



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

# نسخه ۲۰

## LEVELUP

### ریاضی ۱



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات لول آپ

ریاضی ۱ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان حسابان : محمدرضا اصغریان

## فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

۱) اگر  $A_n = \left[ \frac{-3}{n}, \frac{n-1}{2} \right)$  باشد، آنگاه حاصل  $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$  را بدست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازه ی بدست آمده را معین کنید.

۲) مجموعه  $\mathbb{R} - \{-1, 4\}$  را به صورت اجتماعی از بازه ها بنویسید.

۳) اگر اشتراک دو بازه  $(x^2 + 2, 8)$  و  $(3, 2x + 1)$  تهی باشد، آنگاه  $x$  کدام است؟

درس دوم: متمم یک مجموعه

۴) فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیر مجموعه هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشد بطوریکه  $n(u) = 120$  ،  $n(A) = 75$  ،  $n(B) = 50$  ،  $n(A \cap B) = 35$  مطلوب است:

الف)  $n(A \cup B)$  ب)  $n(A \cap B')$  پ)  $n(A' \cap B)$  ت)  $n(A' \cap B')$

۵) در یک مدرسه ۱۲۲ نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می زنند که ۵۴ نفر هم عینک می زنند و هم ساعت در دست دارند.

چند نفر:

الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می کنند؟

ب) فقط ساعت در دست دارند؟

پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می کنند؟

ت) نه ساعت می بندند و نه عینک می زنند؟

۶) ۱۴ نفر به آزمایشگاهی مراجعه کرده اند که از بین آنها ۹ نفر برای انجام آزمایش خون و ۵ نفر برای انجام آزمایش قند خون مراجعه کرده اند که در این میان ۳ نفر هر دو آزمایش را داده اند مطلوب است تعداد کسانی که:

الف) آزمایش خون یا قند انجام داده اند.

ب) هیچ از دو یک آزمایش را انجام نداده اند.



۷) اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع  $U$  باشند به طوری که  $n(U) = ۱۵۰$ ،  $n(A) = ۸۰$ ،  $n(B') = ۶۰$  و  $n(A \cup B) = ۱۱۰$ ، تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$n(A \cap B')$$

ب

$$n(A' \cup B')$$

### درس سوم: الگو و دنباله

۸) یک دستگاه کددهی به هر مراجعه‌کننده یک کد شناسایی می‌دهد به اینصورت که با توجه به زمان مراجعه هر فرد ساعت مراجعه را دو برابر کرده و نصف دقیقه زمان مراجعه را به آن می‌افزاید و عدد حاصل را به صورت یک کد به مراجعه‌کننده می‌دهد؛ اگر مراجعه‌کننده‌ای در ساعت ۱۱ مراجعه کرده باشد و کد دریافتی او ۳۴ باشد، زمان دقیق مراجعه او را معلوم کنید؟

۹) تفاضل دو جمله متوالی از الگوی غیر خطی زیر برابر ۲۸ است، آن دو جمله را بیابید؟

$$a_n = 4n^2 - 1$$

### درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی

۱۰) ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر، مساوی مجموع دو سهم کوچکتر باشد.

۱۱) در دنباله‌ی ۲۱، ۱۸، ۱۵، ۰۰۰، اولین جمله منفی، چندمین جمله دنباله است؟

۱۲) شرکت‌های اینترنت شاتل و پارس آنلاین طی اعلامیه‌ای شرایط فروش خود را به شرح زیر اعلام کرده‌اند:

شاتل: هزینه مودم ۳۰ هزار تومان و هر گیگابایت اینترنت ۳ هزار تومان

پارس آنلاین: هزینه مودم ۲۰ هزار تومان و هر گیگابایت اینترنت ۴ هزار تومان

علی و حسن می‌خواهند از این دو شرکت خرید کنند و به مدت یک ماه از این خدمات استفاده کنند. علی در یک ماه حدود ۵ گیگابایت و حسن در یک ماه حدود ۱۵ گیگابایت استفاده می‌کند به هر کدام از این دو نفر کدام یک از شرکت‌ها را پیشنهاد می‌کنید که هزینه کمتری بپردازند؟

۱۳) جمله اول یک دنباله حسابی نصف جمله سوم است. جمله پانزدهم این دنباله چند برابر قدر نسبت آن است؟

۱۴) یک دنباله حسابی مثال بنویسید که سه جمله اول آن منفی و بقیه‌ی جملات مثبت شود.

۱۵) مجموع جمله‌های اول و چهارم یک دنباله هندسی ۵۶ و مجموع جمله‌های دوم و سوم آن ۲۴ است. دنباله را مشخص کنید.



۱۶ در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، مجموع جملات اول و سوم برابر ۵ و جمله پنجم، پانزده واحد بیشتر از جمله اول است. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

۱۷ در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر با ۸ و مجموع جملات چهارم و ششم برابر با ۶۴ است. جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۸ در یک دنباله هندسی با جملات منفی،  $a_1 + a_3 = -\frac{13}{18}$  و  $a_2 \times a_4 = \frac{4}{81}$  است. جمله اول این دنباله را به دست آورید.

## فصل ۲: مثلثات

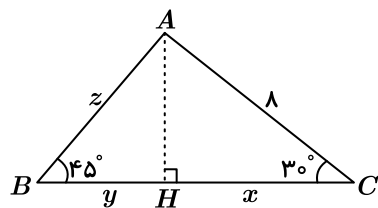
درس اول: نسبت های مثلثاتی

۱۹ مثلث قائم الزاویه ای با وتر ۱۰ داریم که در آن کسینوس یک زاویه ی حاده ۸/۵ است. مساحت مثلث را بدست آورید.

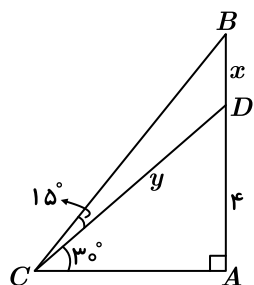
۲۰ با فرض بامعنی بودن عبارت مقابل، حاصل آن را محاسبه کنید.

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x} \times \cot x$$

۲۱ شهاب سنگی به صورت مایل در حال سقوط به سطح زمین است که با افق زاویه ی  $30^\circ$  می سازد و در ارتفاع ۴۰ متری سطح زمین قرار دارد. تا زمانی که این شهاب سنگ با زمین برخورد کند، چند متر در راستای افق به سمت جلو حرکت کرده است؟



۲۲ در مثلث روبه رو، مقادیر  $x$ ،  $y$  و  $z$  را به دست آورید.



۲۳ در مثلث روبه رو، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

درس دوم: دایره ی مثلثاتی

۲۴  $\sin \theta + \cos \alpha$  همواره عددی در بازه ی  $[a, b]$  است. مطلوبست محاسبه ی مقدار عددی  $3a - 5b$ .



۲۵) نقطه  $P$  به طول  $\frac{1}{3}$  روی دایره مثلثاتی و در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد. اگر زاویه بین نیم خط  $\overrightarrow{OP}$  با محور  $\overrightarrow{Ox}$  باشد، حاصل  $\cos \theta + \tan^2 \theta$  را به دست آورید.

۲۶) نقطه  $P$  به طول  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  روی دایره مثلثاتی و در ناحیه چهارم قرار دارد. اگر زاویه بین نیم خط  $\overrightarrow{OP}$  با محور  $\overrightarrow{OX}$  باشد، حاصل  $\sin \theta + 2\sqrt{2} \tan \theta$  را به دست آورید.

۲۷) خطی از نقطه‌ی  $A(2, 3)$  گذشته و محور  $x$  ها را با زاویه‌ی  $45^\circ$  قطع می‌کند، عرض نقطه‌ای به طول ۴ بر روی این خط کدام است؟

۲۸) در هر یک از موارد زیر نمودار خط را رسم کنید و شیب خط را به دست آورید. دو نقطه دلخواه روی خط در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور  $x$  ها عمود کنید و تانژانت زاویه  $\alpha$  که از بین جهت مثبت محور  $x$  ها و خط داده شده است را به دست آورید.

الف

$$2y - 3x = 5$$

ب

$$x + y = 2$$

درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

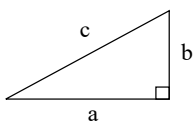
۲۹) ساده شده عبارت های زیر را به دست آورید.

الف

$$\left( \frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \left( \frac{1}{\cos \theta (1 + \cot^2 \theta)} \right)$$

ب

$$\left( \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2 \tan^2 \theta$$



۳۰) در مثلث روبرو اگر  $\frac{b}{c} = \frac{1}{3}$  باشد، نسبت  $\frac{a}{b}$  را بیابید.

۳۱) اگر  $\tan 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد، مقدار سایر نسبت های مثلثاتی  $15^\circ$  را به دست آورید.



۳۲ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} = |\cot \alpha|$$

۳۳ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (\tan \alpha - 1)} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

### فصل 3 : توان های گویا و عبارت های جبری

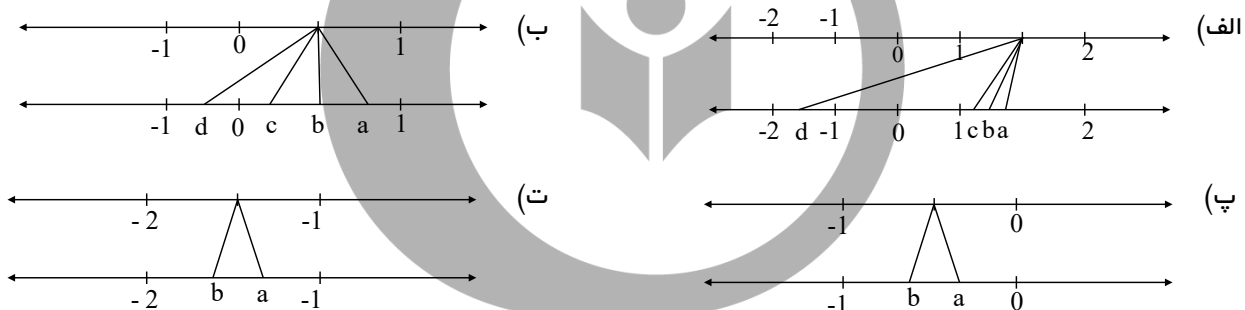
درس اول: ریشه و توان

۳۴ در هر یک از حالات زیر  $a$  چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای هر یک مثالی بزنید.

