



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

LEVELUP

هندسه ۲



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

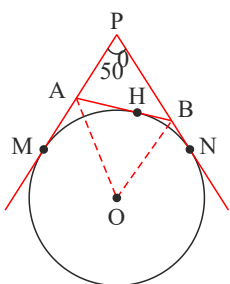
هندسه ۲ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان هندسه : امیرحسین نادری

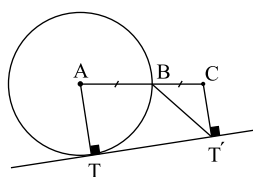
فصل اول : دایره

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

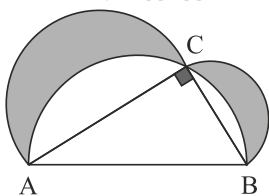
۱ در دایره مقابل به مرکز O ، اندازه زاویه AOB چند درجه است؟



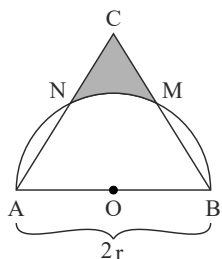
۲ در دایره مقابل $AB = BC$ است. ثابت کنید: $\angle ABT' = \angle BT'C$



۳ در شکل مقابل بر اضلاع قائمه مثلث قائم الزاویه ABC ، دو نیم دایره قرار دارد. نسبت مجموع دو ناحیه هاشور خورده به مساحت مثلث ABC چقدر است؟

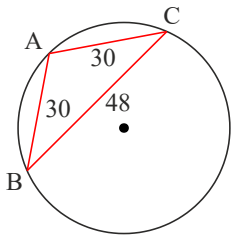


۴ در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاضلاع است. مساحت قسمت هاشور زده چقدر است؟

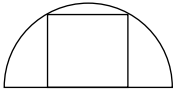




۵ در شکل مقابل شعاع دایره چقدر است؟

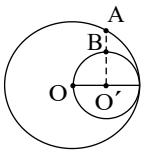


۶ در شکل مقابل شعاع نیم‌دایره $7/5$ سانتی‌متر است، مساحت مربع محاط در نیم‌دایره چند سانتی‌متر مربع است؟

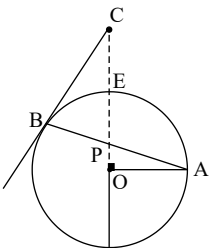


۷ در دایره $C(O, R)$ ، دو وتر موازی $AB = 4$ و $CD = 8$ به فاصله ۶ واحد از یکدیگر رسم شده‌اند. شعاع دایره را به دست آورید.

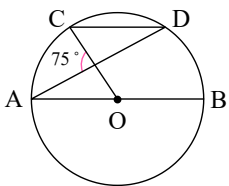
۸ در شکل زیر O مرکز دایره بزرگ و O' مرکز دایره کوچک و AB عمود بر OO' و طول AB برابر $3(3 - \sqrt{3})$ سانتی‌متر است، شعاع دایره بزرگ چند سانتی‌متر است؟



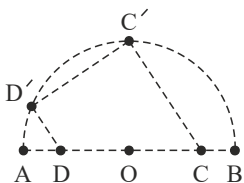
۹ در دایره مقابل به مرکز O ثابت کنید: $BC = CP$



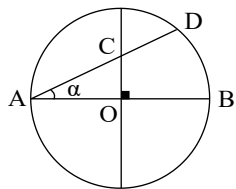
۱۰ در دایره شکل مقابل O مرکز و $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.



۱۱ در دایره مقابل $AB = AC = 12$ و وتر AD با BC در E برخورد کرده، طوری که $AE = 8$ است. طول پاره خط AD چقدر است؟

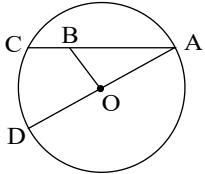


۱۲ در شکل مقابل $OC = OD$ و $DD' \parallel CC'$ است. ثابت کنید DD' عمود است.

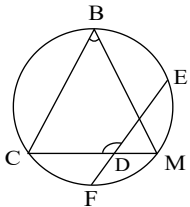


۱۳ در شکل مقابل دو قطر دایره عمود بر هم هستند، نسبت $\frac{CD}{CA}$ چقدر است؟

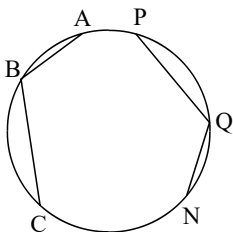
۱۴ در دایره‌ای به مرکز O ، قطر AD ، وتر AC و نقطه B بر این وتر، چنان انتخاب شده‌اند که هریک از زوایای $\hat{C}OD$ و $\hat{A}BO$ به اندازه 60° هستند. اگر $OB = 5\text{cm}$ آنگاه طول وتر AC چقدر است؟



۱۵ در شکل مقابل M وسط کمان $\widehat{EF}$ است و $\widehat{BC} = 50^\circ$ ، اندازه $\hat{B} + \hat{D}$ چند درجه است؟

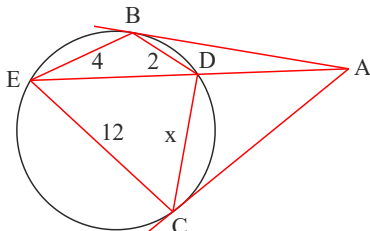


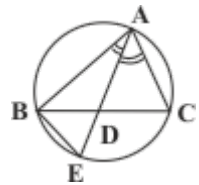
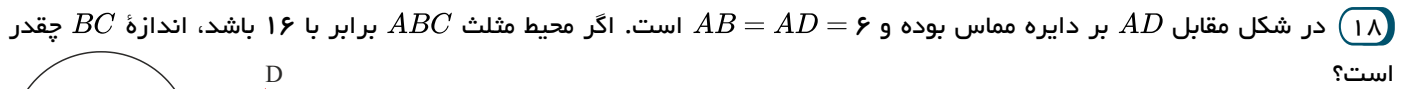
۱۶ در شکل مقابل، $AB = QN$ و $BC = PQ$ است. ثابت کنید چهارضلعی $APNC$ دوزنقه متساوی الساقین است.



درس دوم : رابطه های طولی در دایره

۱۷ در شکل مقابل B و C نقاط تماس هستند. مقدار x چقدر است؟



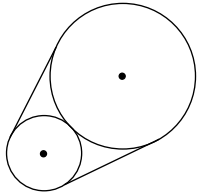
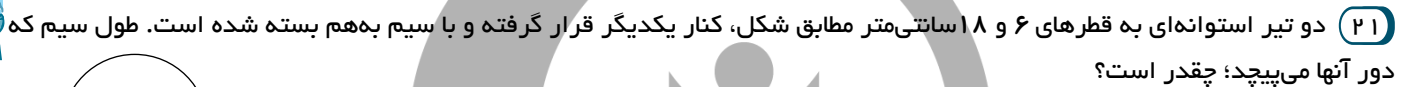


۱۹) با توجه به شکل احکام زیر را ثابت کنید: (AD نیمساز زاویه BAC است) الف) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \text{ (ب)}$$

$$AD^r = AB \cdot AC - BD \cdot DC \quad (\P)$$

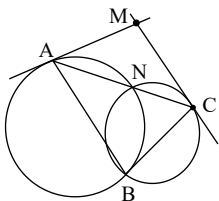
۲۰ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



۲۲ ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره هم‌مرس هستند.

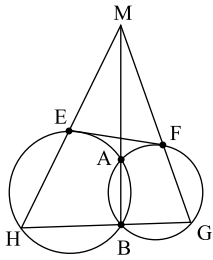
درس سوم: چند ضلعی های محاطی و محیطی

۲۳ در شکل مقابل پاره‌خط AC از N می‌گذرد. اگر MA و MC در دایره‌ها مماس باشند، آنگاه ثابت کنید $MABC$ محاطی است.

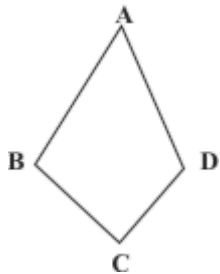




- ۲۴ در شکل زیر، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند و M نقطه‌ای بر امتداد پاره‌خط AB است. اگر دو قاطع دلخواه MH و MG را رسم کنیم، چهارضلعی $EFGH$ همواره:

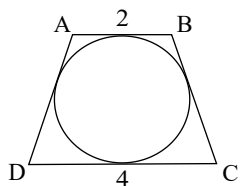


- ۲۵ در چهارضلعی محاطی نیمساز زاویه خارجی A با نیمساز داخلی رأس مقابل C ، یکدیگر را در نقطه واقع بر کدام دایره قطع می‌کنند؟
- ۲۶ یک دوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.



- ۲۷ در چهارضلعی $ABCD$ ، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.

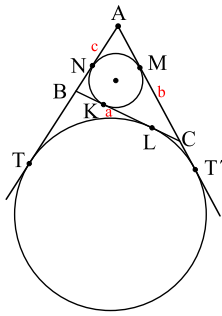
- ۲۸ یک دوزنقه متساوی‌الساقین، محیط بر دایره‌ای به شعاع r است. اگر زاویه دوزنقه 120° باشد، مساحت دوزنقه چند برابر r^2 است؟
- ۲۹ دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ ($AD = BC$) بر دایره‌ای به شعاع R محیط است، ثابت کنید رابطه $AB \times CD = 4R^2$ صحیح است.



- ۳۰ در شکل مقابل دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ بر دایره محیط شده است، مساحت آن چند است؟

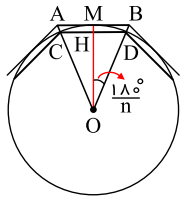


۳۱ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M ، N و K باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:



$$\begin{cases} AM = AN = P - a \\ BN = BK = P - b, CM = CK = P - c \\ AT = AT' = P \end{cases}$$

۳۲ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های

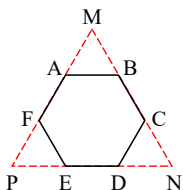


$$AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \text{ و } CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

۳۳ شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم. الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.
پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC ، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟
ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

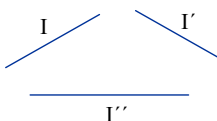
$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



فصل دوم: تبدیل‌های هندسی

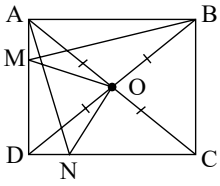
درس اول: تبدیل‌های هندسی

۳۴ سه خط دوبه‌دو ناموازی I و I' و I'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی I و I' و موازی I'' باشد.

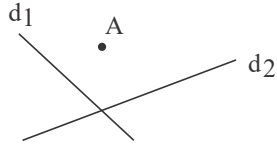




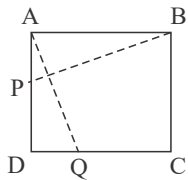
۳۵ در مربع $ABCD$ ، O مرکز مربع و $AM = DN$. ثابت کنید با دوران به مرکز O و زاویه 90° ، مثلث ABM بر مثلث ADN تصویر می‌شود.



