴	-۱۴/۴	۱۳۲۴
۹	۱۳۹۵	۱۱/۹	۱۳۸۵	۲۳/۲	۱۳۷۵	۲۳/۷	۱۳۶۵	۱۶/۶	۱۳۵۵	۰/۸	۱۳۴۵	۸/۸	۱۳۳۵	-۱۱/۵	۱۳۲۵



الف نمودار سری زمانی داده‌ها را ده سال در میان رسم کنید.

نقاط را ده سال در میان به صورت زیر مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:



ب داده‌ها را با استفاده از قسمت قبل درون‌یابی کنید. (از سال ۱۳۸۶ تا ۱۳۸۸)

پ بر روی همان سری زمانی داده‌ها پنج سال در میان را با استفاده از جدول به روی همان نمودار رسم و خطای درون‌یابی را محاسبه کنید.

۲۸۵ قیمت جهانی طلا برای هر اونس به دلار، در سال‌های مختلف به صورت زیر است:

سال	۱۹۷۱	۱۹۷۳	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۵	۲۰۱۰	۲۰۱۶
قیمت هر اونس طلا به دلار	۳۵	۲۲/۴۲	۸۵۰	۳۳۸	۵۰۰	۱۲۳۰	۱۳۴۰

در هر کدام از حالت‌های زیر، مشخص کنید برون‌یابی نیاز است یا درون‌یابی؟

الف تخمین قیمت طلا در سال ۲۰۰۰

ب تخمین قیمت طلا در سال ۱۹۶۸

پ تخمین قیمت طلا در سال ۲۰۱۷

ت تخمین قیمت طلا در سال ۲۰۲۰



ث تخمین قیمت طلا در ماه فوریه سال ۱۹۹۸

۲۸۶ میزان مشارکت مردم در هشت دوره اخیر انتخابات ریاست‌جمهوری به‌صورت زیر است:

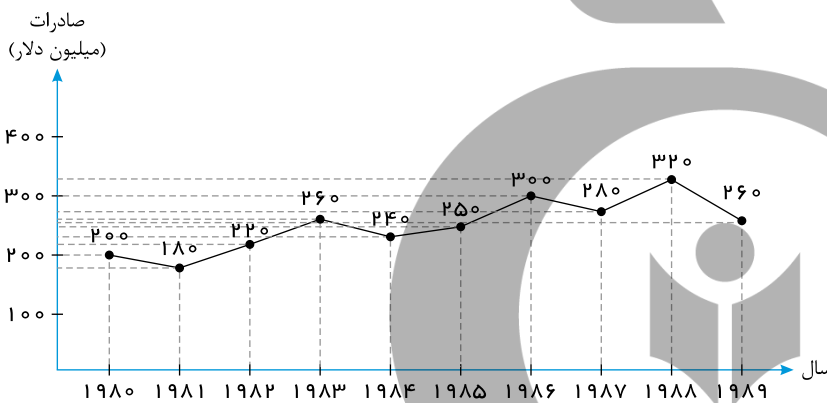
سال	۶۸	۷۲	۷۶	۸۰	۸۴	۸۸	۹۲	۹۶
میزان مشارکت	۵۴٫۵۹	۵۰٫۶۶	۷۹٫۹۳	۶۷٫۷۷	۶۲٫۷۷	۵۹٫۸۲	۷۲٫۷	۷۳٫۰۷

الف نمودار سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب بیشترین و کمترین مشارکت در چه سال‌هایی بوده است؟

پ به‌طور میانگین در هر دوره چند درصد مردم در انتخابات شرکت کرده‌اند؟

۲۸۷ صادرات یک کشور در ۱۰ سال متوالی به شکل نمودار زیر است:



الف این کشور به‌طور میانگین در هر سال چقدر صادرات داشته است؟

ب چند درصد صادرات این کشور، در ۳ سال آخر بوده است؟

پ صادرات این کشور در ۵ سال دوم بیشتر بوده است یا ۵ سال اول؟ چقدر؟

۲۸۸ بر اساس اعلام بانک مرکزی، میزان نرخ تورم کشور در سال‌های ۸۸ تا ۹۴ به‌صورت جدول زیر است:

سال	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰٫۸	۱۲٫۴	؟	۳۰٫۵	۳۴٫۷	۱۵٫۶	۱۱٫۹

الف اگر نرخ تورم به صورت یکنواخت تغییر کرده باشد، نرخ تورم را در سال ۱۳۹۰ تخمین بزنید.



ب طبق اعلام بانک مرکزی، نرخ تورم در سال ۱۳۹۰ برابر ۲۱٫۵ بوده است. میزان خطای درون‌یابی را حساب کنید.

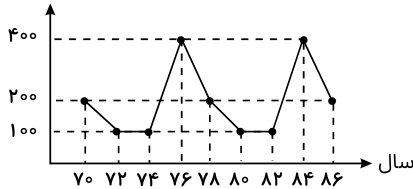
۲۸۹ در یک نمودار سری زمانی، نقطه میانگین $(a + 2, 16)$ و نقطه آخر $(10, 20)$ است. اگر در $x = 11$ مقدار واقعی $3a$ و مقدار به‌دست‌آمده از تخمین به کمک برون‌یابی خطی برابر ۲۴ باشد، خطای برون‌یابی را به دست آورید.

۲۹۰ در هر مورد مشخص کنید داده‌ها، سری زمانی هستند یا نه؟

- الف) تعداد بهبودیافتگان بیماری کرونا در هر روز در سه ماه گذشته
 ب) شدت آفتاب‌سوختگی با توجه به تعداد ساعت قرار گرفتن در برابر نور خورشید
 پ) تعداد مشتریان یک فروشگاه در هر ماه در یک سال گذشته
 ت) درجه دمای شهر تهران در هر روز در یک ماه گذشته

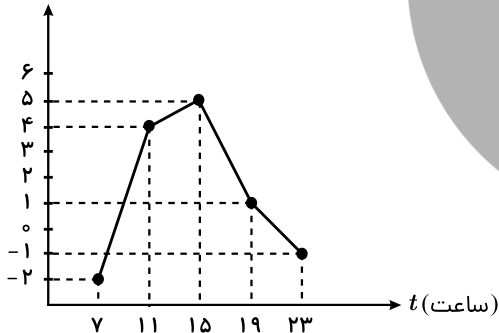
۲۹۱ با فرض آنکه نمودار سری زمانی زیر از یک الگو پیروی می‌کند، قدرمطلق اختلاف تعداد تصادفات رانندگی در سال‌های ۹۲ و ۹۴ چقدر است؟

تعداد تصادفات رانندگی



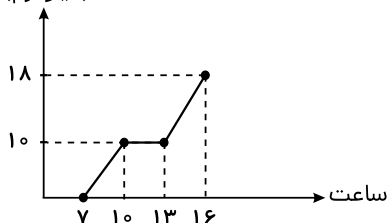
۲۹۲ دمای یک شهر از ساعت ۷ تا ۲۳ در یک روز زمستانی به‌صورت نمودار زیر است اگر دمای هوا در ساعت ۱۵: ۷ صبح، ۰٫۵- درجه باشد، خطای درون‌یابی در ساعت ۱۵: ۷ چند درجه است؟

دمای هوا



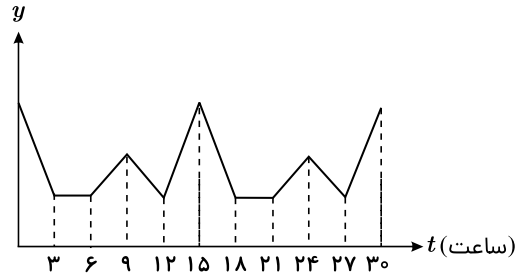
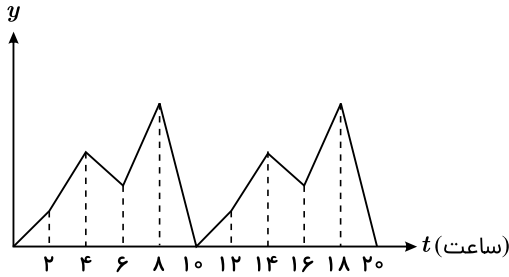
۲۹۳ با توجه به سری زمانی زیر، مقدار وزن کالاهای فروخته‌شده در ساعت ۹ به روش درون‌یابی تقریباً چقدر است؟

مقدار کالا
(کیلوگرم)





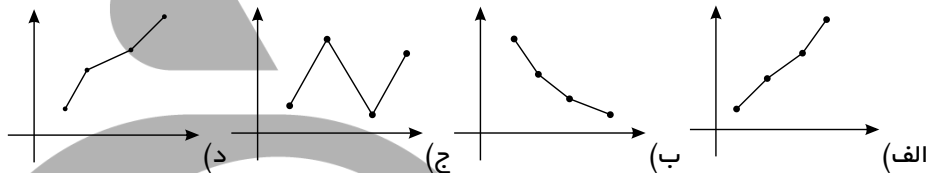
دوره تناوب نمودارهای سری زمانی زیر را به دست آورید. ۲۹۴



۲۹۵ با توجه به جدول زیر برای تخمین مقدار y در $x = 11$ به کمک درونیابی خطی، معادله $y = 3x + m$ به دست آمده است. مقدار $k + m$ را به دست آورید.

۱۴	۱۲	۱۰	x
۳۰	۲۴	$2k - 2$	y

۲۹۶ در هر یک از نمودارهای سری زمانی زیر مشخص کنید استفاده از برون‌یابی خطی مناسب است یا نه؟



۲۹۷ اگر مقدار داده‌ای با روش درونیابی 2500 به دست آمده باشد و مقدار خطای درونیابی برابر 500 باشد، در این صورت مقدار واقعی چقدر می‌تواند باشد؟

۲۹۸ با توجه به جدول زیر، مقدار $3a + 2b$ را حساب کنید. (مقدار a را به کمک درونیابی خطی و مقدار b را به کمک برون‌یابی خطی به دست آورید.)

زمان	۱	۲	۳	۴	۵	۶
داده	۶	۴	a	۱۰	۱۳	b

۲۹۹ متوسط تعداد افراد خانوارهای روستایی و شهری از سال ۶۴ تا ۸۸ به صورت زیر است:

سال	۶۴	۶۶	۶۸	۷۰	۷۲	۷۴	۷۶	۷۸	۸۰	۸۲	۸۴	۸۶	۸۸
روستایی	۵,۲	۵,۵	۵,۷	۵,۸	۵,۵	۵,۶۶	۵,۴۳	۵,۳۷	۵,۱۸	۴,۹۲	۴,۷۳	۴,۴۹	۴,۲۴
شهری	۴,۸	۴,۹	۴,۹	۵,۱	۴,۹	۴,۹۹	۴,۷۵	۴,۷۶	۴,۴۷	۴,۴۰	۴,۰۷	۳,۸۷	۳,۷۸

(الف) نمودار سری زمانی این دو سری داده را یکجا رسم کنید.

(ب) این دو نمودار را باهم مقایسه و توصیف کنید.



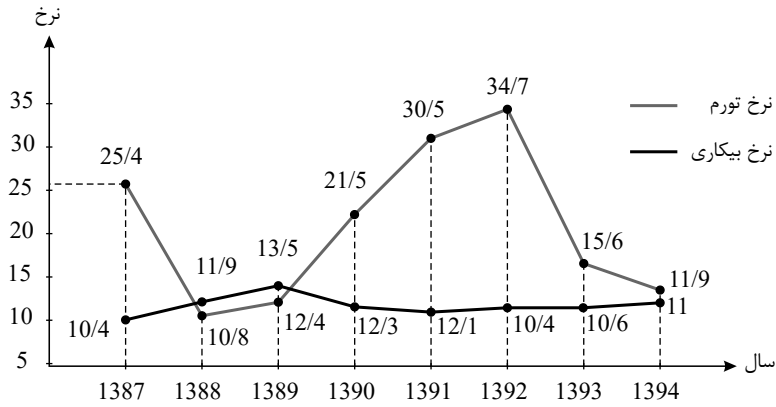
۳۰۰ شکل زیر، نمودار سری زمانی نرخ تورم و نرخ بیکاری را در سال‌های ۸۷ تا ۹۴ نشان می‌دهد: الف) بالاترین نرخ تورم و نرخ بیکاری

در چه سال‌هایی بوده است؟

ب) کدام یک تغییرات کمتری داشته است؟

پ) با توجه به این دو نمودار، نمودار سری زمانی شاخص

فلاکت (نرخ تورم + نرخ بیکاری) را رسم کنید.





پاسخنامه تشریحی

۱) در ترکیب عطفی که با $\wedge$ دو گزاره باهم تشکیل گزاره مرکب می‌دهند. کافی است یکی از گزاره‌ها نادرست باشد (لااقل یکی از گزاره‌ها) تا ارزش ترکیب نادرست باشد. الف) $۲ < ۳$ درست، $۱۲ = ۳ \times ۴$ درست، پس ترکیب عطفی آنها درست است.

ب) $۱۰ = ۳ + ۴$ نادرست است، پس با وجود یک مؤلفه نادرست، ترکیب عطفی نادرست است.

پ) $۲ < ۳$ نادرست است، پس با وجود یک مؤلفه نادرست، ترکیب نادرست است.

ت) هر دو مؤلفه نادرست هستند؛ پس ترکیب آنها نادرست است، زیرا:

$$۳ = \sqrt{۹} \text{ و در کسر } \frac{x+۲}{x+۳} \text{ نمی‌توان } x \text{ ها را باهم ساده کرد.}$$

۲) درست p ، نادرست q ، دلخواه r -۱

$$(q \Rightarrow p) \wedge r$$

ارزش گزاره $q \Rightarrow p$ به انتفای مقدم درست پس ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزاره r بستگی دارد.

-۲

$$(p \vee q) \vee r$$

چون p گزاره‌ای درست و q نادرست در نتیجه ترکیب فصلی $(p \vee q)$ درست است و در نتیجه گزاره $(p \vee q) \vee r$ درست است.

-۳

$$(p \Rightarrow q) \wedge r$$

p درست و q نادرست است، پس ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ نادرست و در نتیجه $(p \Rightarrow q) \wedge r$ با توجه به نادرست بودن $p \Rightarrow q$ نادرست است.

-۴

$$(r \Rightarrow p) \vee q$$

چون p گزاره‌ای درست است در نتیجه $(r \Rightarrow p)$ نیز درست است، پس گزاره $(r \Rightarrow p) \vee q$ نیز درست است.

-۵

$$(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$$

گزاره $p \Rightarrow r$ با توجه به درست بودن p گزاره‌ای درست است و چون q نادرست است، گزاره $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$ نادرست است.

-۶

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

p درست و q نادرست در نتیجه ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ نادرست است و در نتیجه گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم درست است.

-۷

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

q نادرست در نتیجه $(p \wedge q)$ نادرست است و گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم درست است.

۳) الف) گزاره نیست. جملات سوالی گزاره نیستند.

ب) گزاره است. ارزش گزاره درست است.

پ) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است، چون $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

ت) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است، زیرا افلاطون شاگرد ارسطو نبوده است.

ث) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است، زیرا اولویت با عمل ضرب است و داریم:

$$۲ + (۳ \times ۴) = ۱۴$$

ج) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است، زیرا:

$(-۱)^n$ برای n های زوج برابر ۱ و برای n های فرد برابر -۱ است.

چ) گزاره نیست. جمله‌های خبری که بتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم گزاره نیستند.

ح) گزاره نیست. جملات امری گزاره نیستند.

۴) الف) ترکیب عطفی $p \wedge q$

الهه دختر ارژنگ است : q الهه خواهر الهام است : p

الف) ترکیب فصلی $p \vee q$.

۳ عددی زوج است : q دو عددی اول است : p

۵) الف) گزاره ترکیبی، عطفی است و ترکیب عطفی زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند. گزاره «عدد ۳۶ مربع کامل است» گزاره‌ای درست است پس کافی است



در جای خالی گزاره‌ی درستی قرار دهید تا ارزش گزاره‌ی ترکیبی درست باشد. برای مثال $\boxed{\text{عدد } 4 \text{ گویا است}}$ که دارای ارزش درست است.

(ب) گزاره‌ی ترکیبی: فصلی است و ترکیب فصلی زمانی درست است که حداقل یکی از دو گزاره درست باشد. گزاره‌ی «عدد ۱ عددی اول است» نادرست است پس در جای خالی با گذاشتن گزاره‌ای درست ارزش درستی گزاره‌ی ترکیبی درست می‌شود. برای مثال عدد $\boxed{\pi \text{ گنگ است}}$ که دارای ارزش درست است.

۶ عکس نقیض گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \Rightarrow \sim q$ است. در این صورت عکس نقیض گزاره‌ی شرطی به صورت زیر خواهد بود:
اگر در درس‌هایم موفق نشده‌ام آنگاه به مدرسه نرفته‌ام.

۷ نادرست

۸ الف) ممکن است ارزش درستی یا نادرستی یک گزاره در آینده مشخص شود و در حال حاضر برای ما معلوم نباشد.
(ب) ممکن است برای بیان نقیض یک گزاره مفهوم گزاره را تغییر دهیم مثلاً:

عدد a فرد است: $\sim p$ عدد a زوج است: p

(پ) یکی از شروط، گزاره، خبری بودن جمله است و شرط دیگر قطعی بودن درستی یا نادرستی آن است. (خبری بودن جمله شرط لازم است نه کافی)، «سیب میوه‌ای لذیذ است» جمله‌ای خبری است، اما گزاره نیست.

(ت) گزاره است که باتوجه به مقدار n ارزش گزاره مشخص می‌شود.

۹ ملاحظه می‌شود که ستون آخر هر دو جدول دقیقاً دارای ارزش یکسان هستند.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
د	د	د	ن
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	د

الف)

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د
د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
د	د	د	ن
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

رزش یکسان هستند.

۱۰ در ترکیب فصلی کافی است، یکی از گزاره‌های ساده در ترکیب درست باشد؛ آنگاه ارزش ترکیب درست است.

الف) $3 \in Q$ و $2 \times 3 = 6$ هر دو درست هستند؛ پس ترکیب فصلی دارای ارزش درست است.

(ب) {اعداد اول} $2 \in$ درست است؛ پس ارزش ترکیب فصلی درست است.

(پ) $\frac{5}{5} = 1$ درست است؛ پس ارزش ترکیب فصلی درست است.

(ت) $(\sqrt{2} - 1) \notin Q'$ و $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{4}$ هر دو گزاره نادرست هستند؛ پس ترکیب فصلی آنها نادرست است.

۱۱

الف) درست

ب) -۱

پ) "به انتهای مقدم" یا "همواره"

ت)

۱۲

الف) روش اول: p گزاره‌ای درست است، بنابراین ترکیب فصلی $(p \vee r)$ درست است.

روش دوم: مقدم یعنی $(p \vee r)$ و تالی یعنی (p) هر دو درست هستند، بنابراین ارزش ترکیب شرطی $(p \vee r) \Rightarrow p$ درست است.

روش سوم: چون تالی یعنی (p) درست است در نتیجه ارزش کل ترکیب شرطی $(p \vee r) \Rightarrow p$ نیز درست است.

روش دیگر با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است که در روبه‌رو مشاهده می‌کنید.

p	r	$p \vee r$	p	$(p \vee r) \Rightarrow p$
د	*	د	د	د

ب) روش اول: q گزاره‌ای نادرست است، بنابراین ترکیب عطفی $(q \wedge r)$ نادرست است. بنابراین ارزش گزاره‌ی شرطی $(q \wedge r) \Rightarrow r$ به انتهای مقدم درست است.

q	r	$q \wedge r$	$(q \wedge r) \Rightarrow r$
ن	*	ن	د

روش دوم: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است که در روبه‌رو مشاهده می‌کنید.

پ) روش اول: q گزاره‌ای نادرست است، بنابراین ترکیب عطفی $(p \wedge q)$ نادرست است.

p گزاره‌ای درست است در نتیجه $\sim p$ نادرست است، بنابراین ترکیب عطفی $(\sim p \wedge r)$ نادرست است.



ترکیب‌های $(p \wedge q)$ و $(\sim p \wedge r)$ هر دو نادرست هستند، بنابراین ترکیب دو شرطی $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$ دارای ارزش درست است (ترکیب دوشروطی هنگامی دارای ارزش درست است که ارزش گزاره‌های دو طرف یکسان باشند).

p	q	r	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge r$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$
د	ن	*	ن	ن	ن	د

روش دوم: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است که در روبه‌رو مشاهده می‌کنید.

ت روش اول: در ترکیب شرطی $(\sim q \Rightarrow p)$ تالی (یعنی p) درست است، بنابراین ارزش ترکیب شرطی نیز درست است.

p درست و q نادرست است، بنابراین ترکیب دو شرطی آنها $q \Leftrightarrow p$ نادرست است.

بنابراین ترکیب دوشروطی $\underbrace{\sim q \Rightarrow p}_\text{د} \Leftrightarrow \underbrace{(p \Leftrightarrow q)}_\text{ن}$ دارای ارزش نادرست است.

(ترکیب دوشروطی هنگامی دارای ارزش درست است که ارزش گزاره‌های دو طرف یکسان باشند).

p	q	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
د	ن	د	د	ن	ن

روش دوم: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است که در روبه‌رو مشاهده می‌کنید.

ث روش اول: p درست و q نادرست است، بنابراین ارزش ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ نادرست است.

$\sim p$ درست و $\sim q$ نادرست است، بنابراین ارزش ترکیب شرطی $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ نادرست است.

بنابراین ارزش ترکیب دوشروطی $\underbrace{(p \Rightarrow q)}_\text{ن} \Leftrightarrow \underbrace{\sim q \Rightarrow \sim p}_\text{ن}$ درست است.

روش دوم: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ و ارزش ترکیب دوشروطی دو گزاره هم‌ارزش، همواره درست است.

روش سوم: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است که در روبه‌رو مشاهده می‌کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
د	ن	ن	د	ن	ن	د

ج p درست و q نادرست و r گزاره‌ای درست باشد. با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	r	$q \vee r$	$r \Rightarrow p$	$(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$
د	ن	د	د	د	د

روش دوم: در ترکیب شرطی $(r \Rightarrow p)$ تالی (یعنی p) درست است، بنابراین $(r \Rightarrow p)$ دارای ارزش درست است. در ترکیب $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ تالی (یعنی $r \Rightarrow p$) درست است، بنابراین ارزش کل گزاره درست است.

چ p درست است، پس $\sim p$ نادرست است، بنابراین ترکیب $(\sim p \Rightarrow r)$ به انتقای مقدم درست است.

q نادرست است، پس $\sim q$ درست است، بنابراین ترکیب $\underbrace{(\sim p \Rightarrow r)}_\text{د} \Rightarrow \underbrace{\sim q}_\text{د}$ دارای ارزش درست است.

روش دوم: در ترکیب شرطی $\sim p \Rightarrow r$ تالی (یعنی q) درست است، بنابراین ارزش ترکیب شرطی نیز درست است.

p	q	$\sim p$	r	$\sim p \Rightarrow r$	$\sim q$	$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$
د	ن	ن	*	د	د	د

روش سوم با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است که در روبه‌رو مشاهده می‌کنید.

ح روش اول: q نادرست پس $\sim q$ درست و p درست پس $\sim p$ نادرست است. در ترکیب شرطی $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ از مقدم درست، تالی نادرست نتیجه‌گیری شده است، بنابراین ارزش ترکیب شرطی نادرست است.

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$ نادرست است که ترکیب عطفی آن با هر گزاره‌ای نادرست است، بنابراین ارزش ترکیب عطفی $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$ نادرست است.

یادآوری: $(\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (p \Rightarrow q)$

روش دوم: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است که در روبه‌رو مشاهده می‌کنید.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	r	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$
د	ن	ن	د	*	ن	ن	ن

خ در ترکیب شرطی $(r \Rightarrow p)$ ارزش تالی (یعنی p) درست است، بنابراین ارزش ترکیب شرطی نیز درست است.

گزاره $(r \Rightarrow p)$ درست است و ترکیب عطفی آن با گزاره درست p یعنی $(r \Rightarrow p) \wedge p$ دارای ارزش درست است.

p	r	$r \Rightarrow p$	$(r \Rightarrow p) \wedge p$
د	*	د	د

۱۳

الف p درست و q نادرست است، در نتیجه $p \wedge q$ نادرست است.

ب p درست و q نادرست است، پس $q \vee p$ درست و $\sim (q \vee p)$ نادرست است.

پ $\sim p$ درست و $\sim q$ نادرست است. بنابراین $p \vee \sim q$ درست است.

۱۴



ردیف	گزاره	درست	نادرست	توضیحات
۱	اگر ۲ فرد است آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.	✓		$d \equiv n \Leftrightarrow n$
۲	اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است، اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓		$d \equiv d \Leftrightarrow d$
۴	اگر ۲ زوج باشد، آنگاه ۵ زوج است و برعکس.		✓	$n \equiv n \Leftrightarrow d$
۵	یک چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهارضلعی لوزی باشد.		✓	
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس.	✓		

ترکیب دو شرطی $q \Leftrightarrow p$ زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند (هر دو درست یا هر دو نادرست) در غیر این صورت ترکیب دو شرطی نادرست است. در ردیف دوم، مجموع دو عدد فرد همواره زوج است اما برعکس گزاره، یعنی اگر مجموع دو عدد زوج باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که دو عدد لزوماً فرد هستند. $(x = 6, y = 2) \Rightarrow x + y = 8$ مثال برای ردیف پنجم: اگر چهارضلعی مربع باشد آنگاه لوزی هم هست، اما اگر چهارضلعی لوزی باشد با زوایای ۶۰ و ۱۲۰ آنگاه مربع نیست. در ردیف ششم طبق مطالب گفته‌شده در کتاب دهم فصل ۳ درس ۳ همواره گزاره دو شرطی درست است.

۱۵

ردیف	گزاره	درست	نادرست	توضیحات
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓		به انتهای مقدم درست است.
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		✓	$n \equiv n \Rightarrow d$
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.	✓		$d \equiv d \Rightarrow d$
۴	اگر ۵ فرد باشد، آنگاه ۷ زوج است.		✓	$n \equiv n \Rightarrow d$
۵	اگر ۵ زوج باشد، آنگاه ۷ زوج است.	✓		$d \equiv n \Rightarrow n$
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓		$d \equiv d \Rightarrow d$
۷	اگر ۶ فرد باشد، آنگاه ۹۹ عددی اول است.	✓		$d \equiv n \Rightarrow n$

ترکیب شرطی $q \Rightarrow p$ فقط زمانی نادرست است که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد. در بقیه حالت درست است.

۱۶

ردیف	گزاره	درست	نادرست	توضیحات
۱	عدد ۴، عددی فرد یا عددی اول است.		✓	۴ عددی زوج و مرکب است
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا حضرت علی امام اول شیعیان است	✓		گزاره دوم دلخواه است.
۳	۹۱ عددی مرکب است یا عددی اول است.	✓		هر عدد به غیر از ۱ عددی اول یا مرکب است.
۴	بقراط برادر سقراط است یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.		✓	هر دو گزاره باید نادرست باشند.
۵	$2 < 5$ یا $5 < 2$	✓		یکی از گزاره‌ها درست و یا هر دو درست باشند.

ترکیب فصلی دو گزاره زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌ها درست باشد و زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

در ردیف ۲ و ۳ هر گزاره‌ای چه درست و چه نادرست می‌توان قرار داد.

۱۷ الف) عدد ۵ زوج نیست، و دارای ارزش درست است.

ب) تساوی $2 \times 2 = 4$ ، برقرار نیست، دارای ارزش نادرست است.

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچکتر نیست، دارای ارزش گزاره نادرست است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون نیست، دارای ارزش نادرست است.



ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار ندارد. دارای ارزش نادرست است.

ج) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$ یا $(5 \times 4) \leq (3 \times 7)$ دارای ارزش درست است.

۱۸ الف) عدد ۲، عددی اول است و $\sqrt{5}$ عددی گویا است.

ب) عدد ۲، عددی اول است یا $\sqrt{5}$ عددی گویا است.

۱۹ الف) گزاره ترکیبی عطفی است و گزاره عطفی زمانی نادرست است که حداقل یکی از گزاره‌ها نادرست باشد گزاره «عدد π عددی گنگ است» گزاره‌ای درست است پس

در جای خالی باید گزاره‌ای نادرست قرار بگیرد. برای مثال عدد ۲ گنگ است که دارای ارزش نادرست است.

ب) گزاره ترکیبی فصلی است و ترکیب فصلی زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند، گزاره «عدد $\sqrt{5}$ عددی گویا است» گزاره‌ای نادرست است و در جای خالی

باید گزاره‌ای نادرست قرار بگیرد. برای مثال عدد $\frac{3}{2}$ گنگ است که دارای ارزش نادرست است.

۲۰ الف) اگر $\sqrt{8}$ عددی گنگ و ۱۴ عددی فرد باشد، آنگاه ۲۴ مضرب ۳ است.

ب) $\sqrt{8}$ عددی گنگ است و ۱۴ عددی فرد است یا ۲۴ مضرب ۳ نیست.

۲۱ گزاره، جمله‌ای خبری است که در حال یا آینده بتوانیم درستی یا نادرستی آن را مشخص کنیم. مثال: عدد ۱۵ فرد است.

۲۲ ترکیب فصلی دو گزاره زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌ها درست باشد و زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

۲۳ ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند و زمانی نادرست است که حداقل یکی نادرست باشد.