الف)  $\sqrt[n]{a} > a$  (الف)  $a > 0$  پ)  $\sqrt[n]{a} = a$  (پ)  $a \geq 0$  ث)  $\sqrt[n]{a} < a$  (ث)  $a > 0$   
 ب)  $\sqrt[n]{a} > a$  (ب)  $a < 0$  ت)  $\sqrt[n]{a} = a$  (ت)  $a < 0$  ج)  $\sqrt[n]{a} < a$  (ج)  $a < 0$

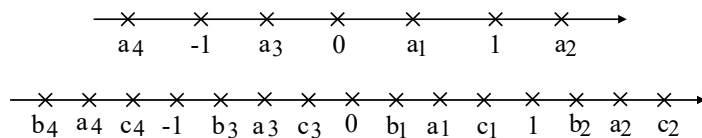
۳۵ در هر یک از اشکال زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید

هر کدام از اعداد  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  مربوط به کدام ریشه است.



۳۶ هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه‌ی سوم آن عدد است

وصل کنید.



درس دوم: ریشه  $n$  ام

۳۷ تفاوت  $\sqrt[n]{a^2} = |a|$  و  $(\sqrt[n]{a})^2 = a$  در چیست؟



۳۸ اگر  $\sqrt[3]{2\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[12]{x}$  باشد، مقدار  $x$  را به دست آورید.

درس سوم: توان های گویا

۳۹ عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن (حداکثر یک رادیکال) بنویسید.

الف)  $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^4}}$       ب)  $\sqrt{\sqrt{256}}$       ج)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2048}}$

۴۰ عدد  $\sqrt[3]{-3\sqrt[3]{3}}$  را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۴۱ عدد  $\sqrt[2]{2\sqrt[2]{2\sqrt[2]{2\sqrt[2]{2}}}}$  را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۴۲ در صورتیکه  $a$  مقداری حقیقی بین صفر و منفی یک باشد، حاصل عبارت زیر را به صورت مضربی از ۳ بیان کنید.

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{a^2 + 1 - 2a} + \sqrt{a^2 + 4 - 4a}$$

۴۳ حاصل عبارت  $\sqrt[2]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5}$  را بیابید؟

۴۴ عدد  $5\sqrt[3]{3}$  را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۴۵ اگر داشته باشیم  $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}} = y^{\frac{1}{3}}$ ، چه رابطه ی بین  $x$  و  $y$  برقرار است؟

۴۶ اگر  $\sqrt{a^2b^3} = -ab\sqrt{b}$  باشد، حاصل  $|a|$  را به دست آورید.

۴۷ حاصل  $\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$  را بدست آورید.

درس چهارم: عبارت های جبری

۴۸ عبارت  $x^3 + x^2 - x - 1$  را تجزیه کنید (استفاده از اتحادها به طور مستقیم امکان پذیر نیست)

۴۹ اگر  $a^2 - 6a = -1$  باشد حاصل عبارت  $\frac{a+1}{\sqrt{a}}$  را بدست آورید.



۵۰ عبارتهای زیر را تجزیه کنید (استفاده از اتحادها کفایت نمی‌کند)

الف)  $x^3 + x^2 - 4x - 4$

ب)  $a^5 - ab^4$

پ)  $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

ت)  $2x^2 + 6x + 4$

۵۱ ابتدا کسرها را گویا کرده و سپس مجموع آنها را حساب کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

۵۲ حاصل عبارت  $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{1}{a - 1}$  را به دست آورید.

۵۳ مخرج کسر روبه‌رو را گویا کنید.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

۵۴ عبارت  $x^6 - 2y^6 + 2x^3y^3$  را تجزیه کنید.

۵۵ حاصل  $\sqrt{3 - \sqrt{2}} \times \sqrt[4]{11 + 6\sqrt{2}}$  را به کمک اتحادها به دست آورید.

## فصل 4 : معادله ها و نامعادله ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

۵۶ در یک مسابقه کاراته، اگر تک تک شرکت‌کنندگان با هم مبارزه کنند و در نهایت ۳۶ مبارزه انجام شده باشد تعداد شرکت‌کنندگان و همچنین الکویی بین تعداد شرکت‌کنندگان و تعداد مبارزات را بدست آورید.

۵۷ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

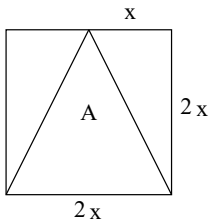
$$A = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$$

۵۸ اگر  $x = -2$  یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 + (m + 1)x + 3m = 0$  باشد، مقدار  $m$  و ریشه دیگر معادله را به دست آورید.

۵۹ معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

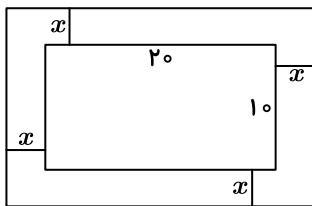
الف)  $4x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$

ب)  $3x^2 - 6x + 3 = 1$



۶۰ در شکل مقابل اگر بدانیم مجموع اندازه‌های محیط و مساحت مثلث  $A$  برابر با  $5 - \sqrt{5}$  است، آنگاه مساحت مربع را بدست آورید.

۶۱ طول دو ضلع قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه  $x + 1$  و  $2x$  و وتر آن  $2\sqrt{13}$  می‌باشد. طول اضلاع قائمه مثلث را به دست آورید.



۶۲ به کمک تشکیل معادله و حل آن، مسئله زیر را حل کنید.  
یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۲۰ سانتی‌متر، درون یک قاب با مساحت ۶۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد. ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

### درس دوم: سهمی

۶۳ در مسابقات پرتاب نیزه، دو پرتاب‌کننده  $A$  و  $B$ ، نیزه‌های خود را با زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  پرتاب کرده‌اند که معادله‌ی حرکت آنها به شکل  $y_A = -x^2 + 3x + 4$  و  $y_B = -4x^2 + 6x + 4$  است. که در آن  $x$  مسافت افقی طی شده بر روی زمین و  $y$  ارتفاع نیزه‌ها از سطح زمین است، تعیین کنید کدام پرتاب کننده برنده می‌شود؟

۶۴ سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور  $x$ ها را در نقاطی به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید.

۶۵ معادله یک سهمی را بنویسید که محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ و محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند و از نقطه  $(-1, 2)$  نیز بگذرد.

۶۶ معادله سهمی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  را در نظر بگیرید.

الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ب با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  و خط تقارن آن نیز  $x = -\frac{b}{2a}$  است.



درس سوم: تعیین علامت

۶۷) حدود  $m$  را طوری تعیین کنید که سهمی  $y = 2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2$  همواره بالای محور  $x$  ها قرار داشته باشد.

۶۸) حدود  $m$  را طوری مشخص کنید که عبارت  $mx^2 + (m+1)x + m$  همواره منفی باشد.

۶۹) عددی طبیعی را که مربع آن از چهار برابر آن، پنج واحد بیشتر است، با تشکیل معادله به دست آورید.

۷۰) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف

$$P = \frac{(x-2)^{100}(x+3)^{101}}{(x+1)^{102}}$$

ب

$$P = \frac{(1-2x)(3x^2+2x-1)}{x^2+8}$$

پ

$$P = \frac{(-2x^2+x-1)(x+1)^3}{(-x^2+5x-6)(x^2+6x+9)}$$

۷۱) حدود  $a$  را طوری تعیین کنید که عبارت  $y = ax^2 + (a-1)x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}$  همواره منفی باشد.

۷۲) نامعادله‌ی  $\frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$  را حل کنید.

۷۳) حدود  $m$  را چنان بیابید که نامساوی‌های زیر برقرار باشد.

الف

$$\frac{m(m^3+m)}{m-2} > 0$$

ب

$$\frac{x^2+mx+m}{x-x^2-3} < 0$$

۷۴) نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نشان دهید.



الف

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > 0$$

ب

$$-1 < \frac{2x + 1}{3x - 1} < 2$$

پ

$$1 + \frac{x^2}{3x - 4} \leq \frac{4x + 10}{3x - 4}$$

ت

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 1 \\ \frac{x}{2} + 3 \leq 7 \end{cases}$$

۷۵) نامعادله‌ای قدر مطلق بنویسید که جواب آن بازه‌ی  $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$  باشد.

۷۶) یک نامعادله‌ی قدر مطلق بنویسید که جواب آن به‌صورت  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  باشد.

## فصل ۵: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن

۷۷) تابع بودن یا نبودن روابط زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف)  $f(x) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{W}, 2x + 2y = 10\}$

ب)  $h(x) = \{(x, 2y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 18\}$

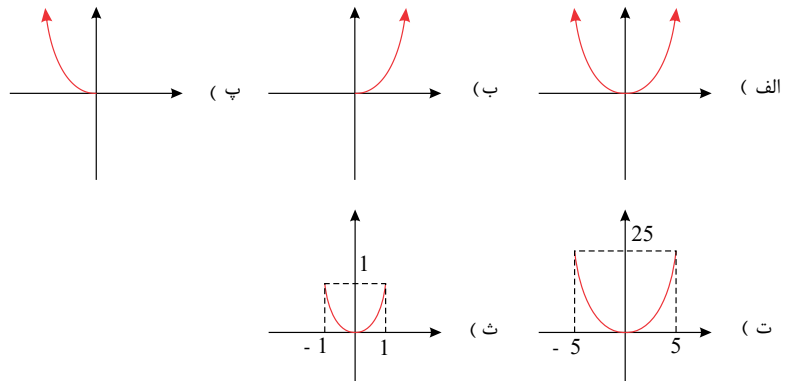
پ)  $g(x) = \{(x, \frac{y}{2}) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x + y \leq 3\}$

ت)  $Z(x) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 3\}$



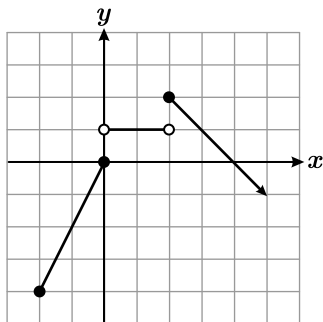
## درس سوم: انواع توابع

۷۸ کدام یک از نمودارهای زیر نمایش صحیحی برای تابع  $f(x) = x^2$  است؟ چرا؟



۷۹ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط  $(1, -4)$  و  $(2, -3)$  می‌گذرد و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض  $-3$  قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و با رسم آن، دامنه و بردش را معلوم کنید.

