XXII Устная городская математическая олимпиада для 6-7 классов
06.04.2025
Решения задач
7 класс

1. Дробь. Из цифр 1, 2, 3, ..., 9, взятых по одному разу, составьте обыкновенную дробь, значение которой будет наиболее близко к единице.

Олимпиада ЮАР, 2017 г.

Ответ: $\frac{9876}{12345}$.

Решение. Так как надо использовать 9 цифр, то, либо в числителе, либо в знаменателе дроби, их должно быть хотя бы 5. Если в числителе их 5, то дробь больше единицы, значит, числитель должен быть как можно меньше, а знаменатель – как можно больше. Этому условию удовлетворяет дробь $\frac{12345}{9876}$. Если цифр больше в знаменателе, то нужен как можно меньший знаменатель и как можно больший числитель. Тогда получим дробь $\frac{9876}{12345}$.

Найдём какая из двух полученных дробей ближе к единице. Эти дроби являются взаимно-обратными числами. Пусть $a < b$, тогда $1-\frac{a}{b}$ = $\frac{b-a}{b}$, а $\frac{b}{a}-1$ = $\frac{b-a}{a}$. Значит, $\frac{b-a}{b}$ < $\frac{b-a}{a}$, то есть правильная дробь ближе к единице.

Проверить, какая из двух полученных дробей ближе к единице, можно и непосредственными вычислениями.

2. Пересечение биссектрис. Может ли точка пересечения биссектрис треугольника делить пополам одну из них?

А. Блинков

Ответ: нет.

Решение. Пусть *I* – точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*, которая является серединой биссектрисы *AL*. Можно рассуждать по-разному.

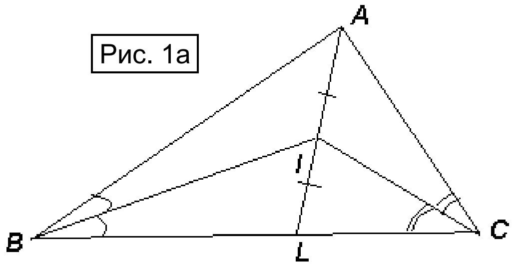


Рис. 1а

Первый способ. Проведем отрезки *BI* и *CI* (см. рис. 1а). Они являются медианами и биссектрисами треугольников *ABI* и *ACI* соответственно. Следовательно, *AB* = *BL* и *AC* = *CL*, откуда *AB* + *AC* = *BL* + *CL* = *BC*, что противоречит неравенству треугольника.

Завершить это рассуждение можно иначе. Сумма углов ALB и ALC равна 180°, а это углы при основании в равнобедренных треугольниках, но такие углы должны быть острыми. Противоречие.

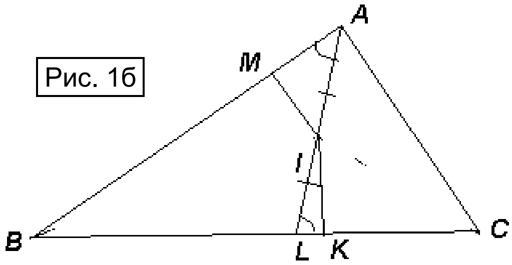


Рис. 1б

Второй способ. Проведем перпендикуляры *IK* и *IM* к сторонам *BC* и *AB* соответственно (см. рис. 1б). Так как *I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*, то они являются радиусами этой окружности. Тогда прямоугольные треугольники *KIL* и *MIA* равны (по катету и гипотенузе), откуда $\angle KLI = \angle MAI$. Но это накрест лежащие углы для прямых *BC* и *BA* и секущей *LA*, поэтому прямые *BC* и *BA* параллельны, что невозможно.

Отметим, что если K лежит между B и L, то аналогичное рассуждение приведёт к параллельности прямых BC и CA.