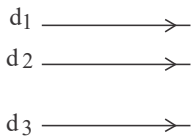
۳۶ اگر بخواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی به رأس A طوری رسم کنیم که دو رأس دیگر آن بر d_1 و d_2 قرار گیرد، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟



۳۷ چهارضلعی $ABCD$ مربع است و داریم: $AP = DQ$. تحت چه تبدیلی مثلث APB بر مثلث DQ منطبق می‌شود؟



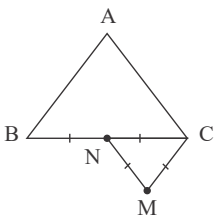
۳۸ سه خط d_1 و d_2 و d_3 موازی‌اند. چند مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد که رأس قائمه آن بر d_2 و رأس‌های دیگر آن بر d_1 و d_3 قرار گیرد؟



۳۹ خط d را نسبت به خط Δ بازتاب می‌کنیم تا خط d' به‌دست آید. d' را تحت زاویه α و به مرکز O دوران می‌دهیم تا خط d'' به‌دست آید. اگر زاویه بین d و d' برابر β باشد، زاویه بین d و d'' کدام است؟ (دوران در جهت ساعتگرد است)

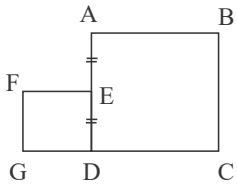
۴۰ ترکیب یک دوران و یک انتقال کدام است؟

۴۱ مطابق شکل با ترکیب کدام تبدیل‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع MNC است؟





۴۲ مطابق شکل $ABCD$ و $EFGD$ مربع هستند و E وسط AD است. با ترکیب کدام تبدیل‌ها، $ABCD$ تصویر $EFGD$ است؟

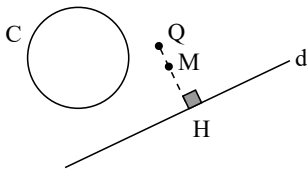


۴۳ ترکیب یک تجانس با مرکز O و یک انتقال چه تبدیلی است؟

درس دوم : کاربرد تبدیل‌ها

۴۴ نقطه M درون زاویه xOy قرار دارد. می‌خواهیم A و B را بر Ox و Oy بیابیم که محیط $\triangle MAB$ کمترین مقدار ممکن باشد. کدام تبدیل استفاده می‌شود؟

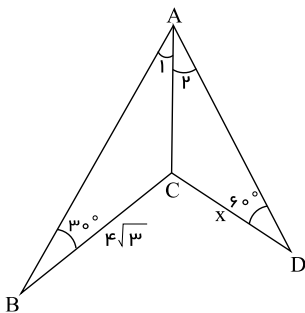
۴۵ خط d و دایره C داده شده‌اند. از نقطه M خطی بگذرانید که d را در نقطه N و دایره را در نقطه P قطع کند و $MN = 2MP$ باشد. (راهنمایی: از M بر d عمود کرده و به اندازه نصف آن از طرف M ادامه دهید)



فصل سوم : روابط طولی در مثلث

درس اول : قضیه سینوس‌ها

۴۶ در شکل مقابل، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است. مقدار x چقدر است؟



۴۷ در مثلث ABC داریم: $\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \sin \hat{A}$. نوع مثلث را مشخص کنید.

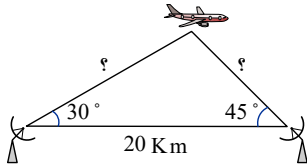
۴۸ در مثلث ABC ، I محل هم‌مرسی نیم‌سازهای داخلی زوایای مثلث است. نسبت شعاع دایره محیطی مثلث BIC به شعاع دایره محیطی مثلث ABC را برحسب زاویه A بیابید.

۴۹ در مثلث ABC ، H محل هم‌مرسی ارتفاع‌هاست.

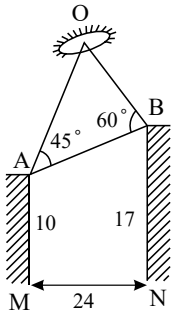
ثابت کنید شعاع دایره محیطی مثلث‌های AHB و BHC و AHC با شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر است.



- ۵۱ دو ایستگاه رادار که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع هستند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما از دو ایستگاه را به دست آورید.

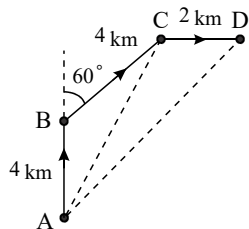


- ۵۲ دو نفر (A, B) به‌طور هم‌زمان از بالای دو ساختمان به ارتفاع‌های ۱۷ و ۱۰ متر، یک شیء نورانی را مطابق شکل با زاویه دید 45° و 60° (نسبت به پاره‌خط AB) رؤیت کرده‌اند. اگر فاصله دو ساختمان از یکدیگر ۲۴ متر باشد، فاصله شیء نورانی از دو نفر را حساب کنید. ($\sin 75^\circ \sim 0.9$)

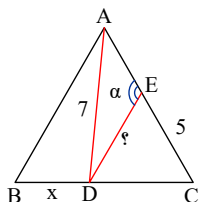


درس دوم: قضیه کسینوس ها

- ۵۳ یک پیک موتوری در مسیر رساندن مرسولات به مقصد، ابتدا ۴ کیلومتر به‌سمت شمال حرکت می‌کند و سپس مسیرش را 60° به‌سمت شرق منحرف نموده و ۴ کیلومتر دیگر حرکت می‌کند و در انتها ۲ کیلومتر مستقیم به‌سمت شرق حرکت می‌کند تا به مقصد می‌رسد. فاصله مبدأ تا مقصد (AD) چقدر است؟ (راهنمایی: ابتدا در مثلث ABC ، طول AC را حساب کنید، سپس در مثلث ACD ، زاویه $\hat{ACD}$ را یافته و طول AD را محاسبه کنید)

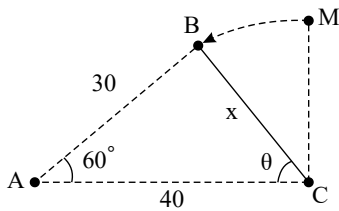


- ۵۴ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D ، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ نقطه E ، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟ ($CD > BD$)

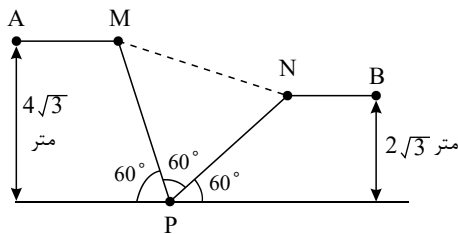




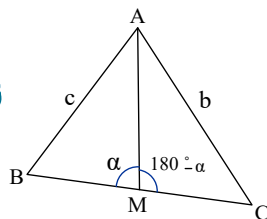
۵۵ مطابق شکل در اثر وزش طوفان، تیر چراغ‌برقی منحرف شده و در وضعیت روبه‌رو قرار می‌گیرد. نوک تیر چراغ‌برق از نقطه A به زاویه 60° دیده می‌شود و فاصله نقطه A از نوک تیر، 30 متر می‌باشد. اگر فاصله نقطه A تا پای تیر 40 متر باشد، طول تیر چراغ‌برق و سینوس زاویه انحراف آن از راستای افقی را محاسبه کنید.



۵۶ مطابق شکل، دنده‌ای از نقطه A به سمت نقطه B شروع به دویدن می‌کند. مسافتی را که این دنده روی پل MN طی می‌کند، حساب کنید.



۵۷ در مثلث ABC ، میانه AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث AMC و AMB ،

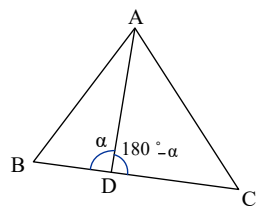


b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

در حالت خاص $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.

۵۸ در مثلث ABC ، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

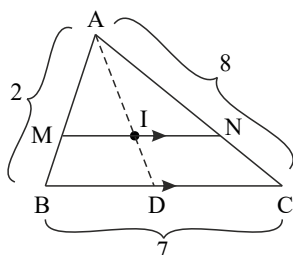


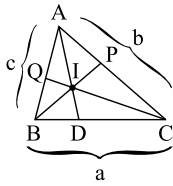
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

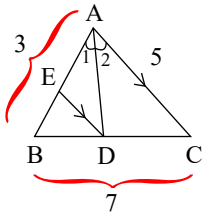
۵۹ در شکل مقابل، I محل هم‌رسانی نیمسازهاست. حاصل $\frac{S_{MNCB}}{S_{\triangle ABC}}$ چقدر است؟ ($MN \parallel BC$)



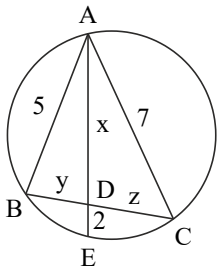


۶۰ در مثلث ABC ، I محل هم‌رسانی نیم‌سازهای داخلی است. ثابت کنید:

الف) $\frac{DI}{AI} = \frac{a}{b+c}, \frac{PI}{BI} = \frac{b}{a+c}, \frac{QI}{CI} = \frac{c}{a+b}$
 ب) $\frac{DI}{AD} + \frac{PI}{PB} + \frac{QI}{CQ} = 1$



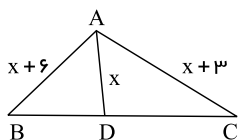
۶۱ در شکل مقابل، AD نیم‌ساز و $DE \parallel AC$ است. محیط مثلث ADE را حساب کنید.



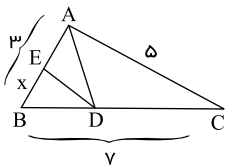
۶۲ در شکل مقابل، AD نیم‌ساز $\hat{A}$ است. مقادیر x و y و z را حساب کنید.

۶۳ در مثلث ABC رابطه $\hat{A} = 2\hat{B}$ برقرار است. ثابت کنید: $a^2 - b^2 = bc$.

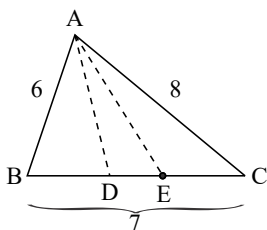
۶۴ در مثلث ABC ، $AB = 8$ و $AC = 6$ و $\hat{A} = 2\hat{C}$ است. اندازه ضلع BC را حساب کنید.



۶۵ در شکل مقابل، $\hat{A} = 120^\circ$ و AD نیم‌ساز داخلی $\hat{A}$ است. مقدار x را حساب کنید.



۶۶ در شکل مقابل، AD و DE نیم‌سازند. x چقدر است؟



۶۷ در مثلث ABC ، اضلاع $AB = 6$ و $AC = 8$ و $BC = 7$ هستند. نیم‌ساز AD را رسم می‌کنیم.