۸۰ نمودار تابع  $g(x) = 2|x - 1| - 3$  را به کمک انتقال تابع  $y = |x|$  رسم کنید.

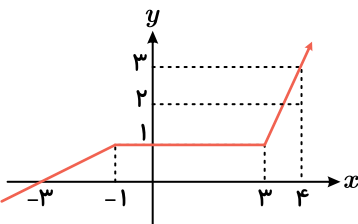


۸۱ نمودار تابع قطعه‌ای  $f$  داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.

۸۲ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید. مقادیر  $f(0)$ ،  $g(0)$ ،  $f(5)$ ،  $g(2)$ ،  $f(-2)$  و  $g(-\frac{1}{5})$  را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

۸۳ نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است:

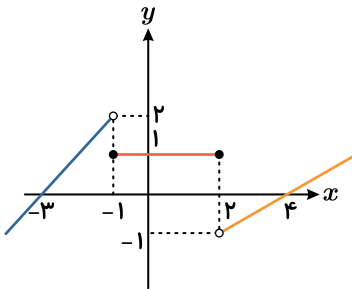




الف ضابطه تابع  $f$  را مشخص کنید.

ب مقادیر  $f(-4)$  و  $f(5)$  را به دست آورید.

۸۴ نمودار تابع قطعه‌ای  $f$  در شکل مقابل داده شده است.



الف ضابطه تابع را بنویسید.

ب دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۸۵ نمودار تابع  $f(x) = 2|x - 1| - 3$  را به کمک انتقال رسم کنید.

## فصل 6: شمارش، بدون شمردن

درس اول: شمارش

۸۶ می‌خواهیم ۴ مداد به شماره‌های ۱ تا ۴ را بین علی و حسن و رضا تقسیم کنیم به طوریکه مدادی باقی نماند. این کار به چند طریق ممکن است؟

۸۷ یک آزمون شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی تصمیم دارد به سؤال‌ها به صورت اتفاقی پاسخ دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد:  
الف) اگر مجبور باشد به تمامی سؤال‌ها جواب دهد؟  
ب) اگر بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۸۸ تعداد اعداد چهار رقمی زوج را که می‌توان با ارقام ۰، ۱، ۳، ۵، ۹ و بدون تکرار ارقام نوشت، به دست آورید.

۸۹ با ارقام ۱ تا ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد هشت‌رقمی می‌توان نوشت به طوری که، رقم‌های فرد و زوج یک‌درمیان باشند؟

۹۰ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ و بدون تکرار ارقام:



**الف** چند عدد هفت‌رقمی می‌توان نوشت که در آن رقم‌های زوج کنار هم و رقم‌های فرد کنار هم باشند.

**ب** چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت که با رقم زوج شروع و به رقم فرد ختم می‌شود.

**۹۱** می‌دانیم برای یک آزمون چهارگزینه‌ای با  $n$  سؤال، دانش‌آموزان می‌توانند ۳۱۲۵ حالت پاسخ‌نامه متمایز داشته باشند. اگر ۳ سؤال چهارگزینه‌ای دیگر به آزمون اضافه کنیم، چند پاسخ‌نامه متفاوت به شرط آنکه به همه سؤالات پاسخ داده شود، می‌تواند وجود داشته باشد؟

**۹۲** چند عدد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۵۰۰ وجود دارد که مجموع ارقام یکان و دهگان آنها ۸ باشد؟

**درس سوم: ترکیب**

**۹۳** یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید درست کند، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با این‌که در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیش‌تر از جواب شماست؟

## فصل ۷: آمار و احتمال

**درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس**

**۹۴** در پرتاب دو تاس با رنگ‌های قرمز و آبی به‌طور همزمان مطلوبست:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامدهای زیر:

$A$  = پیشامد آن‌که هر دو تاس فرد بیایند

$B$  = پیشامد آن‌که تاس آبی زوج بیاید

$C$  = پیشامد آن‌که مجموع دو تاس از ۶ بیش‌تر باشد

پ) پیشامدهای زیر:

$A - B$

$A \cap C$

$B \cup C$

$A' - B'$

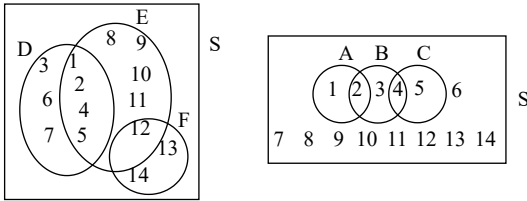
$A' \cap C$

ت) تعیین ناسازگار بودن یا نبودن یکی از پیشامدهای قسمت ب و یک پیشامد دلخواه از قسمت ج با یکدیگر (برای مثال  $A$  و  $A - B$ )



۹۵) اجتماع دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای  $S$  در شکل سمت راست، برابر با اشتراک کدام پیشامدها در فضای نمونه‌ای شکل

سمت چپ است؟



۹۶) به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، عبارت زیر را به صورت ریاضی نوشته و با نمودار ون نمایش دهید.  
« $A$  یا  $C$  رخ بدهند ولی  $B$  رخ ندهد.»

ب) اعداد از ۱ تا ۱۲ را روی توپ‌هایی نوشته و درون جعبه‌ای قرار داده‌ایم، سپس دو توپ با هم از این جعبه خارج می‌کنیم، چه قدر احتمال دارد که حداقل یک توپ عدد اول باشد؟

۹۷) از بین پنج کتاب ریاضی، فیزیک، شیمی، هندسه و ادبیات ۳ کتاب به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که کتاب ریاضی در بین این سه کتاب نباشد چند درصد است؟

۹۸) هر یک از اعداد ۱ تا ۱۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. دو کارت را با هم به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع اعداد رو شده روی کارت‌ها، عددی زوج باشد چه قدر است؟

۹۹) سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو پرتاب مثل هم بود تاس می‌ریزیم و اگر مثل هم نبود یک بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که پرتاب‌ها یک در میان مثل هم باشند کدام است؟

۱۰۰) در یک کارخانه ۵ نوع کالای  $A, B, C, D, E$  تولید می‌شوند. می‌خواهیم برای آزمایش دو نوع از این پنج نوع کالا را به تصادف انتخاب کرده و آزمایش کنیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف)  $A$  انتخاب شود.

ب)  $A, B$  انتخاب نشوند.

پ)  $C$  انتخاب شود ولی  $D$  انتخاب نشود.

۱۰۱) در یک مدرسه، ۳ کلاس داریم که در کلاس الف ۷ دانش‌آموز، در کلاس ب ۱۰ دانش‌آموز و در کلاس پ ۸ دانش‌آموز داوطلب شرکت در شورای دانش‌آموزی هستند و این شورا حداکثر ۱۵ نفر از دانش‌آموزان این سه کلاس را می‌پذیرد. احتمال این‌که ۴ دانش‌آموز از کلاس الف، ۵ دانش‌آموز از کلاس ب و ۶ دانش‌آموز از کلاس پ به این شورا راه یابند چه قدر است؟ (استفاده از ماشین حساب بلامانع است.)

۱۰۲) صفحه‌ی عقربه  $A$  را به ۴ قسمت و صفحه‌ی عقربه  $B$  را به ۵ قسمت تقسیم کرده‌ایم. عقربه‌ها را می‌چرخانیم. احتمال آن که هر دو عقربه سوی ناحیه با اعداد مساوی قرار نگیرد چه قدر است؟



۱۰۳ در یک باشگاه تیراندازی، ۳۰٪ افراد با سلاح نوع  $A$ ، ۵۰٪ با سلاح نوع  $B$  و ۱۰٪ با هر دو سلاح تیراندازی می‌کنند. مطلوبست احتمال این‌که یک نفر:

الف) حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

ب) فقط با سلاح  $A$  تیراندازی کند.

ج) با هر دو سلاح تیراندازی کند.

۱۰۴ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم و سپس تاسی می‌ریزیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) تاس زوج بیاید.

ب) سکه رو بیاید.

ج) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

د) تاس فرد یا سکه پشت بیاید.





## پاسخنامه تشریحی

۱) باتوجه به معلومات سوال ابتدا  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $A_3$  را تشکیل می‌دهیم:

$$A_1 = \left[ \frac{-3}{1}, \frac{1-1}{2} \right) = [-3, 0)$$

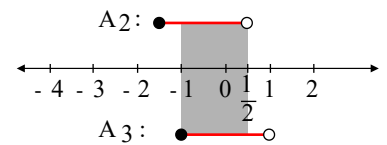
$$A_2 = \left[ \frac{-3}{2}, \frac{2-1}{2} \right) = \left[ \frac{-3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_3 = \left[ \frac{-3}{3}, \frac{3-1}{2} \right) = [-1, 1)$$

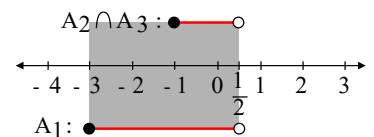
$$A_2 \cap A_3 = \left[ -1, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = \left[ -3, \frac{1}{2} \right)$$

حال  $A_2 \cap A_3$  را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:



و اجتماع آن را با  $A_1$  رسم می‌کنیم:

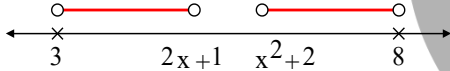


اعداد صحیح موجود در این بازه عبارتند از:  $0, -1, -2, -3$   
 $\Rightarrow$  در این بازه ۴ عدد صحیح موجود است.