3. Футболки. По кругу, повернувшись лицом к его центру, стоят 15 человек в футболках трёх цветов: пятеро – в белых, пятеро – в серых и пятеро – в чёрных. Каждый из них сказал: «Моя футболка темнее футболки моего соседа справа». Оказалось, что все, кроме Вани, солгали. Сколько человек солгали бы, если бы вместо этого каждый сказал: «Моя футболка светлее футболки моего соседа справа»?

Все футболки одного цвета друг от друга не отличаются.

Т. Казицына

Ответ: 13.

Решение. Докажем, что люди стояли так, как показано на рис. 2. Заметим, что человек в чёрной футболке, справа от которого стоит человек в серой или белой футболках, говорит правду. Такой человек только один, значит каждый из четырёх остальных стоит слева от того, кто также в чёрной футболке. Иными словами, все 5 человек в чёрных футболках стоят подряд. Аналогично, любой человек в серой футболке может стоять только слева от человека в черной или серой футболках. Значит, и все 5 человек в серых футболках стоят подряд слева от людей в чёрных футболках. Тогда и оставшиеся 5 человек в белых футболках также стоят подряд.

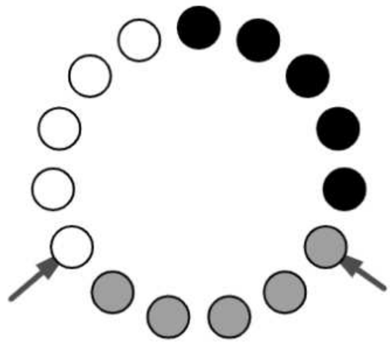


Рис. 2

Следовательно, утверждение «Моя футболка светлее футболки моего соседа справа» будет правдой ровно для двух человек, отмеченных на рисунке стрелками, а остальные 13 солгут.

4. Делители. В ряд записано четыре последовательных натуральных числа, которые больше, чем 2. Под каждым из чисел записали его наибольший собственный делитель (делитель, отличный от самого числа). Оказалось, что сумма всех записанных делителей равна одному из чисел первого ряда. Сколько простых чисел в первом ряду?

А. Пешнин

Ответ: два.

Решение. Пусть записаны числа n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Среди них два чётных и два нечётных. Оценим сумму записанных делителей снизу. У каждого из двух нечётных чисел делители не меньше 1. Наибольший делитель каждого из чётных чисел равен половине этого числа. Так как чётные и нечётные числа чередуются, то сумма делителей не меньше, чем $\frac{n}{2} + 1 + \frac{n+2}{2} + 1 = n + 3$. Тогда из условия следует, что сумма делителей в точности равна $n + 3$. Значит, ровно два исходных числа имеют наибольший делитель 1, так как $n > 2$. Следовательно, в первом ряду ровно два простых числа.

Приведём наименьшие четыре числа, удовлетворяющие условию задачи: 4, 5, 6, 7. Далее оно выполняется для четырёх последовательных натуральных чисел, из которых второе и четвёртое – простые числа-близнецы. Но конечно или бесконечно количество пар простых чисел-близнецов неизвестно до сих пор.

5. Куб. Бумажный квадрат разрезали на два равных прямоугольника и оклеили ими кирпич так, что каждая грань кирпича целиком покрыта ровно одним прямоугольником. Докажите, что из двух таких кирпичей можно сложить куб.

А. Шаповалов

Решение. Заметим, что сумма трёх углов при вершине кирпича равна 270°, а это меньше, чем 360°. Поэтому один прямоугольник не может покрывать три грани кирпича с общей вершиной. Так как хотя бы один из прямоугольников покрывает хотя бы три грани, то им покрыты либо две противолежащие грани и одна лежащая между ними, либо обе пары противолежащих граней. Но в последнем случае второй прямоугольник не может покрыть две оставшиеся противолежащие грани (иначе грань между ними будет покрыта дважды). Значит каждый прямоугольник покрывает ровно три грани.

