



کانال مهمات شریف

✓ @SHARIF_IE

متغیر تصادفی ۴

- ۱-۷- متغیر تصادفی ۴
- ۲-۷- انواع مدل های توزیع ۴
- ۳-۷- توابع توزیع احتمال ۴
- ۴-۷- تابع جرم احتمال ۴
- ۵-۷- قوانین تابع جرم احتمال ۴
- ۶-۷- تابع توزیع تجمعی ۴
- ۷-۷- تابع مکمل توزیع تجمعی ۴
- ۸-۷- پارامتر های مدل احتمالاتی ۴
- ۹-۷- میانگین ۴
- ۱۰-۷- میانگین مجذور ۴
- ۱۱-۷- واریانس ۴
- ۱۲-۷- ضریب تغییرات ۴
- ۱۳-۷- ضریب چولگی ۴
- ۱۴-۷- قانون احتمال کل در متغیر تصادفی گسسته ۴
- ۱۵-۷- مدل های متداول توزیع گسسته ۴
- ۱۶-۷- توزیع برنولی ۴
- ۱۷-۷- پارامتر های توزیع برنولی ۴
- ۱۸-۷- توزیع دو جمله ای ۴
- ۱۹-۷- پارامتر های توزیع دو جمله ای ۴
- ۲۰-۷- توزیع هندسی ۴
- ۲۱-۷- پارامتر های توزیع هندسی ۴
- ۲۲-۷- توزیع پواسون ۴
- ۲۳-۷- پارامتر های توزیع پواسون ۴
- ۲۴-۷- تابع چگالی احتمال (پیوسته) ۴
- ۲۵-۷- قوانین تابع چگالی احتمال ۴
- ۲۶-۷- تابع توزیع تجمعی (پیوسته) ۴
- ۲۷-۷- قوانین تابع توزیع تجمعی ۴
- ۲۸-۷- تابع مکمل توزیع تجمعی (پیوسته) ۴
- ۲۹-۷- تابع معکوس توزیع تجمعی (پیوسته) ۴
- ۳۰-۷- میانگین تابع چگالی احتمال ۴
- ۳۱-۷- میانه تابع چگالی احتمال ۴

مقدمه ۳

- ۱-۱- مفهوم PDF ۳
- ۲-۱- مفاهیم اصلی ۳
- ۳-۱- سیستم تاب آور ۳

عدم قطعیت ۳

- ۱-۲- ماهیت عدم قطعیت ۳
- ۲-۲- منشا عدم قطعیت ۳
- ۳-۲- روش های بیان عدم قطعیت ۳
- ۴-۲- آنتروپی در زمینه اطلاعات ۳

احتمال ۳

- ۱-۳- احتمال ۳
- ۲-۳- مکاتب فکری احتمالاتی ۳
- ۳-۳- نحوه بیان احتمال ۳

تئوری مجموعه ها ۳

- ۱-۴- فضای نمونه ۳
- ۲-۴- مکمل یا متمم رویداد ۳
- ۳-۴- عملیات ها ۳
- ۴-۴- افراز مجموعه ۳

تئوری احتمالات ۳

- ۱-۵- احتمال شرطی ۳
- ۲-۵- احتمال کل ۳
- ۳-۵- قانون بیز ۳
- ۴-۵- استقلال آماری ۳
- ۵-۵- همبستگی ۳

تحلیل تصمیم ۳

- ۱-۶- اجزای تصمیم ۳
- ۲-۶- تصمیم گیری کلاسیک ۳
- ۳-۶- فضاهای تصمیم گیری ۳
- ۴-۶- درخت تصمیم ۳
- ۵-۶- بهینه سازی ۴

۳۲-۷- مد تابع چگالی احتمال ۴

- ۳۳-۷- لنگر دوم (میانگین مجذور) ۵
- ۳۴-۷- لنگر مرکزی دوم (واریانس) ۵
- ۳۵-۷- ضریب تغییرات ۵
- ۳۶-۷- ضریب چولگی ۵
- ۳۷-۷- ضریب کورتوسیس ۵
- ۳۸-۷- قانون احتمال کل ۵
- ۳۹-۷- مدل های متداول توزیع پیوسته ۵
- ۴۰-۷- توزیع نرمال ۵
- ۴۱-۷- قضیه حد مرکزی ۵
- ۴۲-۷- توزیع لاگ نرمال ۵
- ۴۳-۷- توزیع یکنواخت ۵
- ۴۴-۷- توزیع نمایی ۵
- ۴۵-۷- توزیع گاما ۵
- ۴۶-۷- توزیع مربع کای ۵
- ۴۷-۷- توزیع بتا ۵
- ۴۸-۷- توزیع لاپلاس ۵
- ۴۹-۷- توزیع تی (T) ۵
- ۵۰-۷- توزیع لاجستیک ۵
- ۵۱-۷- توزیع رایلی ۵
- ۵۲-۷- توزیع گامبل ۵
- ۵۳-۷- توزیع فرِشه ۵
- ۵۴-۷- توزیع رابیول ۵

استنباط کلاسیک متغیر ها ۶

- ۱-۸- برآورد نقطه ای ۶
- ۲-۸- نمودار های کمکی جهت استنباط ۶
- ۳-۸- نمودار پیشینه یا هیستوگرام ۶
- ۴-۸- نمودار بسامد نسبی ۶
- ۵-۸- نمودار بسامد تجمعی ۶
- ۶-۸- آماره های لنگر دوم ۶
- ۷-۸- میانگین نمونه ۶
- ۸-۸- تخمین نا اریب ۶

۹-۸- انحراف معیار نمونه ۶

- ۱۰-۸- بازه های اطمینان ۶
- ۱۱-۸- آزمون نیکویی برازش ۶

استنباط ذهنی گرایان ۶

- ۱-۹- استنباط ذهنی گرایان ۶
- ۲-۹- قانون بیز در استنباط ذهنی گرایان ۶
- ۳-۹- راه های استفاده از احتمال پیشین ۶
- ۴-۹- تابع درستنمایی ۶
- ۵-۹- آماره های پسین ۶
- ۶-۹- میانگین پسین ۶
- ۷-۹- واریانس پسین ۶
- ۸-۹- محاسبه توزیع پیش‌بینانه ۶
- ۹-۹- پیشین های مزدوج مدل های پیوسته ۶

مدل های توزیع احتمال چند متغیری ۶

- ۱-۱۰- توزیع حاشیه ای ۶
- ۲-۱۰- توزیع مشترک ۶
- ۳-۱۰- توابع توزیع احتمال ۶
- ۴-۱۰- تابع چگالی احتمال مشترک ۶
- ۵-۱۰- خواص تابع چگالی احتمال ۶
- ۶-۱۰- تابع توزیع تجمعی مشترک ۶
- ۷-۱۰- خواص تابع توزیع تجمعی ۶
- ۸-۱۰- تابع احتمال شرطی ۶
- ۹-۱۰- پارامتر های مدل های احتمالاتی مشترک ۶
- ۱۰-۱۰- میانگین حاصل ضرب ۷
- ۱۱-۱۰- کوواریانس ۷
- ۱۲-۱۰- ضریب همبستگی ۷
- ۱۳-۱۰- نمایش ماتریسی ۷
- ۱۴-۱۰- ماتریس کوواریانس ۷
- ۱۵-۱۰- ماتریس انحراف معیار ۷
- ۱۶-۱۰- ماتریس همبستگی ۷
- ۱۷-۱۰- مدل های توزیع متداول ۷
- ۱۸-۱۰- توزیع مشترک نرمال استاندارد ۷