۲۴ درست - نادرست، بدیهی است یکی از گزاره‌های P و $P \sim$ درست و دیگری نادرست است. بنابراین ترکیب فصلی آن‌ها $(P \vee \sim P)$ درست و ترکیب عطفی آن‌ها

$(P \wedge \sim P)$ نادرست است.

۲۵ فصلی

۲۶ $\sim p$

۲۷ درست، یک ترکیب شرطی، فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

(نادرست $\equiv$ نادرست $\Rightarrow$ درست)

۲۸ جدول ارزشی ۳ گزاره دارای $2^3 = 8$ وضعیت متفاوت است. که در دو وضعیت هر سه گزاره هم‌ارزش هستند (هر سه درست و هر سه نادرست)

در شش وضعیت باقیمانده در سه وضعیت ۲ درست و ۱ نادرست و در سه وضعیت ۲ نادرست و ۱ درست وجود دارد.

با احتساب ۳ وضعیت با ۲ درست و یک وضعیت با ۳ درست کلاً ۴ وضعیت داریم؛ که ۱۱ اقل ۲ درست در آنها وجود دارد.

p	q	r	
د	د	د	←
د	د	ن	←
د	ن	د	←
د	ن	ن	
ن	د	د	←
ن	د	ن	
ن	ن	د	
ن	ن	ن	

۲۹

الف)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	د $\vee$ ن $\equiv$ د $\Rightarrow p \vee \sim p \equiv$ د
ن	د	ن $\vee$ د $\equiv$ د

روش اول: بدیهی است که یکی از گزاره‌های p و $\sim p$ درست و دیگری نادرست است، بنابراین ترکیب فصلی آن‌ها $(p \vee \sim p)$ درست است.

ب)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د $\wedge$ ن $\equiv$ ن $\Rightarrow p \wedge \sim p \equiv$ ن
ن	د	ن $\wedge$ د $\equiv$ ن

روش دوم: بدیهی است که یکی از گزاره‌های p و $\sim p$ درست و دیگری نادرست است. بنابراین ترکیب عطفی آن‌ها $(p \wedge \sim p)$ نادرست است.

۳۰

الف)

$$\sim (\sim p \vee \sim q) \equiv T \rightarrow \sim p \vee \sim q \equiv F$$

$$\rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv F \rightarrow p \wedge q \equiv T \rightarrow p \equiv q \equiv T$$

ترکیب عطفی فقط وقتی ارزش درست دارد، که هر دو گزاره درست باشد.

ب) ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است، که هر دو گزاره ساده در آن نادرست باشند. پس:

$$q \equiv F \quad \text{و} \quad \sim p \equiv F \Rightarrow p \equiv T$$

۳۱ اگر گزاره‌ای از ترکیب n گزاره درست شده باشد جدول نمایش ارزشی گزاره مرکب دارای 2^n ردیف است.

$$2^{2n-1} = 32 = 2^5 \Rightarrow 2n - 1 = 5 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$



۳۲ الف) هر دو گزاره ساده در ترکیب عطفی درست است؛ پس ترکیب دارای ارزش درست است.

ب) یک، عدد اول است نادرست است؛ پس ترکیب عطفی دارای ارزش نادرست است.

پ) $\sqrt{-2}$ نامعین است پس عضو اعداد حقیقی نیست اما چون گزاره هر مربعی، مستطیل است، درست می‌باشد؛ ترکیب فصلی دارای ارزش درست است.
ت) هر دو گزاره نادرست هستند؛ پس ترکیب فصلی دارای ارزش نادرست است.

۳۳ الف) (عدد ۲۷۱ اول نیست.) یا (چنین نیست که عدد ۲۷۱ اول است.) ب) $۷٫۱ \times ۲٫۸ \neq ۱۹٫۱۷$

ت) $۲ = ۵$

پ) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \geq \frac{3}{5}$ یا $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

ث) (عدد ۱۲ فرد است.) یا (چنین نیست که عدد ۱۲ زوج باشد.) ج) (عدد ۱۳ گویا نیست.) یا (عدد ۱۳ گنگ است.)

۳۴ الف) $۱) ۲ \in \{1, 2, 3\}$ (۲ عضو مجموعه می‌باشد) درست است.

۲) اگر داده‌های آماری باهم برابر باشند؛ واریانس آنها صفر می‌شود $\leftarrow$ پراکندگی ندارند چون برابرند) درست است.

۳) ۵ عددی اول است. درست

۴) مجموعه $\{\emptyset\}$ صفر عضو دارد. نادرست (مجموعه داده شده یک عضو دارد)

۵) خورشید به دور زمین می‌گردد (زمین به دور خورشید می‌گردد). نادرست.

۶) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}$ (هرچه توان، عددی بین صفر و یک بیشتر شود حاصل کوچک‌تر می‌شود). نادرست

سه جمله زیر گزاره نیستند.

۱ - جمعه به خانه ما بیا.

۲ - چه برف سنگینی.

۳ - سیب از گل‌ابی خوشمزه‌تر است.

در جملات فوق درست یا نادرست بودن، از مفهوم آنها استنباط نمی‌شود.

۳۵

الف

باتوجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د

ب

باتوجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

پ

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

ت

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	p $\Rightarrow$ p
د	د
ن	د

ث



با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \vee q$	$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

ج

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

۳۶

الف

قله دماوند در رشته‌کوه البرز قرار دارد.

ب

۱۳۹۶ عددی زوج است، اگر و تنها اگر فروردین نام فصل باشد.

پ

$$5 \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{5} \in \mathbb{N}$$

۳۷

الف

$$\left. \begin{array}{l} p \Rightarrow \text{نادرست} \\ \sim p \text{ نادرست} \end{array} \right\} \Rightarrow \sim p \wedge q \text{ نادرست}$$

گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است.

ب

$$\left. \begin{array}{l} p \Rightarrow \text{نادرست} \\ \sim p \text{ نادرست} \end{array} \right\} \sim p \vee q \text{ نادرست}$$

اگر r درست باشد، $\sim r$ نادرست و گزاره دوشروطی درست است.

اگر r نادرست باشد، $\sim r$ درست و گزاره دوشروطی نادرست است.

پس ارزش گزاره دوشروطی گزاره هم ارز با $\sim r$ است.

پ

$$\sim r \Leftrightarrow \sim p \vee q \equiv r$$

$$\left. \begin{array}{l} p \Rightarrow q \text{ نادرست} \\ p \text{ درست} \\ q \text{ نادرست} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{بنابراین}} (p \Rightarrow q) \vee (\sim q \Leftrightarrow p) \text{ درست}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sim q \text{ درست} \\ q \Rightarrow \text{نادرست} \\ p \text{ نادرست} \end{array} \right\} \sim q \Leftrightarrow p \text{ درست}$$

۳۸

الف

r درست است. اگر q درست باشد، ترکیب شرطی درست و اگر نادرست باشد، ترکیب شرطی نادرست است. پس ارزش این ترکیب با ارزش q هم ارز است.

ب

p نادرست است، پس $p \wedge q$ نادرست است و گزاره شرطی به انتفای مقدم درست می‌شود.

پ

p نادرست و $\sim p$ درست و $(\sim p \vee r)$ درست است. p نادرست و $p \wedge \sim q$ نادرست است. در نتیجه ارزش گزاره دو شرطی نادرست است.

ت

p نادرست و r درست است، پس $p \vee r$ درست است. p نادرست و q نامشخص است. اگر q درست باشد، $p \Leftrightarrow q$ نادرست و ارزش کل، نادرست است. اگر q نادرست

باشد $q \Leftrightarrow p$ درست و ارزش کل، درست است. بنابراین گزاره هم‌ارزش با $\sim q$ است.

۳۹

الف

درست

ب

نادرست

پ

درست

ت

نادرست

۴۰



- الف نادرست
ب نادرست
پ نادرست
ت درست

۴۱) تعداد ردیف‌های جدول ارزش درستی برای n گزاره مختلف برابر 2^n است.

برای ۵ گزاره مختلف تعداد ردیف‌های جدول ارزشی برابر $2^5 = 32$ است.

۴۲) بررسی موارد:

مورد الف): ۲۱ عددی اول است و ۷ شمارنده ۴۲ است
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_T \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_F$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_F$
 مورد ب): ۱۳ شمارنده اول ندارد یا حاصل جمع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_F \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_F$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_F$
 مورد پ) هر عدد صحیح عددی گویا است و حاصل ضرب دو عدد گویا نیز عددی گویاست
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_T \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_T$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_T$

توضیح بیشتر:

۲۱ عددی اول نیست $21 = 3 \times 7$

۷ شمارنده ۴۲ است. $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ = شمارنده‌های ۴۲

۱۳ شمارنده اول دارد. $\{1, 13\}$ = شمارنده‌های ۱۳

حاصل جمع دو عدد گنگ همیشه عددی گنگ نیست، برای مثال:

$$\underbrace{2 + \sqrt{2}}_{\text{عدد گنگ}} + \underbrace{2 - \sqrt{2}}_{\text{عدد گنگ}} = \underbrace{4}_{\text{گویا}}$$

هر عدد صحیح عددی گویا است، چون اعداد صحیح زیرمجموعه اعداد گویا است $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ حاصل ضرب دو عدد گویا نیز همواره عددی گویا است.

۴۳) نکته: تعداد ردیف‌های جدول ارزشی مربوط به n گزاره برابر 2^n است.

با توجه به نکته بالا داریم:

$$2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

$$n - 5 \xrightarrow{n=9} 9 - 5 = 4 \Rightarrow 2^4 = 16$$

برای $(n - 5)$ گزاره داریم:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
ن	ن	د

$$\underbrace{q}_{\text{ن}} \Leftrightarrow \underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\text{ن}} \equiv \text{د}$$

$$\underbrace{p}_{\text{د}} \Rightarrow \underbrace{q}_{\text{ن}} \equiv \text{ن}$$

$$(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \vee r)$$

$$\underbrace{(\text{ن} \wedge \text{د})}_{\text{ن}} \Rightarrow \underbrace{(\text{د} \vee \text{ر})}_{\text{د}} \equiv \text{د}$$

$$-5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -5 \notin \mathbb{Z} \equiv F$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{2}, (-1)^2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} > (-1)^2 \equiv T$$

$$F \wedge T \equiv F$$

۴۵) الف)

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \equiv T$$

$$2 > 3 \equiv F \Rightarrow T \vee F \equiv T$$

ب)



ج) $T \equiv$ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۵ عبارتند از: ۱، ۳، ۵، ۱۵
 $F \Rightarrow T \wedge F \equiv F$ میانه داده‌ها چارک اول است $\rightarrow$ میانه چارک دوم است.

د)

$$\rightarrow \sqrt{49 - 25} = 7 - 5 \equiv F \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N} \equiv F \Rightarrow F \vee F \equiv F$$

۴۶) می‌دانیم عکس نقیض $q \Rightarrow p$ گزاره $p \Rightarrow \sim q$ است. در نتیجه:

$\sqrt{3}$ گویا است. $\Rightarrow$ اگر ۳ فرد است.

۴۷) گفته شده $p \wedge (\sim q \vee r)$ درست است. پس گزاره‌های p و $(\sim q \vee r)$ هر دو درست هستند و برای آنکه $(\sim q \vee r)$ درست باشد، ۳ حالت رخ می‌دهد:

$$1 \text{ حالت } 1: \underbrace{\sim T \wedge (T \vee T)}_F \Rightarrow F \equiv T$$

$$2 \text{ حالت } 2: \underbrace{\sim T \wedge (T \vee F)}_F \Rightarrow T \equiv T$$

$$3 \text{ حالت } 3: \underbrace{\sim T \wedge (F \vee T)}_F \Rightarrow F \equiv T$$

پس گزاره حاصل، همیشه درست است.

۴۸)

p	q	$\sim q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim q)$
د	د	ن	$د \Rightarrow د \equiv د$
د	ن	د	$د \Rightarrow د \equiv د$
ن	د	ن	$ن \Rightarrow د \equiv د$
ن	ن	د	$ن \Rightarrow د \equiv د$

پس ترکیب شرطی سؤال همواره درست و نقیض آن همواره نادرست است.

۴۹) الف و پ هر دو صحیح هستند. الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست

ب) ترکیب شرطی به انتقای مقدم درست است نه ترکیب دو شرطی. ترکیب دو شرطی وقتی درست است که دو گزاره دو طرف هم‌ارزش باشند.

ت) ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند و در بقیه حالت‌ها نادرست است.

۵۰)

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر ۵ زوج باشد آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه شیراز شهر استان خوزستان است.		✓
۴	$4 \times 2 = 2^2 \Rightarrow 8^2 > 4^3$	✓	
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		✓
۸	امام خمینی در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و قرآن معجزه پیامبر است	✓	
۱۰	اگر ۵ فرد است آنگاه ۴ زوج است و برعکس	✓	

عبارت ردیف ۵ به انتقای مقدم درست است.

عبارت ردیف ۷ نادرست است زیرا ارسطو معلم اول است.

۵۱) با توجه به مشخص بودن ارزش p و q فقط ارزش r و s حالت‌های مختلف می‌گیرد و در کل $2^2 = 4$ حالت داریم.

p	q	r	s
د	ن	د	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن



۵۲

الف) عدد مثبت مورد نظر را x در نظر می‌گیریم.

ب) عدد مثبت مورد نظر را x در نظر می‌گیریم.

پ) عدد منفی مورد نظر را x در نظر می‌گیریم.

ت) دو عدد مورد نظر را a و b در نظر می‌گیریم.

$$\sqrt{x} + x = 6 \quad x > 0$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad x > 0$$

$$x + \frac{1}{x} \leq -2 \quad x < 0$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

۵۳

هر استدلال به صورت روبه‌رو مطرح شود مغالطه است.

نتیجه این استدلال ممکن است نادرست باشد و این روش استدلال کردن در حالت کلی نادرست است.

۵۴

$$p \Rightarrow q$$

$$\frac{q}{\therefore p}$$

$$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	ن
ن	ن	د	ن	د

با توجه به اینکه ستون آخر که مربوط به مغالطه است در تمامی حالت‌ها درست نیست پس استدلال به روش مغالطه معتبر نیست.

۵۵

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$n^2 \text{ زوج است} : p \rightarrow \sim n^2 \text{ فرد است} : p$$

$$n \text{ زوج است} : q \rightarrow \sim n \text{ فرد است} : q$$

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

$$n^2 \text{ زوج است} : n \Rightarrow \text{زوج باشد}$$

$$\text{الگوی عدد زوج } 2k \rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'^2$$

$$2\sqrt{x} = x$$

$$x^2 > 7x + 5$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq x + y \quad x, y > 0$$

$$(x+y)^3 \geq x^3 + y^3$$

$$-(-x) = x$$

عکس نقیض گزاره شرطی را ثابت می‌کنیم.

۵۶

الف) x را عدد مورد نظر در نظر می‌گیریم.

ب) x را عدد مورد نظر در نظر می‌گیریم.

پ) x و y را دو عدد مثبت مورد نظر در نظر می‌گیریم.

ت) x و y را دو عدد مورد نظر در نظر می‌گیریم.

ث) x را عدد مورد نظر در نظر می‌گیریم.

۵۷

الف

ب

$$x^2 + y^2 \geq 0$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow (\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \dots + (\bar{x} - x_n) = 0$$

پ) مجموعه اعداد حقیقی بین دو عدد منفی، سه و دو است.

ت) مجذور قدر مطلق هر عدد برابر قدر مطلق مجذور همان عدد است.

۵۸

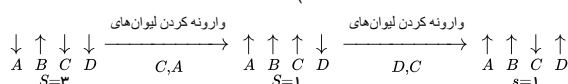
الف) در مرحله اول حذف a ایراد دارد.

ب) در مرحله پنجم ساده کردن a ایراد دارد.

پ) این استدلال درست است.

۵۹

مسئله را برای چهار لیوان که سه لیوان بین آنها وارونه هستند بررسی می‌کنیم. (تعداد لیوان‌های وارونه را برابر S در نظر می‌گیریم):





در هر حالت با وارونه کردن دو لیوان مقدار S برابر ۱ باقی می‌ماند و برابر صفر نمی‌شود، پس مسئله پاسخ ندارد.

۶۰ الف) $a + 5 = 2a$

ب) $ab = a + b, a, b \in \mathbb{R}$

ج) $a^2 + 3 > a$ یا $a \cdot a + 3 > a$

۶۱ در مرحله چهارم این استدلال، محاسبه $\sqrt{6^2 + 8^2}$ اشتباه است. حاصل و محاسبه درست آن به صورت زیر است:

$$\sqrt{6^2 + 8^2} \neq 6 + 8$$

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

۶۲

الف) $2\sqrt{x} = x$

x را عدد مورد نظر می‌گیریم.

ب) $x^3 > 7x + 5$

x را عدد مورد نظر می‌گیریم.

پ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq x + y$

x و y را عددهای مورد نظر می‌گیریم.

ت) $x^3 + y^3 \geq (x + y)^3$

x و y را عددهای مورد نظر می‌گیریم.

ث) $x \geq \frac{1}{x} \quad (x \neq 0 \text{ با شرط})$

x را عدد مورد نظر می‌گیریم.

۶۳

می‌دانیم $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

$(n \in \mathbb{Z})$ n^2 زوج است: p $\rightarrow p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
 n زوج است: q

اثبات درستی گزاره بالا از طریق $p \Rightarrow q$ دشوار است؛ با استفاده از قضیه عکس نقیض گزاره شرطی یعنی درستی $p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$ ثابت می‌کنیم.

اگر n فرد باشد، آن‌گاه n^2 فرد است:

$(n \in \mathbb{Z})$ n^2 فرد است: $\sim p$ $\rightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$ اگر n فرد باشد، آن‌گاه n^2 فرد است.
 n فرد است: $\sim q$

فرد n و $(n \in \mathbb{Z}) \rightarrow n = 2k + 1 \rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2(2k)(1) + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 $= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1 \rightarrow$ الگوی عدد فرد است

۶۴ مرحله پنجم توان ۲ از طرفین تساوی مرحله چهارم حذف شده؛ که این کار نادرست است، زیرا اگر توان دوم دو عدد برابر باشند، ممکن است آن دو عدد برابر یا قرینه هم باشند.

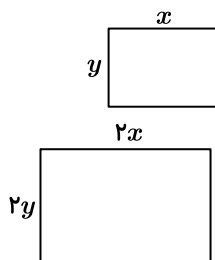
$x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

۶۵

الف) در گزاره بیان شده است که طول (x) و عرض (y) مستطیل را دو برابر کنیم اما در استدلال ریاضی ذکر شده حاصل ضرب آنها (xy) را دو برابر کرده است.

استدلال صحیح:

مساحت: $S = xy$ عرض: y طول: x



مساحت: $S = (2x)(2y) = 4(xy)$ عرض: $2y$ طول: $2x$

گزاره صحیح: اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن چهار برابر خواهد شد.

ب) در بخشی از استدلال ریاضی در عبارت $4a^2 + b^2$ ، از عدد ۴ فاکتورگیری شده است، اما می‌دانیم فاکتورگیری زمانی امکان‌پذیر است که عامل مشترک در هر دو جمله وجود داشته باشد یا به عبارت دیگر هر دو جمله بر عامل مشترک بخش‌پذیر باشند.

$c^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2$



در این مرحله امکان فاکتورگیری از ۴ وجود ندارد، بنابراین بقیه استدلال نادرست است.

پ

حذف (ساده کردن) عدد ۳ از صورت و مخرج کسر و همچنین ساده کردن صورت و مخرج به عدد ۲، نادرست می‌باشد.
تذکر: ساده کردن یک عامل مشترک در صورت و مخرج کسر زمانی امکانپذیر است که همه اجزای صورت و همه اجزای مخرج به صورت ضرب باشند.
استدلال صحیح:

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{36 + 64}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{10}{\sqrt{6}}$ صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{6}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{10}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

گزاره صحیح: تساوی $\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$ برقرار است.

۶۶

الف

نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود. از $p \wedge (q \Rightarrow p) \sim q$ نمی‌توان به نتیجه‌ای رسید.

ب

با توجه به هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \vee p$ قانون عکس نقیض گزاره شرطی، نتیجه $\sim p$ یعنی «دو خدا وجود ندارد» حاصل می‌شود.

پ

با توجه به $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ و قیاس استثنایی، نتیجه q یعنی « $BC^2 = AC^2 + AB^2$ » حاصل می‌شود.

۶۷

در مرحله ۴ خطا صورت گرفته زیرا وقتی از دو طرف جذر می‌گیریم، داریم:

$$x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر بگیریم}} x = \pm \sqrt{2}$$

$$p \Rightarrow q$$

استدلال q یک مغالطه است و نتیجه آن ممکن است نادرست باشد،

$$\therefore p$$

۶۸

$$\begin{cases} \overbrace{x > 0}^p \Rightarrow \overbrace{x^2 > 0}^q \\ \overbrace{(-4)^2 > 0}^q \\ \hline \therefore \overbrace{-4 > 0}^p \end{cases}$$

۶۹

$$c'^2 = (2a)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 4a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{36a^2 + b^2}{9} \xrightarrow{c' > 0} c' = \frac{\sqrt{36a^2 + b^2}}{3}$$

بنابراین هیچ‌کدام از روش‌های این ۳ نفر درست نبوده است.

۷۰

$$\underbrace{\text{مجموع مجذور دو عدد}}_{x^2, y^2} \quad \underbrace{\text{بزرگ‌تر یا مساوی}}_{\geq} \quad \underbrace{\text{مجذور مجموع آن دو عدد است}}_{(x+y)^2}$$

توضیحات بیشتر:

مجموع مجذور دو عدد: $x^2 + y^2$

مجذور مجموع دو عدد: $(x + y)^2$

۷۱ الف) درست

ب) خطا رخ داده و باید شرط $C \neq 0$ را اضافه می‌کرد.

ج) درست د) درست

۷۲ می‌دانیم همواره می‌توانیم به جای اثبات گزاره $(p \Rightarrow q)$ گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را ثابت کنیم. لذا اگر گزاره‌های $a > b$ و $a^2 > b^2$ را به ترتیب p و q بنامیم، نقیض p می‌شود: $a \leq b$ و نقیض q می‌شود: $a^2 \leq b^2$

لذا می‌توانیم به جای گزاره داده شده، گزاره $(a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b)$ را ثابت کنیم.

۷۳ الف) مغالطه است و شاید علی در آزمون کتبی هم شرکت نکرده باشد. پس نتیجه‌گیری نادرست است.



(ب) استدلال قیاس استثنایی است و نتیجه‌گیری درستی انجام گرفته است.

(ج) شاید سعید از من متنفر نباشد و پشت سر من حرف بدهی زده باشد. پس نتیجه‌گیری نادرست است.

(د) مغالطه است a می‌تواند عددی منفی هم باشد و توان دوم آن مثبت باشد. پس نتیجه‌گیری نادرست است.

(۷۴)

عدد مورد نظر را برابر x در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2x - \frac{1}{4} \times 21$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4}\right) = 2x - \frac{21}{4} \rightarrow \frac{x^2}{12} = 2x - \frac{21}{4}$$

توضیحات بیشتر:

$$\frac{x^2}{4} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \text{مربع نصف عدد}$$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \text{یک سوم مربع نصف عدد}$$

(۷۵) این حالت به حالت بدیهی معروف است. کافی است دو لیوان کناری (A و C) را با یک حرکت به سمت بالا تغییر جهت داد تا همه لیوان‌ها به سمت بالا باشند. راه دیگر این است که ابتدا یکی از لیوان‌های کناری (A یا C) را همراه با لیوان B تغییر داد که در این صورت کناری درست شده و لیوان B نادرست می‌شود (حرکت اول) اکنون دو لیوان نادرست داریم که با یک حرکت می‌توان آنها را نیز درست کرد (حرکت دوم)

(۷۶) جای خالی اول: $\therefore 4 > 1$

جای خالی دوم: خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.

(۷۷) با توجه به یکسان نبودن تعداد دانش‌آموزان دو کلاس، این روش صحیح نیست.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\text{مجموع نمرات کلاس ۱}}{10} = 15 \Rightarrow \text{مجموع نمرات کلاس ۱} = 15 \times 10 = 150 \\ \bar{x}_2 &= \frac{\text{مجموع نمرات کلاس ۲}}{15} = 18 \Rightarrow \text{مجموع نمرات کلاس ۲} = 18 \times 15 = 270 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{150 + 270}{10 + 15} = 16,8$$

(۷۸) در مرحله ۳، زیرا طرفین معادله با عدد -6 و $-x$ جمع شده است، در حالی که در طرف دوم عدد 6 نوشته شده است.

(۷۹) الف) برای محاسبه $(1 - 1000)$ باید از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده شود. و به صورت $(-1)^2 + 2(1)(1000) - (1000)^2$ محاسبه شود.

(ب) مقدمه دوم در قیاس استثنایی به درستی نیامده و مغالطه شده است.

(۸۰) این کار غیرممکن است. زیرا اگر تعداد کارت‌های مشکی را n در نظر بگیریم، همواره مقدار آن‌ها $n - 2$ یا $n + 2$ یا $n + 0$ خواهد بود. بنابراین تعداد کارت‌های سفید هیچ‌گاه از ۳ به ۰ نخواهد رسید.

(۸۱) اگر n را تعداد لامپ‌های خاموش در نظر بگیریم، به‌طور کلی ۳ حالت برای تغییر وضعیت کلیدها وجود دارد:

۱- یکی را خاموش و یکی را روشن کنیم: که در این صورت تعداد لامپ‌های خاموش تغییری نخواهد کرد.

یعنی $n + 0$ لامپ خواهیم داشت.

۲- هر دو را خاموش کنیم، که در این صورت تعداد لامپ‌های خاموش دو تا بیشتر می‌شود، یعنی $n + 2$ لامپ خاموش خواهیم داشت.

۳- هر دو را روشن کنیم، که در این صورت تعداد لامپ‌های خاموش دو تا کمتر می‌شود، یعنی $n - 2$ لامپ خاموش خواهیم داشت.

بنابراین n همیشه به اندازه عددی زوج (0 یا 2 یا -2) تغییر می‌کند و لذا تعداد لامپ‌های روشن هرگز از ۲ به ۳ افزایش نمی‌یابد.

(۸۲)

در تابع اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول برابر باشند، باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز باهم برابر باشند.

$$(m^2 - 4, 5) = (m^2 - 4, m^2 - 11) \Rightarrow m^2 - 11 = 5 \Rightarrow m^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} m = \pm 4$$

$$m = 4 \Rightarrow f = \{(12, 5), (12, 2)\} \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

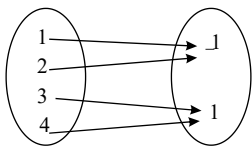
$$m = -4 \Rightarrow f = \{(12, 5), (4, 2)\} \Rightarrow f \text{ تابع است}$$

پس فقط جواب $m = -4$ قابل قبول است.

(۸۳) با توجه به مختصات نقاط در نمودار مختصاتی، نمایش زوج مرتبی این تابع را مشخص می‌کنیم.

$$\{(1, -1), (2, -1), (3, 1), (4, 1)\}$$

مؤلفه‌های اول نمایش زوج مرتبی مربوط به دامنه و مؤلفه‌های دوم آن مربوط به اعضای برد تابع است در نتیجه نمودار پیکانی این تابع به‌صورت زیر خواهد بود.



(۸۴) از عضو ۱ در دامنه دو پیکان به $a + 1$ و -3 خارج شده است برای اینکه این نمودار پیکانی تابع باشد این مقادیر باید با هم برابر باشند.

$$a + 1 = -3 \Rightarrow a = -4$$

از عضو ۹ در دامنه دو پیکان به $2 - b$ و 6 وصل شده است در نتیجه داریم:

$$b - 2 = 6 \Rightarrow b = 8$$



۸۵ با توجه به زوج مرتب $(۳, \sqrt{۵})$ حاصل $f(۳)$ برابر $\sqrt{۵}$ می‌شود.

$$f(۳) = \sqrt{۵}$$

همچنین با داشتن زوج مرتب $(۲, ۳,۷۵)$ داریم:

$$f(۲) = ۳,۷۵$$

۸۶ در نمودار یک تابع هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ با توجه به این مطلب داریم:

الف) تابع است.

ب) تابع نیست.

پ) تابع نیست.

ت) تابع است.

۸۷

برای تعیین مقدار تابع به ازای هریک از مقادیر x لازم است ابتدا مشخص کنیم مقدار x در دامنه کدام ضابطه قرار دارد.