۲)

$$\mathbb{R} - \{-1, 4\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$$

۳) باتوجه به شکل مشخص است برای تهی بودن اشتراک دو بازه، باید انتهای بازه سمت چپ، مقدار عددی کمتر از ابتدای بازه سمت راست داشته باشد.

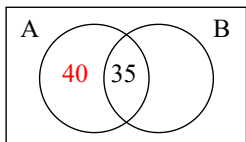


بنابراین :

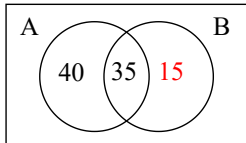
$$\begin{aligned} x^2 + 2 > 2x + 1 &\Rightarrow x^2 - 2x + 2 - 1 > 0 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 &\Rightarrow (x-1)^2 > 0 \\ 2x + 1 > 3 &\Rightarrow x > 1 \\ 8 > x^2 + 2 &\Rightarrow x^2 < 6 \Rightarrow -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \end{aligned} \Rightarrow 1 < x < \sqrt{6}$$

۴) باتوجه به نمودار ون داریم:

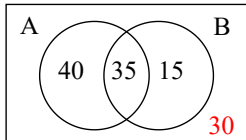
۱- از آنجا که  $n(A) = 75$  است و  $n(A \cap B) = 35$  نتیجه می‌گیریم که  $A$ ، ۴۰ عضو دارد که در  $(A \cap B)$  نیست.



۲- با استدلال مشابه برای  $B$  داریم:



۳- از  $90 = 40 + 35 + 15 = n(u)$  نتیجه می‌گیریم ۳۰ عضو مجموعه‌ی مرجع در هیچ یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  یا اکثرشان نیستند.



باتوجه به نمودار ون:

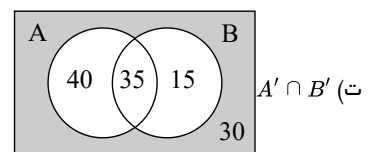
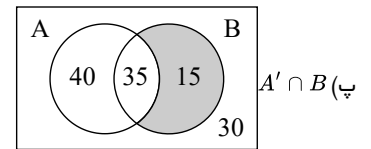
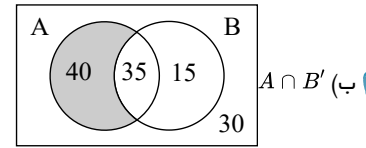
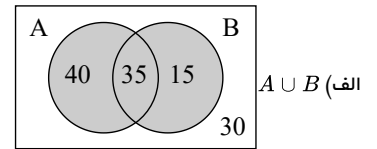


الف)  $n(A \cup B) = 90$

ب)  $n(A \cap B') = 40$

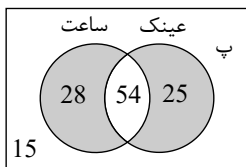
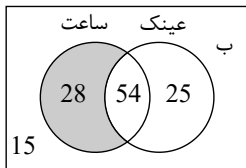
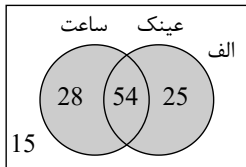
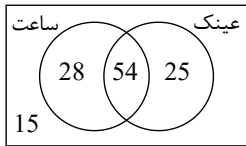
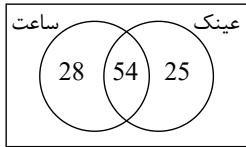
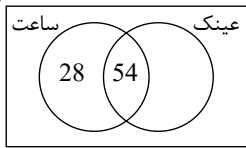
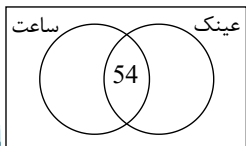
پ)  $n(A' \cap B) = 15$

ت)  $n(A' \cap B') = 30$



۵

باتوجه به نمودار ون:



۸۲ نفر ساعت دارند که ۵۴ نفرشان عینک هم می‌زنند و  $82 - 54 = 28$  نفر فقط ساعت دارند.

۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفرشان ساعت هم دارند و  $79 - 54 = 25$  نفر فقط عینک می‌زنند.

$$28 + 54 + 25 = 107$$

مجموع کسانی که ساعت، عینک یا هر دو را دارند ۱۰۷ نفر است که از ۱۲۲ نفر باقی می‌ماند که نه ساعت دارند نه عینک می‌زنند.

الف)  $107 = 25 + 28 + 54$  حداقل یکی یعنی یا ساعت یا عینک یا هر دو

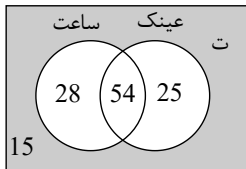
ب) ۲۸

پ)  $28 + 25 = 53$

دقیقاً یکی از دو مورد یعنی یا ساعت یا عینک فقط یک کدام (نه هر دو)



ت) ۱۵ نفر



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{۶}$$

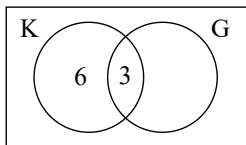
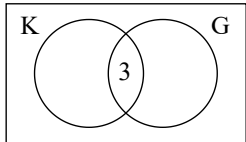
راه اول: اگر آزمایش خون را با  $K$  و آزمایش قند را با  $G$  نشان دهیم:

$$\begin{cases} n(K) = 9 \\ n(G) = 5 \\ n(K \cap G) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(K \cup G) = n(K) + n(G) - n(K \cap G) \\ n(K \cup G) = 9 + 5 - 3 = 11 \end{cases}$$

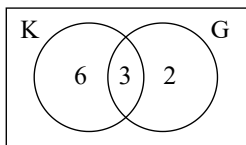
یازده نفر آزمایش خون یا قند ( $K \cup G$ ) را انجام داده‌اند.

$$n(K \cup G)' = n(u) - n(K \cup G) = 14 - 11 = 3 \quad \text{ب)}$$

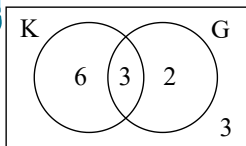
راه دوم:



می‌دانیم در مجموع ۹ نفر آزمایش خون داده‌اند که ۳ نفر آزمایش قند هم داده‌اند پس ۶ نفر فقط آزمایش خون داده‌اند:



با استدلال مشابه در می‌یابیم که ۲ نفر فقط آزمایش قند داده‌اند:



با جمع کردن تعداد نفرات و مقایسه با تمام مراجعه‌کنندگان در می‌یابیم که ۳ نفر در هیچ کدام یک از این دو آزمایش شرکت نکرده‌اند و نمودار ون به شکل زیر کامل می‌گردد:

۷

الف

$$n(B) = n(U) - n(B') = 150 - 60 = 90$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 110 = 80 + 90 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 60$$

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 80 - 60 = 20$$

ب

$$n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(U) - n(A \cap B) = 150 - 60 = 90$$

$$\text{اگر ساعت مراجعه را با } h \text{ و دقیقه مراجعه را با } m \text{ نشان دهیم، با توجه به الگوی } 34h + \frac{m}{2} = 34 \text{ و با جایگذاری } h = 11 \text{ داریم:}$$

$$2 \times 11 + \frac{m}{2} = 34 \Rightarrow 22 + \frac{m}{2} = 34 \Rightarrow \frac{m}{2} = 12 \Rightarrow m = 24$$

ساعت دقیق مراجعه: ساعت یازده و بیست و چهار دقیقه

۹

اگر  $a_n$  و  $a_{n+1}$  را در دو جمله‌ی متوالی در نظر بگیریم داریم:

$$a_{n+1} - a_n = 28$$

$$(4(n+1)^2 - 1) - (4n^2 - 1) = 28$$

$$(4(n^2 + 2n + 1) - 1) - (4n^2 - 1) = 28$$

$$4n^2 + 8n + 4 - 1 - 4n^2 + 1 = 28$$

$$8n + 4 = 28 \Rightarrow 8n = 24 \Rightarrow n = 3, n + 1 = 4 \quad \text{جملات سوم و چهارم}$$

۱۰

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت:  $d$ ، جمله‌ی اول دنباله:  $a_1$



$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

$$\frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} = a_1 + a_2$$

$$\frac{a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d}{3} = a_1 + a_1 + d$$

$$\frac{3a_1 + 9d}{3} = 2a_1 + d$$

$$a_1 + 3d = 2a_1 + d$$

$$2d = a_1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 100$$

$$5a_1 + 10d = 100 \xrightarrow{a_1=2d} 5 \times 2d + 10d = 100 \quad 10d + 10d = 100$$

$$20d = 100 \Rightarrow d = 5$$

$$a_1 = 2d = 10$$

نحوه‌ی توزیع نان بین ۵ نفر  $10, 15, 20, 25, 30 \rightarrow$

۱۱

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت:  $d$ , جمله‌ی اول دنباله:  $a_1$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 21 \\ d = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n - 1)d = 21 + (n - 1) \times -3 = 21 - 3n + 3 = 24 - 3n \\ a_n < 0 \Rightarrow 24 - 3n < 0 \Rightarrow 24 < 3n \xrightarrow{\div 3} 8 < n \end{array} \right\}$$

$n > 8 \Rightarrow n \geq 9$  از جمله هشتم به بعد دنباله منفی می‌شود، یعنی اولین جمله منفی دنباله نهمین جمله آن است.