استنباط کلاسیک چند متغیره γ

۱-۱۱- نمودار پراکندگی γ

۲-۱۱- ضریب همبستگی γ

قابلیت اعتماد γ

۱-۱۲- مفاهیم γ

۲-۱۲- انواع توابع حالت حدی γ

۳-۱۲- اجزاء اساسی مسئله قابلیت اعتماد γ

۴-۱۲- رویه حالت حدی γ

۵-۱۲- مسئله قابلیت اعتماد عام γ

۶-۱۲- توابع حالت حدی معادل γ

۷-۱۲- روش های قابلیت اعتماد (تخمین gx) γ

۸-۱۲- روش مقدار میانگین مرتبه اول لنگر دوم (FOSM) γ

۹-۱۲- روش قابلیت اعتماد مرتبه اول (FORM) γ

۱۰-۱۲- روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم (SORM) γ

۱۱-۱۲- روش نمونه گیری γ

تحلیل توابع γ

۱-۱۳- تحلیل توابع γ

۲-۱۳- محاسبه لنگر اول γ

۳-۱۳- خواص لنگر اول γ

۴-۱۳- خواص لنگر دوم γ

۵-۱۳- توابع خطی γ

۶-۱۳- لنگر اول توابع خطی γ

۷-۱۳- لنگر دوم توابع خطی γ

۸-۱۳- کوواریانس توابع خطی γ

۹-۱۳- توابع غیر خطی γ

۱۰-۱۳- میانگین توابع غیر خطی γ

۱۱-۱۳- واریانس توابع غیر خطی γ

۱۲-۱۳- کوواریانس توابع غیر خطی γ

تبدیل احتمال δ

۱-۱۴- تبدیل احتمال δ

۲-۱۴- رابطه نگه دارنده δ

۳-۱۴- تبدیل چند متغیری ناهمبسته δ

۴-۱۴- مسئله قابلیت اعتماد پایه δ

۵-۱۴- شاخص قابلیت اعتماد δ

۶-۱۴- روش تخمین مرتبه اول لنگر دوم δ

۷-۱۴- مشکل تغییر ناپذیری δ

۸-۱۴- احتمال شکست با فرض نرمال بودن δ

۹-۱۴- بردار اهمیت δ

روش های نمونه گیری δ

۱-۱۵- نمونه گیری مونت کارلو δ

۲-۱۵- ضریب تغییرات احتمال حاصل از نمونه گیری δ

۳-۱۵- تعداد نمونه گیری δ

۴-۱۵- نمونه گیری پیشینه نما یا هیستوگرام δ

ریسک δ

۱-۱۶- مفاهیم اولیه δ

۲-۱۶- مفهوم ریسک δ

۳-۱۶- محاسبه ریسک بر اساس ATC-13 δ

۴-۱۶- تابع حالت حدی در ریسک δ

۵-۱۶- تحلیل قابلیت چند مدلی δ

۶-۱۶- ویژگی مدل های تحلیل ریسک δ

۷-۱۶- اثر کاهیدگی δ

تاب آوری η

۱-۱۷- تعریف تاب آوری η

۲-۱۷- کمی سازی تاب آوری η

۳-۱۷- نتایج تحلیل تاب آوری η

۴-۱۷- ابعاد تاب آوری η

۵-۱۷- چهار مشخصه سیستم تاب آور η

۶-۱۷- تنومندی یا استحکام η

۷-۱۷- چابکی η

۸-۱۷- افزونگی η

۹-۱۷- کاردانی η

۱۰-۱۷- سیستم تلفیق داده η

۱۱-۱۷- نمایش مشخصات سیستم تاب آور در نمودار η

۱۲-۱۷- کمی سازی تنومندی با تحلیل ریسک η

۱۳-۱۷- شاخص تاب آوری η

مقدمه

۱-۱- مفهوم PDF

مخفف Probability Density Function است و احتمال عدم قطعیت را نسبت به کمیتی مورد نظر، نشان می دهد.

۱-۲- مفاهیم اصلی

۱- قابلیت اعتماد:

به دو روش تعینی (که در این نگرش، مقادیر از حد مجاز تعیین شده ای نباید بیشتر شود) و احتمالاتی (که در این نگرش، بر اساس میزان اطمینان بدست آمده از تابع چگالی احتمال، نتیجه گیری می شود) صورت می پذیرد.

۲- مهندسی:

شامل طراحی و آنالیز است که آنالیز خود نیز شامل مدلسازی و روش آنالیز آن است.

۳- ریسک:

به معنای بررسی پیامد شکست است. مقدار ریسک با رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\text{پیامد شکست} \times \text{احتمال شکست} = \text{ریسک}$$

۴- تاب آوری:

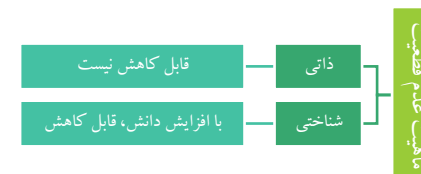
به معنای بررسی نرخ بازگردانی خسارات بوجود آمده در منطقه ای مشخص است. توجه شود که زمان تعمیر، به معنای تاب آوری نیست.

۱-۳- سیستم تاب آور

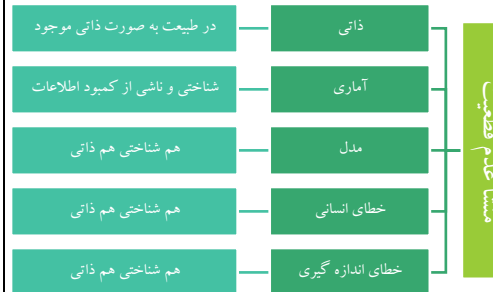
سیستمی که دارای ریسک کمتر، تاب آوری بیشتر و یا هردوی اینها باشد.

عدم قطعیت

۱-۲- ماهیت عدم قطعیت



۲-۲- منشا عدم قطعیت



۲-۳- روش های بیان عدم قطعیت

۱- روش احتمالاتی:

بر مبنای تئوری احتمالات است.

۲- روش فازی:

بر مبنای منطق فازی و نشان دهنده یک مقدار واقعیت بین ۰ و ۱.

۲-۴- آنتروپی در زمینه اطلاعات

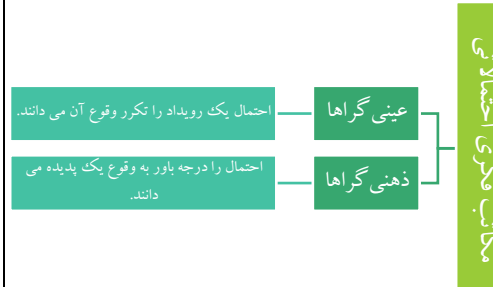
معیاری برای پیشبینی کردن یک کار است. هرچه آنتروپی بیشتر، بی نظمی بیشتر پیشبینی غیر دقیق تر.

احتمال

۱-۳- احتمال

عددی بین صفر (صفر یعنی امکان اتفاق افتادن یک رویداد نیست) و یک (یک یعنی قطعاً یک رویداد اتفاق می افتد) است.

۳-۲- مکاتب فکری احتمالاتی



برای عینی گرا ها، صرفاً پارامتر های مشاهده پذیر، محتمل هستند.

۳-۳- نحوه بیان احتمال



۳-۴- روش های بیان عدم قطعیت

• عدد به صورت a:b که a مطلوب و b کل باشد.