الف) $x = ۲$ متعلق به دامنه $۱ \leq x \leq ۲$ است، بنابراین مقدار $f(۲)$ را از ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq ۲$$

$$f(۲) = ۲^2 = ۴$$

ب) $x = ۳$ متعلق به دامنه $x > ۲$ است، بنابراین مقدار $f(۳)$ را با ضابطه سوم تعیین می‌کنیم و $x = -1$ متعلق به دامنه $۱ \leq x \leq ۲$ است، بنابراین مقدار $f(-1)$ را با

$$\Rightarrow f(۳) = ۵$$

$$\Rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow f(۳) + f(-1) = ۵ + 1 = ۶$$

ج) $x = -\sqrt{۲} \simeq -1,۴$ متعلق به دامنه $x < -1$ است، بنابراین مقدار $f(-\sqrt{۲})$ را با ضابطه اول تعیین می‌کنیم و $x = \sqrt{۳} \simeq 1,۷$ متعلق به دامنه $۱ \leq x \leq ۲$ است،

بنابراین مقدار $f(\sqrt{۳})$ را با ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(-\sqrt{۲}) = -\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}^2 = ۳$$

$$\Rightarrow f(-\sqrt{۲}) + f(\sqrt{۳}) = -\sqrt{۲} + ۳$$

د) $x = \sqrt{۲} \simeq 1,۴$ متعلق به دامنه $۱ \leq x \leq ۲$ است، بنابراین مقدار $f(\sqrt{۲})$ را از ضابطه دوم تعیین می‌کنیم و $x = ۵$ متعلق به دامنه $x > ۲$ است، بنابراین مقدار

$f(۵)$ را از ضابطه سوم تعیین می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(\sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})^2 = ۲$$

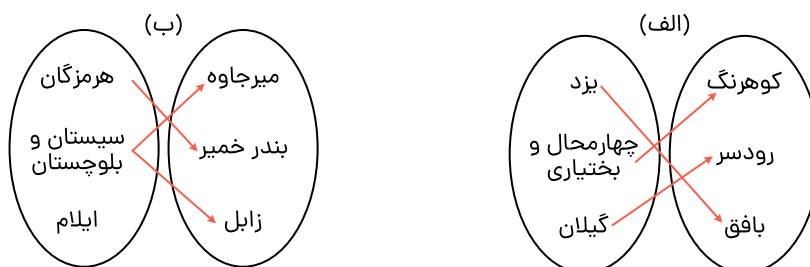
$$\Rightarrow f(۵) = ۵$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۲}) + f(۵) = ۲ + ۵ = ۷$$

۸۸ نمودار پیکانی (ب) نمایشگر تابع نیست، زیرا از یک عضو مجموعه اول (یعنی عدد ۱) دو پیکان به دو عضو متمایز مجموعه دوم (یعنی a و b) رسم شده است.

۸۹

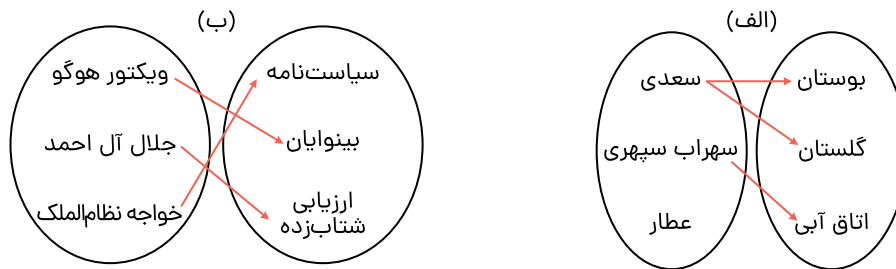
الف



از هر استان باید فقط یک پیکان خارج شود، چون پس از استان سیستان و بلوچستان دو پیکان خارج شده است، پس تابع نیست. همچنین از ایلام پیکان خارج نشده است.

تابع است.

ب



از «سعدی» دو پیکان خارج شده و از «عطار» پیکان خارج نشده است. از هر نویسنده فقط یک پیکان خارج شده، در نتیجه تابع در نتیجه تابع نیست.

پ

نمایش پیکانی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
	$\{(رودسر, گیلان), (کوه رنگ, بافق), (چهارمحال و بختیاری, یزد)\}$	
	$\{(سیاست نامه, خواجه نظام الملک), (ارزیابی شتاب زده, جلال آل احمد), (بینوایان, ویکتور هوگو)\}$	

الف) نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که از هر عضو دامنه فقط یک پیکان خارج شود.
 ب) نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نباشند.
 ج) نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۹۰

$f(-2) = 2$	در نتیجه	$(-2, 2)$
$f(2) = 1$	در نتیجه	$(2, 1)$
$f(-3) = 4$	در نتیجه	$(-3, 4)$
$f(-1) = -2$	در نتیجه	$(-1, -2)$
$f(3) = -4$	در نتیجه	$(3, -4)$

۹۱

برای رسم نمودار مختصاتی در $-1 \leq x < 3$ با ضابطه $f(x) = x + 1$ نقاط $f(3)$ و $f(-1)$ را مشخص می‌کنیم و پاره خط مربوط به این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم (البته نقطه $f(3)$ را توخالی قرار می‌دهیم چون نقطه ۳ در دامنه ضابطه پایینی است).

$$f(-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow (3, 4)$$

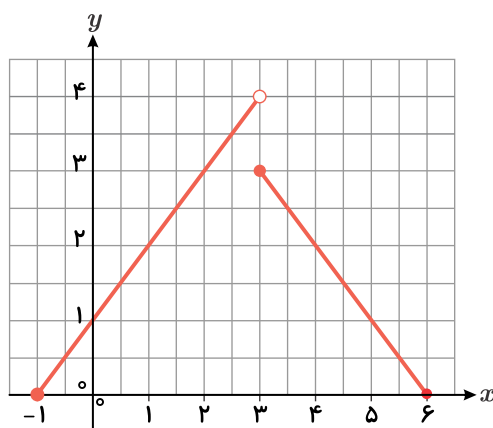
همچنین برای مشخص کردن ضابطه قسمت دوم معادله خطی که از دو نقطه $(3, 3)$ و $(6, 0)$ می‌گذرد را به دست می‌آوریم.

$$\text{شیب خط: } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{6 - 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

با قرار دادن $m = -1$ (شیب خط) در معادله کلی خط $y = mx + b$ و قرار دادن یکی از نقاط عرض از مبدأ خط را به دست می‌آوریم.

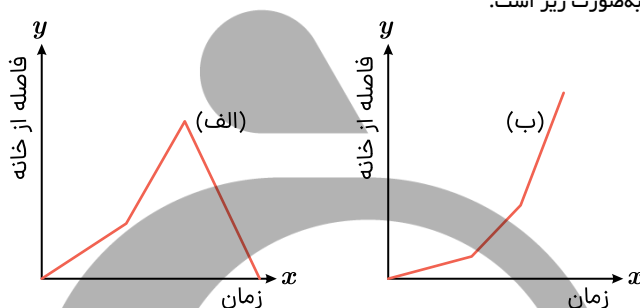


$$y = mx + b \xrightarrow{m=-1} y = -x + b \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند}} 0 = -6 + b \\ \Rightarrow b = 6 \rightarrow y = -x + 6$$



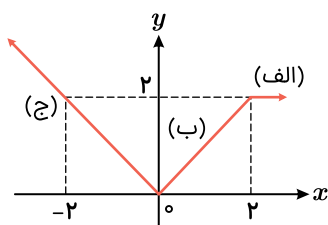
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , -1 \leq x < 3 \\ -x + 6 & , 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

نمودار رسم شده، مربوط به داستان قسمت ج است.
نمودار مربوط به هر یک از داستان‌های الف و ب به صورت زیر است.



(تذکر: با توجه به اطلاعات محدود داستان‌ها، نمودارها تقریبی رسم شده‌اند.)

نمودار را به ۳ قسمت (الف) و (ب) و (ج) تفکیک کرده و ضابطه هر یک را به طور جداگانه تعیین می‌کنیم.



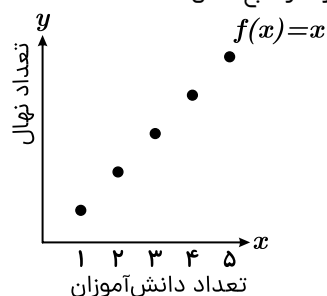
الف) در قسمت (الف) به ازای تمام مقادیر x در دامنه تعریف، مقدار y ثابت و برابر ۲ است. (تابع ثابت)

ب) در قسمت (ب) به ازای هر مقدار x در دامنه تعریف، همان مقدار برای y مشخص می‌شود. (تابع همانی، نیمساز ناحیه اول)

ج) در قسمت (ج) به ازای هر مقدار x در دامنه تعریف، مقدار قرینه آن برای y به دست می‌آید. (نیمساز ناحیه دوم)
بنابراین تابع سه ضابطه‌ای به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

الف) از آنجایی که هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد، تعداد نهال‌های کاشته شده با تعداد دانش‌آموزان برابر است، بنابراین تابع موردنظر، تابع همانی است.

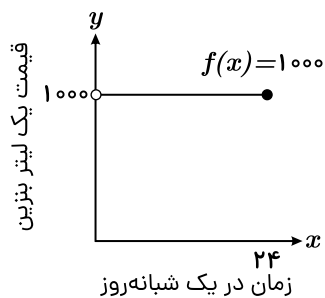


$$f(x) = x$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq n\}$$

$$R_f = D_f$$

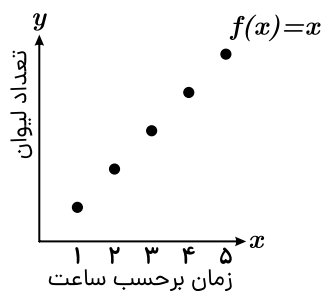
ب) هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز مبلغ ثابت ۱۰۰۰ تومان است، بنابراین تابع موردنظر، تابع ثابت است.



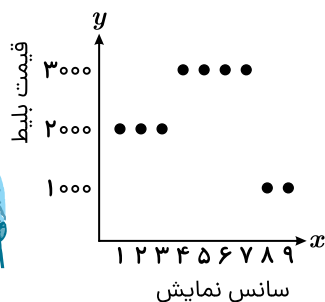
$$f(x) = 1000$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 24\}$$

$$R_f = 1000$$



(ج) به ازای هر ساعت یک لیوان آب چکه می‌کند، پس یک ساعت ۱ لیوان، دو ساعت ۲ لیوان و ... پس تابع همانی است و داریم:



$$f(x) = \begin{cases} 2000, & 1 \leq x \leq 5 \\ 3000, & 6 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

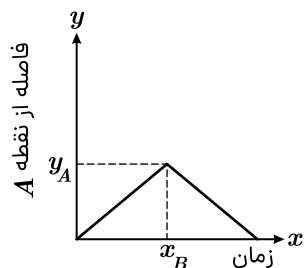
$$D_f = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 9\}$$

$$R_f = \{1000, 2000, 3000\}$$

(د) با توجه به آنکه قیمت بلیت در مقاطع مختلف تغییر می‌کند، تابع چندضابطه‌ای است.

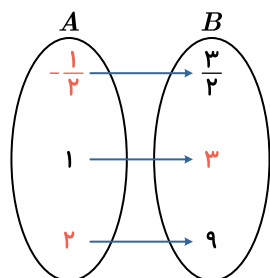
(ه) متحرک از زمان صفر و با فاصله صفر از نقطه A شروع به حرکت کرده است و با توجه به آنکه مسیر حرکت به صورت رفت و برگشت است، در رفت و برگشت هرکدام یک ضابطه خطی نوشته می‌شود پس تابع چندضابطه‌ای است.

تذکر: چون مقدار سرعت و فاصله نقاط A و B مشخص نشده است فقط به رسم نمودار اکتفا کرده و ضابطه تابع را نمی‌نویسیم.



$$x_B = \text{زمان رسیدن دهنده به نقطه B}$$

$$y_B = \text{فاصله نقطه B از نقطه A}$$



$$B = \left\{ \frac{3}{2}, 3, 9 \right\}$$

جای خالی مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

۹۵

الف

ب

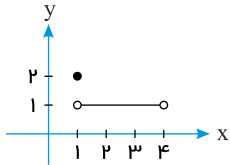


$$f = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), (1, 3), (2, 9) \right\}$$

$$D_f = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}, R_f = \left\{ \frac{3}{2}, 3, 9 \right\}$$

$$\text{دامنه تابع } \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$$

$$\text{برد تابع } \left\{ \frac{3}{2}, 3, 9 \right\}$$



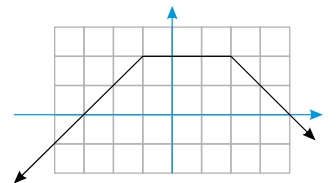
این سؤال پاسخ‌های گوناگونی دارد که یکی از آن‌ها به شکل زیر است:

۹۶

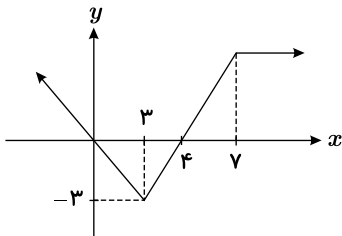
ضابطه تابع برای $x \geq 2$ معادله خطی است که از نقاط $(2, 2)$ و $(4, 0)$ می‌گذرد.

برای رسم تابع در دامنه‌های $x < -1$ و $-1 \leq x \leq 2$ از جدول نقطه‌یابی کمک می‌گیریم.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 2 \\ -x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$



۹۸



ابتدا ضابطه این تابع را مشخص می‌کنیم.

این تابع به ازای مقادیر $x \leq 3$ با ضابطه $f(x) = -x$ است؛ (نیمساز ربع دوم و چهارم) همچنین ضابطه این تابع به ازای مقادیر $3 < x < 7$ خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ است. در نتیجه داریم:

$$m = \frac{0 - (-3)}{4 - 3} = 3 \Rightarrow y = mx + h \Rightarrow y = 3x + h \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}} 0 = 3 \times 4 + h \Rightarrow h = -12 \Rightarrow y = 3x - 12$$

ضابطه این تابع برای $x \geq 7$ یک تابع ثابت است و مقدار آن برابر $f(7)$ از ضابطه دوم است؛ در نتیجه:

$$f(7) = 3 \times 7 - 12 = 21 - 12 = 9$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 3 \\ 3x - 12 & 3 < x < 7 \\ 9 & x \geq 7 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ داریم:

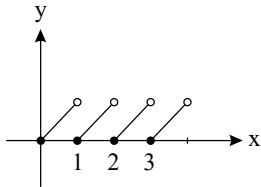
$$f(-1) \Rightarrow -1 \leq 3 \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} f(-1) = -(-1) = 1$$

$$f(11) \Rightarrow 11 \geq 7 \xrightarrow{\text{ضابطه سوم}} f(11) = 9$$

در نتیجه حاصل $f(-1) + f(11)$ برابر $1 + 9 = 10$ است.

۹۹

با توجه به اینکه پس از یک ساعت جهت ساعت شنی عوض می‌شود، داریم:



۱۰۰ این تابع برای مقادیر $x \geq 1$ تابع ثابت $f(x) = 1$ ، برای $-1 < x < 1$ تابع همانی $f(x) = x$ و برای $x \leq -1$ تابع ثابت $f(x) = -1$ است. در نتیجه ضابطه این تابع به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 1 \\ x & , -1 < x < 1 \\ -1 & , x \leq -1 \end{cases}$$

۱۰۱

الف

توقف در ایستگاه‌ها با تابع ثابت نمایش داده شده است.

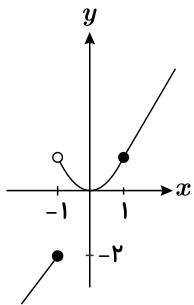
ب

$$f(x) = \begin{cases} 125x & , 0 \leq x < 2 \\ 250 & , 2 \leq x < 2.5 \\ 100x & , 2.5 \leq x < 4.5 \\ 450 & , 4.5 \leq x < 5 \\ 150x - 300 & , 5 \leq x < 7.5 \\ 825 & , 7.5 \leq x < 8 \\ 120x - 135 & , 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

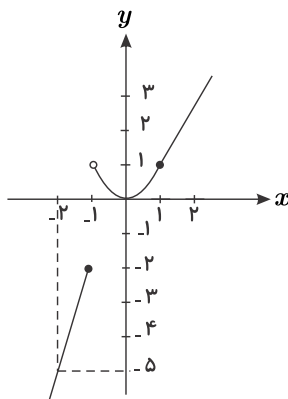
ب

$$150x - 300 = 945 \Rightarrow 150x = 1245 \Rightarrow x = 8.3$$

۱۰۲



با توجه به اینکه تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x > 1 \\ x^2 & , -1 < x \leq 1 \\ 3x + 1 & , x \leq -1 \end{cases}$ برای x های بزرگتر از یک به صورت $2x - 1$ و برای x های بزرگتر از -1 و کوچکتر یا مساوی 1 به صورت x^2 و برای x های کوچکتر یا مساوی -1 به صورت $3x + 1$ است. به کمک جدول نقطه‌یابی داریم:



x	۱	۲
y	۱	۳
(x, y)	(۱, ۱)	(۲, ۳)

x	-۱	-۲
y	-۲	-۵
(x, y)	(-۱, -۲)	(-۲, -۵)

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱
(x, y)	(-۱, ۱)	(۰, ۰)	(۱, ۱)

(نقطه‌یابی (۱, -۱) توخالی است.)

۱۰۳ چون یک $f(x)$ تابع است و چون $x = -1$ در هر دو دامنه ضابطه‌ها قرار دارد، لذا باید به‌ازای $x = -1$ مقدار ضابطه‌ها برابر باشد، بنابراین داریم:

$$-3 + a = -a + 4 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

چون $-1 \leq -2$ است، لذا برای محاسبه $f(-2)$ از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$f(-2) = a \times (-2) + 4 = \frac{7}{2} \times (-2) + 4 = -7 + 4 = -3$$

۱۰۴ الف) تعداد کل خودروهای ورودی به توقفگاه از شنبه تا چهارشنبه برابر ۱۰۴۳۰ تا است.

تومان ۷,۳۰۱,۰۰۰ = ۷۰۰ × ۱۰۴۳۰ = ۷۰۰ × تعداد خودرو = هزینه



ب) براساس هوشمندسازی در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید.

$$\text{دوشنبه} = ۲۶۶۰ \times ۱۰۰۰ = ۲۶۶۰۰۰۰ \text{ و } \text{یکشنبه} = ۱۷۷۰ \times ۵۰۰ = ۸۸۵۰۰۰$$

$$\text{سه‌شنبه} = ۱۲۲۰ \times ۵۰۰ + ۱۳۶۰ \times ۱۵۰۰ = ۶۱۰۰۰۰ + ۲۰۴۰۰۰۰ = ۲۶۵۰۰۰۰$$

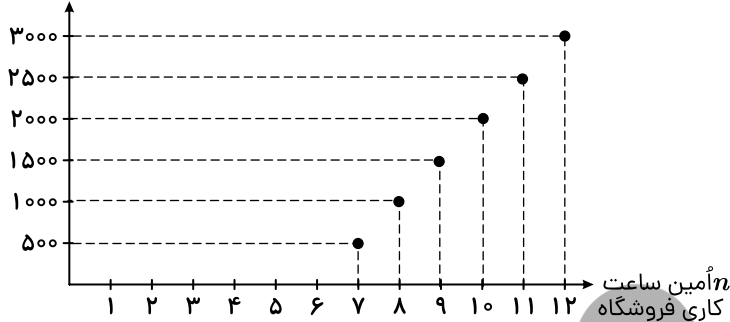
$$\text{چهارشنبه} = ۰ + ۱۸۰ \times ۵۰۰ + ۲۷۰ \times ۱۰۰۰ + ۳۵۰ \times ۱۵۰۰ + ۴۹۰ \times ۲۰۰۰ + ۵۷۰ \times ۲۵۰۰ + ۶۸۰ \times ۳۰۰۰ = ۵۳۳۰۰۰۰$$

$$\text{کل درآمد} = ۸۸۵۰۰۰ + ۲۶۶۰۰۰۰ + ۲۶۵۰۰۰۰ + ۵۳۳۰۰۰۰ = ۱۱,۵۲۵,۰۰۰$$

درآمد فروشگاه در حالت هوشمندسازی شده، بیشتر است.

(۱۰۵)

هزینه توقفگاه
(تومان)

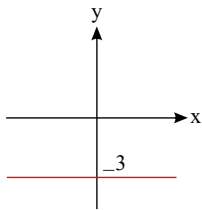


(۲) درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

$$۱۸۰ \times ۵۰۰ + ۲۷۰ \times ۱۰۰۰ + ۳۵۰ \times ۱۵۰۰ + ۴۹۰ \times ۲۰۰۰ + ۵۷۰$$

$$\times ۲۵۰۰ + ۶۷۰ \times ۳۰۰۰ = ۵,۳۰۰,۰۰۰ \text{ تومان}$$

(۱۰۶) ضابطه $f(x) = -۳$ تابع ثابت با مجموعه برد $R_f = \{-۳\}$ است.



(۱۰۷) الف) خودش

$$f(x) = x \text{ (ب)}$$

پ) نیمساز ناحیه اول و سوم

ت) همانی

(۱۰۸) ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ (c یک عدد حقیقی) است.

$$f(x) = (a-1)x^2 + bx + 4 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

با قرار دادن $b=0$, $a=1$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(x) = 4$$

(۱۰۹) در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت همه مؤلفه‌های دوم با هم برابرند در نتیجه داریم:

$$a+1=6 \Rightarrow a=5$$

با جایگذاری مقدار a در $a+b+1$ داریم:

$$a+b+1=6 \xrightarrow{a=5} 5+b+1=6 \Rightarrow b=0$$

(۱۱۰) در نمایش زوج مرتبی تابع همانی مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

$$(5, a+2) \xRightarrow{\text{تابع همانی}} a+2=5 \Rightarrow a=3$$

با جایگذاری مقدار $a=3$ در دو زوج مرتب دیگر مقدار c , b را نیز به دست می‌آوریم.

$$(a, b) \xrightarrow{a=3} (3, b) \Rightarrow b=3$$

$$(c, 3a) \xrightarrow{a=3} (c, 9) \Rightarrow c=9$$

و در آخر میانگین a , b , c را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{3+3+9}{3} = \frac{15}{3} = 5$$



۱۱۱ تابع ثابت $f(x) = k$ به ازای هر مقدار دلخواه دامنه، مقدار برد برابر k است.

در نتیجه داریم:

$$f(a) + f(b) = f(c) \Rightarrow k + k = k^2$$

$$\Rightarrow 2k = k^2 \Rightarrow k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k(k - 2) \Rightarrow k = 2 \text{ یا } k = 0$$

۱۱۲ در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

$$f = \{(3, 3), (5, 5), (3, 25), (6, 6)\}$$

۱۱۳ ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ (یک عدد حقیقی) است.

$$f(x) = (a - 2)x + 4 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

با قرار دادن $a = 2$ در ضابطه تابع، تابع به صورت $f(x) = 4$ می شود که تابع ثابت است.

۱۱۴ در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت همه مؤلفه های دوم با هم برابرند.

با توجه به دو زوج مرتب $(3, x^2 - 1)$ ، $(9, 8)$ داریم:

$$x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

۱۱۵ در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت همه مؤلفه های دوم با هم برابرند.

$$\begin{cases} 3a - b - 2 = 4 \\ 3a + 2b - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (-1) \times \begin{cases} 3a - b = 6 \\ 3a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + b = -6 \\ 3a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{matrix}$$

$$3a - b = 6 \xrightarrow{b=0} 3a - 0 = 6 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

۱۱۶ هر نقطه روی نیمساز ناحیه اول و سوم دارای طول و عرض یکسان است.

$$(x^2 - 4x + 1, -3) \xrightarrow{\text{روی نیمساز ناحیه اول و سوم}} x^2 - 4x + 1 = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۱۱۷ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

با توجه به ضابطه تابع همانی ضریب x^2 یعنی $a - b$ برابر صفر و ضریب x یعنی c برابر ۱ و مقدار ثابت $b - 3$ برابر صفر باشد.

$$3 - b = 0 \Rightarrow b = 3, \quad c = 1, \quad a - b = 0 \xrightarrow{b=3} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

۱۱۸ در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت تمام مؤلفه های دوم با هم برابرند.

$$f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

۱۱۹ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

با توجه به ضابطه تابع همانی باید ضریب x یعنی $a + 2$ برابر ۱ و مقدار ثابت $b - 3$ برابر صفر شود.

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1, \quad b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$$

۱۲۰ الف) ثابت (ب) طولها (ها) (پ) دوم

۱۲۱ در نمایش زوج مرتبی تابع همانی مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

$$\begin{aligned} (3a - b, 5) &\xrightarrow{\text{تابع همانی}} \begin{cases} 3a - b = 5 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \\ (7, 3a + b) &\xrightarrow{\text{تابع همانی}} \begin{matrix} 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$3a - b = 5 \xrightarrow{a=2} 3 \times 2 - b = 5 \Rightarrow 6 - b = 5 \Rightarrow b = 1$$

۱۲۲

الف

چون f همانی است، پس $f(2) = 2$ در نتیجه:

$$\frac{g(2)f(2)}{f(2) + g(2)} = 1 \Rightarrow \frac{g(2) \times 2}{2 + g(2)} = 1 \Rightarrow 2g(2) = 2 + g(2) \Rightarrow 2g(2) - g(2) = 2 \Rightarrow g(2) = 2$$

ب) با توجه به اینکه $g(2) = 2$ و g تابعی ثابت است، پس:

$$g(x) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{f(4) + g(4)}{g(4) + 1} = \frac{4 + 2}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

۱۲۳ نکته: ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

با توجه به نکته بالا مقادیر a, b, c را طوری قرار می دهیم که ضابطه آن به صورت $f(x) = x$ شود.

$$f(x) = \underbrace{(a - 3)}_0 x^2 + \underbrace{b}_1 x + \underbrace{c + 3}_0$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ b = 1 \\ c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3 \end{cases}$$



پس داریم:

$$a + b + c = 3 + 1 + (-3) = 1$$

نکته: ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ است.

با توجه به نکته بالا مقادیر a و b را طوری قرار می‌دهیم که ضابطه تابع به صورت $f(x) = c$ بشود.

$$f(x) = \underbrace{(a+2)}_0 x^2 + \underbrace{(b-3)}_0 x - 5$$

در نتیجه:

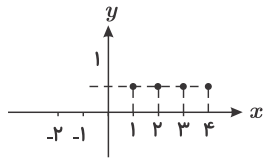
$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$$

پس حاصل $a + b = -2 + 3 = 1$ است.

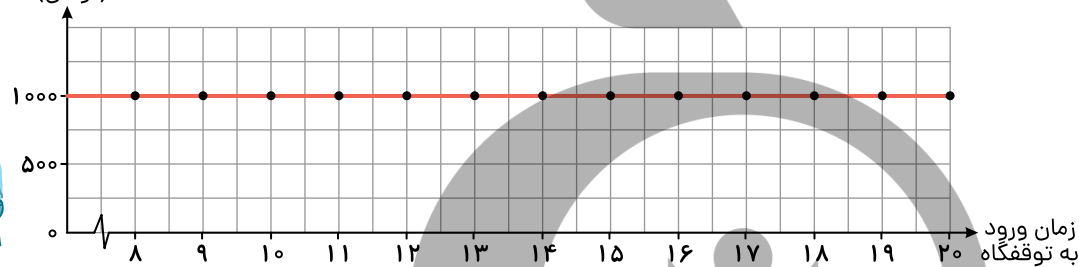
۱۲۵

دامنه تابع تنها شامل اعداد طبیعی است و برد تابع مقدار ثابت یک است. بنابراین نمودار آن به صورت زیر است.



۱۲۶

هزینه توقفگاه
(تومان)



$$\begin{cases} C: A \rightarrow B \\ C(x) = 1000 \end{cases} \quad D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 20\} \quad R = \{1000\}$$

الف) دامنه تابع در روز دوشنبه زیرمجموعه اعداد حقیقی است و در روزهای شنبه و یکشنبه زیرمجموعه اعداد طبیعی است.

ب) به صورت خطی افقی رسم می‌شود زیرا دامنه تابع از مجموعه اعداد حقیقی انتخاب می‌شود نه اعداد طبیعی.

دقت کنید که در نمودار روزهای شنبه و یکشنبه n امین ساعت کاری فروشگاه دامنه است و در روز دوشنبه زمان ورود به توقفگاه دامنه است.

۱۲۷ الف

$$f(a) = c, \quad f(b) = c, \quad f(a+b) = c$$

ب)

$$c = c \times c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

۱۲۸

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 5$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1+2+5}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline V & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

۱۲۹ الف) به همان مقدار افزایش x ، حجم نیز افزایش پیدا می‌کند.

$$V(x) = 1 \times 1 \times x \Rightarrow V(x) = x \quad \text{ب) تابع همانی}$$

پ) با توجه به همانی بودن تابع باید $x = 8$ باشد.

۱۳۰ تابع ثابت است و چون یکی از مولفه‌های دوم، -1 است:

$$2a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$a - 2b = -1 \Rightarrow \frac{-1}{2} - 2b = -1 \Rightarrow -2b = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

۱۳۱ الف) برای همانی شدن تابع باید مولفه‌های اول و دوم تمام زوج مرتب‌های آن با هم برابر باشند.



$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a = b \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + a = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1, a = b \Rightarrow b = 1$$

(ب) برای ثابت شدن تابع باید همه مولفه‌های دوم آن با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} a - 1 = 3a - b \\ a - 1 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-2}{3}, b = \frac{-1}{3}$$

۱۳۲ الف) با ساده کردن سطر دوم جدول (y) داریم:

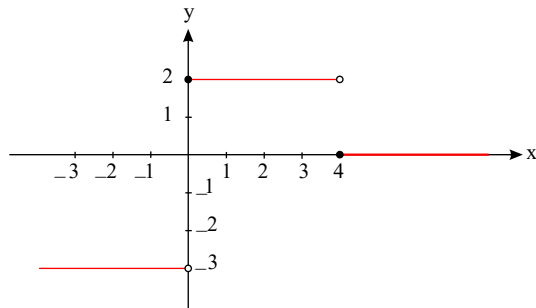
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (1)$$

پس $f(x) = 1$ تابع ثابت است.