۱۲

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت:  $d$ , جمله‌ی اول دنباله:  $a_1$

$$4 : هزینه‌ی پارس آنلاین:  $20 + (n - 1) \times 4$$$

$$3 : هزینه‌ی شاتل:  $30 + (n - 1) \times 3$$$

$$\checkmark 36 = 20 + 16 = 20 + 4 \times 4 = 20 + (5 - 1) \times 4 : پارس آنلاین برای علی$$

$$42 = 30 + 12 = 30 + 4 \times 3 = 30 + (5 - 1) \times 3 : شاتل برای علی$$

$$76 = 20 + 56 = 20 + 14 \times 4 = 20 + (15 - 1) \times 4 : پارس آنلاین برای حسن$$

$$52 \checkmark = 30 + 22 = 30 + 14 \times 3 = 30 + (15 - 1) \times 3 : شاتل برای حسن$$

برای علی پارس آنلاین و برای حسن شاتل مناسب تر است.

۱۳

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت:  $d$ , جمله‌ی اول دنباله:  $a_1$

$$a_3 = \frac{a_3}{2} = \frac{a_1 + 2d}{2} \rightarrow 2a_1 = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = 2d$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 2d + 14d = 16d$$

جمله پانزدهم، ۱۶ برابر قدر نسبت دنباله است.

۱۴

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت:  $d$ , جمله‌ی اول دنباله:  $a_1$

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_3 < 0, \quad a_4 > 0$$

$$d > 0$$

$$a_3 < 0 \Rightarrow a_1 + 2d < 0$$



$$a_6 > 0 \Rightarrow a_1 + 3d > 0$$

با فرض  $a_1 = -5$  داریم:

$$I) -5 + 3d > 0 \Rightarrow d > \frac{5}{3}$$

$$II) -5 + 2d < 0 \Rightarrow d < \frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} \frac{10}{6} > d > \frac{15}{6}$$

برای مثال:

$$d = \frac{12}{6} = 2$$

$$a_1 = -5$$

$$d = 2$$

$$-5, -3, -1, 1, 3, \dots$$

۱۵

$$a_1 + a_6 = 56 \Rightarrow a + ar^5 = 56 \Rightarrow a(1 + r^5) = 56$$

$$a_2 + a_5 = 24 \Rightarrow ar + ar^4 = 24 \Rightarrow ar(1 + r) = 24$$

$$\frac{a(1 + r^5)}{ar(1 + r)} = \frac{56}{24} \xrightarrow[\text{اتحاد تقاضل}]{\text{مکعبیت}} \frac{(1 + r)(1 - r + r^2)}{r(1 + r)} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \xrightarrow[\text{حل معادله درجه ۲}]{\text{حل معادله درجه ۲}} r = 3, \frac{1}{3}$$

$$\text{حالت اول: } r = \frac{1}{3} \Rightarrow a\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 24 \Rightarrow a = 54 \Rightarrow a_n = 54\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{حالت دوم: } r = 3 \Rightarrow a(3)(4) = 24 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a_n = 2(3)^{n-1}$$

۱۶

$$t_n = t_1 r^{n-1}, \begin{cases} t_1 + t_5 = 5 \\ t_5 - t_1 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_1 r^4 = 5 \\ t_1 r^4 - t_1 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(1 + r^4) = 5 \\ t_1(r^4 - 1) = 15 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1(r^4 - 1)}{t_1(1 + r^4)} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(r^4 - 1)(r^2 + 1)}{r^2 + 1} = 3 \Rightarrow r^4 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

چون جملات دنباله همگی مثبت هستند، پس فقط  $r = 2$  قابل قبول است و داریم:

$$t_1(1 + r^4) = 5 \xrightarrow{r=2} 5t_1 = 5 \Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow t_n = t_1 r^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

۱۷

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r^2 = 8 \\ a_1 r^3 + a_1 r^5 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + r^2) = 8 \\ a_1 r^3(1 + r^2) = 64 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^3(1 + r^2)}{a_1(1 + r^2)} = \frac{64}{8}$$

$$r^3 = 8 \Rightarrow r^3 = 2^3 \Rightarrow r = 2$$

$$a_1 + a_1 r^2 = 8 \xrightarrow{r=2} a_1 + a_1 \times 2^2 = 8 \Rightarrow a_1 + 4a_1 = 8 \Rightarrow 5a_1 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{5}$$

۱۸

در هر دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و نسبت مشترک  $r$ ، جمله  $n$ ام از رابطه  $a_n = a_1 r^{n-1}$  به دست می‌آید.

$$a_2 \times a_6 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1 r \times a_1 r^5 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1^2 r^6 = \frac{4}{81} \Rightarrow (a_1 r^2)^2 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1 r^2 = \pm \frac{2}{9}$$

چون  $r^2$  مثبت است و جملات دنباله، منفی هستند، پس  $a_1 r^2 = -\frac{2}{9}$  است.

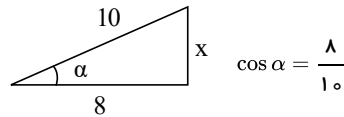
$$a_1 + a_6 = -\frac{13}{18} \Rightarrow a_1 + a_1 r^5 = -\frac{13}{18} \xrightarrow{a_1 r^2 = -\frac{2}{9}} a_1 - \frac{2}{9} = -\frac{13}{18} \Rightarrow a_1 = -\frac{13}{18} + \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-13 + 4}{18} = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}$$

۱۹



باتوجه به شکل مقابل داریم:

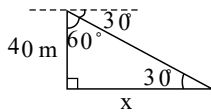


برای بدست آوردن ارتفاع مثلث، از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$100 = 64 + x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$$

$$\begin{aligned} \textcircled{20} \quad \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cot x &= \frac{\sin x(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x} \times \cot x = \frac{\sin x \times \cos^2 x}{\cos^2 x} \times \cot x \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \times \cot x = \tan x \times \cot x = 1 \end{aligned}$$



با توجه به شکل داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{40}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}$$

$$\triangle AHC : \sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 4 \Rightarrow CH^2 = AC^2 - AH^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow CH = 4\sqrt{3} = x$$

$$\triangle AHB : \tan 45^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow 1 = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = z$$

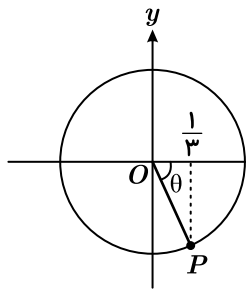
$$\triangle ACD : \sin 30^\circ = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow AC^2 = CD^2 - AD^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow CA = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle ABC : \tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow 4 + x = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4\sqrt{3} - 4$$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-2 \leq \sin \theta + \cos \alpha \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 3a - 5b = -6 - 10 = -16$$



$$P(x, y), \quad x = \frac{1}{3}, y < 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} \xrightarrow{y < 0} y = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \Rightarrow \cos \theta &= x = \frac{1}{3}, \tan \theta = \frac{y}{x} = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cos \theta + \tan^2 \theta = \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

اگر  $P(x, y)$  روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آنگاه:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{8}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{y در ناحیهٔ چهارم منفی است.}} y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin \theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta + 2\sqrt{2} \tan \theta = -\frac{1}{3} + 2\sqrt{2} \times \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

برای نوشتن معادله‌ی خط، یکی از راه‌ها در دست داشتن شیب خط و یک نقطه از خط است:

$$A = \left| \frac{2}{3} \right| \text{ شیب } m = \tan 45^\circ = 1$$

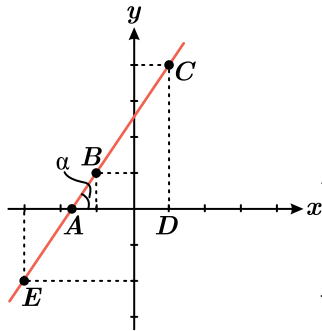


$$y = mx + b$$

$$\begin{aligned} m=1 & \rightarrow y = x + b \rightarrow 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1 \rightarrow y = x + 1 \\ y \stackrel{x=8}{=} 8 + 1 = 9 & \quad (8, 9) \end{aligned}$$

۲۸

الف

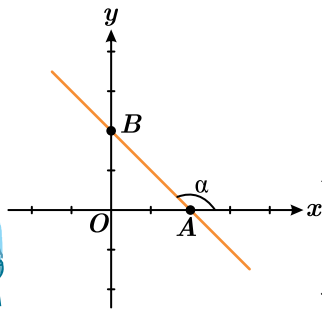


$$\begin{array}{c|ccc} x & -3 & -1 & -\frac{5}{3} & 1 \\ \hline y & -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

$$\tan \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

ب



$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$\tan \alpha = -\frac{OB}{OA} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$$

دقت کنید که زاویه‌ای منفرجه است، پس انتهای کمان در ربع دوم قرار می‌گیرد.

۲۹

الف

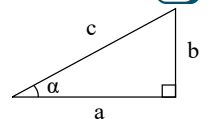
$$\left( \frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \left( \frac{1}{\cos \theta (1 + \cot^2 \theta)} \right) = \left( \frac{1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right) \left( \frac{1}{\cos \theta} \right) \left( \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \right) \left( \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \left( \frac{1}{\cos \theta} \right) (\sin^2 \theta) = 2$$

ب

$$\left( \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2 \tan^2 \theta = \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} - 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 2$$

۳۰ با در نظر گرفتن زاویه‌ی بین ضلع  $a$  و  $c$  بعنوان زاویه‌ی  $\alpha$  داریم:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{1}{3} & 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{9}} \\ \cot^2 \alpha + 1 &= 9 \rightarrow \cot^2 \alpha = 8 \rightarrow \cot \alpha &= \sqrt{8} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$



۳۱

$\theta = 150^\circ$  در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد. در ناحیه دوم مثلثاتی، سینوس مثبت و بقیه منفی اند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 150^\circ &= \frac{1}{\cos^2 150^\circ} \Rightarrow 1 + \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 150^\circ} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos^2 150^\circ} \\ \Rightarrow \cos^2 150^\circ &= \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 150^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\cos 150^\circ < 0} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \sin 150^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 150^\circ} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ \cot 150^\circ &= \frac{1}{\tan 150^\circ} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

۳۲



$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}\right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\cot^2 \alpha} = |\cot \alpha|$$

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (\tan \alpha - 1)} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1\right)}$$

$$= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}\right)} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