تئوری مجموعه ها

۴-۱- فضای نمونه

مجموعه تمام رویداد های ممکن که گسسته یا پیوسته و متناهی یا نامتناهی باشد. این مجموعه با (S) نمایش داده می شود.

۴-۲- مکمل یا متمم رویداد

$$S - E = \bar{E}$$

۴-۳- عملیات ها

۱- اجتماع

$$E_1 \cup E_2$$

۲- اشتراک

$$E_1 \cap E_2 \quad \text{or} \quad E_1 E_2$$

اشتراک بر اجتماع، مقدم است.

۴-۴- افراز مجموعه

مجموعه های MECE اشتراک با یکدیگر ندارند و اجتماع تمام آنها، فضای نمونه را تشکیل می دهد.

تئوری احتمالات

۵-۱- احتمال شرطی

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 E_2)}{P(E_2)}$$

۵-۲- احتمال کل

برای رویدادهای افراز شده (E_i)، داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|E_i)P(E_i)$$

۵-۳- قانون بیز

این قانون، برای به هنگام سازی یک رویداد در اثر مشاهده جدید، استفاده می شود:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)}{P(E_2)}P(E_1)$$

۵-۴- استقلال آماری

اگر معادله زیر برقرار باشد، دو رویداد، مستقل آماری هستند:

$$P(E_1 E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

منطق این قانون، بر اساس معادله زیر است:

$$P(E_1|E_2) = P(E_1)$$

۵-۵- همبستگی

دو متغیر که باهم وابستگی خطی داشته باشند. مثل داده هایی که می توان از بین آنها خط عبور داد.

تحلیل تصمیم

۶-۱- اجزای تصمیم



۶-۲- تصمیم گیری کلاسیک

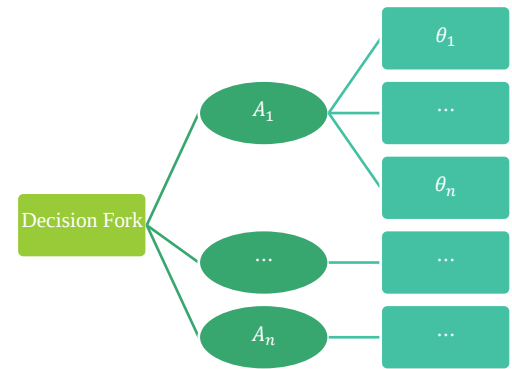
بر مبنای هزینه مورد انتظار انجام می شود. هر تصمیمی که در آینده دارای هزینه کمتری باشد، بهتر است.

۶-۳- فضاهای تصمیم گیری



۶-۴- درخت تصمیم

فرض کنید A_i ها تصمیمات و θ_i ها برآمد ها باشند. درخت تصمیم را به صورت زیر رسم می کنیم:



در نهایت برای هر حالت داریم:

$$E_j(C|A_i) = C(\theta_j|A_i)P(\theta_j|A_i)$$

پس هزینه کل هر تصمیم، برابر مقدار زیر است:

$$\forall A_i \rightarrow E(C|A_i) = C(A_i) + \sum_{j=1}^J E_j(C|A_i)$$

۵-۶- بهینه سازی

در مسائل پیوسته، یک متغیر تصمیم گیرنده برداری داریم و یک تابع هدف. نقطه بهینه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\vec{d}^* = \arg \min \left\{ \overbrace{C_o(\vec{d}) + C_f P_f(\vec{d})}^{\text{تابع هدف}} \right\}$$

طراحی ای خوب است که تابع هدف آن که به صورت فوق تعریف شد، نمودار مسطح تری داشته باشد.

متغیر تصادفی

۱-۷- متغیر تصادفی

ساده ترین مدل احتمالاتی است و هر مقدار این متغیر، نشان دهنده یک برآمد است که حاوی یک احتمال است.

یک برآمد متغیر تصادفی متغیر تصادفی (همه برآمدها)

$$\vec{X} \rightarrow \vec{x}$$

۲-۷- انواع مدل های توزیع

مدل های توزیع گسسته - مدل های توزیع پیوسته

۳-۷- توابع توزیع احتمال

۱- تابع جرم احتمال (PMF)

۲- تابع توزیع تجمعی (CDF)

۳- تابع مکمل توزیع تجمعی یا احتمال فراگذشت (CCDF)

۴-۷- تابع جرم احتمال

$$P_X(x) = P(X = x)$$

۵-۷- قوانین تابع جرم احتمال

$$1 - \sum_{i=1}^N P_X(x_i) = 1$$

$$2 - 0 \leq P_X(x) \leq 1$$

۶-۷- تابع توزیع تجمعی

$$F_X(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{j=1}^i P_X(x_j)$$

۷-۷- تابع مکمل توزیع تجمعی

$$G_X(x) = 1 - F_X(x)$$

۸-۷- پارامترهای مدل احتمالاتی

۱- میانگین (لنگر اول)

۲- میانگین مجذور (لنگر دوم)

۳- واریانس (لنگر مرکزی دوم)

۴- ضریب تغییرات

۵- ضریب چولگی

۹-۷- میانگین

$$\mu_X = E[X] = \sum_{i=1}^N x_i \cdot P_X(x_i)$$

۱۰-۷- میانگین مجذور

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot P_X(x_i)$$

۱۱-۷- واریانس

$$E[(X - \mu_X)^2] = \text{Var}[X] = \sigma_X^2$$

$$= \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 \cdot P_X(x_i)$$

۱۲-۷- ضریب تغییرات

$$C.O.V = \delta_X = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|}$$

۱۳-۷- ضریب چولگی

$$\gamma_X = \frac{E[(X - \mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$$

۱۴-۷- قانون احتمال کل در متغیر تصادفی گسسته

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(A|x_i) \cdot P_X(x_i)$$

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^N P_X(x|y_i) \cdot P_Y(y_i)$$

۱۵-۷- مدل های متداول توزیع گسسته

توزیع برنولی	توزیع دو جمله ای	توزیع هندسی	توزیع پواسون
--------------	------------------	-------------	--------------

توزیع برنولی - توزیع دو جمله ای - توزیع هندسی - توزیع پواسون

۱۶-۷- توزیع برنولی

این مدل دارای دو برآمد موفقیت و شکست (وقوع و عدم وقوع) است و احتمال وقوع در این توزیع را با P نمایش می دهیم.

$$X \sim \text{Bernoulli}(P)$$

$$P_X(x) = \begin{cases} P & x = 1 \\ 1 - P & x = 0 \end{cases}$$

۱۷-۷- پارامترهای توزیع برنولی

$$\mu_X = P \quad \sigma_X^2 = P(1 - P)$$

۱۸-۷- توزیع دو جمله ای

این توزیع، با تکرار آزمایش برنولی صورت می گیرد که به بررسی احتمال X وقوع در n مرتبه آزمایش برنولی، می پردازد.

$$X \sim \text{Binomial}(P, n)$$

$$P_X(x) = \binom{n}{x} P^x (1 - P)^{n-x}$$

۱۹-۷- پارامترهای توزیع دو جمله ای

$$\mu_X = nP \quad \sigma_X^2 = nP(1 - P)$$

۲۰-۷- توزیع هندسی

این توزیع، به بررسی تعداد آزمایشات لازم از آزمایش برنولی برای رویداد اولین وقوع است. این توزیع بدون حافظه بوده و به رویداد های گذشته وابسته نیست.

$$P_X(x) = P(1 - P)^{x-1}$$

۲۱-۷- پارامترهای توزیع هندسی

$$\mu_X = \frac{1}{P} \quad \sigma_X^2 = \frac{1 - P}{P^2}$$

میانگین توزیع هندسی را دوره بازگشت یا زمان تکرار نیز می گویند.