(ب)

$$\left. \begin{aligned} f(1396) &= 1 \\ f(2017) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3f(1396) - 5}{-f(2017)} = \frac{3(1) - 5}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad (1)$$

۱۳۳ ضابطه تابع پلکانی از چند تابع ثابت تشکیل شده است، پس با توجه به مقادیر x نمودار مختصاتی این تابع را رسم می‌کنیم.

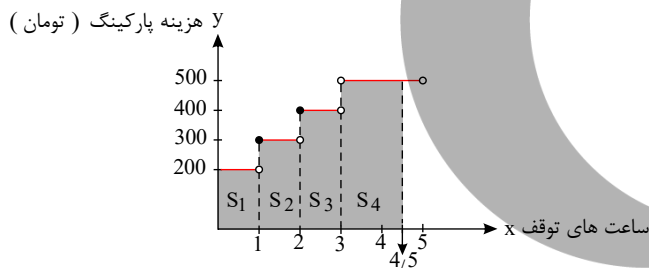


۱۳۴ تابع چندضابطه‌ای که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را یک تابع پلکانی می‌نامیم. نمودار مختصاتی توابع پلکانی به صورت نیم‌خطها یا پاره‌خطهای موازی محور طول‌ها است.

الف) نمودار تابع پلکانی نیست.

ب) نمودار تابع پلکانی است.

۱۳۵



مساحت قسمت هاشور زده برابر هزینه توقف به مدت ۴ ساعت و نیم در پارکینگ است.

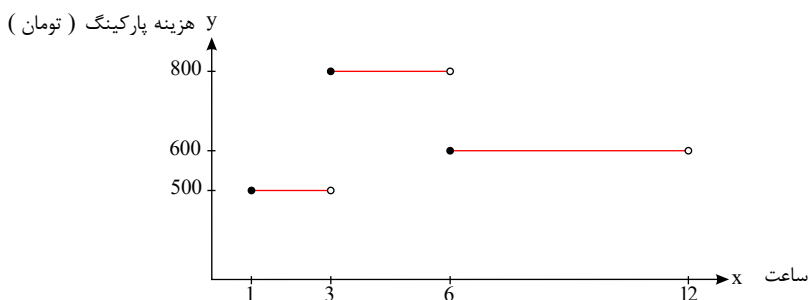
$$S_1 = 1 \times 200 = 200, S_2 = 1 \times 300 = 300, S_3 = 1 \times 400 = 400, S_4 = 1,5 \times 500 = 750$$

$$\text{کل } S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 200 + 300 + 400 + 750 = 1650$$

۱۳۶ الف) با توجه به صورت مسئله تابع سه ضابطه‌ای به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 500, & 1 \leq x < 3 \\ 800, & 3 \leq x < 6 \\ 600, & 6 \leq x < 12 \end{cases}$$

(ب)

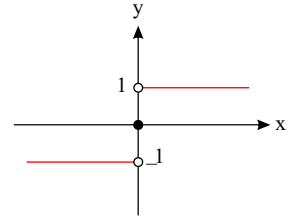


(پ) مساحت زیر نمودار نشان‌دهنده هزینه پرداختی برای توقف در پارکینگ به ازای ساعت‌های استفاده از این پارکینگ است.



۱۳۷ الف) با توجه به ضابطه تابع f ، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



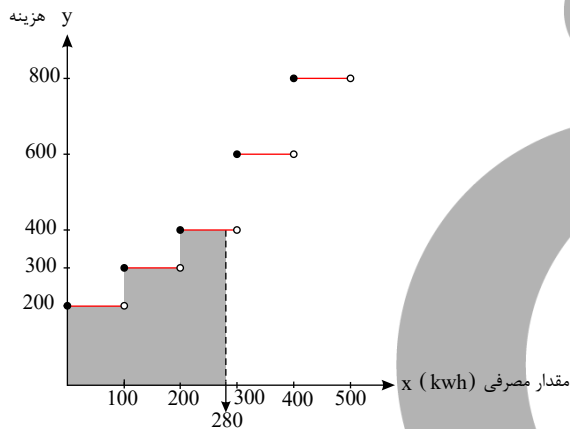
(ب)

$$f(-4,7) = -1, f(5,3) = 1, f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 1, f(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = -1$$

۱۳۸ الف)

$$f(x) = \begin{cases} 200 & , 0 \leq x < 100 \\ 300 & , 100 \leq x < 200 \\ 400 & , 200 \leq x < 300 \\ 600 & , 300 \leq x < 400 \\ 800 & , 400 \leq x < 500 \end{cases}$$

(ب)



(پ) مساحت قسمت‌های هاشورزده در قسمت «ب» هزینه برق مصرفی این خانواده است.

$$\text{کل } S = 200 \times 100 + 100 \times 300 + 100 \times 400 = 20000 + 30000 + 40000 = 90000$$

۱۳۹ الف) جزء صحیح هر عدد صحیح برابر خودش است.

$$[-5] = -5$$

(ب) جزء صحیح هر عدد غیر صحیح برابر اولین عدد صحیح در سمت چپ عدد مورد نظر روی محور است.

$$[4,3] = 4$$

(پ) $\sqrt{5}$ تقریباً برابر ۲٫۲ است.

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2 \\ \Rightarrow -1 < 2 - \sqrt{5} < 0 \Rightarrow [2 - \sqrt{5}] = -1$$

(ت)

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right] = \left[\frac{16}{25}\right] = 0$$

۱۴۰ الف) عدد π تقریباً برابر ۳٫۱۴ است.

$$6 \leq \pi + 3,1 < 7 \Rightarrow f(\pi + 3,1) = [\pi + 3,1] = 6$$

(ب)

$$\sqrt{25} < \sqrt{27} < \sqrt{36} \Rightarrow 5 < \sqrt{27} < 6 \Rightarrow f(\sqrt{27}) = [\sqrt{27}] = 5$$

(پ) عدد π تقریباً برابر ۳٫۱۴ است.

$$3 < \pi < 4 \Rightarrow \frac{3}{3} < \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3} \Rightarrow 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left[\frac{\pi}{3}\right] = 1$$



(ت)

$$3 < \pi < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{3}{\pi} < \frac{3}{3} \Rightarrow 0 < \frac{3}{4} < \frac{3}{\pi} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{3}{\pi}\right) = \left[\frac{3}{\pi}\right] = 0$$

(الف) ۱۴۱

$$[x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

(ب)

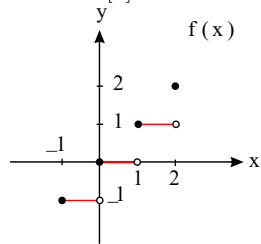
$$[x+2] = 5 \Rightarrow [x] + 2 = 5 \Rightarrow [x] = 3 \\ \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

(پ)

$$[x+2] = -4 \Rightarrow [x] + 2 = -4 \Rightarrow [x] = -6 \\ -6 \leq x < -5$$

دامنه تابع را به ۴ بخش تقسیم می‌کنیم و در هر بخش مقدار تابع را به دست می‌آوریم: ۱۴۲

$$\begin{aligned} -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ x = 2 &\Rightarrow [x] = 2 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$$



جذر اعداد ۱ تا ۳ بین ۱ و ۲ است. ۱۴۳

جذر اعداد ۴ تا ۸ بین ۲ و ۳ است.

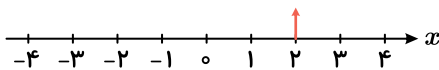
جذر اعداد ۹ تا ۱۵ بین ۳ و ۴ است.

جذر اعداد ۱۶ تا ۲۰ بین ۴ و ۵ است.

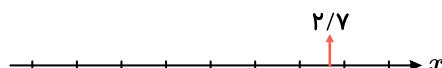
بنابراین:

۱۴۴

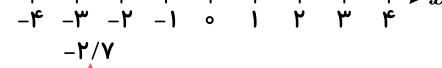
$$[2] = 2$$



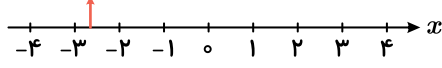
$$[2/7] = 2$$



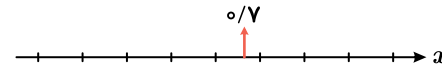
$$[-2/7] = -3$$



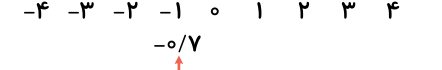
$$[0/7] = 0$$



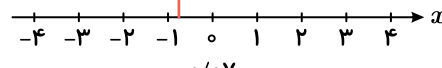
$$[-0/7] = -1$$



$$[-0/0/7] = -1$$

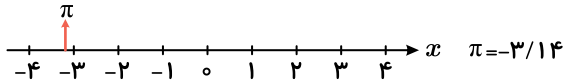


$$[-3/2] = -4$$

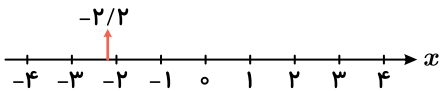




$$[-\pi] = -4$$



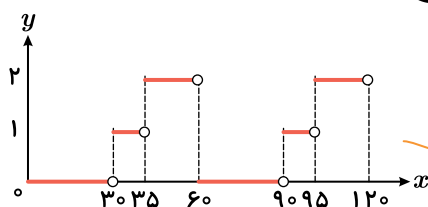
$$[-2/2] = -3$$



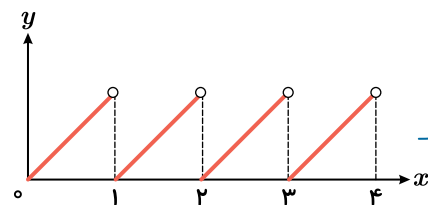
حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
$2 \leq x < 3$	$g(x) = 2$	
$1 \leq x < 2$	$g(x) = 1$	
$0 \leq x < 1$	$g(x) = 0$	
$-1 \leq x < 0$	$g(x) = -1$	
$-2 \leq x < -1$	$g(x) = -2$	

۱۴۵

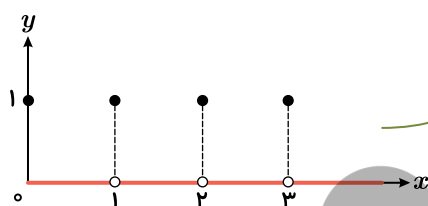
۱۴۶



یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



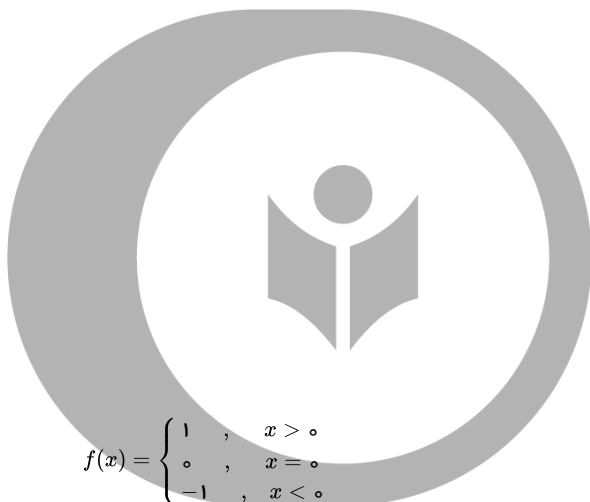
پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



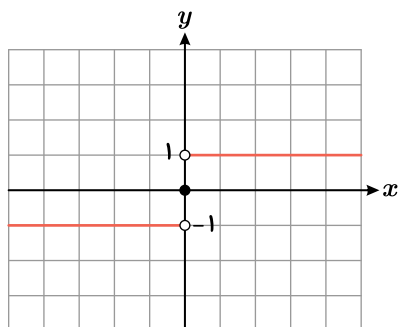
چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالت است.

۱۴۷ تعداد روزها در ماه‌های مختلف سال محور طول‌ها (x) نشان‌دهنده تعداد روزها و محور عرض‌ها (y) نشان‌دهنده ماه‌های سال است. ضابطه تابع به صورت مقابل است.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 31 \\ 2 & , 31 < x \leq 62 \\ 3 & , 62 < x \leq 93 \\ 4 & , 93 < x \leq 124 \\ 5 & , 124 < x \leq 155 \\ 6 & , 155 < x \leq 186 \\ 7 & , 186 < x \leq 216 \\ 8 & , 216 < x \leq 246 \\ 9 & , 246 < x \leq 276 \\ 10 & , 276 < x \leq 306 \\ 11 & , 306 < x \leq 336 \\ 12 & , 336 \leq x \leq 365 \end{cases}$$



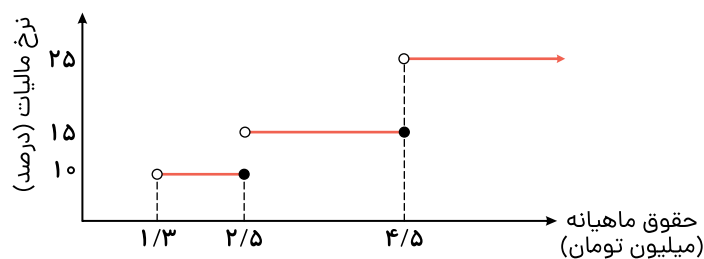
۱۴۸



$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = \{-1, 0, 1\}$$

۱۴۹ (الف)

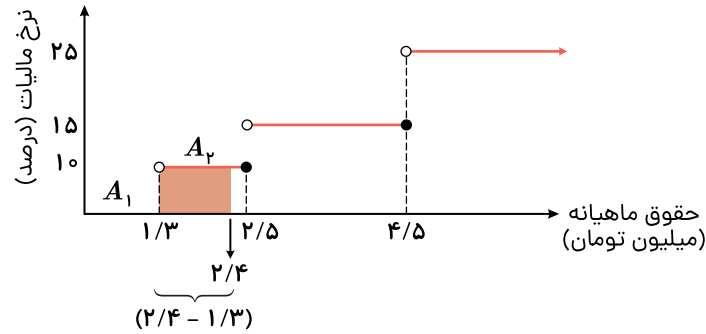


(ب) مالیات کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان حساب می‌نماییم.

با توجه به جدول مالیاتی، کارمندان با حقوق تا ۱,۳۰۰,۰۰۰ تومان معاف از مالیات است، بنابراین کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان معاف از مالیات بوده و مبلغ پرداختی و سطح متناظر با نمودار پلکانی آن صفر خواهد بود.



مالیات کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان را حساب می‌نماییم:



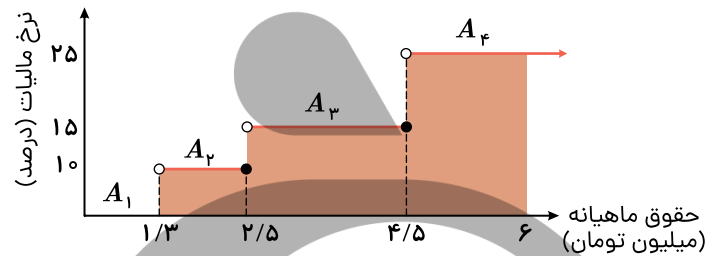
مساحت $A_1 = 0$

$$\text{مساحت } A_2 = (2,400,000 - 1,300,000) \times \frac{10}{100} = 1,100,000 \times \frac{10}{100} = 110,000$$

$$\text{مبلغ مالیات} = A_1 + A_2 = 0 + 110,000 = 110,000 \text{ تومان}$$

یعنی براساس نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی، کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان، مبلغ ۱۱۰,۰۰۰ تومان مالیات پرداخت می‌کند.

مالیات کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان را حساب می‌نماییم:



مساحت $A_1 = 0$

$$\text{مساحت } A_2 = (2,500,000 - 1,300,000) \times \frac{10}{100} = 1,200,000 \times \frac{10}{100} = 120,000$$

$$\text{مساحت } A_3 = (4,500,000 - 2,500,000) \times \frac{15}{100} = 2,000,000 \times \frac{15}{100} = 300,000$$

$$\text{مساحت } A_4 = (6,000,000 - 4,500,000) \times \frac{25}{100} = 1,500,000 \times \frac{25}{100} = 375,000$$

$$\text{مبلغ مالیات} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 + 120,000 + 300,000 + 375,000 = 795,000 \text{ تومان}$$

یعنی براساس نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی، کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان مبلغ ۷۹۵,۰۰۰ تومان مالیات پرداخت می‌کند.

۱۵۰

الف) $f(x) = [x]$

$$f(-2,3) = [-2,3] = -3$$

$$f(5) = [5] = 5$$

ب) $f(x) = [-x]$

$$f(1,7) = [-1,7] = -2$$

$$f(2,3) = [2,3] = 2$$

ج) $f(x) = [x] + [-x]$

$$f(1) = [1] + [-1] = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

$$x = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(1,3) = [1,3] + [-1,3] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

روش دوم:

روش دوم:



$$x = 1,3 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(1,7) = [1,7] + [-1,7] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

روش دوم:

$$x = 1,7 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(2) = [2] + [-2] = 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$$

روش دوم:

$$x = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$د) f(x) = [3x]$$

$$f(1) = [3 \times 1] = [3] = 3$$

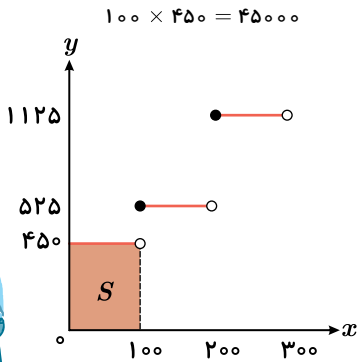
$$f(0,2) = [3 \times 0,2] = [0,6] = 0$$

$$f(1,3) = [3 \times 1,3] = [3,9] = 3$$

۱۵۱

الف

بله، مساحت قسمت هاشورزده در شکل زیر برابر هزینه برق مصرفی ۱۰۰ kwh اول است.



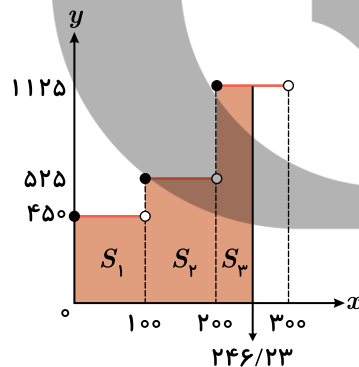
ب) بیانگر هزینه برق مصرف ۱۰۰ kwh دوم است یعنی از ۱۰۰ تا ۲۰۰ کیلووات ساعت.

پ

$$S_1 = 450 \times 100 = 45000$$

$$S_2 = 525 \times 100 = 52500$$

$$S_3 = 1125 \times 46,23 = 52008,75$$

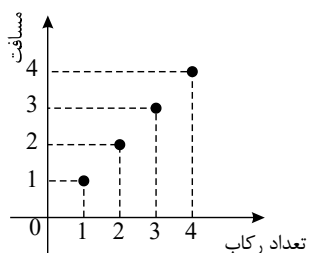


هزینه کل برق مصرفی برابر مجموع مساحت‌های قسمت‌های هاشور زده است.

$$45000 + 52500 + 52008,75 = 149588,75$$

۱۵۲

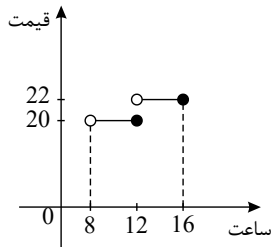
الف



ب



پ



۱۵۳

الف

ب

$$f(t) = 400 + 250[t]$$

$$f\left(\frac{41}{6}\right) = 400 + 250 \left[\frac{41}{6} \right] = 400 + 250 \times (7) = 400 + 1750 = 2150$$

۱۵۴

الف ثابت

ب خطی - چندضابطه‌ای

۱۵۵ در تابع پلکانی باید همه ضابطه‌ها تابع ثابت باشد.
پس ضریب x در ضابطه $(3k - 2)x + 1$ باید صفر باشد.

و تابع به صورت زیر است.

$$3k - 2 = 0 \rightarrow 3k = 2 \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \cancel{1} \left(\frac{2}{\cancel{1}} \right) + 4, & x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 6, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-2) = 6$$

۱۵۶ با توجه به جایگذاری $x = 4,8$ داریم:

$$A = \frac{3[x] - 4[-x]}{\sqrt{[x] + [2x]}} \xrightarrow{x=4,8} A = \frac{3[4,8] - 4[-4,8]}{\sqrt{[4,8] + [2 \times 4,8]}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 \times (4) - 4 \times (-5)}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{12 + 20}{\sqrt{13}} = \frac{32}{\sqrt{13}}$$

۱۵۷ با توجه به اینکه تابع $sign(x)$ به ازای مقادیر منفی برابر -1 است؛ پس:

$$-2x + 5 < 0 \Rightarrow -2x < -5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$

۱۵۸ ضابطه تابع $sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ است و حاصل $x - 1$ به ازای $1 < x \leq 3$ مقداری مثبت است:(۲) $1 < x \leq 3 \Rightarrow 0 < x - 1 \leq 2$ پس حاصل $sign(x - 1)$ به ازای $1 < x \leq 3$ برابر ۱ است.۱۵۹ ضابطه‌های توابع پلکانی مقادیر ثابت هستند، پس نباید در ضابطه‌ها متغیر وجود داشته باشد. لذا ضریب x را در ضابطه اول مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$m - 8 = 0 \Rightarrow m = 8$$

از طرفی با توجه به نمودار، حاصل $2n$ باید برابر ۴ باشد:

$$2n = 4 \Rightarrow n = 2$$

هم‌چنین حاصل $k - 6$ باید برابر -4 باشد:

$$k - 6 = -4 \Rightarrow k = 2$$



$$k + m + n = 2 + 8 + 2 = 12$$

۱۶۰ ابتدا حاصل $f(\pi)$ و $f(\sqrt{5})$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{[x] + 1}{[x] - 1} \Rightarrow f(\pi) = \frac{[\pi] + 1}{[\pi] - 1} \stackrel{\pi \approx 3,14}{=} \frac{3 + 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

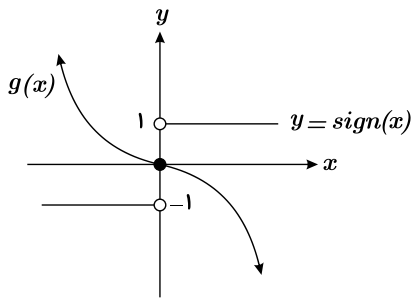
$$f(\sqrt{5}) = \frac{[\sqrt{5}] + 1}{[\sqrt{5}] - 1} \stackrel{\sqrt{5} \approx 2,2}{=} \frac{2 + 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

و در آخر حاصل $f(\pi) - f(\sqrt{5}) = 2 - 3 = -1$ می‌شود.

۱۶۱ چون $0 < x < 1$ با توجه به خواص نامساوی‌ها داریم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x^2 - 1 < 0 \Rightarrow [x^2 - 1] = -1$$

۱۶۲



$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار ملاحظه می‌شود که دو تابع f و g فقط یک نقطه برخورد دارند (در مبدأ مختصات تلاقی دارند).

۱۶۳ الف)

$$x = 2,2, y = -1,4 \Rightarrow \begin{cases} [x + y] = [2,2 + (-1,4)] = [0,8] = 0 \\ [x] + [y] = [2,2] + [-1,4] = 2 + (-2) = 0 \end{cases}$$

درست است.

ب)

$$x = 2,2 \Rightarrow \begin{cases} [2x] = [2 \times (-2,2)] = [-4,4] = -5 \\ 2[x] = 2[-2,2] = 2 \times (-2) = -4 \end{cases}$$

نادرست است.

ج)

$$x = 2, y = 1,5 \Rightarrow \begin{cases} [xy] = [2 \times 1,5] = [3] = 3 \\ [x][y] = [2][1,5] = 2 \times 1 = 2 \end{cases}$$

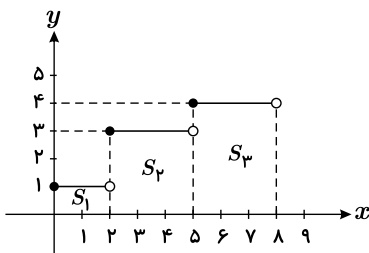
نادرست است.

د)

$$x = -1,3, y = -2,8 \Rightarrow \begin{cases} [x - y] = [-1,3 - (-2,8)] = [-1,3 + 2,8] = [1,5] = 1 \\ [x] - [y] = [-1,3] - [-2,8] = -2 - (-3) = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$

درست است.

۱۶۴ با رسم نمودار داده‌شده خواهیم داشت:



$$\begin{cases} S_1 = 1 \times 2 = 2 \\ S_2 = 3 \times 3 = 9 \\ S_3 = 3 \times 4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت کل} = S_1 + S_2 + S_3 = 2 + 9 + 12 = 23$$

۱۶۵ قدرمطلق هر عدد مثبت برابر خودش و قدرمطلق هر عدد منفی برابر قرینه‌اش است.

$$|3| = 3 \quad \text{الف)}$$

$$|-5| = -(-5) = 5 \quad \text{ب)}$$



پ) $|4 - 5| = |-1| = -(-1) = 1$

ت) $|8 - 3| = |5| = 5$

ث) $|- \sqrt{5}| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

۱۶۶) قدرمطلق هر عدد مثبت برابر خودش و قدرمطلق هر عدد منفی برابر قرینه‌اش است.

الف) $\sqrt{5}$ تقریباً برابر ۲٫۲ است، پس حاصل $3 - \sqrt{5}$ عددی مثبت است.

$$|3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$$

$$|\sqrt{7} - 4| = -(\sqrt{7} - 4) = -\sqrt{7} + 4$$

ب) $\sqrt{7}$ عددی بین ۲ و ۳ است، پس حاصل $\sqrt{7} - 4$ عددی منفی است.

$$|10 - \sqrt{3}| = 10 - \sqrt{3}$$

پ) $\sqrt{3}$ تقریباً برابر ۱٫۷ است، پس حاصل $10 - \sqrt{3}$ عددی مثبت است.

$$|\sqrt{28} - 6| = -(\sqrt{28} - 6) = -\sqrt{28} + 6$$

ت) $\sqrt{28}$ تقریباً برابر ۵٫۳ است، پس حاصل $\sqrt{28} - 6$ عددی منفی است.

۱۶۷)

$$y = -|x - 4| + 1 \Rightarrow y = \begin{cases} -(x - 4) + 1 & , x - 4 \geq 0 \\ -(-(x - 4)) + 1 & , x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -x + 5 & , x \geq 4 \\ x - 3 & , x < 4 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + 5 = 0 & , x \geq 4 \\ x - 3 = 0 & , x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & , x \geq 4 \\ x = 3 & , x < 4 \end{cases}$$

تابع در دو نقطه به طول‌های $x = 5$ و $x = 3$ محور طول‌ها را قطع می‌کند.

$$3 + 5 = 8$$

۱۶۸)

$$f(x) = a|x - 1| + 2[x] \xrightarrow{x=-1} 3 = a|-1 - 1| + 2[-1] \Rightarrow 3 = 2a - 2 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۱۶۹) الف)

$$|\underbrace{\sqrt{3} - \sqrt{2}}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}_{\text{مثبت}}| = \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \cancel{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ب)

$$|\underbrace{2 - \pi}_{\text{منفی}}| + |\underbrace{4 - \pi}_{\text{مثبت}}| = -2 + \cancel{\pi} + 4 - \cancel{\pi} = 2$$

۱۷۰) (-1) به توان هر عدد طبیعی برسد یا ۱ است یا -۱ که قدرمطلق آن برابر ۱ است.

$$||-1| - |-3|| + |(-1)^n| = |1 - 3| + |\pm 1| = 2 + 1 = 3$$

۱۷۱)

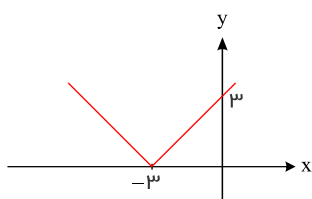
$$f(x) = |2 - x| - |x - 2| \Rightarrow$$

$$f(\sqrt{5}) = |2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} - 2| \xrightarrow[\sqrt{5}-2>0]{2-\sqrt{5}<0} -(2 - \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)$$

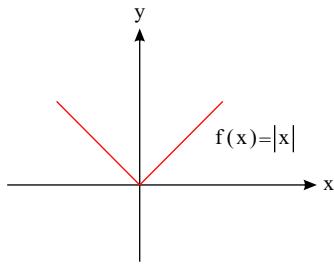
$$= -2 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + 2 = 0$$

۱۷۲)

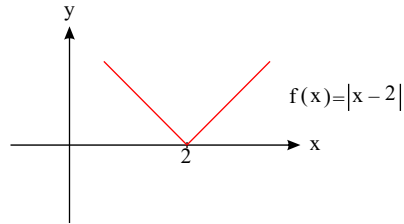
$$f(x) = |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & , x \geq -3 \\ -x - 3 & , x < -3 \end{cases}$$



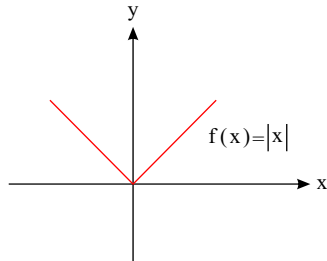
۱۷۳) الف) برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x - 2|$ کافیست نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را دو واحد به سمت راست روی محور طول‌ها منتقل کنیم.