۳۳

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{a} \quad \text{الف) } 0 < a < 1$$

$$\sqrt[3]{-27} > -27 \rightarrow -3 > -27 \quad \text{ب) } a < -1$$

$$\sqrt[3]{1} = 1, \quad \sqrt[3]{0} = 0 \quad \text{پ) } a = 0, 1$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \quad \text{ت) } a = -1$$

$$\sqrt[3]{27} < 27 \Rightarrow 3 < 27 \quad \text{ث) } a > 1$$

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{a}} < \frac{-1}{a} \Rightarrow \frac{-1}{2} < \frac{-1}{a} \quad \text{ج) } -1 < a < 0$$

$$a : 3 \quad b : 4 \quad c : 5 \quad d : 4 \quad \text{الف) ۳۵}$$

اعداد مثبت بزرگتر از یک هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر)، عدد کوچکتری حاصل می‌کنند. و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

$$a : 5 \quad b : 4 \quad c : 3 \quad d : 4 \quad \text{ب)$$

اعداد مثبت بین صفر و یک، هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر) عددی بزرگتر حاصل می‌شود. و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

$$a : 3 \quad b : 5 \quad \text{پ)$$

اعداد بین صفر و منفی یک، هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر) عدد کوچکتری حاصل می‌کنند. و در اعداد منفی هر چه به سمت چپ روی محور حرکت کنیم، عدد کوچکتر می‌شود. ضمن اینکه اعداد منفی، تنها ریشه‌های فرد دارند.

$$a : 5 \quad b : 3 \quad \text{ت)$$

اعداد منفی کوچکتر از منفی یک هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر)، عدد بزرگتری حاصل می‌کنند. با توجه به اینکه هر چه روی محور اعداد منفی به سمت چپ حرکت کنیم عدد ما کوچکتر می‌شود و اعداد منفی تنها ریشه‌های فرد دارند.

$$a_1 : a_1 \quad \text{۳۶) عددی است بین صفر و یک}$$

ریشه‌ی سوم  $a_1$  باید بزرگتر از خودش و کوچکتر از ۱ باشد. در نتیجه ریشه‌ی سوم  $a_1$ ،  $a_1$  خواهد بود. (اعداد بین صفر و یک، هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می‌شوند.)

مثال:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 3)$$

$a_p$ : عددی بزرگتر از یک است.

ریشه‌ی سوم  $a_p$ ، باشد بزرگتر از یک و کوچکتر از  $a_p$  باشد یعنی  $b_p$ .

$a_p$ : هر چه یک عدد بین صفر و منفی یک به توان فرد بزرگتری برسد، عدد منفی نزدیکتری به صفر به وجود می‌آورد (عددی بزرگتر)

پس ریشه سوم عددی بین صفر و منفی یک، باید از خودش کوچکتر باشد (از صفر دورتر باشد) (می‌دانیم هر چه در اعداد منفی روی محور به سمت چپ حرکت کنیم عدد



کوچکتر می‌شود به‌عنوان مثال:  $-3 < -2$

در نتیجه ریشه‌ی سوم  $a_p$ ،  $b_p$  می‌شود که از خودش کوچکتر است.

$a_p$ : عددی منفی و کوچکتر از منفی یک است پس ریشه‌ی سومش از خودش بزرگتر می‌شود.  
(می‌دانیم که در محور اعداد منفی هرچه به سمت صفر پیش برویم عددمان بزرگتر می‌شود.)

فلذا ریشه‌ی سوم  $a_p$ ،  $c_p$  می‌شود که از خودش بزرگتر است.

(۳۷) در  $a = (\sqrt[n]{a})^n$ ، از آنجا که زیر رادیکال به فرجه‌ی زیر عبارت منفی قرار نمی‌گیرد پس  $a \geq 0$  و در نتیجه تساوی همواره برقرار است.

اما در  $\sqrt[n]{a^r}$ ، از آنجا که عبارت زیر رادیکال  $a^r$  می‌باشد و  $a^r$  در هر صورت (چه  $a$  مثبت باشد، چه منفی) مثبت است، پس ممکن است به ازای یک  $a$  که مقداری منفی دارد،  $\sqrt[n]{a^r}$  شکل بگیرد و پاسخ رادیکال به فرجه‌ی زوج هرگز منفی نخواهد بود که ما را مجبور به استفاده از قدر مطلق می‌کند که اگر احياناً  $a$  مقداری منفی بود، باز هم عبارت برقرار باشد مانند  $a = -3$

$$\sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9} = |-3| = 3$$

$$\sqrt[n]{a^r} = |a|$$

$$(\sqrt[n]{a})^r = a$$

(۳۸)

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{16 \times 2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^4 \times 2} = \sqrt[3]{2^4} \times \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$$

(۳۹)

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{الف) } \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[3]{2^{\frac{4}{3}}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{2^4} = \sqrt[9]{16}$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}} = \sqrt[3]{2^{\frac{5}{3}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{5}{3}}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{2^5} = \sqrt[9]{32}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5 \times 4^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{11}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{11}{3}}} = \left(2^{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{11}{9}} = \sqrt[9]{2^{11}}$$

راه دوم: تمام فرجه‌ها را در هم ضرب کرده و به صورت یک رادیکال می‌نویسیم:  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$$\text{الف) } \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[9]{2^4} = 2^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{16}$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}} = \sqrt[9]{2^5} = 2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{32}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5 \times 4^8}} = \sqrt[9]{2^{11}} = \sqrt[9]{2^{11}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0, m, n \in \mathbb{N} \quad (40)$$

ابتدا منفی را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3\sqrt[3]{3}} &= -\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = -\sqrt[3]{3 \times 3^{\frac{1}{3}}} = -\sqrt[3]{3^{\frac{4}{3}}} \\ &= -\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = -\left(3^{\frac{4}{9}}\right) = -\sqrt[9]{3^4} = -\sqrt[9]{81} \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a} \quad n \geq 2, a \geq 0 \quad (41)$$

از داخلی‌ترین شروع می‌کنیم و با تبدیل به رادیکال‌ها به توان و ضرب توان‌ها ادامه می‌دهیم:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2 \times 2^{\frac{1}{3}}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2 \times 2^{\frac{1}{3}}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{\frac{7}{3}}}}} = \sqrt[9]{2^{\frac{7}{3}}} = \sqrt[9]{2^{\frac{7}{3}}}$$



$$= \sqrt[2]{2 \sqrt[2]{2 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[2]{2 \sqrt[2]{2 \times 2^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt[2]{2 \sqrt[2]{2^{\frac{5}{4}}}} = \sqrt[2]{2 \times \left(2^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[2]{2 \times 2^{\frac{5}{8}}} = \sqrt[2]{2^{\frac{13}{8}}} = 2^{\frac{13}{16}} = \sqrt[16]{2^{13}}$$

$$\begin{array}{l} \text{زوج } n \quad \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ \text{فرد } n \quad \sqrt[n]{a^n} = a \end{array}$$

۴۲

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2 + 1 - 2a} + \sqrt{a^2 + 4 - 4a} \\ &= \sqrt{a^2} + \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-2)^2} = |a| + |a-1| + |a-2| \\ & \begin{array}{l} -1 < a < 0 \\ a-1 < 0 \\ a-2 < 0 \end{array} \quad -a - (a-1) - (a-2) = -a - a + 1 - a + 2 \\ &= -3a + 3 = 3(-a+1) = 3(1-a) \end{aligned}$$

۴۳

$$\begin{array}{l} \text{زوج } n \quad \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ \text{فرد } n \quad \sqrt[n]{a^n} = a \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5} = \\ & (\sqrt{3}-2) - |\sqrt{3}-2| - (\sqrt{3}-2) \\ &= -|\sqrt{3}-2| \stackrel{\sqrt{3}-2 < 0}{=} -(-(\sqrt{3}-2)) = \sqrt{3}-2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt[n]{a^n} = a \\ \text{فرد } n \end{array}$$

۴۴

$$5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3 \times 3} = \sqrt[3]{375}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad m, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$$

۴۵

ابتدا عبارت دارای  $x$  را ساده می‌کنیم:  
از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^3 \sqrt{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x \times x^{\frac{1}{2}}}} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[3]{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} \\ & x^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow \sqrt{x} = y \end{aligned}$$

۴۶

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|} \quad \sqrt[3]{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} \times \sqrt{b} = |a| \times |b| \sqrt{b} = -ab\sqrt{b}$$

از آنجایی که می‌بینیم  $\sqrt{b}$  تعریف شده است  $b > 0$

$$|a| \times |b| \sqrt{b} = |a| \times b\sqrt{b} = -a \times b\sqrt{b} \Rightarrow |a| = -a$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{ab} \quad \text{زوج } n \in \mathbb{N} \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \geq 0, \quad n, m, k \in \mathbb{N}$$

۴۷

ابتدا فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)} = \sqrt[3 \times 2]{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \sqrt[6]{2+1-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} \\ & \sqrt{(2-1)^2} \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \\ &= \sqrt[6]{9-8} = \sqrt[6]{1} = 1 \end{aligned}$$

۴۸

$$x^2 + x^2 - x - 1 \stackrel{\text{فاکتور}}{=} x^2(x+1) - (x+1) \stackrel{\text{فاکتور}}{=} (x+1)(x^2-1)$$



$$= (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$$

۴۹

$$a^2 - 6a = -1 \Rightarrow a^2 + 1 = 6a \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a} + \frac{1}{a} = 6 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 6$$

$$\frac{a+1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{(a+1)\sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a} + \sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \frac{\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{a}$$

به توان ۲ میرسانیم

$$\rightarrow a + \frac{a}{a^2} + \frac{2\sqrt{a}\sqrt{a}}{a} = a + \frac{1}{a} + \frac{2a}{a} = a + \frac{1}{a} + 2$$

رادیکال

$$\frac{a + \frac{1}{a} = 6}{6 + 2 = 8} \rightarrow \frac{a+1}{\sqrt{a}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۵۰