۲۲-۷- توزیع پواسون

در صورتی که تعداد آزمایشات توزیع برنولی را به بی نهایت برسانیم، توزیع پواسون مطرح می شود. این توزیع نیز بدون حافظه است.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda, T)$$

$$P_X(x) = \frac{(\lambda T)^x}{x!} e^{-\lambda T}$$

« که در این رابطه، λ نرخ وقوع و T بازه زمانی است »

۲۳-۷- پارامترهای توزیع پواسون

$$\mu_X = \lambda T \quad \sigma_X^2 = \lambda T$$

۲۴-۷- تابع چگالی احتمال (پیوسته)

مساحت این تابع از جنس احتمال است و نه مقدار آن.

$$f_X(x) dx = P(x \leq X \leq x + dx)$$

۲۵-۷- قوانین تابع چگالی احتمال

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad 0 \leq f_X(x)$$

۲۶-۷- تابع توزیع تجمعی (پیوسته)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

۲۷-۷- قوانین تابع توزیع تجمعی

$$F_X(-\infty) = 0 \quad F_X(\infty) = 1 \quad f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x)$$

۲۸-۷- تابع مکمل توزیع تجمعی (پیوسته)

$$G_X(x) = 1 - F_X(x) = \int_x^{\infty} f_X(x) dx$$

۲۹-۷- تابع معکوس توزیع تجمعی (پیوسته)

تابعی که احتمال یک رویداد را دریافت و برآمد متناظر با آن به قبل را خروجی می دهد.

$$x = F^{-1}(P)$$

۳۰-۷- میانگین تابع چگالی احتمال

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

اگر تابع تنها برآمد مثبت بپذیرد ($x \geq 0$):

$$E(X) = \int_0^{\infty} G_X(x) dx$$

۳۱-۷- میانه تابع چگالی احتمال

برآمدی که احتمال تمام برآمدهای قبل آن برابر ۰.۵ و تمام برآمدهای بعد آن نیز ۰.۵ باشد.

۳۲-۷- مد تابع چگالی احتمال

برآمدی که متناظر با بیشترین چگالی احتمال باشد.

۳۹-۷ مدل های متداول توزیع پیوسته

توزیع یکنواخت	توزیع لاگ نرمال	توزیع نرمال
---------------	-----------------	-------------

۴۰-۷ توزیع نرمال

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

۴۱-۷ قضیه حد مرکزی

در بسیاری مواقع، جمع تعداد زیادی متغیرهای تصادفی مستقل، به توزیع نرمال میل می کند.

جمع متغیرهای نرمال، دقیقاً توزیعی نرمال است.

۴۲-۷ توزیع لاگ نرمال

$$X \sim LN(\xi, \sigma) \quad 0 \leq x$$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \xi}{\sigma}\right)^2\right)$$

اگر $Y = \ln X$ باشد و X متغیر تصادفی توزیعی لاگ نرمال باشد، Y توزیعی نرمال خواهد داشت.

$$\xi = \ln \mu_X - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right)}$$

۴۳-۷ توزیع یکنواخت

$$X \sim U(a, b)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \mu_X = \frac{a+b}{2} \quad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

۴۴-۷ توزیع نمایی

اگر وقوع یک پدیده از توزیع پواسون تبعیت کند، فاصله زمانی بین رویداد های آن با نرخ وقوع λ از توزیع نمایی تبعیت می کند. این توزیع بدون حافظه است.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad 0 \leq x$$

$$f_X(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x) \quad \mu_X = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

۴۵-۷ توزیع گاما

اگر وقوع پدیده ای از توزیع پواسون تبعیت کند، فاصله زمانی تا k امین رویداد با نرخ وقوع ν از توزیع گاما تبعیت می کند.

$$X \sim \text{Gamma}(k, \nu) \quad 0 \leq x$$

۳۳-۷ لنگر دوم (میانگین مجذور)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx$$

۳۴-۷ لنگر مرکزی دوم (واریانس)

معیاری از پراکندگی داده ها است و هرچه شکل تابع پهن تر باشد، مقدار واریانس بیشتر است.

$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx = E[X^2] - \mu_X^2$$

۳۵-۷ ضریب تغییرات

این نسبت، میزان عدم قطعیت را بهتر و بدون بعد نمایش می دهد. در صورتی که میانگین برابر صفر باشد، این ضریب کاربرد ندارد.

$$C.O.V = \delta_X = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|}$$

۳۶-۷ ضریب چولگی

معیاری برای تقارن است و اگر مقدار آن برابر عددی منفی شود، چوله به چپ و اگر برابر مقداری مثبت شود، چوله به راست خواهد بود.

$$\gamma_X = \frac{E[(X - \mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$$

۳۷-۷ ضریب کورتوسیس

معیاری از مسطح بودن تابع است که اگر با افزایش ضریب، مقدار تیزی نمودار توزیع، افزایش پیدا می کند.

$$K_X = \frac{E[(X - \mu_X)^4]}{\sigma_X^4} - 3$$

کاهش مقدار ۳ برای این است که ضریب کورتوسیس توزیع نرمال برابر صفر شود.

۳۸-۷ قانون احتمال کل

- $P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|x) \cdot f_X(x) dx$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|y) \cdot f_Y(y) dy$
- $f_X(x) = \sum_{i=1}^N f(x|E_i) \cdot P(E_i)$

$$f_X(x) = \frac{v(vk)^{k-1} \exp(-vx)}{\Gamma(k)} \quad \mu_X = \frac{k}{v} \quad \sigma_X = \frac{k}{v}$$

۴۶-۷ توزیع مربع کای

اگر پارامتر به صورت نرمال توزیع شوند، جمع مربعات آنها توزیع مربع کای خواهد داشت. اصطلاحاً به ν درجه آزادی نیز می گویند.

$$X \sim \chi^2(\nu, x_0) \quad x_0 \leq x$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{x-x_0}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{x-x_0}{2}\right)$$

$$\mu_X = \nu \quad \sigma_X = 2\nu$$

۴۷-۷ توزیع بتا

$$X \sim \text{Beta}(a, b) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

$$\mu_X = \frac{a}{a+b} \quad \sigma_X = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

۴۸-۷ توزیع لاپلاس

آینه ای کردن توزیع نمایی باعث بوجود آمدن توزیع لاپلاس می شود.

$$X \sim \text{Laplace}(a, x_0)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2a} \exp\left(-\left|\frac{x-x_0}{a}\right|\right)$$

$$\mu_X = x_0 \quad \sigma_X = 2a^2$$

۴۹-۷ توزیع تی (T)

از این توزیع، در تعیین بازه اطمینان پارامترها از داده ها یا مشاهدات کاربرد دارد. در این توزیع ν میزان درجه آزادی (تعداد نمونه) بوده و x_0 و σ مشابه میانگین و انحراف معیار عمل می کنند.

$$X \sim t(\nu, x_0, \sigma)$$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\pi\nu}\sigma} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$$

$$\mu_X = x_0 \quad \sigma_X = \sigma \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \quad \text{for } \nu > 2$$

۵۰-۷ توزیع لاجستیک

این توزیع در صنعت حمل و نقل کاربرد دارد. به صورت نوعی رگرسیون که خروجی آن، می تواند عددی صحیح باشد.