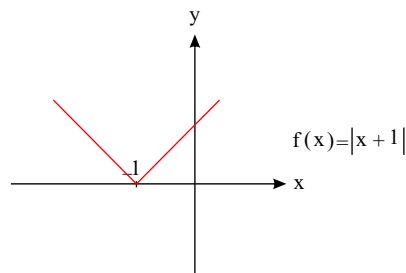
دو واحد به
سمت راست



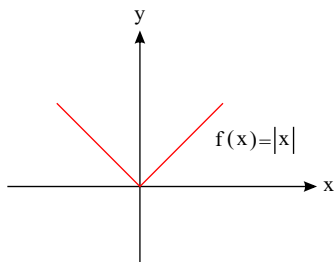
ب) برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x + 1|$ کافیست نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را یک واحد به سمت چپ روی محور x ها منتقل کنیم.



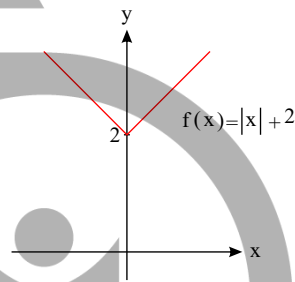
یک واحد به
سمت چپ



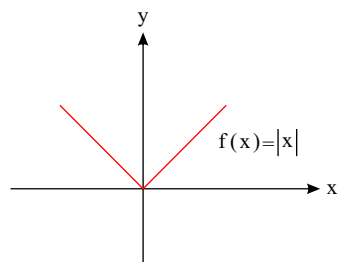
الف) برای رسم نمودار تابع $f(x) = |x| + 2$ کافیست نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را دو واحد به بالا منتقل کنیم. (۱۷۴)



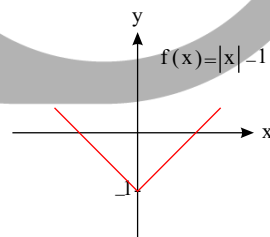
دو واحد به
سمت بالا



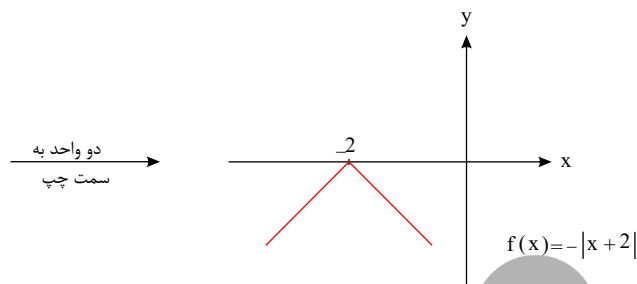
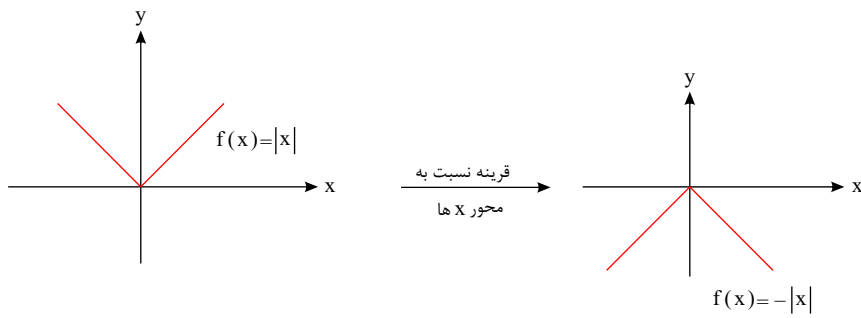
ب) برای رسم نمودار تابع $f(x) = |x| - 1$ کافیست نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم.



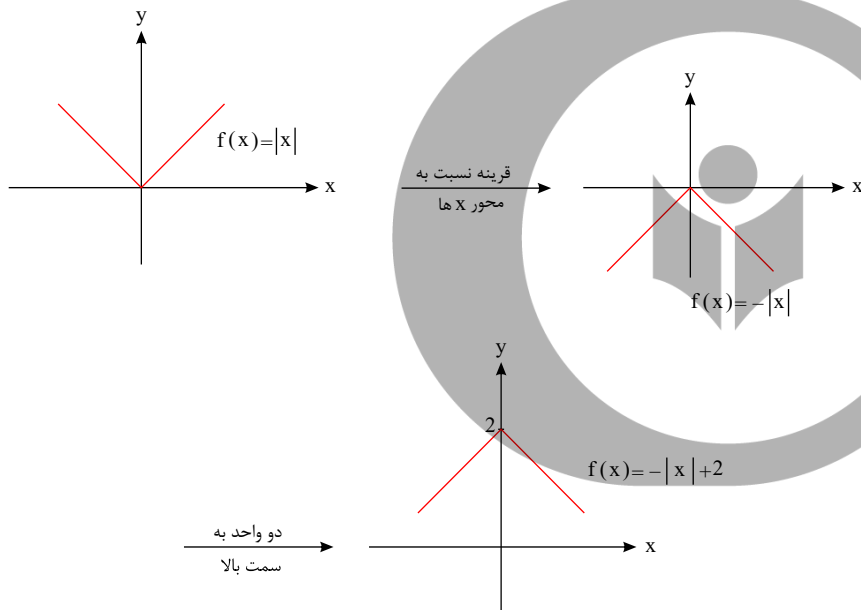
یک واحد به
سمت پایین



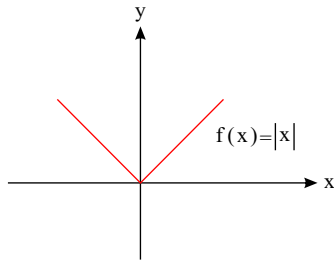
۱۷۵) برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x + 2|$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. سپس دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



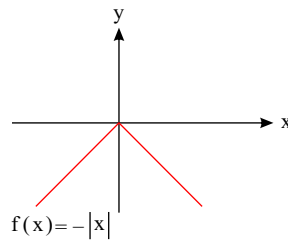
۱۷۶ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x| + 2$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



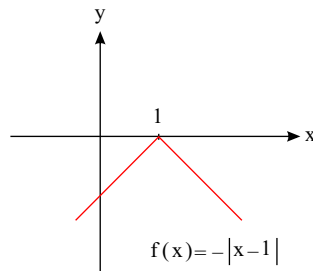
۱۷۷ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x - 1|$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.



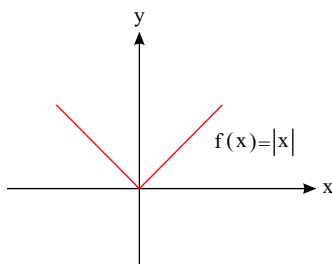
قرینه نسبت به
محور X ها



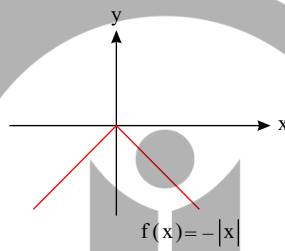
یک واحد به
سمت راست



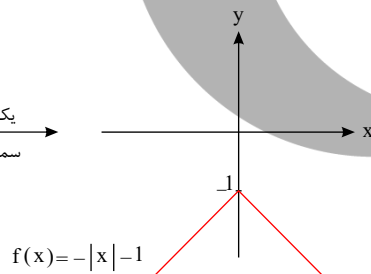
۱۷۸ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x| - 1$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و سپس آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.



قرینه نسبت به
محور X ها



یک واحد به
سمت پایین



۱۷۹ الف) با توجه به نمودار، پروژه باید در دی ماه ۱۳۹۵ افتتاح شود. اگر اتمام پروژه زودتر یا دیرتر از موعد انجام شود، پیمانکار متعهد است به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل، یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند.

ب)

گام اول: با استفاده از دو نقطه $(0, 2)$ و $(-2, 0)$ ؛ شیب نیم‌خط سمت راست (۱) را تعیین می‌کنیم:

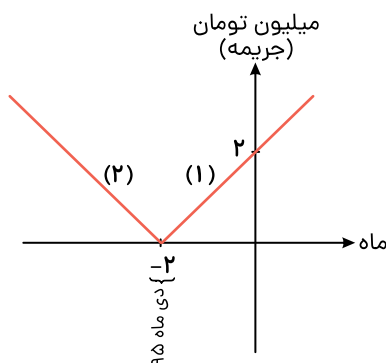
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

گام دوم: مختصات یک نقطه از خط و شیب خط را در معادله زیر جایگذاری می‌کنیم، تا معادله خط به دست آید.

$$(x_0, y_0) = (0, 2), m=1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y - 2 = x \Rightarrow y = x + 2$$



گام سوم: معادله نیم‌خط (۲) را با قرینه کردن نیم‌خط (۱) مشخص می‌کنیم.



$$y = \begin{cases} x + 2 & , x \geq -2 \\ -(x + 2) & , x < -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{معادله نیمخط (۱)} \\ \text{معادله نیمخط (۲)} \end{array}$$

(ج)

$$y = x + 2, x \geq -2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ y = -(x + 2), x < -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = |x + 2|$$

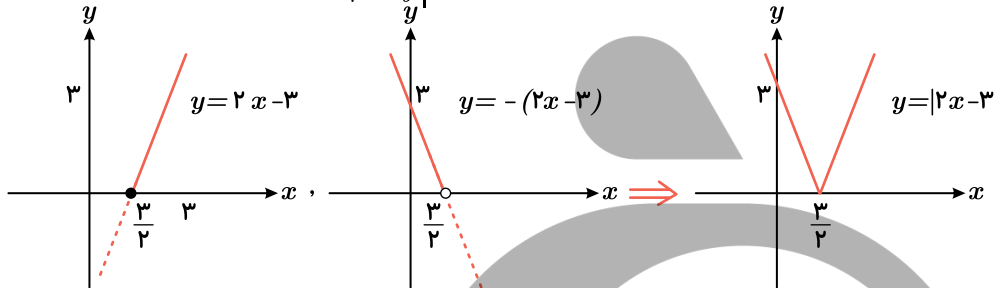
(د) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه، مقدار جریمه را به نسبت مدت زمان تقدم یا تاخر تحویل پروژه بیان می‌کند. افزایش شیب به معنای افزایش میزان جریمه نسبت به واحد زمان است و کاهش شیب به معنای کاهش میزان جریمه نسبت به واحد زمان است.

۱۸۰

$$\text{الف) } y = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & , 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3) & , 2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y = 2x - 3, x \geq \frac{3}{2} \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{3}{2} \quad 3 \\ \hline y & 0 \quad 3 \end{array}$$

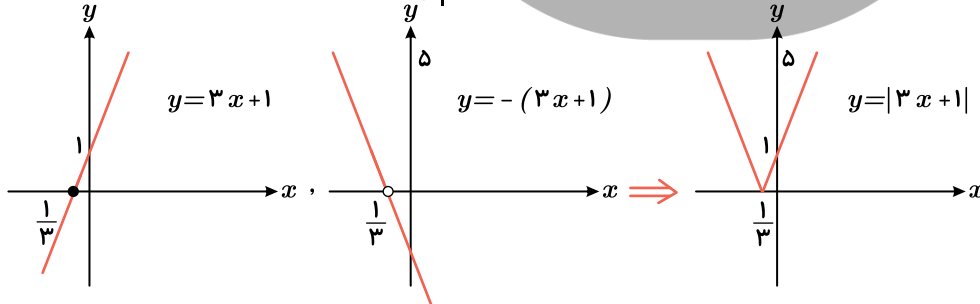
$$y = -(2x - 3) = -2x + 3, x < \frac{3}{2} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad \frac{1}{2} \\ \hline y & 3 \quad 1 \end{array}$$



$$\text{ب) } y = |3x + 1| = \begin{cases} 3x + 1 & , 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ -(3x + 1) = -3x - 1 & , 3x + 1 < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

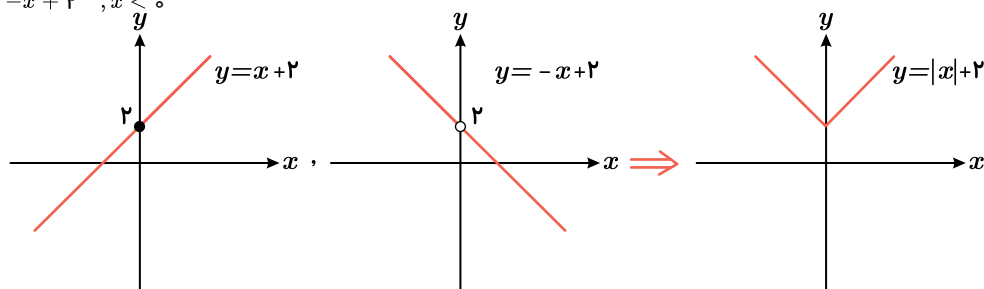
$$y = 3x + 1, x \geq -\frac{1}{3} \quad \begin{array}{c|c} x & -\frac{1}{3} \quad 0 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$y = -(3x + 1) = -3x - 1, x < -\frac{1}{3} \quad \begin{array}{c|c} x & -\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \\ \hline y & 0 \quad -1 \end{array}$$



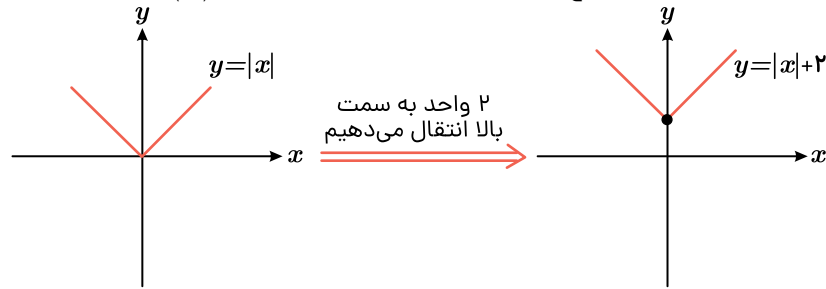
روش اول: ۱۸۱

$$\text{الف) } y = |x| + 2 = \begin{cases} x + 2 & , x \geq 0 \\ -x + 2 & , x < 0 \end{cases}$$



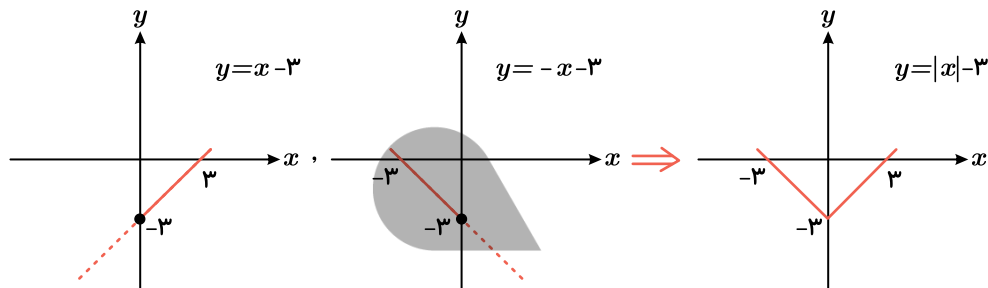


روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x| + 2$ کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را دو واحد به سمت مثبت محور y ها (بالا) انتقال دهیم.



$$\text{ب) } y = |x| - 3 = \begin{cases} x - 3, & x \geq 0 \\ -x - 3, & x < 0 \end{cases}$$

روش اول:



روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x| - 3$ کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را سه واحد به سمت منفی محور y ها (پایین) انتقال دهیم.

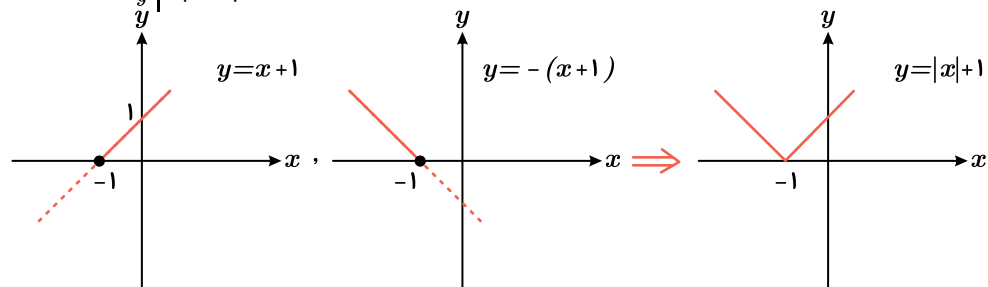


روش اول:

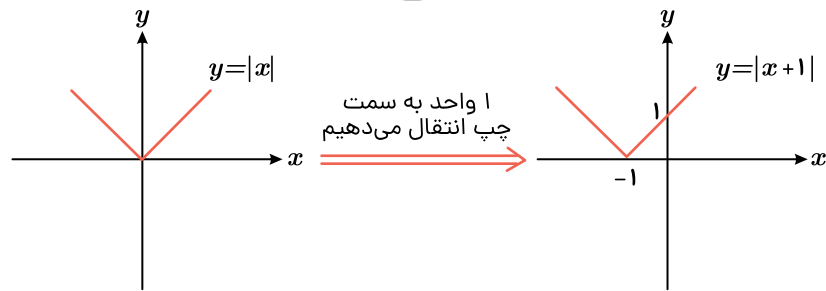
$$\text{الف) } y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ -(x + 1), & x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

خطوط (۱) و (۲) را در دامنه تعریف به تفکیک رسم نموده و در نهایت نمودار تابع اصلی را رسم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= x + 1, \quad x \geq -1 & \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{array} \\ (2) \quad y &= -(x + 1), \quad x < -1 & \begin{array}{c|cc} x & -2 & -3 \\ y & 1 & 2 \end{array} \end{aligned}$$



روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x + 1|$ کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را یک واحد به سمت منفی محور x ها (سمت چپ) انتقال دهیم.



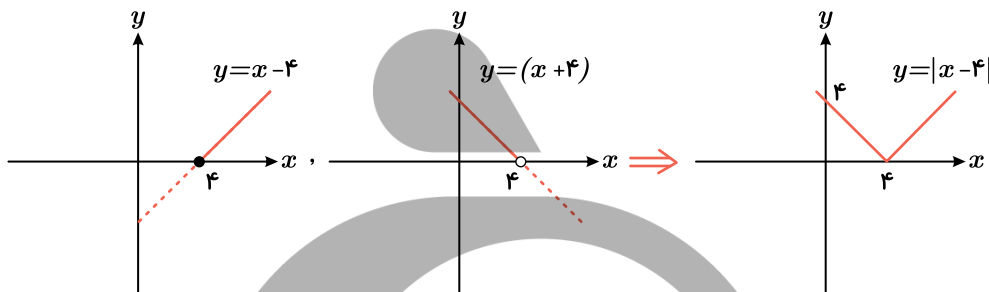
روش اول:

$$y = |x - 4| = \begin{cases} x - 4, & x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ -(x - 4) = -x + 4, & x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

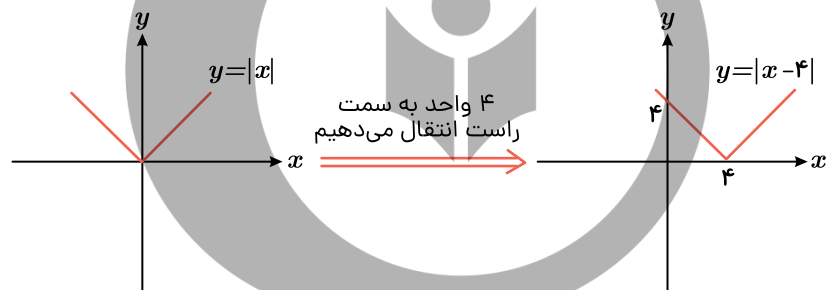
خطوط (۱) و (۲) را در دامنه تعریف به تفکیک رسم نموده و در نهایت نمودار تابع اصلی را رسم می‌کنیم.

$$(1) \quad y = x - 4 \quad x \geq 4 \quad \begin{array}{c|c} x & 4 \quad 5 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$(2) \quad y = -(x - 4) = -x + 4 \quad x < 4 \quad \begin{array}{c|c} x & 3 \quad 2 \\ \hline y & 1 \quad 2 \end{array}$$



روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x - 4|$ ، کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را چهار واحد به سمت مثبت محور x (سمت راست) انتقال دهیم.



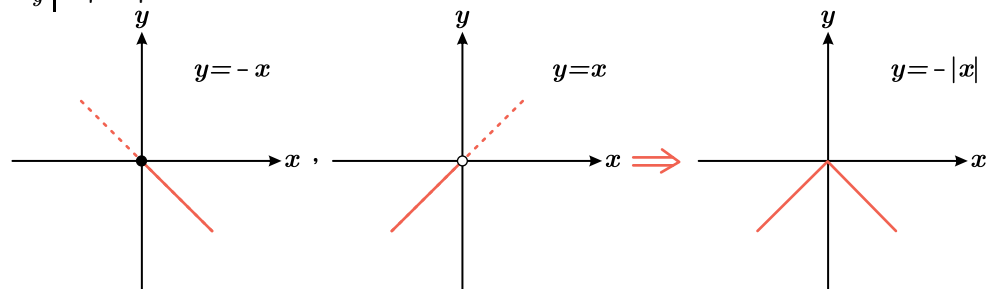
روش اول:

$$y = -|x| = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ -(-x) = x, & x < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

خطوط (۱) و (۲) را در دامنه تعریف به تفکیک رسم نموده و در نهایت نمودار تابع اصلی را رسم می‌کنیم.

$$(1) \quad y = -x \quad x \geq 0 \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 0 \quad -1 \end{array}$$

$$(2) \quad y = x \quad x < 0 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad -2 \\ \hline y & -1 \quad -2 \end{array}$$

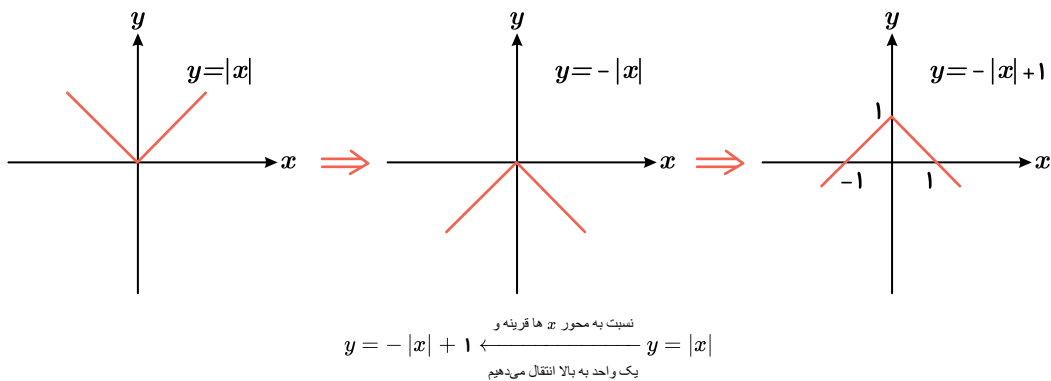


روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = -|x|$ کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را نسبت به محور طول‌ها (x ها) قرینه کنیم.

$$y = -|x| + 1$$



پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y = -|x| + 1$ نمودار تابع $y = |x|$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۱۸۲

الف

اگر پروژه را در ماه دوم (اردیبهشت) تحویل دهند، جریمه نمی‌شوند؛ ولی به ازای هر زمان در تأخیر تحویل پروژه، جریمه پرداخت خواهند کرد.

ب

برای قسمت اول (ابتدای سال تا اردیبهشت) با استفاده از دو نقطه $(0, 4)$ و $(2, 0)$ داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{4 - 0}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{عرض از مبدأ: } 4$$

$$\text{معادله خط: } y = -2x + 4 \quad x < 2$$

برای قسمت دوم (اردیبهشت تا تیر) با استفاده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(4, 4)$ داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{4 - 0}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{عرض از مبدأ: } -4$$

$$\text{معادله خط: } y = 2x - 4 \quad x \geq 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -2x + 4, & x < 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = |2x - 4|$$

اگر شیب خط مثبت باشد، یعنی تأخیر در زمان تحویل پروژه و اگر شیب خط منفی باشد، یعنی تحویل پروژه زودتر انجام شده است.

پ

ت

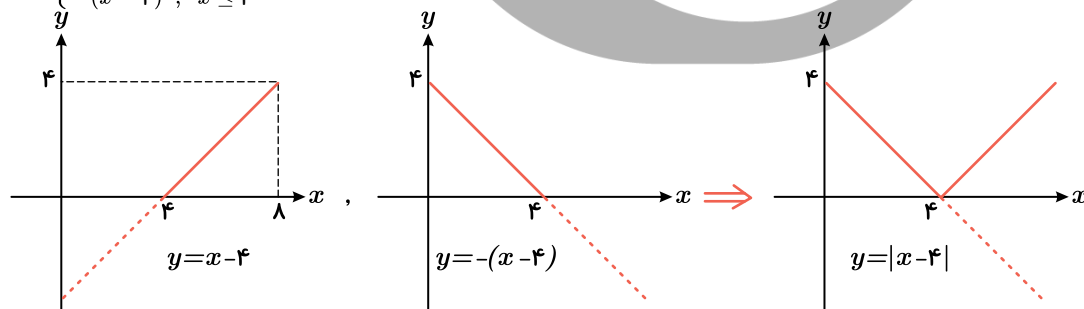
۱۸۳

الف

ابتدا تابع قدرمطلق را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = |x - 4|$$

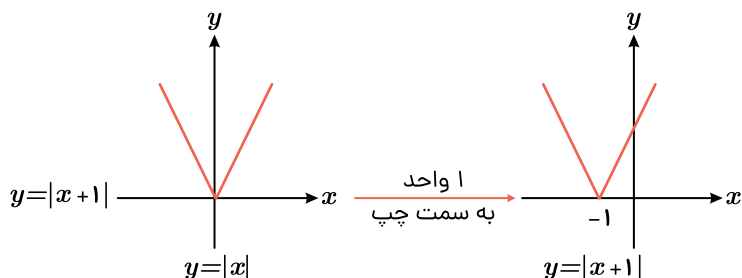
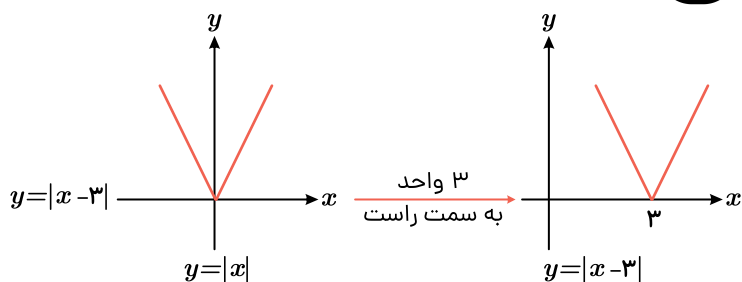
$$y = \begin{cases} x - 4, & x \geq 4 \\ -(x - 4), & x < 4 \end{cases}$$



بله می‌توان با انتقال دادن نمودار مختصاتی تابع $y = |x|$ به اندازه ۴ واحد به سمت راست روی محور طول‌ها نمودار مختصاتی تابع $y = |x - 4|$ را به دست آورد.

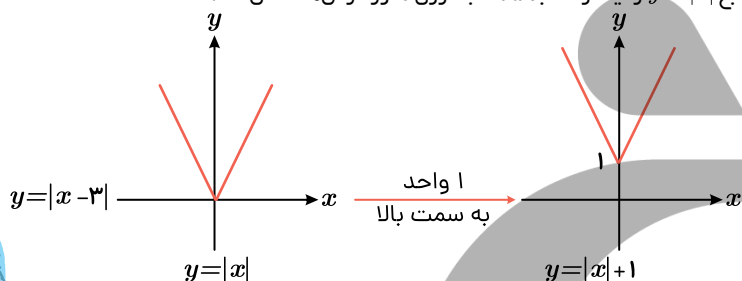
ب

پ



ت

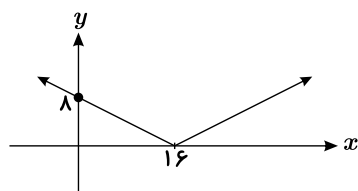
برای رسم نمودار مختصاتی تابع $y = |x| + 1$ می‌توان نمودار مختصاتی تابع $y = |x|$ را یک واحد به سمت بالا روی محور عرض‌ها انتقال داد.