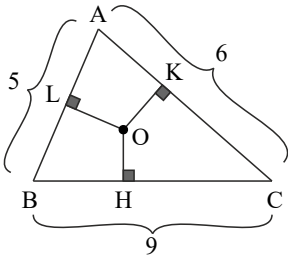
الف) طول BD و CD را حساب کنید.

ب) طول نیمساز AD را حساب کنید.

پ) اگر AE نیمساز زاویه $\hat{D}AC$ باشد، طول AE را حساب کنید.

درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)

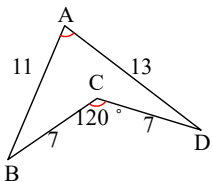
۶۸) در شکل مقابل داریم: $OK = \sqrt{2}$ ، $OH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ، طول OL چقدر است؟



۶۹) در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

۷۰) طول ضلع‌های یک مثلث ۲۵ و ۳۹ و ۴۰ هستند، قطر دایره محیطی آن چقدر است؟

۷۱) در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $ABCD$ را بیابید.
راهنمایی: B را به D وصل کنید.





۷۲ در شکل زیر، AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.

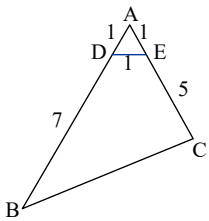
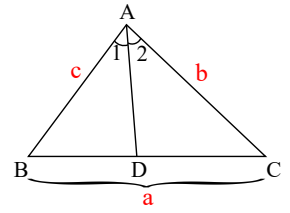
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \times \sin \frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \times \sin \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = AD \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} (\dots + \dots)$$

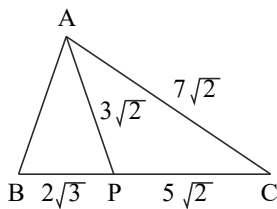
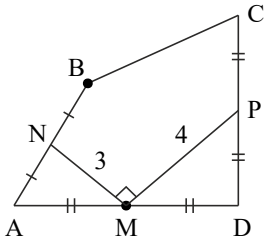
$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{(\dots + \dots) \sin \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{2 AB \cdot AC \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}}{(\dots + \dots) \sin \frac{\hat{A}}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \dots \Rightarrow (A \text{ نیمساز رأس}) d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b + c}$$



۷۳ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.

۷۴ مطابق شکل، M, N و P نقاط وسط اضلاع چهارضلعی $ABCD$ هستند و $\hat{NMP} = 90^\circ$. مساحت $ABCD$ چقدر است؟

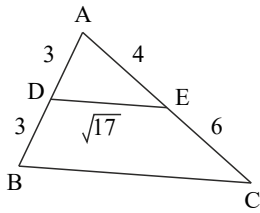


۷۵ در شکل مقابل، مساحت مثلث APB چقدر است؟

۷۶ در مثلث ABC ، $m_b = 12$ و $m_c = 15$ و زاویه بین این دو میانه 120° می‌باشد. مساحت مثلث ABC چقدر است؟



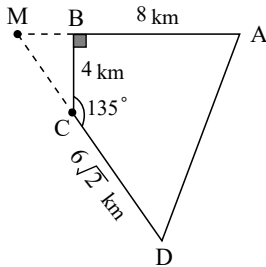
۷۷ در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی $BDEC$ چقدر است؟



۷۸ مساحت مثلث با دو ضلع به اندازه‌های ۱۶ و ۹ واحد برابر با $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. طول بزرگ‌ترین ضلع این مثلث چقدر است؟

۷۹ یک کشتی گشت‌زنی دریایی، از نقطه A (مرکز گشت دریایی) $۸km$ به سمت غرب حرکت کرده و سپس $۴km$ به سمت جنوب حرکت می‌کند و در ادامه با زاویه ۱۳۵° منحرف شده و مسیر $۶\sqrt{۲}km$ را طی کرده و در انتها به مرکز گشت دریایی بازمی‌گردد. این کشتی گشت‌زنی چه مساحتی را پیمایش کرده است؟

(راهنمایی: اضلاع و مساحت مثلث MBC را محاسبه کرده و با استفاده از رابطه سینوسی مساحت، مساحت مثلث AMD را محاسبه نمایید)



۸۰ طول سه ارتفاع یک مثلث ۳، ۴ و ۶ هستند. مساحت مثلث را حساب کنید.

۸۱ ارتفاع‌های مثلثی با مقادیر $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲}$ متناسب هستند. نوع مثلث و زوایای آن را مشخص کنید.

۸۲ مثلث با طول اضلاع ۳، ۵ و ۵ با مثلث به ارتفاع‌های ۱۰، ۱۰ و x متشابه است. x چقدر است؟



پاسخ نامه تشریحی

۱ می‌دانیم که شعاع دایره در نقطه تماس بر مماس عمود است. پس:

$$\begin{cases} OH \perp AB, ON \perp BN, OH = ON, OB \text{ (مشترک)} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle OBH \cong \triangle OBN \Rightarrow \hat{OBH} = \hat{OBN} \text{ (۱)} \\ OH \perp AB, OM \perp AM, OH = OM, OA \text{ (مشترک)} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle OAH \cong \triangle OAM \Rightarrow \hat{OAH} = \hat{OAM} \end{cases}$$

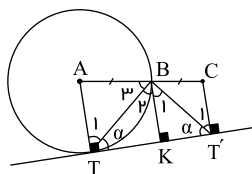
$$\begin{cases} \text{(۱)}, \hat{HBN} = \hat{P} + \hat{PAB} \Rightarrow \hat{OBH} = \frac{\hat{HBN}}{2} = \frac{\hat{P}}{2} + \frac{\hat{PAB}}{2} \\ \text{(۲)}, \hat{HAM} = \hat{P} + \hat{PBA} \Rightarrow \hat{OAH} = \frac{\hat{HAM}}{2} = \frac{\hat{P}}{2} + \frac{\hat{PBA}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{OAH} + \hat{OBH} = \hat{P} + \frac{\hat{PAB} + \hat{PBA}}{2} = \hat{P} + \frac{180^\circ - \hat{P}}{2} = \hat{P} + 90^\circ - \frac{\hat{P}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{P}}{2}$$

$$\hat{AOB} = 180^\circ - (\hat{OAH} + \hat{OBH}) = 180^\circ - (90^\circ + \frac{\hat{P}}{2}) = 90^\circ - \frac{\hat{P}}{2} \Rightarrow \hat{AOB} = 90^\circ - \frac{50^\circ}{2} = 65^\circ$$

۲

از B موازی AT و CT' خطی رسم می‌کنیم تا این عمود، در نقطه k پاره خط TT' را قطع کند. چون $AB = BC$ پس $TK = KT'$. لذا در دوزنقه $ACT'T$ داریم:



$$\triangle BTT' : TK = KT', \hat{K} = 90^\circ \Rightarrow BT = BT', \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

$$BK \parallel AT \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{T}_1, CT' \parallel BK \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{T}'_1$$

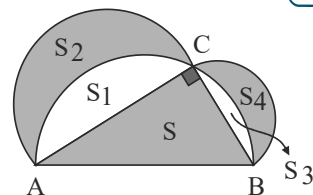
$$AB = AT \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{T}_1$$

$$\Rightarrow \hat{T}_1 = \hat{B}_2 = \hat{B}_2 = \hat{B}_1 = \hat{T}'_1 \Rightarrow \hat{ABT}' = \hat{3T}'_1$$

$$\begin{aligned} \hat{C} = 90^\circ &\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4} AB^2 = \frac{\pi}{4} AC^2 + \frac{\pi}{4} BC^2 \end{aligned}$$

۳

با توجه به شکل داریم:



$$\Rightarrow \text{مساحت نیم‌دایره به قطر } AB = \text{مساحت نیم‌دایره به قطر } AC + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر } BC$$

$$\Rightarrow S + \cancel{S_1} + \cancel{S_2} = (\cancel{S_1} + S_3) + (\cancel{S_2} + S_4) \Rightarrow S = S_3 + S_4 \Rightarrow \frac{S_3 + S_4}{S} = 1$$

۴ مساحت قسمت هاشورزده برابر است با مساحت لوزی $CMON$ منهای مساحت قطاع $\hat{MON} = 60^\circ$. لوزی $CMON$ از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع r (شعاع دایره) تشکیل شده است:

$$\triangle MOB : \hat{B} = 60^\circ, OB = OM \Rightarrow BM = OB = OM = r \Rightarrow CM = 2r - MB \Rightarrow CM = r$$

به همین ترتیب: $CN = r$.

$$CMNO \text{ مساحت لوزی } 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

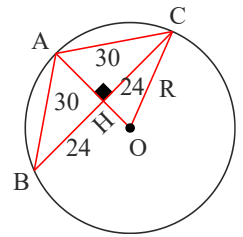
$$\hat{MON} \text{ مساحت قطاع } \frac{1}{6} \times \pi \times (r)^2 = \frac{\pi r^2}{6} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 - \frac{1}{6} \pi r^2 = \frac{r^2}{6} (3\sqrt{3} - \pi)$$

۵ چون $AB = AC$ پس A وسط کمان BC قرار دارد و پاره خط OA بر وتر BC عمود است. داریم:

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

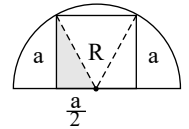


$$\begin{aligned} \triangle ABH : \hat{H} = 90^\circ &\Rightarrow AH^2 = 30^2 - 24^2 \Rightarrow AH = 18 \\ OH &= R - 18 \\ \triangle OHC : R^2 &= 24^2 + (R - 18)^2 \Rightarrow R = 25 \end{aligned}$$



۶ از مرکز دایره به دو رأس بالایی مربع وصل می‌کنیم و در مثلث هاشور خورده رنگ رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

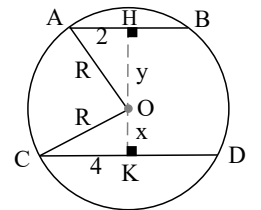
$$a^2 + \frac{a^2}{4} = R^2 \Rightarrow 5a^2 = 4R^2 \Rightarrow 5a^2 = 4\left(\frac{15}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 45$$



۷ مطابق شکل، نقطه O مرکز دایره است. می‌دانیم که عمود رسم‌شده از مرکز دایره بر وتر، آن را نصف می‌کند، داریم:

$$\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ, AH = BH = \frac{4}{2} = 2 \\ \triangle AOH : y^2 = R^2 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{K} = 90^\circ, CK = DK = \frac{4}{2} = 2 \\ \triangle OKC : x^2 = R^2 - 16 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y^2 = R^2 - 4 \\ x^2 = R^2 - 16 \end{cases} \Rightarrow y^2 - x^2 = 12 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 12$$