$$X \sim \text{logistic}(a, x_0)$$

$$f_X(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-x_0}{a}\right)}{a \left(1 + \exp\left(-\frac{x-x_0}{a}\right)^2\right)}$$

$$\mu_X = a + x_0 \quad \sigma_X = a\pi/\sqrt{3}$$

۵۱-۷ توزیع راییلی

این توزیع، جذر مجموع مربعات توزیع های نرمال است. (مشابه محاسبه اندازه بردار)

$$X \sim \text{Rayleigh}(\sigma, x_0) \quad 0 \leq x$$

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\mu_X = x_0 + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \sigma_X = \sigma \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}$$

۵۲-۷ توزیع گامبل

از توزیع های مقدار کرانی است که در جایی مثل تعیین احتمال مقدار های کرانی (بیشینه یا کمینه) یک متغیر تصادفی، استفاده می شود. کران های یک متغیر تصادفی خود متغیری تصادفی است. دم این نمودار به صورت نمایی (e^x) است.

$$X \sim \text{Gambel}(\alpha, \beta)$$

$$f_X(x) = \frac{\exp\left(-\left(\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)\right)}{\beta}$$

$$\mu_X = \alpha + \beta \cdot \gamma \quad \sigma_X = \frac{\pi}{6} \beta \quad \gamma = 0.5772$$

۵۳-۷ توزیع فرشه

مشابه توزیع گامبل است با این تفاوت که دم نمودار در این توزیع، سنگین تر است و به صورت توانی (x^c) است.

$$X \sim \text{Frechet}(a, s, m)$$

$$f_X(x) = \frac{a}{s} \left(\frac{x-m}{s}\right)^{-1-a} \exp\left(-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-a}\right)$$

$$\mu_X = \begin{cases} m + s\Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) & 1 < a \\ \infty & \text{othrw} \end{cases}$$

$$\sigma_X = \begin{cases} s \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right)^2} & 2 < a \\ \infty & \text{othrw} \end{cases}$$

۵۴-۷ توزیع راییبول

این توزیع مشابه توزیع گامبل و فرشه است اما برای متغیر تصادفی کمینه، کاربرد بیشتری دارد.

$$X \sim \text{Weibull}(a, b)$$

$$f_X(x) = \frac{b}{a^b} x^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right)$$

$$\mu_x = a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$$

$$\sigma_x = a \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right)^2}$$

استنباط کلاسیک متغیر ها

۱-۸ برآورد نقطه ای

به این معنی است که یک کمیت به صورت عددی مطلق بیان شود.

۲-۸ نمودار های کمکی جهت استنباط

۱- نمودار پیشینه یا هیستوگرام

۲- نمودار بسامد نسبی

۳- نمودار بسامد تجمعی

۳-۸ نمودار پیشینه یا هیستوگرام

برای داده های موجود، ابتدا دسته بندی ای تعریف می کنیم با طول مشخص و یکسان برای همه دسته ها. سپس داده های داخل هر دسته را شمارش می کنیم. با رسم میزان شمارش به دسته بندی، نمودار هیستوگرام حاصل می شود.

۴-۸ نمودار بسامد نسبی

مبنای این نمودار همان هیستوگرام است، با این تفاوت که باید سطح زیر آن به یک برسد.

۵-۸ نمودار بسامد تجمعی

این نمودار، به صورت تجمعی بسامد نسبی است اما بهتر است بجای استفاده از جمع داده های نمودار بسامد نسبی، از خود داده ها استفاده شود.

۶-۸ آماره های لنگر دوم

آزمون نیکویی	بازه های اطمینان	انحراف معیار نمونه	میانگین نمونه
برازش			

۷-۸ میانگین نمونه

فرض کنیم n مشاهده از متغیر تصادفی X داریم. میانگین این نمونه برابر با مقدار زیر است: (تخمین نا اریب از جامعه)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad E[\bar{x}] = \mu_x$$

۸-۸ تخمین نا اریب

یعنی مقدار این تخمین متغیر است و با افزایش داده بهتر می شود.

۹-۸ انحراف معیار نمونه

تخمینی نا اریب است.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad E[s^2] = \sigma_x^2$$

۱۰-۸ بازه های اطمینان

میزان عدم قطعیت را در برآورد نقطه ای (مطلق) پارامتر، بیان می کند.

۱۱-۸ آزمون نیکویی برازش

روش هایی عددی است برای بیان کیفیت برازش یک توزیع خاص از بین داده ها. یک برازش ممکن است بخاطر پراکندگی داده ها، در نقاطی دقیق تر و در نقاطی بی دقت تر باشد.

استنباط ذهنی گرایان

۱-۹ استنباط ذهنی گرایان

در این استنباط برای هر پارامتر، توزیع احتمال در نظر گرفته می شود. فرض کنیم X متغیر تصادفی اصلی (مشاهده پذیر) باشد و θ پارامتری از توزیع X است. هدف تعیین توزیع θ بر مبنای مشاهدات X است.

۲-۹ قانون بیز در استنباط ذهنی گرایان

$$f''(\theta) = \frac{L(\theta)}{c} f'(\theta) \quad c = \int_{-\infty}^{\infty} L(\theta) f'(\theta) d\theta$$

به صورت دقیق تر، نمایش زیر را خواهیم داشت:

$$f''(\theta|\tilde{x}) = \frac{L(\tilde{x}|\theta)}{c(\tilde{x})} f'(\theta)$$

$$c(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\tilde{x}|\theta) f'(\theta) d\theta$$

«که در این رابطه، $f'(\theta)$ تابع احتمال پیشین، $L(\tilde{x}|\theta)$ تابع درستمایی و $c(\tilde{x})$ ضریب گواه است»

۳-۹ راه های استفاده از احتمال پیشین

۱- پسین قبلی

یعنی با داده های مسئله پیشین قبلی انجام شود.

۲- پیشین یکنواخت

زمانی که اطلاعات کمی یا هیچ اطلاعاتی در مورد θ نداریم، می توان توزیع حاکم بر آن را یکنواخت فرض کرد.

۳- پیشین مزدوج

زمانی که بعد از به هنگام سازی تابع، توزیع پارامتر همان توزیع باقی بماند.

۴-۹ تابع درستنمایی

مشاهدات ما از طریق این تابع بر پارامتر ها (θ) اثر می گذارند.

۵-۹ آماره های پسین

میانگین پسین	واریانس پسین
--------------	--------------

۶-۹ میانگین پسین

$$\mu''_{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \cdot f''(\theta) d\theta$$

۷-۹ واریانس پسین

$$\sigma''_{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \mu''_{\theta}) f''(\theta) d\theta$$

۸-۹ محاسبه توزیع پیش بینانه

۱- پیش از پیش بینی

$$f(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}|\theta) f'(\theta) d\theta$$

۲- پس از پیش بینی

$$f(x|\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta) f''(\theta) d\theta$$

۹-۹ پیشین های مزدوج مدل های پیوسته

جدول خلاصه روابط، به صورت زیر است:

Random variable	Observation	Prior	Rule
$X \sim \text{Binomial}(p, n)$	x occurrences in n trials	$p \sim \text{Beta}(a, b)$	$a'' = a' + x$ $b'' = b' + n - x$
$X \sim \text{Geometric}(p)$	x trials until first occurrence	$p \sim \text{Beta}(a, b)$	$a'' = a' + 1$ $b'' = b' + x - 1$
$X \sim \text{Poisson}(\lambda, T)$	x occurrences in T	$\lambda \sim \text{Gamma}(k, \nu)$	$k'' = k' + x$ $\nu'' = \nu' + T$
$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	n observations of x	$\lambda \sim \text{Gamma}(k, \nu)$	$k'' = k' + n$ $\nu'' = \nu' + \sum x_i$
$X \sim \text{Gamma}(\underline{\nu}, k)$	n observations of x	$\underline{\nu} \sim \text{Gamma}(k, \nu)$	$k'' = k' + nk$ $\nu'' = \nu' + \sum x_i$
$X \sim \text{Rayleigh}(\lambda)$	n observations of x	$\lambda \sim \text{Gamma}(k, \nu)$	$k'' = k' + n$ $\nu'' = \nu' + \sum x_i^2$

مدل های توزیع احتمال چند متغیری

۱-۱۰ توزیع حاشیه ای

توزیعی است که تنها دارای یک متغیر است.