۱۸۴ تابع $f(x) = |-\frac{1}{2}x + 8|$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |-\frac{1}{2}x + 8| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 8, & -\frac{1}{2}x + 8 \geq 0 \\ -(-\frac{1}{2}x + 8), & -\frac{1}{2}x + 8 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 8, & x \leq 16 \\ \frac{1}{2}x - 8, & x > 16 \end{cases}$$



حال با رسم نمودارهای دو ضابطه تابع در قسمت‌های مربوط به دامنه تعریف هر ضابطه داریم:

۱۸۵ ابتدا اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f = \{2, 3, -1\}, \quad D_g = \{2, 3, -1\}$$

$$D_f \cap D_g = \{2, -1\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 5 = 5 \\ (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g) = \{(2, 5), (-1, 5)\}$$

$$ب) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 0 \times 5 = 0 \\ (f \times g)(-1) = f(-1) \times g(-1) = 3 \times 2 = 6 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f \times g = \{(2, 0), (-1, 6)\}$$

$$\text{ج) } D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \left\{ \left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{2}{3} \right.$$

$$\left.\text{د) } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{2, -1\}\right\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(2) &= \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{0}{5} = 0 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(-1) &= \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{2}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ (2, 0), \left(-1, \frac{2}{2}\right) \right\}$$

$$\text{ه) } (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \left\{ \begin{aligned} (f - g)(2) &= f(2) - g(2) = 0 - 5 = -5 \\ (f - g)(-1) &= f(-1) - g(-1) = 2 - 2 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow f - g = \{(2, -5), (-1, 0)\}$$

$$\text{و) } (g - f)(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (g - f)(2) &= g(2) - f(2) = 5 - 0 = 5 \\ (g - f)(-1) &= g(-1) - f(-1) = 2 - 2 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow g - f = \{(2, 5), (-1, 0)\}$$

ابتدا با توجه به نمودار مختصاتی دو تابع f و g مقادیر آنها را در نقطه ۱ و -۱ مشخص می‌کنیم. (۱۸۶)

$$f(1) = 2, f(-1) = -1, g(1) = 1, g(-1) = -1$$

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 1 = 3 \quad (\text{الف})$$

$$(f - g)(-1) = f(-1) - g(-1) = -1 - (-1) = 0 \quad (\text{ب})$$

(۱۸۷)

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2x - 2 = 3x + a + x - 2$$

$$2x - 2 = 3x + a - 2 \Rightarrow a - 2 = -2 \Rightarrow a = 2$$

ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می‌کنیم. (۱۸۸)

$$D_f = \{2, 5, 6, 7\}, \quad D_g = \{3, 6, 7, 8\}$$

$$D_f \cap D_g = \{6, 7\}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (f + g)(6) &= f(6) + g(6) = 3 + 11 = 14 \\ (f + g)(7) &= f(7) + g(7) = 4 + 2 = 6 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow f + g = \{(6, 14), (7, 6)\}$$

(الف)

(ب)

$$D_{g-f} = D_g \cap D_f = \{6, 7\}$$

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (g - f)(6) &= g(6) - f(6) = 11 - 3 = 8 \\ (g - f)(7) &= g(7) - f(7) = 2 - 4 = -2 \end{aligned} \right.$$

$$g - f = \{(6, 8), (7, -2)\}$$



$$D_f = \{a, b, c, d, e\} \quad , \quad D_g = \{b, d, e, f\}$$

$$\Rightarrow D_f \cap D_g = \{b, d, e\}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{b, d, e\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f-g)(b) = f(b) - g(b) = -1 - (-3) = 2 \\ (f-g)(d) = f(d) - g(d) = 3 - (-3) = 6 \\ (f-g)(e) = f(e) - g(e) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f-g = \{(b, 2), (d, 6), (e, 1)\}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f \times g)(b) = f(b) \times g(b) = (-1) \times (-3) = 3 \\ (f \times g)(d) = f(d) \times g(d) = 3 \times (-3) = -9 \\ (f \times g)(e) = f(e) \times g(e) = 3 \times 2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \times g = \{(b, 3), (d, -9), (e, 6)\}$$

(الف)

(ب)

۱۹۰

الف

$$a) f_{\forall}(x) = f_1(x) + f_{\forall}(x) = (x^2 - 1) + (x + 1) = x^2 + x$$

$$\Rightarrow f_{\forall}(x) = x^2 + x$$

$$b) f_{\exists}(x) = f_1(x) - f_{\forall}(x) = x^2 - 1 - (x + 1) = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow f_{\exists}(x) = x^2 - x - 2$$

$$c) f_{\Delta}(x) = f_{\forall}(x) - f_1(x) = x + 1 - (x^2 - 1) = x + 1 - x^2 + 1 = -x^2 + x + 2$$

$$\Rightarrow f_{\Delta}(x) = -x^2 + x + 2$$

$$d) f_{\times}(x) = f_1(x) \times f_{\forall}(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow f_{\times}(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$e) f_{\vee}(x) = \frac{f_1(x)}{f_{\forall}(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \stackrel{x \neq -1}{=} x - 1$$

$$\Rightarrow f_{\vee}(x) = x - 1, x \neq -1$$

$$f) f_{\wedge}(x) = \frac{f_{\forall}(x)}{f_1(x)} = \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x-1)(x+1)} \stackrel{x \neq -1}{=} \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow f_{\wedge}(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq -1$$

ب

حال با توجه به ضابطه توابع f_1 تا $f_{\wedge}$ به ازای $x = 2$ مقادیر دو کفه ترازو را به دست می‌آوریم:

کفه چپ ترازو از بالا به پایین برابر است با:

$$f_{\times}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \Rightarrow f_{\times}(2) = 2^3 + 2^2 - 2 - 1 = 8 + 4 - 2 - 1 = 9$$

$$\Rightarrow f_{\times}(2) = 9$$



$$f_1(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f_1(2) = 2^2 - 1 = 3$$

$$f_2(x) = x + 1 \Rightarrow f_2(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow f_1(2) + f_2(2) = 3 + 3 = 6$$

$$f_3(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f_3(2) = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$f_3(2) = 0 \Rightarrow |f_3(2)| = 0$$

$$f_2(2) = 3, f_1(2) = 3 \Rightarrow |f_2(2) - f_1(2)| = |3 - 3| = 0$$

$$f_4(x) = x - 1 \Rightarrow f_4(2) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow f_4(2) = 1$$

$$f_2(2) = 3, f_1(2) = 3 \Rightarrow \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = \frac{3}{3} = 1$$

مجموع کفه سمت چپ برابر است با:

$$f_6 + (f_1 + f_2) + |f_3| + |f_2 - f_1| + f_4 + \frac{f_2}{f_1} = 9 + 6 + 0 + 0 + 1 + 1 = 17$$

کفه راست ترازو از بالا به پایین برابر است با:

$$f_1(2) = 3, \quad f_2(2) = 3$$

$$|f_1(2) - f_2(2)| = |3 - 3| = 0 \Rightarrow |f_1(2) - f_2(2)| = 0$$

$$f_5(x) = -x^2 + x + 2 \Rightarrow f_5(2) = -2^2 + 2 + 2 = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow |f_5(2)| = |0| = 0$$

$$f_1(2) = 3, \quad f_2(2) = 3$$

$$f_1(2) \times f_2(2) = 3 \times 3 = 9$$

$$f_6(x) = x^2 + x \Rightarrow f_6(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow f_6(2) = 6$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f_4(2) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow f_4(2) = 1$$

$$f_1(2) = 3, \quad f_2(2) = 3 \Rightarrow \frac{f_1(2)}{f_2(2)} = \frac{3}{3} = 1$$

مجموع کفه سمت راست برابر است با:

$$|f_1 - f_2| + |f_5| + f_1 \times f_2 + f_6 + f_4 + \frac{f_1}{f_2} = 0 + 0 + 9 + 6 + 1 + 1 = 17$$

مجموع دو کفه سمت راست و سمت چپ ترازو با هم برابرند. از تساوی دو کفه ترازو نتیجه می‌گیریم:

$$1) f_6(2) = f_1(2) \times f_2(2)$$

$$2) f_1(2) + f_2(2) = f_3(2)$$

$$3) |f_3(2)| = |f_5(2)|$$

$$4) |f_2(2) - f_1(2)| = |f_1(2) - f_2(2)|$$

$$5) f_4(2) = \frac{f_1(2)}{f_2(2)}$$



$$۶) \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = f_3(2)$$

۱۹۱ ابتدا اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f = \{1, 3, 4, 5\} \quad , \quad D_g = \{3, 4, 5, 7\} \quad , \quad D_f \cap D_g = \{3, 4, 5\}$$

(الف)

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{3, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{0}{-1} = 0 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{2}{-1} = -2 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(5) = \frac{f(5)}{g(5)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ (3, 0), (4, -2), (5, \frac{1}{2}) \right\}$$

(ب)

$$f(3) = 0 \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} = \{4, 5\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \left(\frac{g}{f}\right)(4) = \frac{g(4)}{f(4)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{g}{f}\right)(5) = \frac{g(5)}{f(5)} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

۱۹۲ ابتدا اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f = \{-3, -2, -1, 2\} \quad , \quad D_g = \{-3, -2, -1, 5\} \quad , \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-3, -2, -1\}$$

(الف)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f+g)(-3) = f(-3) + g(-3) = 2 + (-8) = -6 \\ (f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 6 + (-6) = 0 \\ (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 4 + (-4) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f+g = \{(-3, -6), (-2, 0), (-1, 0)\}$$

(ب)

$$D_{g-f} = D_g \cap D_f = \{-3, -2, -1\}$$

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow \begin{cases} (g-f)(-3) = g(-3) - f(-3) = -8 - 2 = -10 \\ (g-f)(-2) = g(-2) - f(-2) = -6 - 6 = -12 \\ (g-f)(-1) = g(-1) - f(-1) = -4 - 4 = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g-f = \{(-3, -10), (-2, -12), (-1, -8)\}$$

۱۹۳ ابتدا اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g را مشخص می‌کنیم:

$$D_f = \{-3, -2, -1, 2\} \quad , \quad D_g = \{-3, -2, -1, 5\} \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{-3, -2, -1\}$$

(الف)

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f \times g)(-3) = f(-3) \times g(-3) = 2 \times (-8) = -16 \\ (f \times g)(-2) = f(-2) \times g(-2) = 6 \times (-6) = -36 \\ (f \times g)(-1) = f(-1) \times g(-1) = 4 \times (-4) = -16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \times g = \{(-3, -16), (-2, -36), (-1, -16)\}$$

(ب) با توجه به $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$ و اینکه $g(x)$ در این سؤال همواره مخالف صفر است پس $D_{\frac{f}{g}} = \{-3, -2, -1\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{f}{g}\right)(-3) = \frac{f(-3)}{g(-3)} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(-2) = \frac{f(-2)}{g(-2)} = \frac{6}{-6} = -1 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{4}{-4} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ (-3, -\frac{1}{4}), (-2, -1), (-1, -1) \right\}$$



$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{x-1}{g(x)} \Rightarrow (x^2 - 1)g(x) = x - 1 \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{x-1}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

ابتدا اشتراک دامنه دو تابع f و g را مشخص می‌کنیم. در هر قسمت مقادیری که مخرج برابر صفر می‌شود را کنار می‌گذاریم. ۱۹۵

$$D_f = \{0, 2, 3\}, \quad D_g = \{0, 2, 3\}$$

$$D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$$

الف) $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$ قابل محاسبه نیست چون $g(0) = 0$ است در نتیجه صفر در دامنه $\frac{f}{g}$ قرار نمی‌گیرد.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{0}{2} = 0 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{f}{g} = \{(2, 0), (3, -1)\}$$

ب) $\left(\frac{g}{f}\right)(2)$ قابل محاسبه نیست چون $f(2) = 0$ است در نتیجه ۲ در دامنه $\frac{g}{f}$ قرار نمی‌گیرد.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{0}{1} = 0 \\ \left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{g}{f} = \{(0, 0), (3, -1)\}$$

۱۹۶ دامنه تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ پس اشتراک دامنه این دو تابع برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود.

الف)

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x-2)(6-2x) = 6x - 2x^2 - 12 + 4x = -2x^2 + 10x - 12$$

$$(f \times g)(x) = -2x^2 + 10x - 12 \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

ب) از اشتراک دامنه دو تابع f و g ، مقادیری که $g(x) = 0$ می‌شود را کنار می‌گذاریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$g(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-2}{6-2x}$$

پ) از اشتراک دامنه دو تابع f و g مقادیری که $f(x) = 0$ می‌شود را کنار می‌گذاریم:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\}$$

$$f(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{6-2x}{x-2}$$

۱۹۷ دامنه دو تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ است، پس $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$.

الف)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 1 + 5 - 3x = -x + 4$$

$$(f+g)(x) = -x + 4 \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$$

ب)

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 5 - 3x - (2x - 1) = 5 - 3x - 2x + 1 = -5x + 6$$

$$(g-f)(x) = -5x + 6 \quad D_{g-f} = \mathbb{R}$$



$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 1 - (\Delta - 3x) = 2x - 1 - \Delta + 3x = 5x - \Delta$$

$$(f - g)(x) = 5x - \Delta \quad D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x - 1}{x - 1} \text{ و } D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1\} \text{ پس: } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \text{ و } g(1) = 0 \text{ چون } 198$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_1(x) = x + 1 \Rightarrow f_1(2) = 2 + 1 = 3$$

$$f_2(x) = x - 1 \Rightarrow f_2(2) = 2 - 1 = 1$$

$$f_+(2) = f_1(2) + f_2(2) = 3 + 1 = 4$$

$$f_-(2) = f_1(2) - f_2(2) = 3 - 1 = 2$$

$$f_\Delta(2) = f_2(2) - f_1(2) = 1 - 3 = -2$$

$$f_\times(2) = f_1(2) \times f_2(2) = 3 \times 1 = 3$$

$$f_v(2) = \frac{f_1(2)}{f_2(2)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$f_\lambda(2) = \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = \frac{1}{3}$$

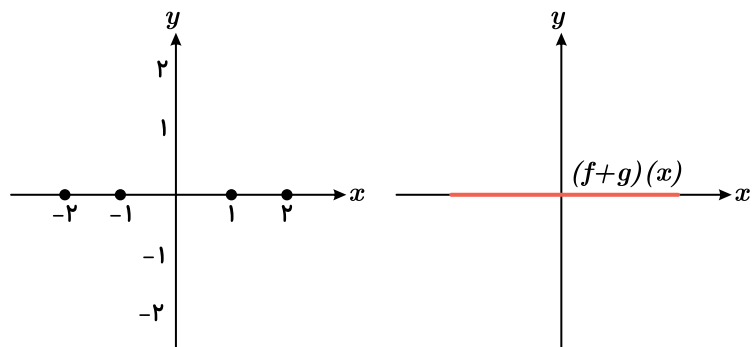
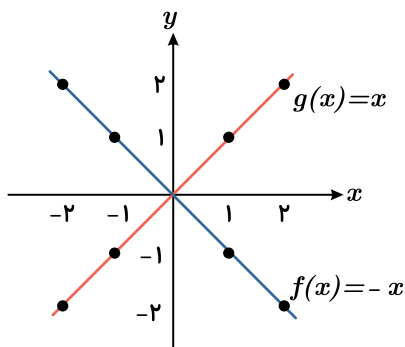
$$f_q(2) = \frac{f_2(2)}{f_\Delta(2)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{\circ}(2) = f_-(2) \times f_\times(2) = 2 \times 3 = 6$$

$$f_{11}(2) = f_v(2) + f_\lambda(2) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$f_{12}(2) = f_{\circ}(2) \times f_{11}(2) = 6 \times \frac{10}{3} = 20$$

$$f_{12}(2) = f_q(2) \times f_{12}(2) = -\frac{1}{2} \times 20 = -10$$



$$f(x) = -x \quad D_f = \mathbb{R}$$



$$g(x) = x \quad D_g = \mathbb{R}$$

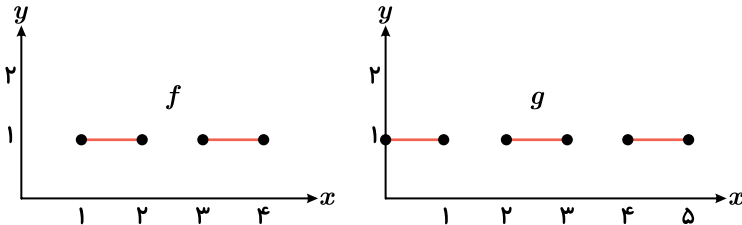
$$D_{f+g} = d_f \cap d_g = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -x + x = 0$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = 0 \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$$

الف) گام اول: با مشاهده هر نمودار و با توجه به دامنه هر یک از توابع f و g اشتراک دامنه‌ها را مشخص می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که دامنه توابع f و g در نقاط به طول ۱ و $x=2$ و $x=3$ و $x=4$ اشتراک دارند.



به بیان ریاضی می‌توانیم بنویسیم:

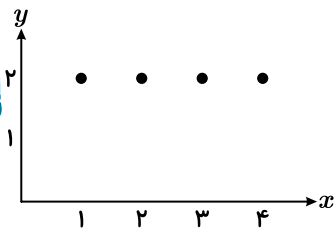
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2, 3 \leq x \leq 4\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1, 2 \leq x \leq 3, 4 \leq x \leq 5\}$$

$$D_f \cap D_g = \{x = 1, x = 2, x = 3, x = 4\}$$

گام دوم: با مشاهده هر نمودار مقدار هر یک از توابع f و g را در $D_f \cap D_g$ مشخص می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که مقدار توابع f و g در اشتراک دامنه‌ها مقدار ثابت $y=1$ است که مقدار $f+g$ در دامنه اشتراک $1+1=2$ نیز هست.



به بیان ریاضی می‌توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = 1 \\ y = g(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (f+g)(x) = 2 \quad D_{f+g} = \{1, 2, 3, 4\}$$

ب) گام اول: با توجه به ضابطه هر یک از توابع f و g ضابطه توابع خواسته‌شده را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = |x|$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = |x| \times |x| = |x|^2 = x^2$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{|x|} = 1$$

گام دوم: با توجه به دامنه هر یک از توابع f و g دامنه توابع خواسته‌شده را تعیین می‌کنیم.

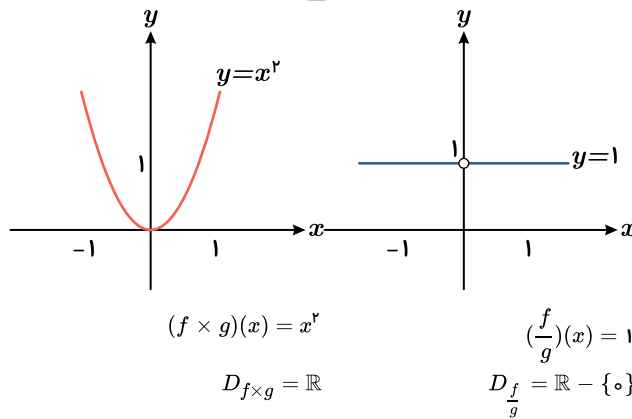
$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x | |x| = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

گام سوم: نمودار توابع خواسته‌شده را با در نظر گرفتن دامنه تعریف رسم می‌کنیم.

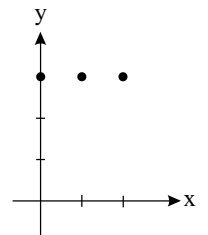
از سال گذشته به خاطر داریم نمودار تابع $y = x^2$ نمودار سهمی بوده که در نقطه $(0, 0)$ دارای کمترین مقدار است و همچنین نمودار $y = 1$ خطی به موازات محور طول‌هاست که از نقطه $(0, 1)$ روی محور عرض‌ها می‌گذرد.



۲۰۲

الف

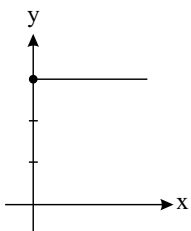
دامنه مشترک $x \geq 0$ است.



$$\begin{aligned}(f + g)(0) &= f(0) + g(0) = 1 + 2 = 3 \\ (f + g)(1) &= f(1) + g(1) = 0 + 3 = 3 \\ (f + g)(2) &= f(2) + g(2) = -1 + 4 = 3\end{aligned}$$

ب

ابتدا با توجه به $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ داریم: $D_{f+g} = \{x | x \geq 0\}$ ، از طرفی چون f و g دو تابع خطی هستند پس $f + g$ نیز خطی است و با توجه به سه نقطه قسمت (الف) داریم:



۲۰۳ با توجه به نمودار خواهیم داشت:

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = 2x - 1 + x + 3 = 3x + 2$$

$$f_4(x) = 2f_1(x) + f_2(x) = 2(2x - 1) - (x + 3) = 3x - 5$$

$$\Rightarrow f_5(x) = \frac{f_3(x)}{f_4(x)} = \frac{3x + 2}{3x - 5} \xrightarrow{x=4} \frac{3(4) + 2}{3(4) - 5} = \frac{14}{7} = 2$$

۲۰۴ ابتدا تابع هزینه کارخانه‌های A و B را جداگانه محاسبه کرده و سپس هزینه‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم تا تابع هزینه کل شرکت حاصل شود:

$$A \text{ هزینه کارخانه } : C_1(x) = \underbrace{R_1(x)}_{\text{درآمد}} - \underbrace{P_1(x)}_{\text{سود}} = (-x^2 + 8x) - (-x^2 + 4x - 3) = 4x + 3$$

$$B \text{ هزینه کارخانه } : C_2(x) = R_2(x) - P_2(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 6x\right) - \left(-\frac{x^2}{2} + 5x - \frac{9}{2}\right) = x + \frac{9}{2}$$

بنابراین:

$$\text{هزینه کل شرکت} = \text{هزینه کارخانه } A + \text{هزینه کارخانه } B = 4x + 3 + x + \frac{9}{2} = 5x + 3 + 4,5 = 5x + 7,5$$

۲۰۵

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

۲۰۶ با توجه به نمودار مختصاتی دو تابع f و g ، دامنه مشترک این دو تابع عبارت است از: $x = 1, 3, 4$



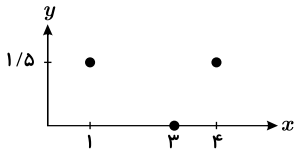
در نتیجه مقادیر $\frac{g}{f}$ را در این نقاط مشخص می‌کنیم.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(1, \frac{3}{2}\right) = (1, 1.5)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow (3, 0)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(4) = \frac{g(4)}{f(4)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(4, \frac{3}{2}\right) = (4, 1.5)$$

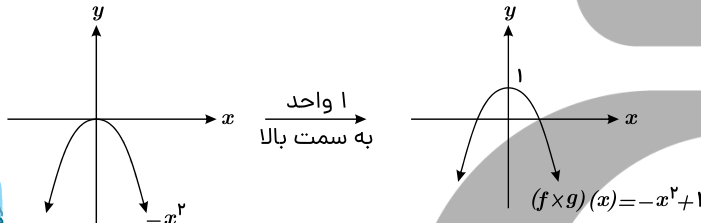
نقاط به‌دست‌آمده برای تابع $\frac{g}{f}$ را در نمودار مختصاتی نمایش می‌دهیم.



۲۰۷ برای رسم تابع $(f \times g)(x) = -x^2 + 1$ کافیت نمودار تابع $-x^2$ را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

با توجه به ضابطه‌های دو تابع f و g داریم:

$$f(x) = x - 1, D_f = \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = -x - 1, D_g = \mathbb{R}$$



$$\Rightarrow (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x - 1)(-x - 1) = -x^2 + 1$$

$$D_{f \times g} = \mathbb{R}$$

$$\frac{f}{g}(x) = x - 1 \rightarrow \frac{\cancel{f(x)}}{g(x)} = x - 1 \rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$$g(2) = 2 + 1 = 3$$

$$g(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g(2)}{(f + g)(1)} = \frac{3}{f(1) + g(1)} = \frac{3}{0 + 2} = \frac{3}{2}$$

۲۰۹ ضابطه تابع $(f - g)(x)$ در دامنه مشترک از تفریق ضابطه تابع g از تابع f به‌دست می‌آید؛ پس:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\Rightarrow 4x - 3 = x^2 + 1 - g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 + 1 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

۲۱۰ نکته: دامنه تابع $f + g$ برابر اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g است.

اشتراک $3 \leq x \leq 5$ و $-2 \leq x \leq 3$ به‌صورت $-1 \leq x \leq 3$ است. (می‌توانید از محورهای مختصات برای به‌دست آوردن اشتراک دامنه‌ها کمک بگیرید.)

۲۱۱ برای به‌دست آوردن ضابطه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، با داشتن ضابطه تابع f و g در دامنه قابل تعریف و $g(x) \neq 0$ کافیت ضابطه تابع f را بر g تقسیم کنیم.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

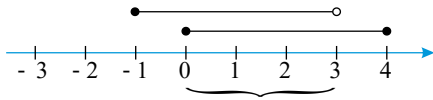
$$\Rightarrow x + 1 = \frac{x^2 - 1}{g(x)} \Rightarrow g(x)(x + 1) = x^2 - 1 \Rightarrow g(x) \cancel{(x + 1)} = (x - 1) \cancel{(x + 1)} \Rightarrow g(x) = x - 1$$



۲۱۲) (-1) یک عضو از دامنه مشترک تابع f و g است؛ پس $-1 \in D_{f-g}$ ، در نتیجه:

$$f(-1) = a + 1, g(-1) = 2a \\ \Rightarrow (f - g)(-1) = f(-1) - g(-1) = 2 \Rightarrow a + 1 - 2a = 2 \Rightarrow -a + 1 = 2 \Rightarrow a = -1$$

۲۱۳) دامنه مجموع، تفاضل و ضرب دو تابع برابر با اشتراک دامنه دو تابع است.



$$D_f \cap D_g = D_{f+g} = D_{f-g} = \{x | 0 \leq x < 3\}$$

$$x = f(0) = 0 - 1 = -1$$

۲۱۴) ابتدا مقدار $f(0)$ را از ضابطه پائینی حساب می‌کنیم.

$f(-1)$ از ضابطه پائینی f و $g(-1)$ از ضابطه بالایی f به دست می‌آید.

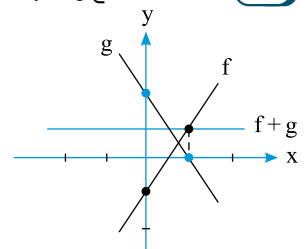
$$\Rightarrow (f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-1 - 1) + 3(-1 + 3) = -2 + 6 = 4$$

۲۱۵) ابتدا ضابطه تابع $f + g$ را حساب می‌کنیم.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 1 + 2 - 2x = 1 \text{ تابع ثابت}$$

$$f(x) = 2x - 1 \quad \frac{x}{y} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}$$

$$g(x) = 2 - 2x \quad \frac{x}{y} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$$



۲۱۶) الف

$$۱) f_1(x) = (g - f)(x) = g(x) - f(x) = \cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2} + x = x - 1$$

$$۲) f_2(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} \\ (x \neq -1, 1)$$

$$۳) f_3(x) = \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x} \\ (x \neq 0, 1)$$

ب) ابتدا مقدار $f_1(-2)$ ، $f_2(-2)$ و $f_3(-2)$ را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} f_1(-2) &= -2 - 1 = -3 \\ f_2(-2) &= \frac{-2}{-2+1} = 2 \\ f_3(-2) &= \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2f_1 + f_2 \times f_3)(-2) = 2f_1(-2) + f_2(-2) \times f_3(-2) = 2(-3) + (2) \times \left(\frac{1}{2}\right) = -6 + 1 = -5$$

۲۱۷)

x	1	0	-1
$f(x)$	1	0	-1
$g(x)$	0	-1	0
$h(x)$	0	0	0
$f(x) \times g(x)$	0	0	0

با توجه به جدول و تساوی ردیف $h(x)$ و $f(x) \times g(x)$ نتیجه می‌گیریم:

$$\text{نتیجه: } h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

۲۱۸)

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 \\ g(1) &= 2 \\ f(0) &= g(0) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{(3f + 2g)(1)}{(g \times f)(0)} = \frac{3f(1) + 2g(1)}{g(0) \times f(0)} = \frac{3(1) + 2(2)}{1 \times 1} = 7$$

۲۱۹) اضافه شدن

۲۲۰) تعداد کلمات در جمله و درصد کلمات دشوار



	۱۳۹۰	مهرماه ۱۳۹۳	دی ماه ۱۳۹۶
هزینه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها (برحسب هزار تومان)	۲۱۰	$\frac{۲۱۰ \times ۲۲۵}{۱۰۰} = ۴۷۲,۵۰$	$\frac{۲۱۰ \times ۲۷۲}{۱۰۰} = ۵۷۱,۲$
هزینه کل (برحسب هزار تومان)	۸۵۰	$\frac{۸۵۰ \times ۲۰۲}{۱۰۰} = ۱۷۱۷$	$\frac{۸۵۰ \times ۲۵۵}{۱۰۰} = ۲۱۶۷,۵$

۲۲۲ ابتدا نماتوپ هرکدام از اعضای خانواده را به دست می‌آوریم، سپس با استفاده از جدول زیر وضعیت هرکدام را مشخص می‌کنیم.

نماتوپ	رده سنی
۲۲	۱۹ - ۲۴
۲۳	۲۵ - ۳۴
۲۴	۳۵ - ۴۴
۲۵	۴۵ - ۵۴
۲۶	۵۵ - ۶۴
۲۷	به بالا

$$\text{برادر: } \frac{۸۵}{(۱,۸۳)^۲} \approx ۲۵,۴$$

$$\text{خواهر: } \frac{۵۳}{(۱,۷۷)^۲} \approx ۱۸,۳$$

$$\text{مادر: } \frac{۶۰}{(۱,۶۵)^۲} \approx ۲۲,۰۳$$

$$\text{پدر: } \frac{۸۱}{(۱,۷۴)^۲} \approx ۲۶,۸$$

$$\text{صالح: } \frac{۶۲}{(۱,۷۷)^۲} = \frac{۶۲}{۳,۱۳۲۹} \approx ۱۹,۷۸$$

در همه موارد با توجه به جدول با نماتوپ مناسب اختلاف وجود دارد و می‌توان مشخص کرد که این اختلاف کم یا زیاد است. برای صالح ۱۷ ساله در جدول نماتوپ مناسب نوشته نشده است.

۲۲۳ طبق تعریف خط فقر بین‌المللی، حداقل درآمد روزانه هر فرد باید برابر ۱,۲۵ دلار باشد تا زیر خط فقر نباشد. (یک ماه را ۳۰ روز در نظر می‌گیریم)

$$\text{دلار } ۲۲۵ = ۱,۲۵ \times ۳۰ \times ۶$$

حداقل درآمد یک خانواده ۶ نفره باید ۲۲۵ دلار در ماه باشد تا زیر خط فقر بین‌المللی نباشد.