از طرفی فاصله دو وتر از یکدیگر ۶ واحد است، پس:

$$x + y = 6 \Rightarrow (y - x) \times 6 = 12 \Rightarrow y - x = 2$$

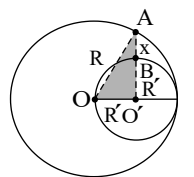
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \xrightarrow{y^2 = R^2 - 4} y^2 = R^2 - 4 \Rightarrow 16 = R^2 - 4 \Rightarrow R^2 = 20 \Rightarrow R = 2\sqrt{5}$$

با حل دستگاه زیر مقادیر x و y و در نهایت R به دست می‌آید:

توجه: دو وتر AB و CD نمی‌توانند در یک طرف O قرار گیرند. (چرا؟)

۸ رابطه فیثاغورس را در مثلث O'A می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} (x + R')^2 + R'^2 &= R^2 \xrightarrow{R' = \frac{R}{2}} \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow x + \frac{R}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1) \\ \Rightarrow 3(3 - \sqrt{3}) &= \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow 3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow R = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

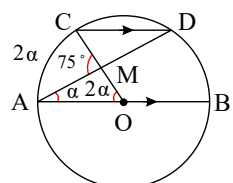


۹ از O به B وصل می‌کنیم. شعاع OB در B بر مماس BC عمود است. پس:

$$\begin{cases} \hat{PBC} = 90^\circ - \hat{OBA} \\ OA = OB \Rightarrow \hat{OBA} = \hat{OAB} \Rightarrow \hat{PBC} = 90^\circ - \hat{OAB} = \hat{OPA} \Rightarrow \hat{PBC} = \hat{BPC} \Rightarrow BC = CP \\ \hat{OPA} = 90^\circ - \hat{OAB} \end{cases}$$

۱۰ زاویه محاطی A را برابر α در نظر می‌گیریم، پس کمان روبه‌روی آن برابر $\widehat{BD} = 2\alpha$ می‌شود.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$$

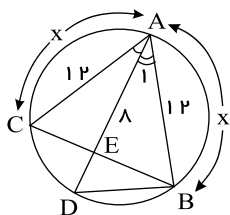


اندازه زاویه مرکزی AOC برابر کمان روبه‌رویش یعنی $\widehat{AC} = 2\alpha$ می‌شود.

$$\triangle AOM : 75^\circ = \alpha + 2\alpha = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$$



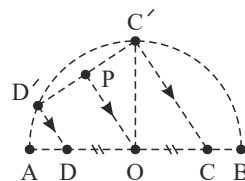
۱۱) مثلث‌های AEB و ADB ، بنابر دو زاویه برابر متشابه‌اند، داریم:



$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{C} = \hat{ABC} \\ \hat{A}_1 \text{ (زاویه مشترک)} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{12}{AD} = \frac{8}{12} \Rightarrow AD = 18$$

۱۲) در ذوزنقه $CC'D'D$ مطابق شکل داریم:

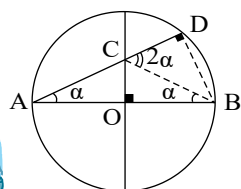
$$OC = OD, OP \parallel DD' \parallel CC' \Rightarrow PD' = PC' \\ PD' = PC', OC' = OD' \Rightarrow OP \perp D'C'$$



از آنجا که $OP \parallel DD'$ است پس DD' بر $C'D'$ عمود است.

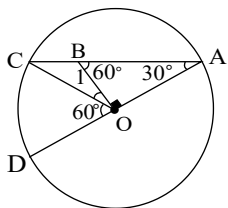
۱۳) مطابق شکل، چون دو قطر دایره بر هم عمودند، (دو قطر عمودمنصف یکدیگرند) پس $AC = BC$ و در نتیجه $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$ می‌باشد. چون $\hat{C}_1$ زاویه خارجی مثلث ABC است، پس $\hat{C}_1 = 2\alpha$.

چون $AC = BC$ است، نسبت $\frac{CD}{AC}$ برابر $\frac{CD}{BC}$ می‌باشد. حال اگر به نوع زاویه محاطی $\hat{D}$ دقت کنیم، پی می‌بریم این زاویه روبه‌رو به قطر است و داریم:



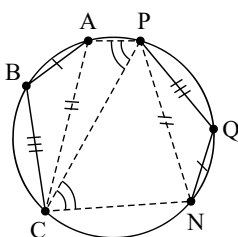
$$\hat{D} = 90^\circ \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{CD}{BC} \xrightarrow{BC=AC} \frac{CD}{AC} = \cos 2\alpha$$

۱۴) زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}\hat{O}\hat{D}$ محاطی و مرکزی روبه‌رو به یک کمان هستند پس زاویه $\hat{A}$ نصف $\hat{C}\hat{O}\hat{D}$ است یعنی $\hat{A} = 30^\circ$. حال در مثلث OBA چون $\hat{B} = 60^\circ$ است پس زاویه $\hat{O} = 90^\circ$ می‌شود و در نتیجه $\hat{O}_1 = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ و همچنین در مثلث OAC داریم $\hat{A} = \hat{C} = 30^\circ$ ، پس مثلث OBC متساوی‌الساقین است و $BC = OB = 5\text{cm}$ و از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OAB ، ضلع OB روبه‌رو زاویه 30° بوده و نصف وتر است، پس $AB = 10\text{cm}$ و در نتیجه $AC = 10\text{cm} + 5\text{cm} = 15\text{cm}$.



۱۵) چون M وسط کمان $\widehat{EF}$ است پس $\widehat{ME} = \widehat{FM}$ و در ضمن داریم:

$$\begin{cases} \widehat{B} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM}}{2} \\ \hat{D} = \frac{(\widehat{BC} + \widehat{BE}) + \widehat{FM}}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM} + \widehat{BC} + \widehat{BE} + \widehat{FM}}{2} \xrightarrow{\widehat{FM} = \widehat{ME}} \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



۱۶) می‌دانیم در هر دایره، اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها هم برابرند و بالعکس.

بنابراین مطابق فرض مسئله داریم:



$$\begin{cases} AB = QN \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{QN} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{PQN} \Rightarrow AC = PN \quad (1) \\ BC = PQ \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{PQ} \end{cases}$$

از طرفی برای زوایای محاطی $\widehat{APC}$ و $\widehat{PCN}$ داریم:

$$\widehat{APC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}, \widehat{PCN} = \frac{\widehat{PQN}}{2} \Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{PCN} \Rightarrow AP \parallel CN \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی $APNC$ دوزنقه متساوی‌الساقین است.

۱۷

$$\text{مماس‌های رسم‌شده بر دایره} \begin{cases} \triangle ABD \sim \triangle ABE \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE} \\ \triangle ADC \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} \end{cases}, AB = AC$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6$$

۱۸

$$AB = AD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}, \quad (\text{محاطی}) \quad \hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \quad (\text{ظلی}) \quad \hat{A} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow AC = CD$$

$$\triangle ABC \text{ محیط} = 16 = AB + AC + BC = 6 + AC + BC \Rightarrow AC + BC = 10$$

$$CD = AC \Rightarrow BD = BC + CD = BC + AC = 10 \Rightarrow BD = 10$$

$$AD^2 = CD \times BD \Rightarrow 36 = CD \times 10 \Rightarrow CD = 3.6$$

$$\Rightarrow BC = BD - CD = 10 - 3.6 = 6.4$$

۱۹ الف و ب

$$\begin{cases} \hat{CAD} = \hat{DAB} \\ \hat{E} = \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AEB \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AB \times AC = AD \times AE$$

$$AB \times AC = AD \times AE \Rightarrow AB \times AC = AD \times (AD + DE)$$

$$\Rightarrow AB \times AC = AD^2 + AD \times DE$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AD^2 = AB \times AC - AD \times DE \\ AD \times DE = BD \times DC \end{cases}$$

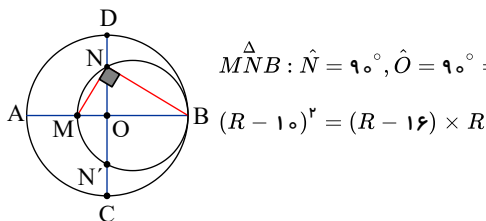
$$\Rightarrow AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

ب

$$AM = 16, DN = 10, OA = R \Rightarrow OM = R - 16$$

$$OB = R, ON = R - 10$$

۲۰



$$\triangle MNB: \hat{N} = 90^\circ, \hat{O} = 90^\circ \Rightarrow ON^2 = OM \times OB$$

$$(R - 10)^2 = (R - 16) \times R$$

$$R^2 - 20R + 100 = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

$$\text{شعاع دایره کوچکتر} = \frac{BM}{2} = \frac{2R - AM}{2} = \frac{2 \times 25 - 16}{2} = 17$$

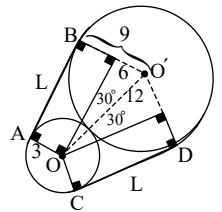
۲۱ چون دو دایره بر هم مماس هستند، طول خط‌المركزین برابر است با:

$$OO' = R_1 + R_2 = 3 + 9 = 12$$

از O عمودهایی بر شعاع‌های $O'B$ و $O'D$ فرود می‌آوریم، در نتیجه دو مستطیل به وجود می‌آید، بنابراین طول سیم برابر است با دو برابر طول مماس مشترک خارجی و مجموع یک کمان 120° از دایره کوچک (چرا؟) و یک کمان 240° از دایره بزرگ (چرا؟):



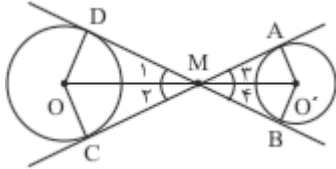
$$x = 2\sqrt{12^2 - (6)^2} + \frac{120}{360}(2\pi \times 3) + \frac{240}{360}(2\pi \times 9) = 12\sqrt{3} + 2\pi + 12\pi = 12\sqrt{3} + 14\pi$$



توجه: اگر دو دایره مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی آنها را از رابطه $L = 2\sqrt{RR'}$ هم می‌توان به دست آورد.

(۲۲)

مماس‌های مشترک داخلی BD, AC همدیگر را در M قطع می‌کنند. را به O, O' وصل می‌کنیم. اگر ثابت کنیم $\hat{OMO'}$ نیم‌صفحه است یعنی نقاط M, O, O' روی یک خط راست قرار دارند.



$$\begin{cases} OC = OD \\ MC = MD \Rightarrow \triangle OMD \cong \triangle OMC \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_r \\ OM = OM \end{cases}$$

$$\begin{cases} O'A = O'B \\ MA = MB \Rightarrow \triangle O'AM \cong \triangle O'BM \Rightarrow \hat{M}_r = \hat{M}_f \\ O'M = O'M \end{cases}$$

از طرفی چون زوایای $\hat{AMB}, \hat{DMC}$ متقابل به رأس هستند پس:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_r = \hat{M}_r + \hat{M}_f \Rightarrow 2\hat{M}_1 = 2\hat{M}_f \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_r = \hat{M}_f = \hat{M}_f$$

چون زوایای $\hat{AMO'}, \hat{OMC}$ برابرند و در رأس M مشترکند و دو ضلع از آنها با هم در یک امتداد قرار دارند دو ضلع دیگر طبق قضیهٔ عکس زوایای متقابل به رأس باید در یک امتداد باشند یعنی OM, MO' در یک امتداد هستند پس $\hat{OMO'} = 180^\circ$ می‌باشد بنابراین محل تلاقی دو مماس مشترک داخلی روی خط‌المركزین قرار دارد پس همگی هم‌رس هستند.