۲-۱۰ توزیع مشترک

توزیعی است که دارای دو یا چند متغیر است.

۳-۱۰ توابع توزیع احتمال

تابع چگالی احتمال مشترک	تابع توزیع تجمعی مشترک	احتمال شرطی
-------------------------	------------------------	-------------

۴-۱۰ تابع چگالی احتمال مشترک

$$f(x, y) dx dy = P(x \leq X \leq x + dx \cap y \leq Y \leq y + dy)$$

۵-۱۰ خواص تابع چگالی احتمال

- $0 \leq f(x, y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

۶-۱۰ تابع توزیع تجمعی مشترک

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

۷-۱۰ خواص تابع توزیع تجمعی

- $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$
- $F(x, \infty) = F_X(x)$

۸-۱۰ تابع احتمال شرطی

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

در صورت استقلال متغیر ها، داریم:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

۹-۱۰ پارامتر های مدل های احتمالاتی مشترک

پارامتر های توابع حاشیه ای	میانگین حاصل ضرب
کوواریانس	ضریب همبستگی

تحلیل توابع

۱-۱۳- تحلیل توابع

در این قسمت، سعی می شود که با استفاده از متغیر های معلوم و توابع معلوم، خروجی ها تعیین گردند.

۲-۱۳- محاسبه نگر اول

$$E[Y] = E[h(\mathbf{x})] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

۳-۱۳- خواص نگر اول

1. $E[a] = a$
2. $E[a \cdot h(\mathbf{x})] = aE[h(\mathbf{x})]$
3. $E[h_1(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{x})] = E[h_1(\mathbf{x})] + E[h_2(\mathbf{x})]$
4. $\frac{\partial}{\partial \theta} E[h(\mathbf{x}, \theta)] = E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} h(\mathbf{x}, \theta)\right]$

۴-۱۳- خواص نگر دوم

1. $Var[a + h(\mathbf{x})] = Var[h(\mathbf{x})]$
2. $Var[b \cdot h(\mathbf{x})] = b^2 Var[h(\mathbf{x})]$

۵-۱۳- توابع خطی

$$y = a + \mathbf{b}^T \mathbf{x} = a + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

«که در این رابطه، $\mathbf{b}$ ماتریس ضرایب است»

۶-۱۳- نگر اول توابع خطی

$$E[Y] = a + \mathbf{b}^T E[\mathbf{X}] = a + \mathbf{b}^T \mathbf{M}_x$$

۷-۱۳- نگر دوم توابع خطی

$$\sigma_Y^2 = Var[Y] = E[(Y - \mu_Y)^2] = \mathbf{b}^T \Sigma_{xx} \mathbf{b}$$

۸-۱۳- کوواریانس توابع خطی

$$C_v[Y_1, Y_2] = \mathbf{b}_1^T \Sigma_{xx} \mathbf{b}_2$$

۹-۱۳- توابع غیر خطی

اینگونه توابع را می توان با استفاده از بسط تیلور، با درجه ای معین حول میانگین تقریب زد.

$$y \approx h(\mathbf{M}_x) + \nabla h|_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x}^T (\mathbf{x} - \mathbf{M}_x)$$

۱۰-۱۳- میانگین توابع غیر خطی

$$\mu_Y \approx a + \mathbf{b}^T \mathbf{M}_x \\ = h(\mathbf{M}_x) - \nabla h^T|_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x} \cdot \mathbf{M}_x + \nabla h^T|_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x} = h(\mathbf{M}_x)$$

۱۱-۱۳- واریانس توابع غیر خطی

$$\sigma_Y^2 \approx \nabla h^T|_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x} \cdot \Sigma_{xx} \nabla h|_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x}$$

۱۲-۱۳- کوواریانس توابع غیر خطی

$$C_v[Y_1, Y_2] \approx \nabla h_1^T|_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x} \cdot \Sigma_{xx} \cdot \nabla h_2|_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x}$$

۱۲-۴- رویه حالت حدی

مرز متناظر با تابع حالت حدی ای که ایجاد می شود و نشان دهنده مرز بین شکست و پایداری است.

۱۲-۵- مسئله قابلیت اعتماد عام

تمامی مسائل قابلیت اعتماد، دارای هدف زیر هستند:

$$p_f = P(g(\hat{x}) \leq 0) = \int \dots \int f(\hat{x}) d\hat{x}$$

محدوده این انتگرال، $\hat{x}$ هایی است که $g(\hat{x}) \leq 0$ باشد.

۱۲-۶- توابع حالت حدی معادل

یک مسئله حالت حدی را می توان با اشکال مختلف اما معادل بیان کرد.

$$g = R - S \equiv g = 1 - S/R \equiv g = \ln(R/S)$$

۱۲-۷- روش های قابلیت اعتماد (تخمین $g(\hat{x})$)

روش مقدار میانگین مرتبه اول نگر دوم (FOSM)	روش قابلیت اعتماد مرتبه اول	روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم
روش نمونه گیری		

۱۲-۸- روش مقدار میانگین مرتبه اول نگر دوم (FOSM)

در این روش، تقریب مرتبه اول در میانگین زده می شود. این روش برای توابع مختلف اما معادل، جواب های مختلفی دارد و بستگی به توزیع احتمال ندارد.

۱۲-۹- روش قابلیت اعتماد مرتبه اول (FORM)

در این روش، مشکل جواب های مختلف توابع مختلف برطرف می شود اما هزینه محاسبات بالاتر می رود.

۱۲-۱۰- روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم (SORM)

در این روش، تابع حالت با یک سهمی تقریب زده می شود.

۱۲-۱۱- روش نمونه گیری

در این روش، تعداد زیادی نقاط تصادفی ساخته می شود و نسبت شکست به کل احتمالات محاسبه می شود. این روش هزینه محاسبات بسیار زیادی دارد.

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma_{xx}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{M}_x)^T \Sigma_{xx}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}_x)\right)$$

۱۲-۱۱- توزیع مشترک نرمال استاندارد

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{y}\right)}{\sqrt{(2\pi)^n}} \quad \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = CDF(\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}))$$

استنباط کلاسیک چند متغیره

۱۲-۱۱- نمودار پراکندگی

(Scatter) نموداری است که هر متغیر به صورت دو به دو با متغیر متناظر خود در یک نمودار ترسیم و می توان با استفاده از آن میزان بستگی خطی آنها را محاسبه نمود.

۱۲-۲- ضریب همبستگی

$$\rho = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i y_i) - \bar{x} \bar{y}]}{S_X S_Y}$$

قابلیت اعتماد

۱۲-۱- مفاهیم

قابلیت اعتماد: به معنای مکمل احتمال شکست است و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$Reliability = 1 - failure \ prob.$$

تابع حدی: تابعی که مشخص کننده مرز بین شکست و پایداری است.

مسئله جزء: مسئله ای که دارای یک تابع حدی باشد.

مسئله سیستم: مسئله ای که دارای بیش از یک تابع حدی باشد.