الف)  $x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2 - 4)$

$$= (x+1)(x-2)(x+2)$$

ب)  $a^5 - ab^4 = a(a^4 - b^4) = a(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

$$= a(a^2 + b^2)(a - b)(a + b)$$

پ)  $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)(a^2 - b^2)$

$$= (a - b)(a - b)(a + b) = (a - b)^2(a + b)$$

ت)  $2x^2 + 6x + 4 = 2x^2 + 2x + 4x + 4 = 2x(x+1) + 4(x+1)$

$$= (2x+4)(x+1) = 2(x+2)(x+1)$$

۵۱

(I)  $\frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{x} + 2\sqrt{2}}{x - 2}$

(II)  $\frac{3}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}} = \frac{3(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})}{x + 2}$

I, II  $\rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt{x} + 2\sqrt{2}}{x - 2} + \frac{3(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})}{x + 2}$

$$= \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2) + 3(x-2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2) + 3(x-2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})}{x^2 - 4}$$

۵۲

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{a} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1} - \frac{1}{a - 1} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}{a - 1} - \frac{1}{a - 1} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1 - 1}{a - 1} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}}{a - 1}$$

۵۳

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{6}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{6}{\sqrt[3]{8} - 1} \times (\sqrt[3]{2} - 1) = 6(\sqrt[3]{2} - 1)$$

۵۴

$$x^6 - 2y^6 + 2x^2y^2 = (x^6 + 2x^2y^2 + y^6) - 2y^6 = (x^2 + y^2)^3 - (\sqrt[3]{2}y^2)^3 = (x^2 + y^2 - \sqrt[3]{2}y^2)(x^2 + y^2 + \sqrt[3]{2}y^2)$$

۵۵



$$\begin{aligned} \sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt[4]{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt[4]{(3 - \sqrt{2})^2} \times \sqrt[4]{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt[4]{9 - 6\sqrt{2} + 2} \times \sqrt[4]{11 + 6\sqrt{2}} = \\ \sqrt[4]{(11 - 6\sqrt{2})(11 + 6\sqrt{2})} &= \sqrt[4]{121 - 72} = \sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7} \\ \frac{2}{\sqrt[3]{3} + 1} &= \frac{2}{\sqrt[3]{3} + 1} \times \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 1} = \frac{2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)}{(\sqrt[3]{3})^3 + 1^3} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

$3+1=4$

هر نفر با همه افراد بجز خودش مبارزه می‌کند یعنی  $n(n-1)$ ؛ اما از آنجایی که هر مسابقه‌ای انجام شده بین دو نفر مشترک است پس در واقع ما به ازای هر نفر یک مسابقه را در نظر گرفته‌ایم در صورتیکه هر مسابقه بین دو نفر انجام می‌شود بنابراین رابطه‌ی بالا به شکل  $\frac{n(n-1)}{2}$  در می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= 36 \Rightarrow n^2 - n = 72 \\ \Rightarrow n^2 - n - 72 &= 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \\ n=-8 \end{cases} \text{ غرض} \\ (1 - \text{تعداد شرکت کننده}) \times \text{تعداد شرکت کننده} &= \text{تعداد مبارزات} \\ 2 & \end{aligned}$$

اگر کمی دقت کنید می‌بینید که خود  $A$  در  $A$  وجود دارد. (۵۷)

$$\begin{aligned} A^2 &= 6 + \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}_A \\ \Rightarrow A^2 &= 6 + A \end{aligned}$$

حالا ۲ طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A = 3$$

با حل معادله فوق  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 4 - 2(m+1) + 3m &= 0 \Rightarrow 4 - 2m - 2 + 3m = 0 \Rightarrow m = -2 \\ \text{معادله: } x^2 - x - 6 &= 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

$x = -2$  در معادله صدق می‌کند: (۵۸)

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \quad (59)$$

با دیدن عبارت‌های  $4x^2$  و  $3x^2$  که در آنها  $x^2$  مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:  
(الف) روش اول) در عبارت  $a^2 + 2ab + b^2$ ،  $a$  را برابر با  $2x$  بگیریم که در آن صورت  $a^2 = 4x^2$  خواهد بود:

$$\begin{aligned} (2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} &= 0 \\ \xrightarrow{\text{طرفین} + \frac{1}{2}} (2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \\ (2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \\ 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \\ (2x - \frac{1}{2})^2 &= \frac{3}{4} \Rightarrow (2x - \frac{1}{2}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ 2x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

روش دوم: تمام جملات را تقسیم بر ۴ می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2x - \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{4x^2}{4} - \frac{2x}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{4} &= \frac{0}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0 \end{aligned}$$



از این جا به بعد مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$x^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{8} = 0 \xrightarrow{+\frac{3}{16}} x^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

$$x^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

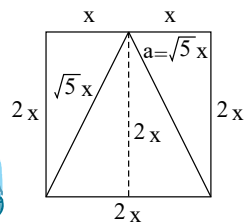
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

دقت: در هر دو روش، جواب بدست آمده باید یکسان باشد وگرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم؛ بعلاوه اینکه همواره می‌توانیم با جایگذاری جواب نهایی بدست آمده در معادله اصلی از صحت جواب بدست آمده مطمئن شویم.

(ب) اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم با  $(\sqrt{3}x)^2 = 3x^2$  بر می‌خوریم که حل معادله مشکل می‌شود بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جملات به ۳، معادله را به شکل استاندارد در می‌آوریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم:

$$3x^2 - 6x + 3 = 1 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث کناری داریم:

$$a^2 = (2x)^2 + x^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2 \Rightarrow a = \sqrt{5}x$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{2x \times 2x}{2} = 2x^2$$

$$P_{A \text{ مثلث}} = \sqrt{5}x + \sqrt{5}x + 2x = 2(\sqrt{5} + 1)x$$

$$2x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow 2x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(5 + 1 + 2\sqrt{5}) - 4(2)(\sqrt{5} - 5)$$

$$\Rightarrow 4(6 + 2\sqrt{5}) - 4(2\sqrt{5} - 10) = 24 + 8\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 40 = 64$$

$$x_1, x_2 = \frac{-2(\sqrt{5} + 1) \pm \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \text{ غرض} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{مساحت مربع} = 4x^2 = 4 \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{4 \times (9 + 5 - 6\sqrt{5})}{4} = 14 - 6\sqrt{5}$$

بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$(2\sqrt{13})^2 = (x+1)^2 + (2x)^2 \Rightarrow 52 = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 \Rightarrow 5x^2 + 2x - 51 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 - 4(5)(-51) = 1024 = 32^2 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 32}{10} \Rightarrow x = \frac{-2 + 32}{10} = 3, x = \frac{-2 - 32}{10} = -3.4$$

$x$  باید مثبت باشد، در نتیجه  $x = 3$  قابل قبول است و طول اضلاع قائمه آن ۴ و ۶ می‌باشد.

$$(20 + 2x)(10 + 2x) = 600 \Rightarrow 4x^2 + 60x - 400 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 15x - 100 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+20) = 0 \Rightarrow x = 5 \quad x = -20 \quad \text{غیر قابل قبول}$$



در شکل مقابل:

نیزه در  $y = 0$  است، فرود می‌آید.

پس با محاسبه  $x$ ‌هایی که بر حسب آنها  $y$  در دو معادله صفر می‌شود و مقایسه آنها با یکدیگر معلوم می‌شود کدام

نیزه جلوتر است و برنده کیست.

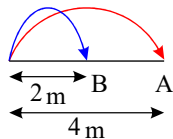
پس:

$$A: 0 = -x^2 + 3x + 4 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 9 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + 5}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-3 - 5}{-2} = 4 \end{cases}$$

$$B: 0 = -4x^2 + 6x + 4 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 36 - 4(-4)(4) = 36 + 64 = 100$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{-8} = \frac{-6 \pm 10}{-8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-6 + 10}{-8} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-6 - 10}{-8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



از آنجا که نیزه‌ی A، 4 متر و نیزه‌ی B، 2 متر رفته‌اند، برنده A است.

۶۴

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (0, 2) \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=2} a - b = -2 \quad (1)$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (2, 0) \Rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + c \xrightarrow{c=2} 4a + 2b = -2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{a-b=-2} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{a-b=-2} -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = -x^2 + x + 2$$

معادله سهمی به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. داریم:

$$f(0) = 2 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \xrightarrow{c=2} 4a - 2b = -2 \Rightarrow 2a - b = -1$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 2 \Rightarrow a - b + 2 = 2 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ -a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{a-b=0} 1 - b = -1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

۶۵

الف

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$$

$$\Rightarrow y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2) + c - \frac{b^2}{4a} \Rightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

طبق رابطه بمدست آمده در قسمت قبل، ریشه عبارت داخل پرانتز طول رأس سهمی و عبارت جمع شده با جمله مربع کامل یعنی  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  عرض رأس سهمی است.

پس خط  $x = -\frac{b}{2a}$  خط تقارن سهمی خواهد بود.

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \text{مختصات رأس سهمی} = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

اگر ضریب  $x^2$  مثبت و  $\Delta < 0$  باشد، آنگاه سهمی همواره بالای محور  $x$ ‌ها قرار می‌گیرد:

$$a = 2 > 0, \Delta = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m+2) = m^2 - 2m - 15$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = (m-5)(m+3) = 0 \Rightarrow m = 5, m = -3$$

| $m$      | $-3$ | $5$ |
|----------|------|-----|
| $\Delta$ | $+$  | $+$ |

$$\Delta < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$



۶۸ در عبارت  $ax^2 + bx + c$ ، اگر  $a < 0$  و  $\Delta < 0$ ، آنگاه عبارت همواره منفی است:

$$a = m < 0 \quad (1), \quad \Delta = (m+1)^2 - 4m^2 = m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1 < 0 \quad (2)$$

$$-3m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1, m = -\frac{1}{3}$$

|          |                |     |
|----------|----------------|-----|
| $m$      | $-\frac{1}{3}$ | $1$ |
| $\Delta$ | $-$            | $+$ |

$$\Delta < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{1}{3})$$

۶۹ فرض کنیم  $x$  عدد طبیعی موردنظر باشد، داریم:

$$x^2 = 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \text{ (ق ق)} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

۷۰

الف

$$x-1, x=-3, x=2$$

| x             | -3 | -1 | 2 |
|---------------|----|----|---|
| $(x-2)^{100}$ | +  | +  | + |
| $(x+3)^{101}$ | -  | +  | + |
| $(x+1)^{102}$ | +  | +  | + |
| P             | -  | +  | + |

$$x = \frac{1}{2}, x = -1, x = \frac{1}{3}$$

| x               | -1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
|-----------------|----|---------------|---------------|
| $(1-2x)$        | +  | +             | +             |
| $3x^2 + 2x - 1$ | +  | -             | +             |
| P               | +  | -             | +             |

۸ +  $x^2$  همواره مثبت است پس می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم.