۲۲۴ نرخ بیکاری برابر است با: نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال جامعه؛ در این صورت داریم:

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{۲۴۰۰۰۰}{۳۰۰۰۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۰,۸ \times ۱۰۰ = ۸\%$$

۲۲۵

$$\frac{۶-۳}{۶} \times ۱۰۰ = \frac{۳}{۶} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ = ۵۰\%$$

در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ شاخص پوسیدگی دندان ۵۰٪ کاهش داشته است.

۲۲۶ الف) شاخص، یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می‌دهد.

ب) متوسط مبلغ پرداخت‌شده از سوی مصرف‌کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمات در طول یک‌سال است. این شاخص، تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

۲۲۷

برای به دست آوردن میانگین درآمد افراد جامعه، مجموع درآمد ماهیانه خانوارها را بر تعداد اعضای همه خانواده‌ها تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱۵۰۰ + ۸۰۰ + ۹۰۰ + ۱۲۰۰ + ۱۰۰۰}{۳ + ۲ + ۲ + ۳ + ۲} = \frac{۵۴۰۰}{۱۲} = ۴۵۰$$

برای به دست آوردن خط فقر به روش نصف میانگین، کفایت میانگین به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم.

$$\text{هزار تومان } ۲۲۵ = ۴۵۰ \div ۲$$

۲۲۸ شاخص پایه آموزش از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} [۰,۴ \times (\text{میانگین تعداد کلمه در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] &= \text{شاخص پایه آموزش} \\ [۰,۴ \times (۱۹ \times ۰,۴)] &= [۷,۶] = ۷ \end{aligned}$$

این کتاب، مناسب دانش‌آموزان پایه هفتم است.

۲۲۹ شاخص پایه آموزش از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} [۰,۴ \times (\text{میانگین تعداد کلمه در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] &= \text{شاخص پایه آموزش} \\ [۰,۴ \times (۲۸ \times ۰,۴)] &= [۱۱,۲] = ۱۱ \end{aligned}$$

این کتاب، مناسب دانش‌آموزان پایه یازدهم است.

۲۳۰ الف) نرخ بیکاری

۲۳۱ شاخص توده بدنی (BMI) برابر است با: نسبت وزن برحسب کیلوگرم بر مجذور قد برحسب متر

$$\text{شاخص توده بدنی} = \frac{\text{وزن (kg)}}{\text{مجذور قد (m)}}$$



متر ۱٫۸ = ۱۸۰ سانتی‌متر

$$BMI = \frac{90}{(1.8)^2} = \frac{90}{3.24} \approx 27.77$$

این شاخص، تحولات قیمت را بر مبنای سال پایه نشان می‌دهد. (۲۳۲)

شاخص بهای کالاها و خدمات براساس تعداد زیادی (۳۰۰ نوع کالا و خوراکی و خدمات) متغیر محاسبه می‌شود. (۲۳۳)

شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد. (۲۳۴)

در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات، محور طول‌ها نشان‌دهنده سال و محور عرض‌ها نشان‌دهنده عدد شاخص است. (۲۳۵)

الف) تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را تورم می‌نامند. (۲۳۶)

ب) نرخ بیکاری عبارت است از: نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال

ج) بیکار به فردی بالای ۱۶ سال می‌گویند که به‌طور موقت بیکار شده یا در جست‌وجوی شغل یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخصی باشد.

در سال ۱۳۹۶ خط فقر بین‌المللی برای هر نفر در یک روز برابر ۱٫۲۵ دلار تعریف شده است. (۲۳۷)

برای ۴ نفر: $1.25 \times 4 = 5$

برای یک ماه سی‌روزه: $5 \times 30 = 150$

یک خانواده ۴ نفره با حداقل درآمد ۱۵۰ دلار در یک ماه، زیر خط فقر بین‌المللی قرار نمی‌گیرد.

خط فقر بین‌المللی توسط بانک جهانی در سال جاری حدود چهار هزار تومان (۱٫۲۵ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است. (۲۳۸)

(۲۳۹)

الف)

$$1400 = 1200 + 200 = \text{افراد شاغل} + \text{افراد جویای کار} = \text{جمعیت فعال}$$

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100 = \frac{200}{1400} \times 100 \approx 14.28$$

ب)

x تعداد بیکاران با نرخ بیکاری ۵ درصد است:

$$5 = \frac{x}{1400} \times 100 \Rightarrow 5 = \frac{x}{14} \Rightarrow x = 70$$

برای اینکه نرخ بیکاری به ۵٪ کاهش پیدا کند، $130 = 200 - 70 = 130$ شغل باید ایجاد شود.

(۲۴۰)

$$\frac{500 \times 150}{100} = 750 \text{ هزار تومان}$$

$$\frac{250 \times 262}{100} = 655 \text{ هزار تومان}$$

الف)

(۲۴۱)

الف)

$$11 = [11/2] = [0.4 \times 28] = [0.4 \times (8 + 20)] = [11/2] = 11$$

این کتاب، مناسب دانش‌آموزان پایه یازدهم است.

این کتاب، مناسب دانش‌آموزانی است که پایه یازدهم را به پایان رسانده‌اند.

ب)

استفاده از این شاخص ساده است. با این حال، فرض می‌کند که کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی‌تر باعث سخت‌تر شدن متن می‌شوند اما یک نویسنده چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث ساده‌تر شدن متن شود.

پ)

۱- تعداد کلمات در هر جمله ۲- درصد کلمات دشوار

(۲۴۲)

الف) امکان مقایسه کشورها

ب) قدرت خرید

پ) نسبت جمعیت بیکار - جمعیت فعال

ت) ۱۸٫۳۳ - کمبود وزن

(۲۴۳)

الف) شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی

ب) خط فقر



پ تورم

ت نرخ بیکاری

۲۴۴

الف

هزینه پوشاک	شاخص	
۲۰۰	۸۰	شهریور ۸۹
x	۲۷۳	بهمن ۹۳

$$\rightarrow x = \frac{200 \times 273}{80} = 682,5$$

هزینه پوشاک	شاخص	
۲۰۰	۸۰	شهریور ۸۹
y	۲۸۵	شهریور ۹۴

$$\rightarrow y = 712,54$$

$$\text{نرخ تورم} = \frac{249 - 228}{228} \times 100 = 9\%$$

ب

پ بهای خوراکی و آشامیدنی‌ها در سال ۹۴ (طی خردادماه تا شهریور) کاهش یافته است.

۲۴۵

الف هیچ خانواده

ب خط فقر بین‌المللی برای هر نفر ۱,۲۵ دلار آمریکا است که برای ۳ نفر برابر ۳,۷۵ دلار در روز و در ماه ۱۱۲,۵ دلار است.

پ با دلار ۳ هزار تومان خط فقر برای خانوار سه‌نفری ۳,۳۷۵,۰۰۰ تومان است.

ت با توجه به خط فقر بین‌المللی و دلار برحسب ۳ هزار تومان باید ۱,۳۷۵,۰۰۰ تومان برای ۳ نفر یارانه تعلق بگیرد.

ث زمانی که درآمد تعداد کمی خانوار خیلی بالاتر از درآمد جامعه باشد (داده دورافتاده باشیم) آنگاه خط فقر برحسب میانه معتبرتر است و خط فقر بر حسب میانگین گمراه‌کننده است.

۲۴۶ ابتدا خط فقر را محاسبه می‌کنیم: (خط فقر = نصف میانگین درآمد ماهیانه افراد جامعه) میانگین درآمد اعضای خانواده‌های ۱ تا ۴ به‌صورت زیر است:

خانواده	میانگین درآمد هر فرد از خانواده
۱	۵۰۰ هزار تومان
۲	۲۰۰ هزار تومان
۳	۱۱۰ هزار تومان
۴	۸۰ هزار تومان

میانگین درآمد ماهیانه افراد جامعه:

$$\frac{2 + 1,4 + 2,2 + 2,4}{4 + 7 + 2 + 3} = \frac{8}{16} = 0,5 \text{ میلیون تومان}$$

$$\text{هزار تومان} = 250 = 0,5 \text{ میلیون تومان} \times 500 = \frac{0,5}{2} \text{ خط فقر}$$

بنابراین خط فقر ۲۵۰۰۰ تومان است و فقط درآمد افراد خانواده شماره ۲ کمتر از نصف میانگین درآمد ماهیانه افراد (۲۵۰ هزار تومان) است. جهت رسیدن به خط فقر، دولت ماهیانه باید به‌ازای هر نفر ۵ هزار تومان به این خانواده بپردازد.

$$7 \times 50000 = 350000 \text{ تومان}$$

پس دولت باید ۳۵۰۰۰۰ تومان به این خانواده بپردازد.

۲۴۷

$$\text{هزار تومان} = 600 = 2 \times 300 = \frac{600}{2} \Rightarrow \frac{300}{2} = 150 \text{ میانه} \Rightarrow \frac{150}{2} = 75 \text{ خط فقر}$$

$$\text{هزار تومان} = 200 = \frac{600}{3} = k \Rightarrow 3k = 600 \Rightarrow k = 200 \text{ میانه (چارک دوم) با توجه به نمودار جعبه‌ای}$$

$$\text{هزار تومان} = 500 = 2 \times (200) + 100 = 2k + 100 = 3k + 100 = Q_3 - Q_1 \text{ دامنه میان چارکی}$$

نکته: برای به‌دست آوردن شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

۲۴۸

$$100 \times \frac{\text{مجموع هزینه‌های سه کالا در سال موردنظر}}{\text{مجموع هزینه‌های سه کالا در سال پایه}} = \text{شاخص بهای کالا و خدمات}$$



$$\text{شاخص بهای دو کالا} = \frac{800 \times 10 + 1500 \times 20 + 900 \times 10}{600 \times 10 + 1200 \times 20 + 800 \times 10} \times 100 = \frac{8000 + 30000 + 9000}{6000 + 24000 + 8000} \times 100$$

$$= \frac{47000}{38000} \times 100 \approx 123,68$$

۲۴۹) شاخص کالا در سال پایه همواره ۱۰۰ است.

$$97 = \frac{\text{قیمت کالا در سال ۹۲} \times \text{شاخص کالا در سال ۹۷}}{\text{شاخص کالا در سال پایه}}$$

$$25 = \frac{x \times 20}{100} \Rightarrow x = \frac{25 \times 100}{20} = 125 \quad (\text{شاخص گوشت در سال ۹۷})$$

$$\text{درصد تورم} = \frac{125 - 100}{100} \times 100 = \frac{25}{100} \times 100 = 25$$

۲۵۰) نکته: برای محاسبه شاخص سلامت یک شخص، وزن فرد را بر توان دوم قدش برحسب متر تقسیم می‌کنیم.

$$\text{متر } 1,8 = 180 \text{ سانتی‌متر}$$

$$\text{شاخص سلامت} = \frac{90}{(1,8)^2} = \frac{90}{3,24} \approx 27,77 \Rightarrow [27,77] = 27$$

۲۵۱) نکته: برای به دست آوردن شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$100 = \frac{\text{مجموع هزینه‌های کالا در سال مورد نظر}}{\text{مجموع هزینه‌های کالا در سال پایه}} \times \text{شاخص بهای کالا و خدمات}$$

با توجه به نکته بالا و قرار دادن متغیر x به جای قیمت کالا در سال پایه داریم:

$$\frac{900 \times 85}{85x} \times 100 = 120 \Rightarrow \frac{900}{x} \times 100 = 120 \Rightarrow \frac{90000}{x} = 120 \Rightarrow 120x = 90000 \Rightarrow x = 750 \text{ تومان}$$

۲۵۲) درصد نرخ بیکاری یک جامعه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\text{درصد نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

حال با توجه به نکته بالا و قرار دادن متغیر x به جای جمعیت بیکار داریم:

$$\frac{x}{6000000} \times 100 = 15\% \Rightarrow \frac{x}{6000000} = 15 \Rightarrow x = 15 \times 6000000 \Rightarrow x = 9000000$$

۲۵۳) تورم در طی چند سال با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\text{تورم} = \frac{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۰} - \text{شاخص بهای کالا در سال ۹۶}}{\text{شاخص بهای کالا در سال ۹۰}} \times 100$$

با توجه به رابطه بالا داریم:

$$\text{تورم} = \frac{186 - 122}{122} \times 100 = \frac{64}{122} \times 100 \approx 52,45\%$$

توجه شود که تورم همواره به درصد بیان می‌شود.

۲۵۴) به نظر می‌رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان‌دهنده زیاد شدن هزینه اقلام خوراکی و بالا رفتن تورم است.

۲۵۵)

$$\bar{x} = \frac{1000 + 3000 + 1000 + 4000 + 3000 + 3000 + 2000 + 1000 + 2000}{3 + 4 + 1 + 5 + 1 + 7 + 3 + 4 + 2 + 1}$$

$$= \frac{21000}{31} \approx 677,4 \Rightarrow \text{خط فقر} = \frac{\bar{x}}{2} = 338,7$$

۴ نفر ردیف ۸ و ۳ نفر ردیف ۱ زیر خط فقر هستند

$$338,7 = \text{خط فقر} \Rightarrow 666,6 = \text{داده شانزدهم} = \text{میانگین}$$

۴ نفر خانواده ردیف ۸ زیر خط فقر قرار دارند.



ردیف	درآمد ماهانه	تعداد اعضای خانوار	متوسط درآمد اعضای خانوار
۱	۱۰۰۰	۳	۳۳۳٫۳
۲	۳۰۰۰	۴	۷۵۰
۳	۱۰۰۰	۱	۱۰۰۰
۴	۴۰۰۰	۵	۸۰۰
۵	۳۰۰۰	۱	۳۰۰۰
۶	۳۰۰۰	۷	۴۲۸٫۵
۷	۲۰۰۰	۳	۶۶۶٫۶
۸	۱۰۰۰	۴	۲۵۰
۹	۲۰۰۰	۲	۱۰۰۰
۱۰	۱۰۰۰	۱	۱۰۰۰

۲۵۶ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. برای محاسبه خط فقر از روش نصف میانه استفاده می‌کنیم. از آنجا که در شهر A، ۱۵۰۰ داده وجود دارد، میانه آنها پس از مرتب کردن، میانگین دو داده ۷۵۰ و ۷۵۱ ام که برابر ۸۰۰ است و در شهر B، ۲۰۰۰ داده وجود دارد، میانه برابر میانگین دو داده ۱۰۰۰ و ۱۰۰۱ ام که ۲۰۰۰ است، در نتیجه:

$$A \text{ خط فقر روزانه شهر } = \frac{800}{2} = 4000$$

$$B \text{ خط فقر روزانه شهر } = \frac{20000}{2} = 10000$$

حال اگر نمونه‌گیری دو شهر را باهم در نظر بگیریم، از روش نصف میانه استفاده می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{3000 \times 100 + 4000 \times 100 + 7000 \times 200 + \dots + 3000 \times 100}{3500} = \frac{5590000}{3500} \approx 15971$$

و در هیچ‌کدام از حالت‌ها نمی‌توان مشخص کرد که چه تعداد از افراد مشمول دریافت یارانه می‌شوند، چون به اطلاعات همه اعضای جامعه دسترسی نداریم.

۲۵۷ ردیف اول تیر ماه ۱۳۹۰:

$$\frac{110 \times 97}{43} \approx 248,14$$

ردیف اول آبان ماه ۱۳۹۵:

$$\frac{110 \times 232}{47} \approx 542,98$$

ردیف دوم تیر ماه ۱۳۹۰:

$$\frac{80 \times 97}{23} \approx 337,39$$

ردیف دوم آبان ماه ۱۳۹۵:

$$\frac{80 \times 132}{27} \approx 391,11$$

۲۵۸

$$\text{آرمین: } \frac{50}{(1,8)^2} \approx 15,4 \text{ (کمبود وزن شدید)}$$

$$\text{فرزاد: } \frac{76}{(1,65)^2} \approx 28 \text{ (اضافه وزن)}$$

$$\text{مهران: } \frac{70}{(1,7)^2} \approx 24,2 \text{ (عادی)}$$

۲۵۹

$$\frac{176}{100} \mid x \Rightarrow x \approx 146960 \text{ هزار تومان}$$

۲۶۰ ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{10 + 13 + 15 + 17 + 19 + 22}{6} = 16$$

انحراف معیار را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(10-16)^2 + (13-16)^2 + (15-16)^2 + (17-16)^2 + (19-16)^2 + (22-16)^2}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{36 + 9 + 1 + 1 + 9 + 36}{6}} = \sqrt{\frac{92}{6}} \approx \sqrt{15,3} \approx 3,9$$



روزهای هفته را به ترتیب شماره گذاری می‌کنیم. شنبه را برابر ۱ و یکشنبه را برابر ۲ و ... و جمعه را برابر ۷ در نظر می‌گیریم.

برای تخمین زدن تعداد بطری‌های فروخته شده در روز یکشنبه ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه (۱ و ۸) و (۳ و ۱۳) را مشخص می‌کنیم و مقدار $x = ۲$ قرار می‌دهیم؛ داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{۱۳ - ۸}{۳ - ۱} = \frac{۵}{۲} = ۲,۵$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب}=۲,۵} \Rightarrow y = ۲,۵x + b \xrightarrow{(۱,۸)} ۸ = ۲,۵ \times ۱ + b$$

$$\Rightarrow b = ۵,۵ \Rightarrow y = ۲,۵x + ۵,۵ \xrightarrow{x=۲} y = ۲,۵ \times ۲ + ۵,۵ \Rightarrow y = ۱۰,۵$$

برای تخمین تعداد بطری‌های فروخته شده در روز سه‌شنبه، معادله خط گذرنده از دو نقطه (۳ و ۱۳) و (۵ و ۱۶) را به دست می‌آوریم و مقدار $x = ۴$ قرار می‌دهیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{۱۶ - ۱۳}{۵ - ۳} = \frac{۳}{۲} = ۱,۵$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب}=۱,۵} y = ۱,۵x + b \xrightarrow{(۳,۱۳)} ۱۳ = ۱,۵ \times ۳ + b$$

$$\Rightarrow b = ۸,۵ \Rightarrow y = ۱,۵x + ۸,۵ \xrightarrow{x=۴} y = ۱,۵ \times ۴ + ۸,۵ = ۶ + ۸,۵ = ۱۴,۵$$

برای تخمین تعداد بطری‌های فروخته شده در روز پنج‌شنبه، معادله خط گذرنده از دو نقطه (۵ و ۱۶) و (۷ و ۲۵) را مشخص می‌کنیم و مقدار $x = ۶$ قرار می‌دهیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{۲۵ - ۱۶}{۷ - ۵} = \frac{۹}{۲} = ۴,۵$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب}=۴,۵} y = ۴,۵x + b \xrightarrow{(۵,۱۶)} ۱۶ = ۴,۵ \times ۵ + b$$

$$\Rightarrow ۱۶ = ۲۲,۵ + b \Rightarrow b = -۶,۵ \Rightarrow y = ۴,۵x - ۶,۵$$

$$\xrightarrow{x=۶} y = ۴,۵ \times ۶ - ۶,۵ = ۲۰,۵$$

$$\bar{x} = \frac{۱ + ۳ + ۵ + ۷}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

$$\bar{y} = \frac{۸ + ۱۳ + ۱۶ + ۲۵}{۴} = \frac{۶۲}{۴} = ۱۵,۵$$

با مشخص کردن معادله خط گذرنده از دو نقطه (۴ و ۱۵,۵) و (۷ و ۲۵) (نقطه میانگین و آخرین نقطه) تعداد بطری‌های فروخته شده در روز دوشنبه هفته بعد را برون‌یابی می‌کنیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{۲۵ - ۱۵,۵}{۷ - ۴} = \frac{۹,۵}{۳} = \frac{۹۵}{۳۰} = \frac{۱۹}{۶}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب}=\frac{۱۹}{۶}} y = \frac{۱۹}{۶}x + b \xrightarrow{(۷,۲۵)} ۲۵ = \frac{۱۹}{۶} \times ۷ + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{۱۷}{۶} \Rightarrow y = \frac{۱۹}{۶}x + \frac{۱۷}{۶} \xrightarrow{x=۱۰} y = \frac{۱۹}{۶} \times ۱۰ + \frac{۱۷}{۶} = \frac{۱۹۰ + ۱۷}{۶} = \frac{۲۰۷}{۶} = ۳۴,۵$$

نقاط را روی محور زیر مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:

برای تخمین تعداد سفارشات در ساعت ۹، ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه (۸ و ۵۰) و (۱۰ و ۹۰) را مشخص می‌کنیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{۹۰ - ۵۰}{۱۰ - ۸} = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب}=۲۰} y = ۲۰x + b \xrightarrow{(۸,۵۰)} ۵۰ = ۲۰ \times ۸ + b$$

$$\Rightarrow ۵۰ = ۱۶۰ + b \Rightarrow b = -۱۱۰ \Rightarrow y = ۲۰x - ۱۱۰$$

حال با قرار دادن $x = ۹$ در معادله خط به دست آمده تعداد سفارشات در ساعت ۹ را تخمین می‌زنیم:

$$y = ۲۰x - ۱۱۰ \xrightarrow{x=۹} y = ۲۰ \times ۹ - ۱۱۰ = ۷۰$$

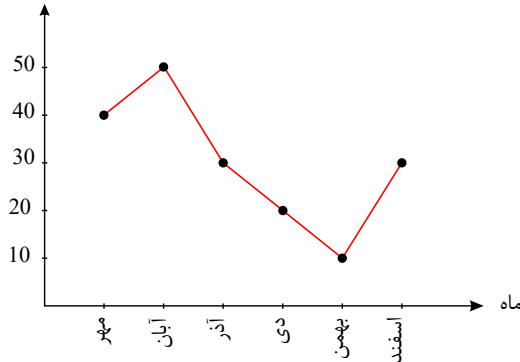


زمان ۲۶۴

درون‌یابی خطی ۲۶۵

۲۶۶

میزان اینترنت مصرفی



۲۶۷

خطای درون‌یابی برابر قدرمطلق تفاضل مقدار واقعی از مقدار به‌دست‌آمده از درون‌یابی است. در نتیجه، اگر مقدار واقعی را با x نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$|x - ۴۲۰۰| = ۵۰۰$$

با توجه به رابطه بالا مقدار واقعی می‌تواند برابر ۳۷۰۰ یا ۴۷۰۰ باشد.

نمودار «ب» ۲۶۸

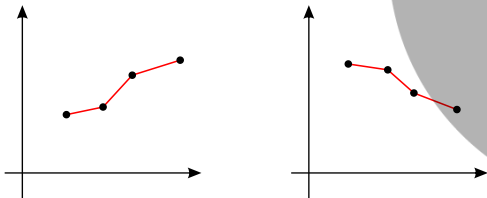
در نمودار سری زمانی که داده‌ها به‌طور یکنواخت افزایش یا کاهش داشته باشند، درون‌یابی و برون‌یابی مناسب‌تری انجام می‌گیرد.

قسمت «پ» ۲۶۹

سری زمانی، مجموعه داده‌هایی است که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می‌شوند.

در قسمت «ب» داده‌ها به‌صورت منظم (هر ساعت) گردآوری می‌شوند اما در قسمت (الف) مشخص نشده که ساعات به‌طور منظم است یا نه.

در نمودارهای زیر، درون‌یابی و برون‌یابی بهتری امکان‌پذیر است، چون به‌طور یکنواخت کاهش یا افزایش یافته‌اند و تغییرات ناگهانی ندارند. ۲۷۰



قسمت (الف) سری زمانی است، چون داده‌ها با فواصل زمانی منظم گردآوری شده است. ۲۷۱

(ب) سری زمانی است، چون داده‌ها در فواصل زمانی منظم گردآوری شده است.

(ج) سری زمانی نیست.

(«سری زمانی» مجموعه‌ای از داده‌های آماری است که در فواصل زمانی مساوی و منظمی جمع‌آوری شده باشد).

۲۷۲

الف

شهر (ا):

$$\text{مجموع} = ۱۵ + ۲۰ + ۳۰ + ۳۵ + ۳۰ + ۳۰ = ۱۶۰$$

$$\bar{x} = \frac{۱۶۰}{۶} \approx ۲۶,۷$$

انحراف معیار (σ) برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(۱۵ - ۲۶,۷)^2 + (۲۰ - ۲۶,۷)^2 + (۳۰ - ۲۶,۷)^2 + (۳۵ - ۲۶,۷)^2 + (۳۰ - ۲۶,۷)^2 + (۳۰ - ۲۶,۷)^2}{۶}} \\ &= \sqrt{\frac{۱۳۶,۸۹ + ۴۴,۸۹ + ۱۰,۸۹ + ۶۸,۸۹ + ۱۰,۸۹ + ۱۰,۸۹}{۶}} \\ &= \sqrt{\frac{۲۸۳,۳۴}{۶}} \approx \sqrt{۴۷,۲۲} \approx ۶,۸۷ \end{aligned}$$



شهر (ب):

$$230 + 170 + 150 + 130 + 110 + 110 = 900$$

$$(\bar{x}) = \frac{900}{6} \approx 150$$

انحراف معیار (δ) برابر است با:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(230 - 150)^2 + (170 - 150)^2 + (150 - 150)^2 + (130 - 150)^2 + (110 - 150)^2 + (110 - 150)^2}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{6400 + 400 + 0 + 400 + 1600 + 1600}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{10400}{6}} \approx \sqrt{1733.33} \approx 41.63 \end{aligned}$$

شهر (آ)	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر (ب)	230	170	150	130	110	110	900	150	41.63
شهر (آ)	15	20	30	35	30	30	160	26.7	6.87

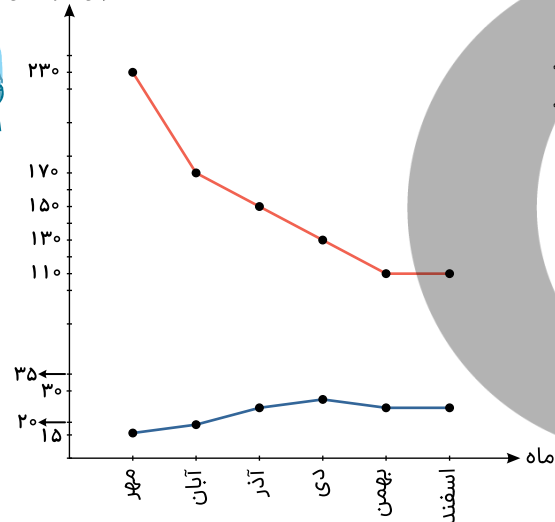
ب

در شهر (ب) میانگین بارندگی بیشتر و همچنین پراکندگی داده‌ها بیشتر است.

پ

نمودار پراکنش‌نگاشت دو شهر «آ» و «ب»:

میزان بارندگی



نمودار آبی: شهر «آ»

نمودار قرمز: شهر «ب»

ت شهر آ:

$$\text{میزان بارندگی در پاییز: } 15 + 20 + 30 = 65$$

$$\text{میزان بارندگی در زمستان: } 35 + 30 + 30 = 95$$

$$\text{میزان بارندگی در پاییز به زمستان: } \frac{65}{95} = \frac{13}{19}$$

شهر ب:

$$\text{میزان بارندگی در پاییز: } 230 + 170 + 150 = 550$$

$$\text{میزان بارندگی در زمستان: } 130 + 110 + 110 = 350$$

$$\text{میزان بارندگی در پاییز به زمستان: } \frac{550}{350} = \frac{11}{7}$$

در شهر «ب» نسبت میزان بارندگی در پاییز به زمستان بیشتر است.

۲۷۳

الف

برای شهر «آ» زمستان و برای شهر «ب» پاییز

ب

تقریباً متوسط دمای دو شهر با هم برابرند، خیر.

۲۷۴



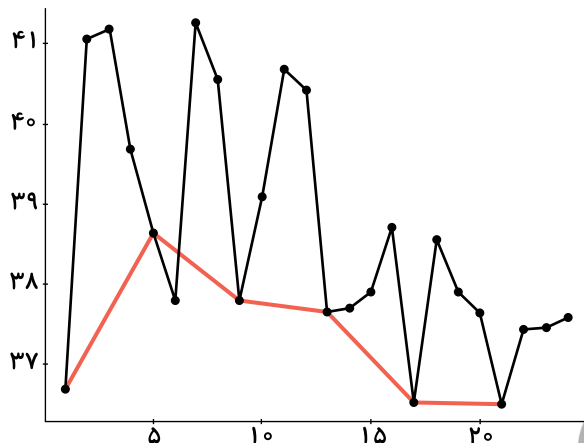
الف زمان سپری شده ۶ روز است و تعداد داده‌های ثبت شده ۲۴ تا است، پس $\frac{24}{6} = 4$ (بار) در روز ثبت شده است.

ب کمتر از ۳۷ درجه

پ روز ششم

ت

۳ در میان، نقاط را به هم وصل می‌کنیم:



۲۷۵

الف تقریباً برابر ۳۷٫۶ درجه

ب در ابتدای صبح کم بوده است، سپس افزایش یافته و در انتها باز کاهش یافته است.

در اوایل روز پایین است در اواسط روز افزایش یافته و در اواخر شب دوباره پایین آمده است.