۱۲-۲- انواع توابع حالت حدی

۱- حالت حدی نهایی:

حالت هایی از شکست را بیان می کند که اگر نقض شود، پایداری سازه به خطر می افتد.

۲- حالت حدی بهره برداری:

حالت هایی از سازه را بیان می کند که اگر نقض شود، بهره برداری سازه به خطر می افتد.

۱۲-۳- اجزاء اساسی مسئله قابلیت اعتماد

توابع حدی

متغیر های تصادفی

۱۰-۱۰- میانگین حاصل ضرب

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy$$

۱۱-۱۰- کوواریانس

نشان دهنده چگونگی توزیع دو متغیر نسبت به یکدیگر است و با هر چه وابستگی «خطی» بیشتر بین دو متغیر، این مقدار افزایش پیدا می کند.

$$C_v[X, Y] = E[(x - \mu_X)(y - \mu_Y)] \\ = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

۱۲-۱۰- ضریب همبستگی

مقداری بی بعد است که نشان دهنده میزان بستگی «خطی» بین دو متغیر است.

$$\rho_{X,Y} = \frac{C_v[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

وابستگی خطی کامل وابستگی خطی کامل منفی

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

مقدار صفر یعنی بستگی «خطی» بین دو متغیر وجود ندارد.

$$\rho_{X,Y} = E\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

۱۳-۱۰- نمایش ماتریسی

$$\overbrace{\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}}^{\text{بردار متغیر ها}} \quad \overbrace{\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}}^{\text{بردار برآیند ها}} \quad \mathbf{M}_x = \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{Bmatrix}$$

۱۴-۱۰- ماتریس کوواریانس

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \rho_{1n} \sigma_1 \sigma_n \\ & \ddots & \vdots \\ sym & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_x \mathbf{R}_{xx} \mathbf{D}_x$$

۱۵-۱۰- ماتریس انحراف معیار

این ماتریس یک ماتریس قطری است.

$$\mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ sym & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

۱۶-۱۰- ماتریس همبستگی

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \rho_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ sym & & 1 \end{bmatrix}$$

۱۷-۱۰- مدل های توزیع متداول

توزیع مشترک نرمال - توزیع مشترک نرمال استاندارد

تبدیل احتمال

۱-۱۴- تبدیل احتمال

در این قسمت، می خواهیم رابطه میان ورودی ها و خروجی های موجود را با استفاده از تابعی، بدست آوریم.

۲-۱۴- رابطه نگه دارنده

این رابطه، برای تبدیل یک تک متغیر به یک تک متغیر دیگر استفاده می شود.

$$F_X(x) = F_Y(y) \rightarrow y = F_Y^{-1}(F_X(x))$$

$$f_Y(y) = \frac{dx}{dy} f_X(x)$$

۳-۱۴- تبدیل چند متغیری ناهمبسته

به علت وجود نا همبستگی، با برقراری اتحاد میان متغیر ها داریم:

$$F_i(x_i) = \Phi(y_i) \quad i = 1, \dots, n$$

در صورت وجود همبستگی، در کنار تبدیل احتمال فوق، توابع همبستگی خطی ای نیز برای تبدیل وارد محاسبات می شود.

۴-۱۴- مسئله قابلیت اعتماد پایه

تابع حالت حدی و متغیر های تصادفی برای این مسئله را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g = R - S \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} r \\ s \end{Bmatrix}$$

با فرض استقلال دو متغیر R و S و همچنین برقراری توزیع نرمال برای آنها، داریم:

$$p_f = \iint_{r < s} f(r, s) dr ds = \int_0^\infty F_R(s) f_S(s) ds$$

$$\begin{cases} R \sim N(\mu_R, \sigma_R) \\ S \sim N(\mu_S, \sigma_S) \end{cases} \rightarrow g \sim N(\mu_g, \sigma_g)$$

در این رابطه μ_g و σ_g به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\mu_g = \mu_R - \mu_S$$

$$\sigma_R = \mathbf{Vg}^T \mathbf{\Sigma}_{RS} \mathbf{Vg} = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$$

۵-۱۴- شاخص قابلیت اعتماد

این شاخص، نشان دهنده تعداد انحراف معیار در بازه میانگین است. هر چقدر این شاخص بزرگتر باشد، قابلیت اعتماد بیشتر است.

۶-۱۴- روش تخمین مرتبه اول لنگر دوم

این روش، تنها باعث بدست آوردن یک برآورد از شاخص قابلیت اعتماد می شود.

$$\beta = \mu_g / \sigma_g$$

۷-۱۴- مشکل تغییر فاندیری

به علت تقریب زدن و خطی کردن تابع حالت حدی، شاخص قابلیت اعتماد در توابع معادل یکسان نخواهند شد.

$$\mu_g \approx g(\mathbf{M}_x)$$

$$\sigma_g \approx \sqrt{\mathbf{Vg}^T |_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x} \cdot \mathbf{\Sigma}_{xx} \cdot \mathbf{Vg} |_{\mathbf{x}=\mathbf{M}_x}}$$

اگر $g_1 = R - S$ و $g_2 = \ln(R/S)$ باشد، داریم:

$$\beta_1 = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - \rho_{RS} \sigma_R \sigma_S}}$$

$$\beta_2 = \frac{\ln(\mu_R / \mu_S)}{\sqrt{(\sigma_R / \mu_R)^2 + (\sigma_S / \mu_S)^2 - 2 \rho_{RS} \frac{\sigma_R \sigma_S}{\mu_R \mu_S}}}$$

بنابر این، $\beta_2 \neq \beta_1$.

۸-۱۴- احتمال شکست با فرض نرمال بودن

در شرایطی که متغیر های تابع حالت حدی دارای توزیع نرمال باشند، توزیع تابع حالت حدی نیز قطعاً نرمال است. در غیر این صورت می تواند تقریبی از توزیع نرمال باشد.

$$p_f = P(g \leq 0) = \Phi\left(\frac{-\beta}{\frac{\mu_g}{\sigma_g}}\right)$$

اگر بخواهیم مرتبه p_f را به صورت تقریبی بدست آوریم، از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$$p_f = 10^{-\beta}$$

۹-۱۴- بردار اهمیت

این بردار، متغیر ها را بر اساس اهمیت نسبی شان، رتبه بندی می کند. احتمال شکست مستقیماً با شاخص قابلیت اعتماد مرتبط است و شاخص قابلیت اعتماد نیز مستقیماً با انحراف معیار مرتبط است. بنابر این:

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(x)] &= \mathbf{Vg}^T \cdot \mathbf{\Sigma}_{xx} \cdot \mathbf{Vg} \\ &= \underbrace{\sum (\nabla g_i \cdot x_i)^2}_{\text{بیشترین تاثیر}} + \sum_{i \neq j} \nabla g_i \nabla g_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \end{aligned}$$

پس بردار اهمیت به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{w}^T = \nabla g^T \mathbf{D}_x$$

«اگر جمله نظیر متغیری منفی باشد یعنی آن متغیر از جنس بار و اگر مثبت باشد از جنس مقاومت است»

روش های نمونه گیری

۱-۱۵- نمونه گیری مونت کارلو

در این روش یک برآمد تصادفی از متغیر تصادفی تولید می کنیم و در تابع حالت حدی قرار می دهیم. اگر تابع حالت حدی منفی شود، نمونه نظیر یک نمونه شکست و اگر مثبت شود، یک نمونه ایمن خواهد بود.