(۲۳) از B به N وصل می‌کنیم. داریم:

$$\hat{NBC} = \frac{\widehat{NC}}{2} \text{ (مطابق)}, \hat{C} = \frac{\widehat{NC}}{2} \Rightarrow \hat{NBC} = \hat{C} \Rightarrow \hat{MAC} + \hat{MCA} = \hat{B}$$

$$\hat{ABN} = \frac{\widehat{AN}}{2} \text{ (مطابق)}, \hat{A} = \frac{\widehat{AN}}{2} \Rightarrow \hat{ABN} = \hat{A}$$

$$\triangle AMC: \hat{MAC} + \hat{MCA} = 180^\circ - \hat{M} \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - \hat{M} \Rightarrow \hat{B} + \hat{M} = 180^\circ$$

در نتیجه چهارضلعی $MABC$ محاطی است.

(۲۴)

$$\text{طبق روابط طولی: } \begin{cases} MA \times MB = ME \times MH \\ MA \times MB = MF \times MG \end{cases} \Rightarrow ME \times MH = MF \times MG$$

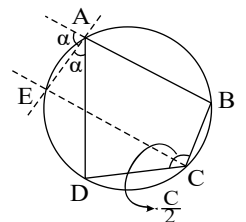
طبق قضیهٔ عکس روابط طولی، از چهار نقطهٔ E, F, G, H یک دایره می‌گذرد، پس $EFHG$ محاطی است.

(۲۵) با توجه به اینکه هر زاویهٔ خارجی چهارضلعی محاطی با زاویهٔ داخلی روبه‌رویش برابر است، مطابق شکل داریم:

$$2\alpha = \hat{C} \Rightarrow \alpha = \frac{\hat{C}}{2}$$

از طرف دیگر در چهارضلعی $AECB$ مجموع زاویه‌ها برابر 180° است. در نتیجه:

$$(\alpha + \hat{A}) + \hat{E} + \frac{\hat{C}}{2} + \hat{B} = 360^\circ \Rightarrow 180^\circ + \hat{E} + \hat{B} = 360^\circ \Rightarrow \hat{E} + \hat{B} = 180^\circ$$

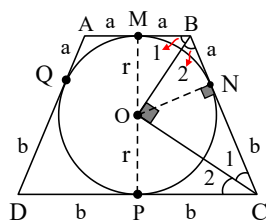


می‌دانیم که مجموع زوایای روبه‌رو در چهارضلعی محاطی برابر 180° است، پس $ABCE$ محاطی است و E روی محیط دایره است.

(۲۶) دوزنقهٔ محاطی، دوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌باشد.

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_r + \hat{C}_1 = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{BOC} = 90^\circ, \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow ON^2 = a \times b \Rightarrow r^2 = ab$$



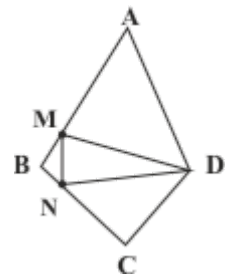
$$\Rightarrow r = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{AB}{2} \times \frac{CD}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{AB \times CD} = \frac{1}{2} MP$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \times MP = \frac{AB + CD}{2} \times \sqrt{AB \times CD}$$

۲۷ اگر روی ضلع AB نقطه M را طوری انتخاب کنیم که $AM = AD$ و اگر روی ضلع BC نقطه N را طوری انتخاب کنیم که $DC = CN$ باشد در این صورت مثلث‌های ADM, DCN متساوی‌الساقین هستند.

ضمناً با توجه به فرض مسأله داریم:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow AM + MB + CD = AD + BN + CN$$



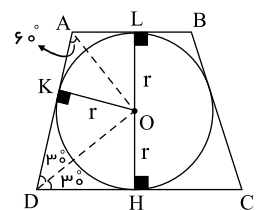
چون $AM = AD$, $DC = CN$ می‌باشد پس $MB = BN$ می‌باشد.

بنابراین مثلث BMN نیز متساوی‌الساقین است.

اگر عمود منصف‌های مثلث DMN را رسم کنیم همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند از طرفی عمود منصف‌های اضلاع DM, MN, DN نقش نیمسازهای زوایای $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ را نیز دارند پس طبق ویژگی مکان هندسی نیمساز، فاصله نقطه I از همه اضلاع AD, AB, BC, DC مساوی است. بنابراین نقطه I مرکز دایره محاطی این چهار ضلعی است پس این چهار ضلعی محیطی است.

$$DH = \frac{CD}{2}, \tan 30^\circ = \frac{r}{DH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{DH}$$

$$\Rightarrow DH = \sqrt{3}r \Rightarrow DC = 2\sqrt{3}r$$



$$AL = AK, \tan 60^\circ = \frac{r}{AK} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{r}{AK} \Rightarrow AK = \frac{r}{\sqrt{3}} = AL = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2AL = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

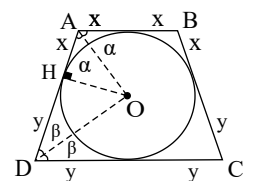
همچنین: $HL = 2r$

$$S_{ABCD} = (AB + CD) \times \frac{LH}{2} = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}r \right) \times \frac{2r}{2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} \right) r^2 \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{r^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$$

۲۹ چون در دوزنقه $ABCD$ ، اضلاع AB و DC (قاعدہ‌ها) موازی هستند و AD مورب محسوب می‌شوند، بنابر قضیه خطوط موازی و مورب داریم: $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ و از

طرفی اگر از A و D به مرکز دایره محاطی وصل می‌کنیم، OA نیمساز زاویه $\hat{A}$ و همچنین OD نیمساز زاویه $\hat{D}$ است، پس $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ و در نتیجه $\alpha + \beta = 90^\circ$ می‌باشد و مثلث OAD قائم‌الزاویه است. و حال در مثلث قائم‌الزاویه OAD ، شعاع $R = OH$ (که ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه محسوب می‌شود) واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده است:

$$R^2 = xy = \left(\frac{AB}{2} \right) \left(\frac{DC}{2} \right) \Rightarrow AB \times DC = 4R^2$$

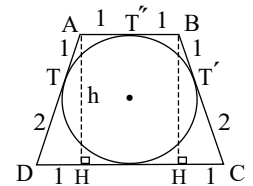


۳۰ چون دوزنقه متساوی‌الساقین است، پس $AD = BC$ و همچنین طول مماس‌هایی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، باهم برابر است:



$$h^2 = r^2 - 1^2 \Rightarrow h = r\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2}(r + r) \times (r\sqrt{2}) = r^2\sqrt{2}$$



۳۱ مماس‌های رسم‌شده بر دایره با هم برابرند:

$$AM = AN = x, BN = BK = y, CM = CK = z$$

$$2x + 2y + 2z = 2P \Rightarrow x + y + z = P \quad (\text{نصف محیط } \triangle ABC)$$

$$\Rightarrow AM = AN = x = P - (y + z) = P - a \xrightarrow{\text{همچنین}} BN = BK = P - b, CM = CK = P - c$$

$$BL = BT, CL = CT' \Rightarrow AT = AB + BT = AB + BL$$

$$\text{همچنین: } AT' = AC + CT' = AC + CL$$

$$\Rightarrow AT + AT' = AB + AC + (BL + CL) = AB + AC + BC = 2P \quad \triangle ABC$$

$$AT = AT' \Rightarrow AT = AT' = P$$

(L نقطه تماس دایره محاطی خارجی با ضلع BC است)

۳۲

$$\hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \triangle DOH : \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{DH}{OD} = \frac{DH}{r} = \frac{CD}{r} \Rightarrow CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\hat{M} = 90^\circ \Rightarrow \triangle MOB : \tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{BM}{OM} = \frac{AB}{r} \Rightarrow AB = 2r \times \tan \frac{180^\circ}{n}$$

۳۳ قسمت‌های (الف) و (ب): زوایای داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر با 120° می‌باشد. پس زوایای مثلث‌های ABM و PFE و CDN برابر با 60° می‌باشد. بنابراین:

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ$$

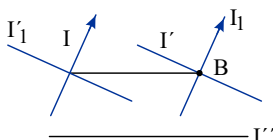
$$(a \text{ ضلع شش‌ضلعی}) \Rightarrow \triangle MNP \text{ ضلع } = 3a \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \Rightarrow \text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{2}{3} \times S_{\triangle MNP}$$

قسمت‌های (پ) و (ت): مجموع طول‌های سه عمود TH و TH' و TH'' برابر است با ارتفاع مثلث MNP :

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع } \triangle MNP &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times (3a) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a \\ S_{\triangle TBC} + S_{\triangle TDE} + S_{\triangle TAF} &= \frac{1}{2}(TH + TH' + TH'') \times a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \\ &= \frac{1}{2}S_{\text{شش‌ضلعی}} \Rightarrow S_{\triangle TAB} + S_{\triangle TEF} + S_{\triangle TCD} = \frac{1}{2} \times S_{\text{شش‌ضلعی}} \end{aligned}$$

۳۴



پاسخ: برای این کار، ابتدا خط I را با برداری به طول $5cm$ موازی با I'' انتقال می‌دهیم تا خط I_1 به دست آید.

I_1, I' را در B قطع می‌کند.

به همین ترتیب، I' را با برداری به طول $5cm$ موازی با I'' انتقال می‌دهیم تا I'_1 به دست آید. I و I'_1 در A متقاطع هستند. پاره خط $AB = 5cm$ جواب مسأله است.

۳۵ ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث $\triangle DON$ و $\triangle AOM$ هم‌نهشت هستند:



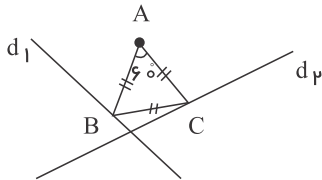
$$\begin{cases} OA = OD \\ AM = DN \\ \widehat{OAM} = \widehat{ODN} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AOM \cong \triangle DON \Rightarrow \begin{cases} OM = ON \\ \widehat{AOM} = \widehat{DON} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

از رابطه (۲) داریم:

$$\widehat{AOM} = \widehat{DON} \Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{MOD} = \widehat{DON} + \widehat{MOD} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{MON}, \widehat{AOD} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MON} = 90^\circ \\ (1) : OM = ON \end{cases}$$

بنابراین نقطه M با دوران به مرکز O و زاویه 90° بر N تصویر می‌شود. از دوران به مرکز O و زاویه 90° ، A بر D تصویر می‌شود و به همین ترتیب، B بر A تصویر می‌شود. به این ترتیب، رأس‌های مثلث ABM بر رأس‌های مثلث ADN تصویر می‌شوند. پس دوران یافته ABM به مرکز O و زاویه 90° ، بر مثلث ADN منطبق می‌شود.