Пусть размеры кирпича: $a\times b\times c$. Тогда один прямоугольник покрывает грани $a\times b$, $a\times c$ и $a\times b$, а его размеры: $a\times(2b + c)$. Второй прямоугольник покрывает грани $b\times c$, $a\times c$ и $b\times c$, а его размеры: $(a + 2b) \times c$ (см. рис. 3). Прямоугольники равные, поэтому либо $a = a + 2b$ и $2b + c = c$, что невозможно, либо $a = c$ и $2b + c = a + 2b$ (это верно при $a = c$). Кроме того, прямоугольники получены из квадрата, поэтому $a + 2b = 2a$, откуда $b = 0{,}5a$.

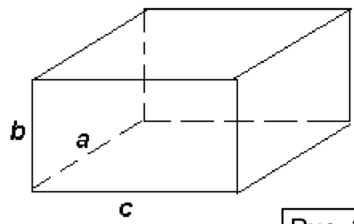


Рис. 3

Следовательно, из двух кирпичей можно сложить куб, если приложить их друг к другу гранями $a\times c$.

6. Карты в ряд. Ведущий выбрал 8 карт одной масти: 7, 8, 9, 10, валет, дама, король, туз и выложил их рубашкой вверх (что это за карты, не видно) в некотором неизвестном нам порядке. Разрешается указать на одну или несколько карт, лежащих подряд, и нам сообщат, что это за карты (без указания их порядка). За какое наименьшее количество вопросов можно наверняка определить положение всех карт?

М. Евдокимов

Ответ: за 4 вопроса.

Решение. Покажем, что за 4 вопроса можно определить положение всех карт. Первые три вопроса: спрашиваем про две средние карты, потом про четыре средние карты, а потом про шесть средних карт. Таким образом, все карты разобьются на пары симметричных, про каждую из которых мы узнаем их достоинства, но пока не знаем, какая из них где лежит. После этого спросим про первые 4 карты и тем самым получим информацию по местам карт в каждой из пар.

Докажем, что меньшим количеством вопросов не обойтись. Заметим, что любой вопрос устанавливает одну или две границы в ряду карт. Всего в этом ряду 7 промежутков между картами, а при меньшем количестве вопросов будут охвачены не более, чем $3\cdot 2 = 6$ промежутков. Но если какой-то из промежутков не был границей одного из вопросов, то примыкающие к нему карты для нас неразличимы.

7. Сумма. Известно, что $\dfrac{(a-b)^2}{(b-c)^2}+\dfrac{(b-c)^2}{(c-a)^2}+\dfrac{(c-a)^2}{(a-b)^2} = 5$. Найдите сумму: $\dfrac{a-b}{b-c}+\dfrac{b-c}{c-a}+\dfrac{c-a}{a-b}$.

Фольклор

Ответ: – 1.

Решение. Искомую сумму дробей $\dfrac{a-b}{b-c}+\dfrac{b-c}{c-a}+\dfrac{c-a}{a-b}$ обозначим через t.

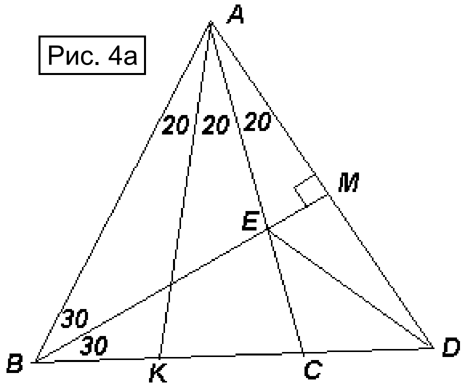
Тогда $t^2 = \dfrac{(a-b)^2}{(b-c)^2}+\dfrac{(b-c)^2}{(c-a)^2}+\dfrac{(c-a)^2}{(a-b)^2} + 2\left(\dfrac{a-b}{b-c}\cdot\dfrac{b-c}{c-a}+\dfrac{b-c}{c-a}\cdot\dfrac{c-a}{a-b}+\dfrac{c-a}{a-b}\cdot\dfrac{a-b}{b-c}\right) = 5 + 2\left(\dfrac{a-b}{c-a}+\dfrac{b-c}{a-b}+\dfrac{c-a}{b-c}\right)$.