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & g(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow p_f = E[I(\mathbf{x})]$$

چون توزیع حاکم بر تمام متغیر ها یکسان نیست، با استفاده از تبدیل احتمال توزیع ها را به نرمال استاندارد تبدیل می کنیم. داریم:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{y}) \Phi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

با ساده سازی، تقریب زیر را خواهیم داشت:

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I(\mathbf{x}_k)$$

۲-۱۵- ضریب تغییرات احتمال حاصل از نمونه گیری

ضریب تغییرات به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\delta_{pf} = \frac{\sigma_{pf}}{\mu_{pf}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1-p_f}{N p_f}} \right)}{(p_f)}$$

۳-۱۵- تعداد نمونه گیری

در صورتی که در ازاء ضریب تغییرات مشخص برای احتمالی معین، بخواهیم بدانیم چند نمونه باید داشته باشیم، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$N = \frac{1}{\delta_{pf}^2} \frac{1-p_f}{p_f}$$

۴-۱۵- نمونه گیری پیشینه نما یا هیستوگرام

در این نمونه گیری، بجای تحلیل برآورد های تابع حالت حدی، یک تابع درون تابع حالت حدی ساخته و برآورد های آنرا تحلیل می کنیم.

$$g(\mathbf{x}) = u_0 - u(\mathbf{x})$$

$$p_f = P(g \leq 0) = P(u > u_0) \rightarrow CCDF(u_0)$$

ریسک

۱-۱۶- مفاهیم اولیه

فاجعه	رویداد های طبیعی یا انسان ساخت که جامعه را تهدید می کند.
زیر ساخت	سیستمی از اجزاء به هم وابسته که کالا ها و خدمات را برای جامعه فراهم می کند.
پیامد	به اثر خطرات به زیرساخت ها گفته می شود.

۲-۱۶- مفهوم ریسک

در تعریف نوین، به معنی توزیع احتمالاتی پیامد ها است.

۳-۱۶- محاسبه ریسک بر اساس ATC-13

در ابتدا باید احتمال خرابی سازه ها را محاسبه کنیم:

$$P(DS = ds_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{12} P(DS = ds_i | IM = im_j) \cdot P(IM = im_j)$$

«که در این رابطه، DS حالت خرابی و IM شدت زلزله است»

حال باید میانگین فاکتور خرابی را محاسبه کنیم:

$$E[DF] = \sum_{i=1}^7 \frac{CDF_i}{100} \cdot P(DS = ds_i)$$

«که در این رابطه، DF فاکتور خرابی و CDF متوسط فاکتور خرابی است»

در نهایت، متوسط خسارت به صورت زیر محاسبه می شود:

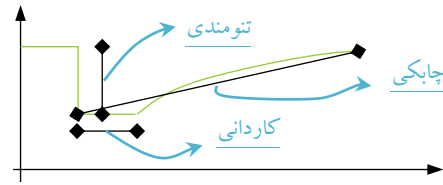
$$E[C] = E[DF] \cdot B$$

«که در این رابطه، B ارزش ساختمان یا متوسط هزینه تعمیر آن است»

۴-۱۶- تابع حالت حدی در ریسک

در تحلیل ریسک، تابع حالت حدی را به صورت پیامدی بازنویسی می کنیم.

۱۷-۱۱- نمایش مشخصات سیستم تاب آور در نمودار



۱۷-۱۲- کمی سازی تنومندی با تحلیل ریسک

$$R_o = 1 - E[DF] = 1 - \eta$$

«که در این رابطه، DF فاکتور خرابی و η نسبت خرابی است»

۱۷-۱۳- شاخص تاب آوری

$$\bar{R} = 1 - \frac{\mu_c}{GRP}$$

«که در این رابطه، μ_c میانگین هزینه تحمیلی به جامعه و GRP

ظرفیت جامعه یا تولید ناخالص منطقه ای است»

در این شاخص، زمان هم تبدیل به هزینه می شود.

۱۷-۵- چهار مشخصه سیستم تاب آور

کاردانی

افزونگی

چابکی

تنومندی

۱۷-۶- تنومندی یا استحکام

به معنای استحکام یا مقاومت ذاتی یک سیستم در برابر تقاضای

خارجی بدون افت و از دست دادن عملکرد است.

$$R_o = 1 - L$$

«که در این رابطه، L هزینه نرمال شده است»

تحلیل هزینه نرمال شده همان ریسک است.

۱۷-۷- چابکی

سرعت غلبه بر اختلال بازیابی ایمنی، خدمت و پایداری مالی

است. در نمودار، چابکی شیب محدوده بازگشت است.

$$\bar{R}_a = \frac{L}{T_{RE}} \rightarrow R_a = \frac{\partial}{\partial t} Q(t) \quad t_{oE} \leq t \leq t_{oE} + T_{RE}$$

برای شبیه سازی منحنی بازگشت از روش شبیه سازی رویداد

گسسته (DES) استفاده می کنیم. در این روش، تصمیمات لحاظ

نمی شود. برای لحاظ شدن تصمیمات از روش مدل سازی عامل

بنیان (ABM) استفاده می کنیم.

۱۷-۸- افزونگی

در دید تحلیل، افزونگی به معنای مشخصه ای از سیستم است

که امکان انتخاب های جایگزین را در سیستم فراهم می کند.

۱۷-۹- کاردانی

به معنای ظرفیت بسیج کردن منابع و خدمات لازم در بحران

است.

۱۷-۱۰- سیستم تلفیق داده

در این سیستم، شبکه ذهنی گرایانه بین داده های نامتجانس غیر

قطعی دریافت شده از منابع مختلف، ارتباط برقرار می کند تا بتوان

به یک آگاهی موقعیتی رسید و تصمیم گیری نمود.

$$g(x) = L_o - (L_a(x) + L_i(x) + L_s(x))$$

«که در این رابطه، L_o آستانه خسارت، L_d خسارت مستقیم

اقتصادی، L_i خسارت غیر مستقیم اقتصادی و L_s خسارت

اجتماعی است»

۱۶-۵- تحلیل قابلیت چند مدلی

در این تحلیل، لازم است برای رسیدن به یک تابع حالت حدی،

زنجیره ای از مدل ها را داشته باشیم که ورودی مدل ها، خروجی

مدل های قبلیشان خواهد بود.

۱۶-۶- ویژگی مدل های تحلیل ریسک

۱- این مدل ها، ورودی و خروجی دارند.

۲- ورودی و خروجی مدل ها، احتمال نیست و یک متغیر

فیزیکی قابل اندازه گیری است.

۱۶-۷- اثر کاهیدگی

به معنی کاهش شتاب پویا زمینه در فاصله های دور تر از

کانون زلزله، به دلیل پخش شدن انرژی در سطح بزرگتر است.

تاب آوری

۱۷-۱- تعریف تاب آوری

به معنای بازگشت از حالتی نامطلوب به حالتی مطلوب پس از

رخ دادن اتفاق سازنده آن حالت نامطلوب است.

۱۷-۲- کمی سازی تاب آوری

عددی بین صفر و یک است که از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$R = \frac{1}{T_{LC}} \int_{t_0}^{t_0+T_{LC}} \phi(t) dt \quad 0 \leq R \leq 1$$

«که در این رابطه، T_{LC} زمان تاب آوری و بازگشت سیستم به

شرایط عادی بر اساس نظر جامعه و ϕ تابع شرایط سیستم بر حسب

زمان است»

۱۷-۳- نتایج تحلیل تاب آوری

کاهش زمان
بازگشت

کاهش پیامد
شکست

کاهش احتمال
شکست

۱۷-۴- ابعاد تاب آوری

اقتصادی

اجتماعی

سازمانی

فنی