۳۶



مطابق شکل، اگر $\triangle ABC$ پاسخ مسأله باشد، داریم: $BC = AB = AC$.

مشخص است که C دوران یافته B به مرکز A و زاویه 60° است.

پس برای یافتن C ، d_1 را به مرکز A و شعاع 60° دوران می‌دهیم تا d_2 را در C قطع کند.

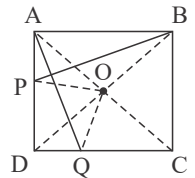
به همین ترتیب با دوران C به مرکز A و زاویه -60° ، نقطه B به دست می‌آید.

۳۷

مطابق شکل، با دوران به مرکز O محل برخورد قطرهای مربع (مرکز مربع) و زاویه 90° ، رأس B از مثلث APB به رأس A از مثلث ADQ و همچنین رأس A از مثلث

APB به رأس D از مثلث ADQ منطبق می‌شود. داریم:

$$\begin{cases} AP = DQ \\ \widehat{ODQ} = \widehat{OAP} = 45^\circ \\ OD = OA \end{cases} \Rightarrow \triangle AOP \cong \triangle DOQ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{DOP} = \widehat{AOQ} \\ OP = OQ \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

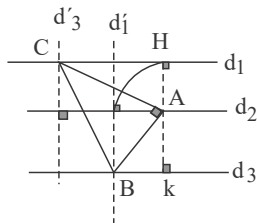


از طرفی داریم:

$$(1) : \widehat{AOP} + \widehat{POD} = 90^\circ = \widehat{POD} + \widehat{DOQ} = \widehat{POQ} = 90^\circ$$

بنابراین تساوی (۲) و مطلب فوق، نقطه P از مثلث APB به مرکز O و زاویه 90° دوران یافته و به نقطه Q تبدیل می‌شود.

۳۸



d'_1 دوران یافته d_1 به مرکز A و زاویه 90° است و d_2 را در B قطع می‌کند.

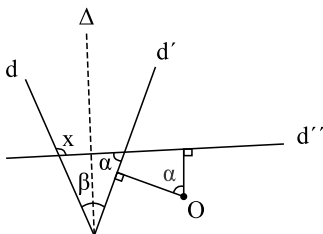
d'_2 دوران یافته d_2 به مرکز A و زاویه -90° است و d_3 را در C قطع می‌کند.

مثلث ABC پاسخ مسأله است. بی‌شمار نقطه مثل A می‌توان یافت. پس مسأله بی‌شمار جواب دارد.

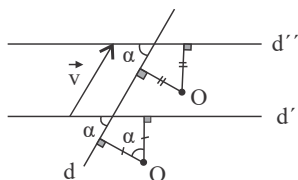
۳۹

مطابق شکل، خط d به محوریت Δ بازتاب می‌شود که d' می‌باشد.

به مرکز O و زاویه α خط d' را دوران می‌دهیم تا خط d'' حاصل شود. مطابق شکل داریم: $x = \alpha + \beta$.



۴۰

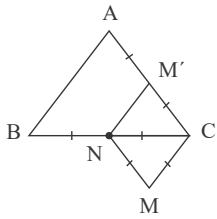


مطابق شکل به مرکز O و زاویه α خط d را دوران می‌دهیم تا خط d' به دست آید. خط d' را تحت بردار $\vec{V}$ انتقال می‌دهیم تا خط d'' به دست آید. چون d'' انتقال یافته d' است، پس با آن موازی است. پس زاویه بین d و d'' است. بنابراین، تحت زاویه α و به مرکز نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویه بین d و d'' ، می‌توان d را دوران داد تا d'' به دست آید.

۴۱



مطابق شکل، $M'NC$ بازتاب محوری MNC نسبت به محور BC است. از آنجا که:

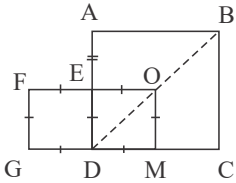


$$\begin{cases} CM' = CN = \frac{BC}{2} \Rightarrow CM' = \frac{AC}{2} \\ CN = \frac{BC}{2} \end{cases} \Rightarrow M'N \parallel AB \Rightarrow \frac{CA}{CM'} = \frac{CB}{CN} = 2$$

پس $NM'C$ با تجانس به مرکز C و نسبت $k = 2$ به $\triangle ABC$ تصویر می‌شود.

(۴۲)

مطابق شکل، مربع $OEDM$ بازتاب محوری $EFGD$ نسبت به محور AD می‌باشد.



از آنجا که CD و BD و AD در D هم‌رسانند و داریم: $\frac{CD}{DM} = \frac{DB}{OD} = \frac{AD}{DE} = 2$ پس $ABCD$ مجانس $OEDM$ به مرکز تجانس D و ضریب ۲ می‌باشد.

همچنین می‌توان با دوران $EFGD$ به مرکز D و زاویه 90° ، $OEDM$ را به وجود آورد و سپس با تجانس به مرکز D و ضریب $k = 2$ ، آن را بر $ABCD$ تصویر کرد.

(۴۳) مطابق شکل A' مجانس A به مرکز تجانس نقطه O و ضریب k است. به همین ترتیب، B' مجانس B به مرکز تجانس نقطه O و ضریب k است. $A'B'$ را تحت بردار $\vec{V}$ انتقال می‌دهیم تا MN حاصل شود.

داریم:

$$AP \parallel A'M, BQ \parallel B'N, AB \parallel A'B'$$

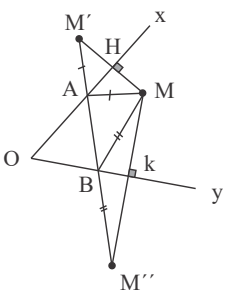
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{OP}{OM} &= \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}, \quad \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OQ}{ON} = \frac{AB}{A'B'} \\ \Rightarrow \frac{OP}{OM} &= \frac{OQ}{ON} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{PQ}{MN} \end{aligned}$$

می‌دانیم که $AB \parallel MN$ و $\frac{MN}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = k$ پس MN مجانس AB با ضریب تجانس k است.

(۴۴)

مطابق شکل، بازتاب M نسبت به Ox و Oy به ترتیب، M' و M'' می‌باشد.

$M'M''$ اضلاع زاویه را در A و B قطع می‌کند.



محیط MAB کمترین می‌باشد، زیرا:

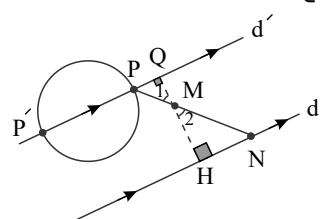
$$\begin{cases} MA = AM' \\ MB = M''B \end{cases} \Rightarrow MA + MB + AB = M'A + M''B + AB = M'M''$$

(۴۵) مطابق شکل، از نقطه M بر خط d عمود کرده و به اندازه نصف آن (MQ) ادامه می‌دهیم. سپس از نقطه Q خطی موازی با d رسم می‌کنیم (d') تا دایره را در نقاط P و P' قطع کند.

پس PM را امتداد می‌دهیم تا d را در N قطع کند. داریم:

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{Q} = 90^\circ \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \end{cases} \Rightarrow \triangle MPQ \sim \triangle MHN \quad (زا)$$

$$\Rightarrow \frac{MP}{MN} = \frac{MQ}{MH} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = 2MP$$



بنابراین، پاره خط PN پاسخ است.



$$\text{قانون سینوس ها: } \begin{cases} \triangle ABC : AC = 2R_{\triangle ABC} \times \sin 30^\circ = R_{\triangle ABC} \\ \triangle ACD : AC = 2R_{\triangle ACD} \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}R_{\triangle ACD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{\triangle ABC} = \sqrt{3}R_{\triangle ACD} \Rightarrow \frac{R_{\triangle ABC}}{R_{\triangle ACD}} = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \triangle ABC : BC = 2R_{\triangle ABC} \times \sin \hat{A}_1 \\ \triangle ACD : CD = 2R_{\triangle ACD} \times \sin \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{R_{\triangle ABC}}{R_{\triangle ACD}} = \sqrt{3} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \sin \hat{A}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 2$$

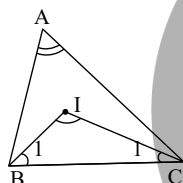
$$\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \sin \hat{A} \Rightarrow \frac{1}{2}(\underbrace{\sin(\hat{B} + \hat{C})}_{\sin \hat{A}} + \sin(\hat{B} - \hat{C})) = \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} + \sin(\hat{B} - \hat{C}) = 2 \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \sin(\hat{B} - \hat{C})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت اول} : \hat{A} = \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} \xrightarrow{+\hat{B}} 110^\circ = 2\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 55^\circ \\ \text{حالت دوم} : \hat{A} = 110^\circ - (\hat{B} - \hat{C}) = 110^\circ - \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 110^\circ + \hat{C} \\ \xrightarrow{+\hat{C}} 110^\circ = 110^\circ + 2\hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 0^\circ \times \end{cases}$$

پس مثلث در رأس B قائم الزاویه است.