Заметим, что $\dfrac{a-b}{c-a}+1=\dfrac{c-b}{c-a}=-\dfrac{b-c}{c-a}$. Аналогично $\dfrac{b-c}{a-b}+1=-\dfrac{c-a}{a-b}$ и $\dfrac{c-a}{b-c}+1=-\dfrac{a-b}{b-c}$. Таким образом, $t^2 = 5 + 2(-t-3) \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

8. Треугольник. В треугольнике ABC угол A равен $40°$, угол B равен $60°$, AK и BE – биссектрисы. Докажите, что $BK = CE$.

М. Волчкевич

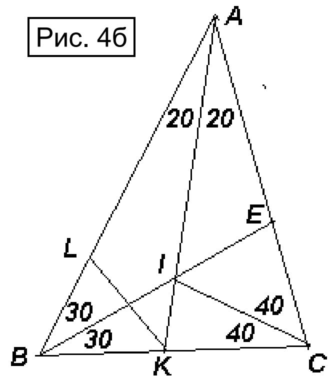
Рис. 4а



Решение. Первый способ. На продолжении стороны BC отметим точку D так, что угол CAD равен $20°$, тогда треугольник ABD – равносторонний (см. рис. 4а). Треугольники ABK и ADC равны (по стороне и прилежащим углам), откуда $BK = DC$.

Значит, осталось доказать, что $DC = EC$. Для этого продлим ,биссектрису BE до пересечения с AD в точке M. Получим, что BM – высота и медиана равностороннего треугольника ABD, поэтому EM – высота и Dмедиана треугольника AED. Следовательно, $AE = DE$, поэтому $\angle ADE = \angle DAE = 20°$, значит, $\angle CDE = 40°$. Из условия следует, что угол ACB равен $80°$, а этот угол является внешним для треугольника CDE, поэтому $\angle CED = 40°$. Из равенства углов CDE и CED следует, что $DC = EC$, откуда и следует утверждение задачи.

Рис. 4б



Второй способ. Пусть AK и BE пересекаются в точке I, тогда CI – биссектриса угла ACB, который равен $80°$ (см. рис. 4б). Из треугольника BEC получим, что угол BEC равен $70°$, тогда угол EIC также равен $70°$, поэтому $CE = CI$. Так как в треугольнике AKC угол AKC равен $80°$, то $AK = AC$.

Теперь отметим точку L на стороне AB так, что $BL = BK$, тогда треугольник KBL – равносторонний. Учитывая, что $\angle ALK = 120°$, получим, что $\angle AKL = 40° = \angle ACI$. Таким образом треугольники AKL и ACI равны (по стороне и прилежащим углам), следовательно, $AK = KL = CI = CE$, что и требовалось.

9. Разноцветная доска. Клетки доски размером 100×100 раскрашены в 2025 цветов. Оказалось, что для каждого цвета на доску можно поставить ладью, которая бьёт все клетки этого цвета (ладья бьёт и клетку, на которой стоит). Докажите, что в каком-то ряду (горизонтальном или вертикальном) присутствуют клетки больше, чем 60 цветов.

А. Грибалко

Решение. Пусть, например, на доске n клеток красного цвета. Заметим, что красный цвет встречается в $n + 1$ ряду (если все красные клетки расположены в одном ряду или бьющая их все ладья сама стоит на красной клетке) или в $n + 2$ рядах (если красные клетки расположены и в горизонтальном, и вертикальном ряду, а их пересечение – не красная клетка).

Пусть на доске клеток i-го цвета n_i, тогда этот цвет встречается не менее, чем в $n_i + 1$ ряду. Тогда сумма всех рядов для всех цветов не меньше, чем $(n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \ldots + (n_{2025} + 1) = (n_1 + n_2 + \ldots + n_{2025}) + 2025 = 12025$. Так как $12025 > 12000 = 200\cdot60$, то по принципу Дирихле найдется ряд, в котором есть клетки, покрашенные в более чем 60 цветов.