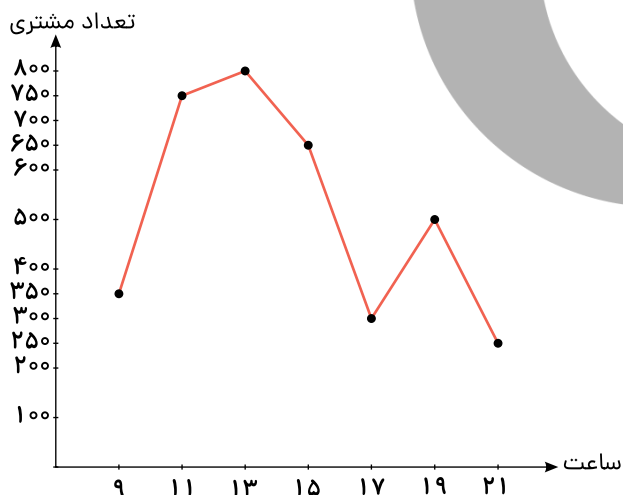
پ بله

ت تناوبی است.

۲۷۶

الف

نقاط را روی صفحه محورهاهای زیر مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:



ب در نمودار (ت)، چون یکنواخت است و حتی اگر تعداد مشتری‌ها از الگوی نمودار (ت) تبعیت نکند، خط‌های تخمین از سایر نمودارها احتمالاً کمتر است.

پ نمودار «ت» واقعی‌تر است، چون یکنواخت است.

۲۷۷

الف

معادله خط گذرنده از دو نقطه را می‌نویسیم:

$$\text{شیب خط} = \frac{750 - 350}{11 - 9} = \frac{400}{2} = 200$$

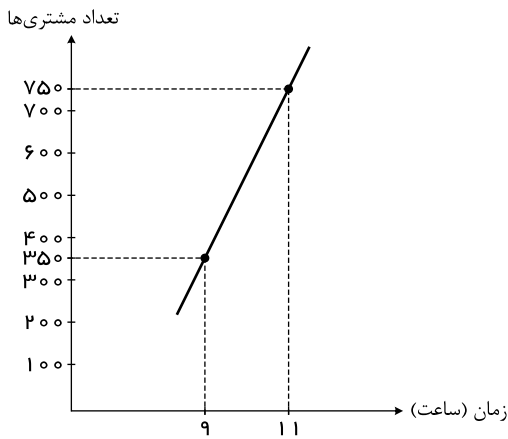
$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب} = 200} y = 200x + b \xrightarrow{(9, 350)} 350 = 200 \times 9 + b \Rightarrow 350 = 1800 + b \Rightarrow b = -1450$$

$$\Rightarrow y = 200x - 1450$$



ب

دو نقطه داده شده را روی محورهای مختصات مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:



پ

به ازای $x = 10$ مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$y = 200x - 1450 \xrightarrow{x=10} y = 200 \times 10 - 1450 = 550$$

ت نمودار «ت»

ث

$$12 \text{ ساعت درونیابی} = |850 - 780| = |70| = 70$$

$$14 \text{ ساعت درونیابی} = |680 - 650| = |30| = 30$$

$$16 \text{ ساعت درونیابی} = |480 - 400| = |80| = 80$$

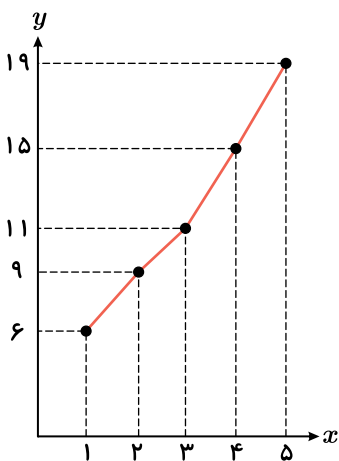
$$18 \text{ ساعت درونیابی} = |350 - 350| = |0| = 0$$

$$20 \text{ ساعت درونیابی} = |430 - 350| = |80| = 80$$

۲۷۸

الف

نقاط را روی محورهای زیر مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:



برای حدس فروش در سال هفتم نیاز است که معادله خط برون‌یابی را بنویسیم که با توجه به قسمت‌های بعد مسئله، مقدار $y = 26$ به دست می‌آید.

ب

پ

$$\bar{x} : \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3 \text{ و } \bar{y} = \frac{6+9+11+15+19}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

نقطه میانگین برابر است با: (۳ و ۱۲)

ت

(۳، ۱۲) و (۵، ۱۹)

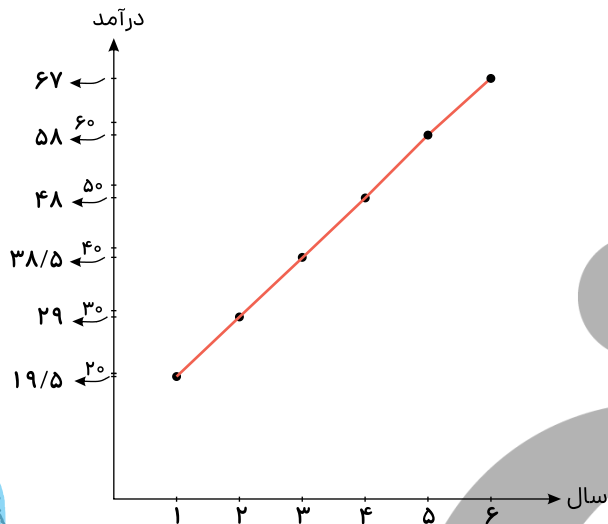


$$\text{شیب خط} : \frac{19 - 12}{5 - 3} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب: } 3,5} y = 3,5x + b \xrightarrow{(3, 12)} 12 = 3,5 \times 3 + b \Rightarrow b = 1,5$$

$$y = 3,5x + 1,5$$

$$y = 3,5x + 1,5 \xrightarrow{x=6} y = 3,5 \times 6 + 1,5 = 21 + 1,5 = 22,5$$



$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{19,5 + 29 + 38,5 + 48 + 58 + 67}{6} = \frac{260}{6}$$

معادله خط گذرنده از نقطه میانگین و آخرین داده یعنی $(\frac{21}{6}, \frac{260}{6})$ و $(6, 67)$ را مشخص می‌کنیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{67 - \frac{260}{6}}{6 - \frac{21}{6}} = \frac{\frac{402}{6} - \frac{260}{6}}{\frac{36}{6} - \frac{21}{6}} = \frac{142}{15}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب} = \frac{142}{15}} y = \frac{142}{15}x + b \xrightarrow{(6, 67)} 67 = \frac{142}{15} \times 6 + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{153}{15} \Rightarrow y = \frac{142}{15}x + \frac{153}{15}$$

$$\xrightarrow{x=7} y = \frac{142}{15} \times 7 + \frac{153}{15} = \frac{1147}{15} \approx 76,47$$

ث

بله

۲۷۹

الف

ب

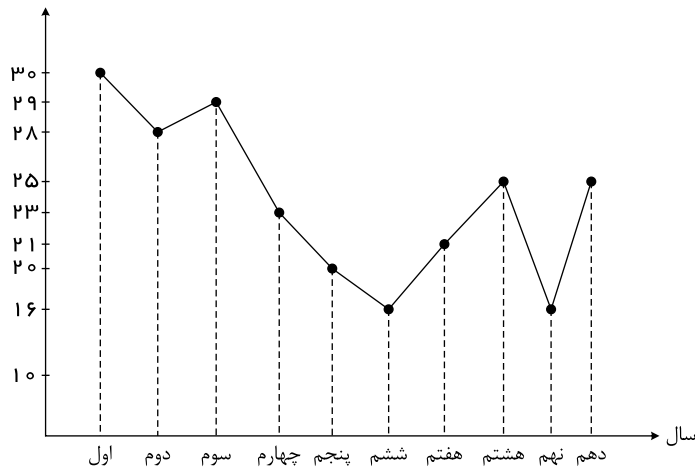
۲۸۰

الف

نقاط را روی محور زیر مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:



تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر



ب

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{10} = \frac{55}{10} = 5,5$$

$$\bar{y} = \frac{30 + 28 + 29 + 23 + 20 + 16 + 21 + 25 + 16 + 21}{10} = \frac{229}{10} = 22,9$$

نقطه میانگین داده‌ها برابر است با: (۵,۵ و ۲۲,۹)

پ

معادله خط گذرنده از دو نقطه (۵,۵ و ۲۲,۹) و (۱۰ و ۲۱) را مشخص می‌کنیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{22,9 - 21}{5,5 - 10} = \frac{1,9}{-4,5} \approx -0,4$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب} = -0,4} \Rightarrow y = -0,4x + b \xrightarrow{(10 \text{ و } 21)} 21 = -0,4 \times 10 + b$$

$$\Rightarrow 21 = -4 + b \Rightarrow b = 25 \Rightarrow y = -0,4x + 25$$

$$y = -0,4x + 25 \xrightarrow{x=11} y = -0,4 \times 11 + 25$$

$$\Rightarrow y = -4,4 + 25 = 20,6$$

$$|25 - 20,6| = |4,4| = 4,4$$

ت

ث

خطای برون‌یابی برابر است با:

۲۸۱

الف

با توجه به نمودار، تراز این دانش‌آموز در ماه‌های دی و بهمن و اسفند به صورت زیر است:

۷۰۰۰: تراز اسفند ، ۵۰۰۰: تراز بهمن ، ۴۰۰۰: تراز دی
معادله خط گذرنده از دو نقطه (۴ و ۴۰۰۰) و (۶ و ۷۰۰۰) را مشخص می‌کنیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{7000 - 4000}{6 - 4} = \frac{3000}{2} = 1500$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب} = 1500} y = 1500x + b \xrightarrow{(4 \text{ و } 4000)} 4000 = 1500 \times 4 + b$$

$$\Rightarrow 4000 = 6000 + b \Rightarrow b = 4000 - 6000 = -2000 \Rightarrow y = 1500x - 2000$$

حال با قرار دادن $x = 5$ در معادله خط به‌دست‌آمده تراز این دانش‌آموز در بهمن‌ماه را به روش درون‌یابی خطی به دست می‌آوریم.

$$y = 1500x - 2000 \xrightarrow{x=5} y = 1500 \times 5 - 2000 \Rightarrow y = 5500$$

ب

خطای درون‌یابی برابر قدرمطلق تفاضل مقدار واقعی از مقدار به‌دست‌آمده از درون‌یابی خطی است:

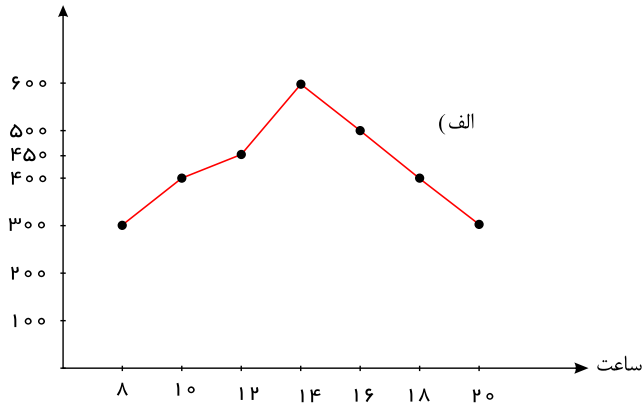
$$|5000 - 5500| = |-500| = 500$$

۲۸۲

الف



تعداد بازدیدکنندگان



ب معادله خط گذرنده از دو نقطه (۱۲ و ۴۵۰) و (۱۴ و ۶۰۰) را مشخص می‌کنیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{600 - 450}{14 - 12} = \frac{150}{2} = 75$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب} = 75} y = 75x + b \xrightarrow{(12, 450)} 450 = 12 \times 75 + b \Rightarrow 450 = 900 + b \Rightarrow b = 450 - 900 = -450 \Rightarrow y = 75x - 450$$

حال با قرار دادن $x = 13$ تعداد بازدیدکنندگان در ساعت ۱۳ را به روش درونیابی خطی تخمین می‌زنیم.

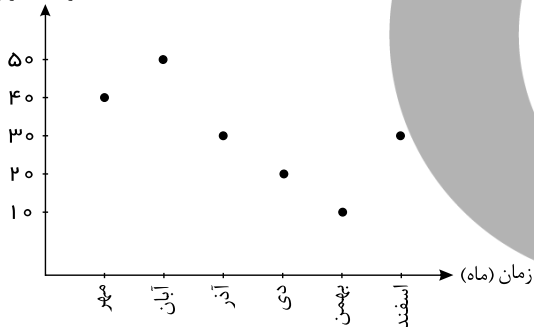
$$y = 75x - 450 \xrightarrow{x=13} y = 75 \times 13 - 450 = 975 - 450 = 525$$

۲۸۳

الف

نقاط را روی نمودار زیر مشخص می‌کنیم:

اینترنت مصرفی



ب

ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{40 + 50 + 30 + 20 + 10 + 30}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

انحراف معیار را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(40-30)^2 + (50-30)^2 + (30-30)^2 + (20-30)^2 + (10-30)^2 + (30-30)^2}{6}} \\ = \sqrt{\frac{100 + 400 + 0 + 100 + 400 + 0}{6}} = \sqrt{\frac{1000}{6}} \approx \sqrt{166.6} \approx 12.9$$

۲۸۴

الف

ب اگر سال ۱۳۱۶ را سال اول در نظر بگیریم، سال ۱۳۸۶ سال ۷۱ام است. در نتیجه، کافیت معادله خط گذرنده از دو نقطه (۱ و ۲۱٫۲) و (۷۱ و ۱۸٫۴) را به دست آوریم.

$$\text{شیب خط} = \frac{18.4 - 21.2}{71 - 1} = \frac{-2.8}{70} = \frac{-28}{700} = -\frac{4}{100}$$

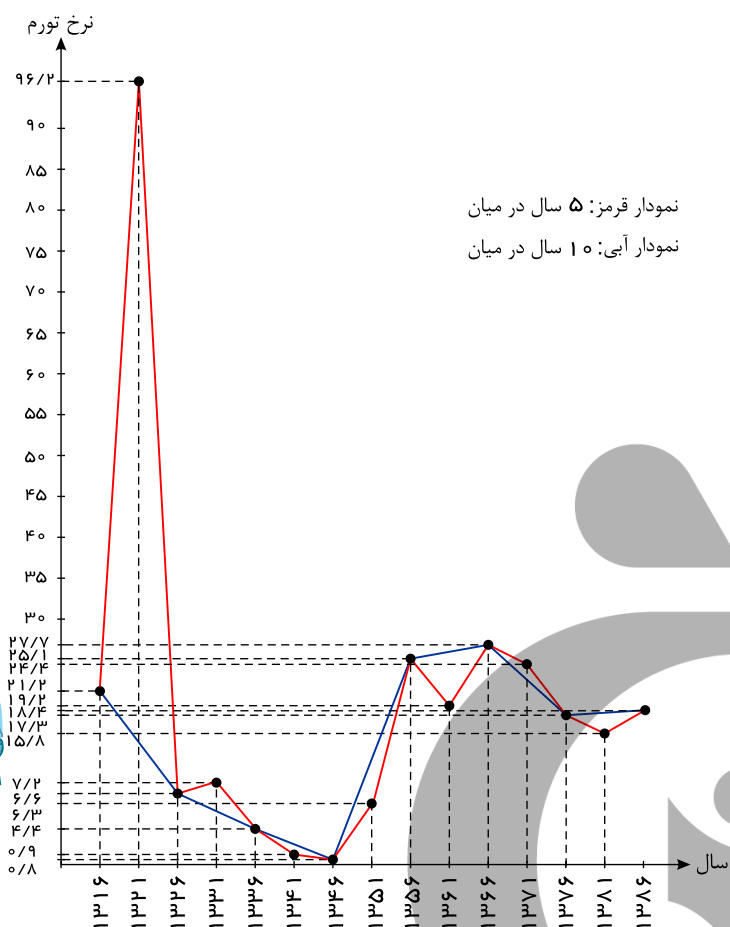


پ

$$y = mx + b \xrightarrow{m = -\frac{4}{100}} y = -\frac{4}{100}x + b \xrightarrow{(71, 18,4)} 18,4 = -\frac{4}{100} \times 71 + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{284}{100} + \frac{1840}{100} = \frac{2124}{100} \Rightarrow y = -\frac{4}{100}x + \frac{2124}{100}$$

معادله خط درونیابی نقاط



با توجه به معادله خط درونیابی که در قسمت «ب» مشخص کردیم $(y = -\frac{4}{100}x + \frac{2124}{100})$ داریم:

در سال ۱۳۲۱ (سال ششم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 6 + \frac{2124}{100} = \frac{-24 + 2124}{100} = \frac{2100}{100} = 21$$

$$E = |21 - 96.2| = 75.2$$

خطای درونیابی

در سال ۱۳۲۶ (سال یازدهم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 11 + \frac{2124}{100} = \frac{-44 + 2124}{100} = \frac{2080}{100} = 20.8$$

$$E = |20.8 - 6.3| = 14.5$$

خطای درونیابی

در سال ۱۳۳۱ (سال شانزدهم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 16 + \frac{2124}{100} = \frac{-64 + 2124}{100} = \frac{2060}{100} = 20.6$$

$$E = |20.6 - 7.2| = 13.4$$

خطای درونیابی

در سال ۱۳۳۶ (سال بیست و یکم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 21 + \frac{2124}{100} = \frac{-84 + 2124}{100} = \frac{2040}{100} = 20.4$$

$$E = |20.4 - 4.4| = 16$$

خطای درونیابی

در سال ۱۳۴۱ (سال بیست و ششم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 26 + \frac{2124}{100} = \frac{-104 + 2124}{100} = \frac{2020}{100} = 20.2$$

$$E = |20.2 - 0.9| = 19.3$$

خطای درونیابی

در سال ۱۳۴۶ (سال سی و یکم)



$$y = -\frac{4}{100} \times 31 + \frac{2124}{100} = \frac{-124 + 2124}{100} = \frac{2000}{100} = 20$$

$$E = |20 - 0,8| = 19,2$$

در سال ۱۳۵۱ (سال سی‌وششم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 36 + \frac{2124}{100} = \frac{-144 + 2124}{100} = \frac{1980}{100} = 19,8$$

$$E = |19,8 - 6,3| = 13,5$$

در سال ۱۳۵۶ (سال چهل‌ویکم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 41 + \frac{2124}{100} = \frac{-164 + 2124}{100} = \frac{1960}{100} = 19,6$$

$$E = |19,6 - 25,1| = 5,5$$

در سال ۱۳۶۱ (سال چهل‌وششم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 46 + \frac{2124}{100} = \frac{-184 + 2124}{100} = \frac{1940}{100} = 19,4$$

$$E = |19,4 - 19,2| = 0,2$$

در سال ۱۳۶۶ (سال پنجاه‌ویکم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 51 + \frac{2124}{100} = \frac{-204 + 2124}{100} = \frac{1920}{100} = 19,2$$

$$E = |19,2 - 27,7| = 8,5$$

در سال ۱۳۷۱ (سال پنجاه‌وششم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 56 + \frac{2124}{100} = \frac{-224 + 2124}{100} = \frac{1900}{100} = 19$$

$$E = |19 - 24,4| = 5,4$$

در سال ۱۳۷۶ (سال شصت‌ویکم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 61 + \frac{2124}{100} = \frac{-244 + 2124}{100} = \frac{1880}{100} = 18,8$$

$$E = |18,8 - 17,3| = 1,5$$

در سال ۱۳۸۱ (سال شصت‌وششم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 66 + \frac{2124}{100} = \frac{-264 + 2124}{100} = \frac{1860}{100} = 18,6$$

$$E = |18,6 - 15,8| = 2,8$$

در سال ۱۳۸۶ (سال هفتادویکم)

$$y = -\frac{4}{100} \times 71 + \frac{2124}{100} = \frac{-284 + 2124}{100} = \frac{1840}{100} = 18,4$$

$$E = |18,4 - 18,4| = 0$$

۲۸۵

الف درونیابی

ب برون‌یابی

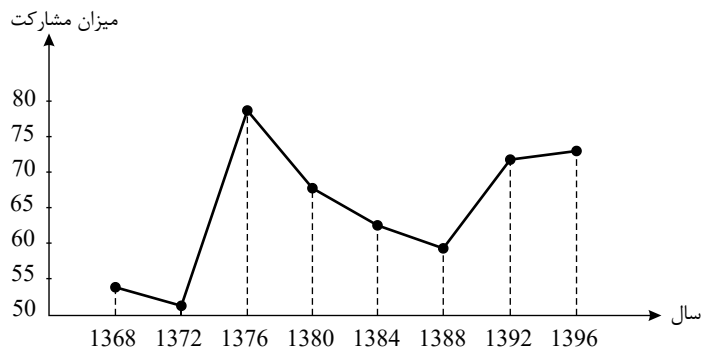
پ برون‌یابی

ت برون‌یابی

ث درونیابی (البته می‌توان قیمت میانگین مربوط به هر ماه را حساب کرد)

۲۸۶

الف نقاط را روی صفحه‌ی محورهای زیر مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:



بیشترین مشارکت در سال ۷۶ و کمترین مشارکت در سال ۷۲ بوده است.

ب
پ

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{521,3}{8} = 65,1625$$

۲۸۷
الف

به کمک نمودار داریم:

$$\text{میانگین صادرات} = \frac{\text{مجموع صادرات در ده سال}}{\text{تعداد سال}} = \frac{2510}{10} = 251$$

به‌طور متوسط، سالی ۲۵۱ میلیون دلار صادرات داشته است.

ب

به کمک نمودار داریم:

$$\frac{\text{صادرات ۳ سال آخر}}{\text{کل صادرات}} \times 100 = \frac{860}{2510} \times 100 \approx 34,26\%$$

پ

به کمک نمودار داریم:

مجموع صادرات ۵ سال اول = ۱۱۰۰

مجموع صادرات ۵ سال دوم = ۱۴۱۰

صادرات در ۵ سال دوم بیشتر بوده است. این کشور در ۵ سال دوم ۳۱۰ میلیون دلار صادرات بیشتری داشته است.

۲۸۸
الف

معادله خطی که از دو نقطه $(89, 12,4)$ و $(91, 30,5)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{30,5 - 12,4}{91 - 89} = \frac{18,1}{2} = 9,05$$

$$\text{معادله درونیابی: } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 30,5 = 9,05(x - 91) \Rightarrow y = 9,05x - 823,55 + 30,5 \Rightarrow y = 9,05x - 793,05$$

$$\text{نرخ تورم در سال ۹۰: } \xrightarrow{x=90} y = 9,05 \times (90) - 793,05 = 21,45$$

ب

$$E = |\text{مقدار واقعی} - \text{مقدار درونیابی}| = |21,45 - 21,5| = 0,05$$

ابتدا معادله خط برون‌یابی را می‌نویسیم: ۲۸۹

$$(a + 2, 16) \Rightarrow m = \frac{20 - 16}{10 - (a + 2)} = \frac{4}{8 - a} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 20 = \frac{4}{8 - a}(x - 10) \xrightarrow{x=11, y=24} 24 - 20 = \frac{4}{8 - a}(11 - 10)$$

$$\frac{4}{1} = \frac{4}{8 - a}$$

$$\cancel{4}(8 - a) = \cancel{4} \Rightarrow 8 - a = 1 \Rightarrow \boxed{7 = a}$$

$$x = 11 \text{ مقدار واقعی در } 3a \rightarrow 3 \times 7 = 21$$

$$\text{خطای برون‌یابی} = |24 - 21| = 3$$

۲۹۰ سری زمانی مجموعه داده‌هایی است که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می‌شوند.



بنابراین: الف) هست ب) نیست پ) هست ت) هست

۲۹۱) طبق نمودار متوجه می‌شویم که هر ۸ سال یک الگو تکرار می‌شود و در واقع هر ۸ سال یک بخش از نمودار تکرار می‌شود. با توجه به نمودار:

$$70 \xrightarrow{\text{تا}} 78, 78 \xrightarrow{\text{تا}} 86$$

$$92 - 8 = 84 \xrightarrow{\text{تعداد تصادفات}} 100$$

$$64 + 8 = 72 \xrightarrow{\text{تعداد تصادفات}} 100$$

$$\Rightarrow 100 - 100 = 0$$

۲۹۲) ساعت ۱۵:۷ در بازه ۷ تا ۱۱ قرار دارد پس ابتدا معادله خط بین $A(7, -2)$ و $B(11, 4)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{4 - (-2)}{11 - 7} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = mx + h \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + h$$

$$\xrightarrow{(7, -2)} -2 = \frac{3}{2} \times (7) + h \Rightarrow h = -2 - \frac{21}{2} \Rightarrow h = \frac{-25}{2}$$

ساعت ۱۵:۷ را به صورت $7\frac{1}{4}$ یا $\frac{29}{4}$ در معادله فوق قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{3}{2} \times \left(\frac{29}{4}\right) - \frac{25}{2} = \frac{87}{8} - \frac{25}{2} = \frac{87 - 100}{8} = \frac{-13}{8}$$

خطای درونیابی برابر است با:

$$\left| -0.5 - \left(-\frac{13}{8}\right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{13}{8} \right| = \left| \frac{9}{8} \right| = \frac{9}{8}$$

۲۹۳) ساعت ۹ بین بازه زمانی ۷ تا ۱۰ است با توجه به مختصات دو نقطه $A(7, 0)$ و $B(10, 10)$ داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 0}{10 - 7} = \frac{10}{3}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{10}{3}(x - 7) \xrightarrow{x=9} y = \frac{10}{3} \times 2 = \frac{20}{3} = 6.7 \text{ کیلوگرم}$$

۲۹۴) در نمودار (الف) نمودار سری زمانی در فواصل هر ۱۰ ساعت یکسان هستند پس دوره تناوب آن همان ۱۰ ساعت و در نمودار (ب) نمودار هر ۱۵ ساعت یکبار تکرار می‌شود پس دوره تناوب آن ۱۵ ساعت است.

۲۹۵)

$$m = \frac{24 - 2k + 2}{12 - 10} = \frac{26 - 2k}{2} = 13 - k$$

$$13 - k = 3 \Rightarrow k = 10$$

$$y - 24 = 3(x - 12) \Rightarrow y - 24 = 3x - 36 \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 12 \\ y = 3x + m \end{cases} \Rightarrow m = -12$$

$$k + m = 10 - 12 = -2$$

۲۹۶) نمودار سری زمانی که نوسانات زیادی داشته باشد. درونیابی و برون‌یابی خطی برای آنها مناسب نیست. بنابراین:

الف) مناسب است ب) مناسب است ج) مناسب نیست د) مناسب است

۲۹۷) خطای درونیابی برابر قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی از مقدار به دست آمده از روش درونیابی است.

$$| \text{مقدار تخمینی درونیابی} - \text{مقدار واقعی} | = \text{خطای درونیابی}$$

$$| 2500 - x | = 500 \Rightarrow \begin{cases} 2500 - x = 500 \Rightarrow x = 2000 \\ 2500 - x = -500 \Rightarrow x = 3000 \end{cases}$$

۲۹۸) معادله درونیابی بین نقاط $(2, 4)$ و $(4, 10)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 4}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 10 = 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x - 12 + 10 \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$a \xrightarrow{x=3} y = 3(3) - 2 = 7 \Rightarrow a = 7$$

برای به دست آوردن b ، ابتدا نقطه میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\text{میانگین زمان‌ها} = 3$$

$$\text{میانگین داده‌ها} = \frac{6 + 4 + 7 + 10 + 13}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

معادله برون‌یابی بین نقطه میانگین $(3, 8)$ و نقطه انتهایی $(5, 13)$ را می‌نویسیم:

$$m = \frac{13 - 8}{5 - 3} = \frac{5}{2} \Rightarrow y - 13 = \frac{5}{2}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{25}{2} + 13 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$$

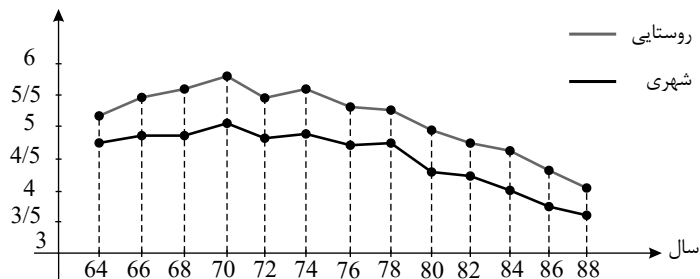


$$b \xrightarrow{x=6} b = \frac{5}{2}(6) + \frac{1}{2} = \frac{31}{2} \Rightarrow b = \frac{31}{2}$$

$$3a + 2b = 3(7) + 2\left(\frac{31}{2}\right) = 21 + 31 = 52$$

(الف) ۲۹۹

متوسط تعداد افراد



(ب) اولاً همواره متوسط تعداد افراد خانوارهای شهری از روستایی کمتر بوده است. ثانیاً از سال ۱۳۷۴ به بعد، هم در خانوارهای شهری و هم در روستایی میانگین تعداد افراد رو به کاهش نهاده است و خانواده‌ها خلوت‌تر شده‌اند.

۳۰۰ الف) بالاترین نرخ تورم (۳۴٫۷٪) در سال ۱۳۹۲ و بالاترین نرخ بیکاری (۱۳٫۵٪) در سال ۱۳۸۹ بوده است.

(ب) با توجه به نمودار دو متغیر، واضح است که نرخ بیکاری تغییرات کمتری داشته است.

(پ)

سال	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۲۵٫۴	۱۰٫۸	۱۲٫۴	۲۱٫۵	۳۰٫۵	۳۴٫۷	۱۵٫۶	۱۱٫۹
نرخ بیکاری	۱۰٫۴	۱۱٫۹	۱۳٫۵	۱۲٫۳	۱۲٫۱	۱۰٫۴	۱۰٫۶	۱۱
شاخص فلاکت	۳۵٫۸	۲۲٫۷	۲۵٫۹	۳۳٫۸	۴۲٫۶	۴۵٫۱	۲۶٫۲	۲۲٫۹

شاخص فلاکت