مطابق شکل، I محل هم‌رسمی نیمسازهاست. داریم:

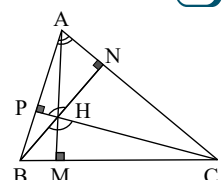


$$\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}, \hat{C}_1 = \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{I} = 110^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 110^\circ - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{I} = 110^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\frac{2R_{\triangle BIC}}{2R_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{BC}{\sin \hat{I}}}{\frac{BC}{\sin \hat{A}}} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{I}} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin(90^\circ + \frac{\hat{A}}{2})} = \frac{2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{A}}{2}} \Rightarrow \frac{R_{\triangle BIC}}{R_{\triangle ABC}} = 2 \sin \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\begin{aligned} APHN : \hat{P} + \hat{N} &= 110^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{PHN} = 110^\circ \\ &\Rightarrow \hat{PHN} = 110^\circ - \hat{A} = \hat{BHC} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} 2R_{\triangle BHC} = \frac{BC}{\sin \hat{BHC}} = \frac{BC}{\sin(110^\circ - \hat{A})} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \quad (1) \\ 2R_{\triangle ABC} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2R_{\triangle BHC} = 2R_{\triangle ABC} \Rightarrow R_{\triangle BHC} = R_{\triangle ABC}$$

به همین ترتیب، چون $\hat{AHC} = 110^\circ - \hat{B}$ و $\hat{AHB} = 110^\circ - \hat{C}$ بنابراین: $R_{\triangle AHC} = R_{\triangle BHC} = R_{\triangle AHB} = R_{\triangle ABC}$



۵۰

$$\triangle APB : \frac{\sqrt{6}}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{AP}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AP = t = 2\sqrt{3}$$

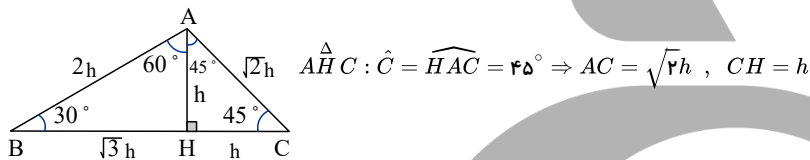
$$\hat{C} = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

$$\triangle APC : \frac{AP}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle APC \sim \triangle ABC \Rightarrow y^2 = x \times BC$$

$$\Rightarrow y^2 = 2\sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 8 + 4\sqrt{3} \Rightarrow y = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\triangle ABC : \frac{z}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow z = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$$

۵۱ با فرض $AH = h$ داریم:

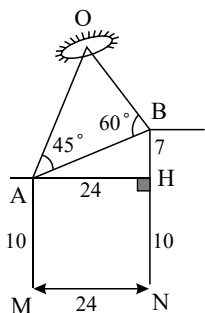
$$\triangle ABH : \hat{B} = 30^\circ, \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{h}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2h$$

$$\triangle ABH : \hat{A} = 60^\circ, \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2h = \sqrt{3}h$$

$$BC = 20 = h + \sqrt{3}h = h(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 10(\sqrt{3} - 1)$$

$$AB = 2h = 20(\sqrt{3} - 1), \quad AC = 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

۵۲ از رأس A، عمود AH بر ضلع BN وارد می‌کنیم.



در مثلث ABH داریم:

$$\hat{H} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB^2 = 7^2 + 7^2 = 98 \Rightarrow AB = 7\sqrt{2}$$

$$\hat{AOB} = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

با نوشتن قضیه سینوس‌ها در مثلث AOB داریم:

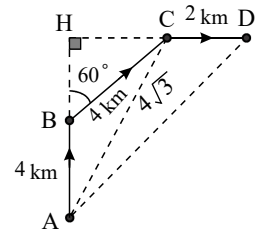
$$\frac{OA}{\sin 60^\circ} = \frac{OB}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \frac{OA}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{OB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \Rightarrow OA = \frac{125\sqrt{3}}{9}, \quad OB = \frac{125\sqrt{2}}{9}$$

۵۳ در مثلث ABC داریم:



$$\hat{ABC} = 120^\circ$$

$$AB = BC = 4 \text{ km} \Rightarrow \hat{BAC} = \hat{BCA} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



در این مثلث با نوشتن قضیه کسینوس‌ها، طول AC را حساب می‌کنیم:

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos 120^\circ \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

زاویه $\hat{ACD}$ زاویه خارجی برای مثلث قائم‌الزاویه AHC است، پس:

$$\hat{ACD} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در مثلث ACD داریم:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \times CD \times \cos 120^\circ$$

$$AD^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AD^2 = 52 + 8\sqrt{3} \Rightarrow AD = \sqrt{52 + 8\sqrt{3}} \sim 8.1 \text{ km}$$

۵۴

$$\triangle ADC : \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow AD^2 = DC^2 + AC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + DC^2 - 2 \times 8 \times CD \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow CD^2 - 8CD + 15 = 0 \Rightarrow (CD - 3)(CD - 5) = 0$$

$$\Rightarrow CD = 3 \text{ یا } CD = 5$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ یا } 3, \quad CD > BD \Rightarrow CD = 5, \quad BD = 3$$

$$CD = 5, \quad CE = 5, \quad \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \triangle DCE \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow DE = 5$$

$$\hat{AED} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

۵۵ با نوشتن قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$\triangle ABC : x^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos 60^\circ \Rightarrow x^2 = 30^2 + 40^2 - 2 \times 30 \times 40 \times \cos 60^\circ \Rightarrow x^2 = 2500 - 1200 = 1300 \Rightarrow x = 10\sqrt{13}$$

با نوشتن قضیه سینوس‌ها داریم:

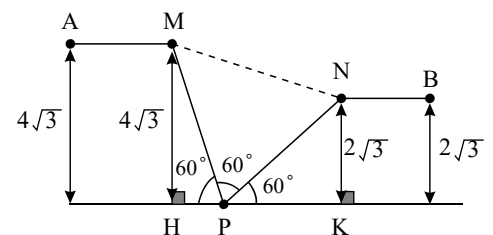
$$\frac{30}{\sin \theta} = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

۵۶ مطابق شکل در مثلث‌های PMH و PNK داریم:

$$\begin{cases} \triangle PNK : \hat{P} = 60^\circ \\ \triangle PMH : \hat{P} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{KN}{PN} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{PN} \Rightarrow PN = 4$$

$$\sin 60^\circ = \frac{MH}{PM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{PM} \Rightarrow PM = 8$$



با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در مثلث PMN داریم:

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \times PN \times \cos 60^\circ \Rightarrow MN^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 48 \Rightarrow MN = 4\sqrt{3}$$

۵۷



$$\triangle AMB : c^r = AM^r + BM^r - 2AM \cdot BM \cdot \cos \alpha, \quad BM = CM = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow c^r = m_a^r + \frac{a^r}{4} - 2m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\triangle AMC : b^r = AM^r + CM^r - 2AM \cdot CM \cdot \cos(180^\circ - \alpha), \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^r = m_a^r + \frac{a^r}{4} - 2m_a \cdot \frac{a}{2} \times (-\cos \alpha) = m_a^r + \frac{a^r}{4} + 2m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^r + c^r = 2m_a^r + \frac{a^r}{2}$$

برای بقیه میانه‌ها هم به همین ترتیب، اثبات می‌شود:

$$a^r + c^r = 2m_b^r + \frac{b^r}{2}, \quad a^r + b^r = 2m_c^r + \frac{c^r}{2}$$

$$\begin{cases} b^r + c^r = 2AM^r + \frac{a^r}{2} \Rightarrow 2^r + 3^r = 2AM^r + \frac{1^r}{2} \\ b = 2, c = 3, a = 1 \end{cases}$$

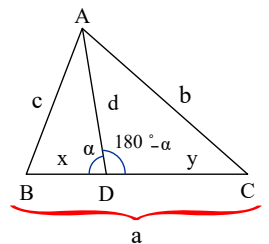
$$\Rightarrow 2^r + 1^r = 2AM^r + 2^r \Rightarrow 2AM^r = 2^r \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

$$\triangle ABD : c^r = d^r + x^r - 2xd \cdot \cos \alpha$$

$$\triangle ADC : b^r = d^r + y^r - 2yd \cdot \cos(180^\circ - \alpha), \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow b^r = d^r + y^r + 2yd \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{cases} c^r \times y = d^r y + x^r y - 2xyd \cdot \cos \alpha \\ b^r \times x = d^r x + xy^r + 2xyd \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow b^r x + c^r y = d^r(x+y) + xy(x+y) = (d^r + xy)(x+y) \Rightarrow b^r x + c^r y = a(d^r + xy)$$



مطابق شکل، AD نیمساز است. داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} = \frac{1}{1.5} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2.5} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{1}{2.5} \Rightarrow BD = \frac{a}{2.5} = \frac{10}{2.5} = 4$$

$$\triangle ABD : \text{نیمساز } BI \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{10}{20} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{10}{20}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{10}{20}\right)^2 = \frac{100}{400}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{\triangle ABC}} = 1 - \frac{100}{400} = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$$

الف)

$$\triangle ABD : \text{قضیه نیمسازها} : \frac{DI}{AI} = \frac{BD}{AB}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{AI} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = \frac{a}{b+c}, \quad \frac{DI}{AD} = \frac{a}{a+b+c}$$

ب)

$$\frac{DI}{AD} = \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{PI}{PB} = \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{QI}{CQ} = \frac{c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{AD} + \frac{PI}{PB} + \frac{QI}{CQ} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

به همین ترتیب، موارد دیگر ثابت می‌شود.



۶۱

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

$$\text{قضیه نیمسازها} : \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD}{\underbrace{BC}_8} = \frac{3}{8} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}, CD = \frac{35}{8}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_r, DE \parallel AC \Rightarrow \hat{ADE} = \hat{A}_r = \hat{A}_1 \Rightarrow AE = DE$$

$$DE \parallel AC \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{5} = \frac{\frac{21}{8}}{8} \Rightarrow DE = \frac{15}{8}$$

$$\triangle ADE \text{ محیط} = \frac{15}{8} + \frac{15}{8} + \frac{15}{8} = \frac{45}{8}$$

۶۲

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC, BD \cdot DC = AD \cdot DE = 2x$$

$$\Rightarrow x^2 = 5 \times 7 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0 \Rightarrow x = 5$$

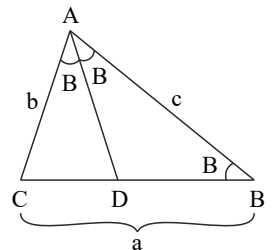
$$\text{قضیه نیمسازها} : \frac{y}{z} = \frac{5}{7}, yz = 2 \times x = 10$$

$$\Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{y \cdot z}{z^2} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{10}{z^2} = \frac{5}{7} \Rightarrow z^2 = 14 \Rightarrow z = \sqrt{14}$$

$$\frac{y}{\sqrt{14}} = \frac{5}{7} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{14}}{7}$$

$$\text{نیمساز} AD \Rightarrow \hat{CAD} = \hat{DAB} = \hat{B} \Rightarrow AD = BD$$

$$\hat{C}, \hat{CAD} = \hat{B} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABC$$



۶۳

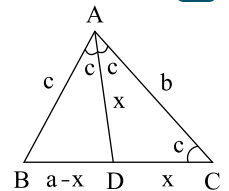
$$\Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow CD = \frac{b^2}{a} \quad (1)$$

$$\text{نیمساز} AD : \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{a} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{ab}{b+c} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + bc \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$$

۶۴ در شکل مقابل، AD نیمساز داخلی $\hat{A}$ است. داریم:

$$\hat{BAD} = \hat{DAC} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{2\hat{C}}{2} = \hat{C} \Rightarrow AD = CD = x, BD = a - x$$



$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD \Rightarrow x^2 = bc - x(a-x) = bc - ax + x^2$$

$$\Rightarrow bc - ax = 0 \Rightarrow ax = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{a} \Rightarrow x = \frac{6 \times 8}{9} = \frac{48}{9} \quad (1)$$

$$\text{نیمساز} AD : \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x = 3a - 3x \Rightarrow 6x = 3a \Rightarrow x = \frac{3a}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{3a}{2} = \frac{48}{9} \Rightarrow a^2 = 16 \times 2 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

۶۵



$$AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{AB + AC} \Rightarrow AD = \frac{2 \times (x+2)(x+3) \times \overbrace{\cos 60^\circ}^{\frac{1}{2}}}{\underbrace{x+2+x+3}_{2x+5}}$$

$$\Rightarrow x(2x+5) = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 6 = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

$$\text{قضیه نیمسازها: } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{\underbrace{BC}_{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}, CD = \frac{35}{8}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 2 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$

$$\text{قضیه نیمسازها در } \triangle ABD: \frac{x}{AE} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{BD}{AD + BD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\frac{21}{8}}{\frac{15}{8} + \frac{21}{8}} = \frac{\frac{21}{8}}{\frac{36}{8}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{7 \times 2}{12} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = \frac{3}{4}CD \quad (1)$$

$$BC = \sqrt{5} = BD + CD \quad (2)$$

$$\sqrt{5} = \frac{3}{4}CD + CD \Rightarrow \frac{7}{4}CD = \sqrt{5} \Rightarrow CD = \frac{4\sqrt{5}}{7} \Rightarrow BD = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD \Rightarrow AD^2 = 2 \times 5 - \frac{3\sqrt{5}}{7} \times \frac{4\sqrt{5}}{7} \Rightarrow AD = \frac{6}{7}$$

$$\begin{cases} \frac{DE}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow DE = \frac{3}{4}CE \\ CD = 4 = DE + CE \end{cases}$$

$$4 = \frac{3}{4}CE + CE = \frac{7}{4}CE \Rightarrow CE = \frac{16}{7}$$

$$DE = \frac{3}{4} \times \frac{16}{7} = \frac{12}{7}$$

$$AE^2 = AD \times AC - DE \times CE = 6 \times 8 - \frac{12}{7} \times \frac{16}{7} = 48 - \frac{192}{49} = \frac{2160}{49}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{\sqrt{2160}}{7}$$

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{1}{2} \times OL \times 5 + \frac{1}{2} \times OK \times 6 + \frac{1}{2} \times OH \times 9 = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{5}{2}OL + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 9 = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{5}{2}OL + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = S_{\triangle ABC} \quad (1)$$

$$\text{دستور هرون: } P = \frac{5+6+9}{2} = 10 \Rightarrow S = \sqrt{10 \times 5 \times 1 \times 4} = 10\sqrt{2}$$

۶۶

۶۷

الف با نوشتن قضیه نیمسازها داریم:

از روابط (۱) و (۲) داریم:

ب برای محاسبه طول نیمساز AD داریم:

پ با نوشتن قضیه نیمسازها در مثلث ADC داریم:

۶۸ از O به A، B و C وصل می‌کنیم، داریم:

برای محاسبه مساحت مثلث ABC داریم:



$$(1): \frac{5}{2}OL + 6\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{2}OL = 4\sqrt{2} \Rightarrow OL = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

$$\Delta_{ABC} \text{ نصف محیط } = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$S_{\Delta_{ABC}} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$$

$$S_{\Delta_{ABC}} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{\Delta_{ABC}} = S_{\Delta_{AMB}} + S_{\Delta_{BMC}} + S_{\Delta_{AMC}}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{6} = \frac{2 \times 5}{2} + \frac{x \times 7}{2} + \frac{3 \times 6}{2}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{6} = 5 + 9 + \frac{7}{2}x = 14 + \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14)$$

$$P = \frac{40 + 39 + 25}{2} = \frac{104}{2} = 52$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{52 \times 12 \times 13 \times 27} \Rightarrow S = 9 \times 13 \times 4$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{25 \times 39 \times 40}{4 \times 9 \times 13 \times 4} = \frac{125}{6}$$

$$R = \frac{125}{6} \Rightarrow 2R = \frac{125}{3}$$

$$\Delta_{BCD}: BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \times 7 \times 7 \times \cos 120^\circ = 49 + 49 + 49 \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$\Delta_{ABD}: (7\sqrt{3})^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \times 11 \times 13 \times \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 147 = 121 + 169 - 286 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{\Delta_{ABD}} - S_{\Delta_{BCD}} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 35,75\sqrt{3} - 12,25\sqrt{3} = 23,5\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta_{ABC}} = S_{\Delta_{ABD}} + S_{\Delta_{ACD}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2}AB \times AD \times \sin \frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2}AD \times AC \times \sin \frac{\hat{A}}{2}$$

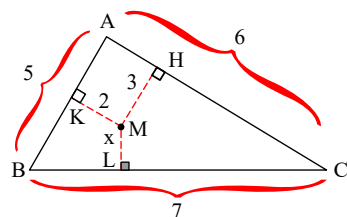
$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = AD \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} (AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{(AB + AC) \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}}{(AB + AC) \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2AB \cdot AC \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{AB + AC} \Rightarrow AD = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b + c}$$

$$AB = 8, AC = 6, (AD = AE = DE = 1 \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ)$$

۶۹



۷۰

۷۱

طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

۷۲

۷۳

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} = 36 + 64 - 48 = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{DECB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(1): S_{DECB} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47\sqrt{3}}{4}$$

۷۴) قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} \triangle ADC: \frac{DP}{DC} = \frac{DM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{عکس تالس: } MP \parallel AC, \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 8 \\ \triangle ABD: \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{عکس تالس: } MN \parallel BD, \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 6 \\ AC \text{ و } BD \text{ بین } \alpha = 90^\circ \end{cases}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin \alpha = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 90^\circ = 24$$

۷۵)

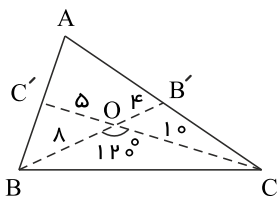
$$AP^2 \triangle C: (\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos \hat{P}$$

$$2 \times 49 = 25 \times 2 + 9 \times 2 - 60 \cos \hat{P} \Rightarrow \cos \hat{P} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \hat{P} = 120^\circ$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

۷۶)

در شکل مقابل، O محل هم‌رسی میانه‌هاست. می‌دانیم که محل هم‌رسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.



داریم:

$$OC = \frac{2}{3} \times 15 = 10, \quad OB = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \Rightarrow 20\sqrt{3} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 60\sqrt{3}$$

$$\text{قانون کسینوس‌ها: } DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \times \cos \hat{A}$$

$$17 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times AD \times AE \times \sin \hat{A} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \underbrace{\sin \hat{A}}_{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 4\sqrt{2}$$

۷۷)

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



رابطه سینوسی مساحت : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \underbrace{\sin \hat{A}}_{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 20\sqrt{2}$

$S_{BDEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} \Rightarrow S_{BDEC} = 20\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

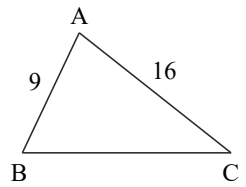
رابطه سینوسی مساحت : $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$

$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 16 \times \sin \hat{A} = 24\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos \hat{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \pm \frac{2}{3}$

قانون کسینوسها : $BC^2 = 9^2 + 16^2 - 2 \times 9 \times 16 \times \underbrace{\cos \hat{A}}_{\pm \frac{2}{3}}$ (مقدار بیشتر با $-\frac{2}{3}$)

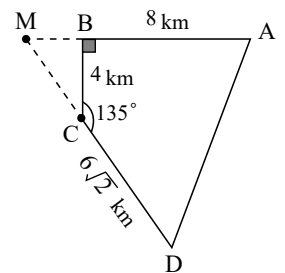
$BC^2 = 529 \Rightarrow BC = 23$



۷۸

$\hat{B} = 90^\circ, \hat{C} = \hat{M} = 45^\circ \Rightarrow BM = BC = 4 \Rightarrow CM = 4\sqrt{2}$

در مثلث MBC داریم:



برای محاسبه مساحت $ABCD$ ، از تفاضل مساحت مثلث‌های AMD و BMC استفاده می‌کنیم:

$S_{ABCD} = S_{\triangle AMD} - S_{\triangle BMC}$

$S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} \times AM \times MD \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 60\sqrt{2}$

$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \Rightarrow S_{ABCD} = 60\sqrt{2} - 8 = 52\sqrt{2} \text{ km}^2$

مساحت مثلث AMD را با استفاده از رابطه سینوسی محاسبه مساحت مثلث به‌دست می‌آوریم:

$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

$S = \frac{1}{2} a \times 3 = \frac{1}{2} b \times 4 = \frac{1}{2} c \times 6 \Rightarrow a = \frac{2S}{3}, b = \frac{S}{2}, c = \frac{S}{3}$

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\frac{2S}{3} + \frac{S}{2} + \frac{S}{3}}{2} = \frac{3S}{4}$

$p - a = \frac{3S}{4} - \frac{2S}{3} = \frac{S}{12}, p - b = \frac{3S}{4} - \frac{S}{2} = \frac{S}{4}, p - c = \frac{3S}{4} - \frac{S}{3} = \frac{5S}{12}$

$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{3S}{4} \times \frac{S}{12} \times \frac{S}{4} \times \frac{5S}{12}} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{15}}{48} S^2 \Rightarrow S = \frac{48}{\sqrt{15}}$

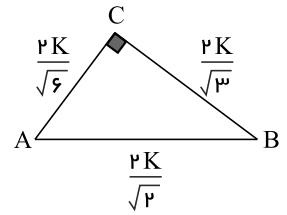
مساحت مثلث را از دستور هرون به‌دست می‌آوریم:

۸۰

داریم: ۸۱



$$\frac{1}{(\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2}$$



بنابراین داریم که:

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h_c^2}, \quad \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4S^2} + \frac{b^2}{4S^2} = \frac{c^2}{4S^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \quad (c \text{ وتر است})$$

بنابراین، مثلث قائم‌الزاویه است.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \Rightarrow \frac{1}{2} \times a \cdot \sqrt{6} = \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}c \cdot \sqrt{2} = k$$

$$\Rightarrow c = \frac{2k}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{2k}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{2k}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{\frac{2k}{\sqrt{6}}}{\frac{2k}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

ارتفاع‌های مثلث با عکس نسبت اضلاع، متناسبند، زیرا: (۸۲)

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \Rightarrow \frac{h_a}{\frac{1}{a}} = \frac{h_b}{\frac{1}{b}} = \frac{h_c}{\frac{1}{c}} = 2S$$

پس در مثلث اول که اضلاع آن ۳، ۵ و ۵ است، داریم:

$$\frac{h_a}{\frac{1}{5}} = \frac{h_b}{\frac{1}{5}} = \frac{h_c}{\frac{1}{3}} = k \Rightarrow h_a = \frac{k}{5}, \quad h_b = \frac{k}{5}, \quad h_c = \frac{k}{3}$$

در دو مثلث متشابه، ارتفاع‌ها نسبت‌های برابر دارند. داریم:

$$\frac{10}{\frac{k}{5}} = \frac{10}{\frac{k}{5}} = \frac{x}{\frac{k}{3}} \Rightarrow 3x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{3}$$