ب

$$\begin{cases} -2x^2 + x - 1 = 0 \\ \Delta = 1 - 4(-2)(-1) < 0 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} \text{همواره منفی است} \text{ ریشه ندارد.}$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4(-1)(-6) = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$$

| x               | -3 | -1 | 2 | 3 |
|-----------------|----|----|---|---|
| $-2x^2 + x - 1$ | -  | -  | - | - |
| $(x+1)^3$       | -  | -  | + | + |
| $-x^2 + 5x - 6$ | -  | -  | - | + |
| $x^2 + 6x + 9$  | +  | +  | + | + |
| P               | -  | -  | + | + |

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ می‌دانیم عبارت } y = ax^2 + bx + c \text{ زمانی همواره منفی خواهد بود که:}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a < 0 \text{ (I)} \\ (a-1)^2 - 4(a)(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2a}) = a^2 - 2a + 1 + \frac{2a}{2} - \frac{4a}{2a} < 0 \end{cases}$$



$$a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 < 0 \Rightarrow a^2 - 1 < 0$$

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

|           |       |       |
|-----------|-------|-------|
| a         | -1    | 1     |
| $a^2 - 1$ | + ○ - | - ○ + |

 $\Rightarrow \boxed{-1 < a < 1} \quad (II)$

$$\boxed{I, II} \Rightarrow \boxed{-1 < a < 0}$$

$$\underbrace{\frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}}_{II}$$

$$(I): \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) - (x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\frac{x^2 + 5x + 4 - (x^2 + 5x + 6)}{(x+2)(x+4)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 5x + 4 - x^2 - 5x - 6}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0 \quad \begin{array}{l} \text{صورت منفی} \\ \text{مخرج منفی} \\ \text{عبارت مثبت} \end{array}$$

| x          | -4    | -2    |
|------------|-------|-------|
| x+2        | -     | - ○ + |
| x+4        | - ○ + | + +   |
| (x+2)(x+4) | + ○ - | - ○ + |

$$\Rightarrow -4 < x < -2$$

$$(II): \frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+2) - x(x+1)}{x(x+2)} > 0$$

$$\frac{x^2 + x - 2 - (x^2 + x)}{x(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2 - x^2 - x}{x(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)} > 0 \quad \begin{array}{l} \text{صورت منفی} \\ \text{مخرج منفی} \\ \text{عبارت مثبت} \end{array}$$

| x      | -2    | 0     |
|--------|-------|-------|
| x      | -     | - ○ + |
| (x+2)  | - ○ + | + +   |
| x(x+2) | + ○ - | - ○ + |

$$-2 < x < 0$$

$$I \cap II = (-4, -2) \cap (-2, 0) = \emptyset \quad \text{نامعادله جواب ندارد}$$

۷۳

الف

$$\frac{m(m^2 + m)}{m-2} > 0 \Rightarrow \frac{m^2(m^2 + 1)}{m-2} > 0$$

$$m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\frac{x^2 + mx + m}{x - x^2 - 3} < 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1)(-3) = -11 < 0 \quad (1) \quad \text{مخرج}$$

$$a < 0 \quad (2)$$

$$\Delta < 0 \quad \text{صورت}$$

$$\Delta = m^2 - 4(1)(m) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m < 0$$

صورت نامنفی است، کافیت مخرج مثبت باشد.

ب

طبق (۱) و (۲) مخرج همواره منفی است. پس صورت بایستی مثبت شود.



|            |   |   |
|------------|---|---|
| m          | 0 | 4 |
| $m^2 - 4m$ | + | - |

 $\Rightarrow m \in (0, 4)$

۷۴

الف

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

| x              | -1 | 1 | 2 |
|----------------|----|---|---|
| $x^2 - 3x + 2$ | +  | + | - |
| $x + 1$        | -  | + | + |
|                | -  | + | - |

مجموعه جواب:  $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

$$-1 < \frac{2x+1}{3x-1} < 2$$

$$I \quad \begin{cases} \frac{2x+1}{3x-1} < 2 \Rightarrow \frac{2x+1-6x+2}{3x-1} < 0 \Rightarrow \frac{-4x+3}{3x-1} < 0 \\ II \quad \frac{2x+1}{3x-1} > -1 \Rightarrow \frac{2x+1+3x-1}{3x-1} > 0 \Rightarrow \frac{5x}{3x-1} > 0 \end{cases}$$

I)

| x       | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4}$ |
|---------|---------------|---------------|
| $-4x+3$ | +             | +             |
| $3x-1$  | -             | +             |
|         | -             | +             |

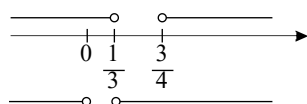
 $\Rightarrow (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$ 

II)

| x      | 0 | $\frac{1}{3}$ |
|--------|---|---------------|
| $5x$   | - | +             |
| $3x-1$ | - | -             |
|        | + | -             |

 $\Rightarrow (-\infty, 0) \cap (\frac{1}{3}, +\infty)$ 

$$(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$$



از دو بازه پاسخ I و II اشتراک می‌گیریم:

$$\frac{3x - 4 + x^2 - 4x - 1}{3x - 4} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x - 1}{3x - 4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x+1)}{3x-4} \leq 0$$

ب



| x        | -2 | $\frac{4}{3}$ | 7 |
|----------|----|---------------|---|
| $x - 7$  | -  | -             | - |
| $x + 2$  | -  | +             | + |
| $3x - 4$ | -  | -             | + |
|          | -  | +             | - |

مجموعه جواب:  $(-\infty, -2] \cup (\frac{4}{3}, 7]$

$$2x - 5 \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$$

$$2(\frac{x}{2} + 3 \leq 7) \Rightarrow x + 6 \leq 14 \Rightarrow x \leq 8 \rightarrow [3, 8]$$

$$|x| \geq a \rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases} \quad (75)$$

$$[-\infty, -2] \sim x \leq -2, [3, +\infty) \sim x \geq 3$$

$$\left. \begin{aligned} x \leq -2 &\rightarrow x - \frac{1}{2} \leq -\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{2} \leq -\frac{5}{2} \\ x \geq 3 &\rightarrow x - \frac{1}{2} \geq \frac{6}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{5}{2}$$

(76) مجموعه جواب نامعادله  $|x - \frac{a+b}{2}| > \frac{a-b}{2} (a > b)$  به صورت  $(-\infty, b) \cup (a, +\infty)$  است.

بنابراین مجموعه جواب نامعادله  $|x - \frac{-1+3}{2}| > \frac{3-(-1)}{2}$  به صورت  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  است.

نامعادله:  $|x - 1| > 2$

$$\text{الف) } 2x + 2y = 10 \Rightarrow x + y = 5 \rightarrow \begin{cases} x=0 & y=5 \\ x=1 & y=4 \\ x=2 & y=3 \\ x=3 & y=2 \\ x=4 & y=1 \\ x=5 & y=0 \end{cases}$$

$f(x) = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)\}$  تابع است

$$\text{ب) } x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \\ y^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=-3 \end{cases} \end{cases}$$

$h(x) = \{(3, 3), (3, -3), (-3, 3), (-3, -3)\}$  تابع نیست

$$\text{پ) } x + y \leq 3 \rightarrow \begin{cases} x=0 & y=0 \\ y=1 \\ y=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ می‌بینیم که به ازای هر } x \text{ بیش از یک } y \text{ هست پس تابع نیست}$$

$$\text{ت) } |x| + |y| = 3 \rightarrow \begin{cases} |x|=3 & |y|=0 \\ |x|=2 & |y|=1 \\ |x|=1 & |y|=2 \\ |x|=0 & |y|=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, -3 & y=0 \\ x=2, -2 & y=1, -1 \\ x=1, -1 & y=2, -2 \\ x=0 & y=3, -3 \end{cases}$$

$$\mathbb{Z}(x) = \{(-2, 1), (-2, -1), (1, -2), (1, 2), (-1, 2), (-1, -2), (2, 1), (2, -1), (0, 3), (0, -3)\}$$

(78) اگر نمایش جبری تابع داده شده باشد، ولی دامنه‌ی آن مشخص نباشد، معمولاً دامنه را، بزرگترین مجموعه‌ی ممکن در نظر می‌گیریم. بعنوان مثال در تابع  $f(x) = x^2$ ، دامنه را مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

باتوجه به نکته‌ی فوق نمایش الف برای تابع درست است.

دقت کنید که تمام نمایش‌های فوق در دامنه‌های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی برای  $f(x) = x^2$  صحیح هستند اما از آنجا که دامنه مشخص نشده طبق نکته، نمایش الف درست است.



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(0, -3) : -3 = c$$

$$(1, -4) : a + b - 3 = -4 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow 2a + 2b = -2$$

$$(2, -3) : 4a + 2b - 3 = -3 \Rightarrow 4a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = -2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

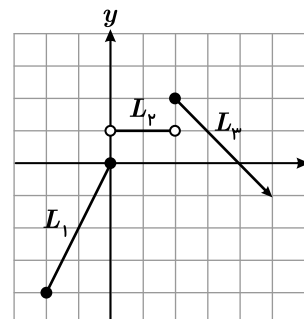
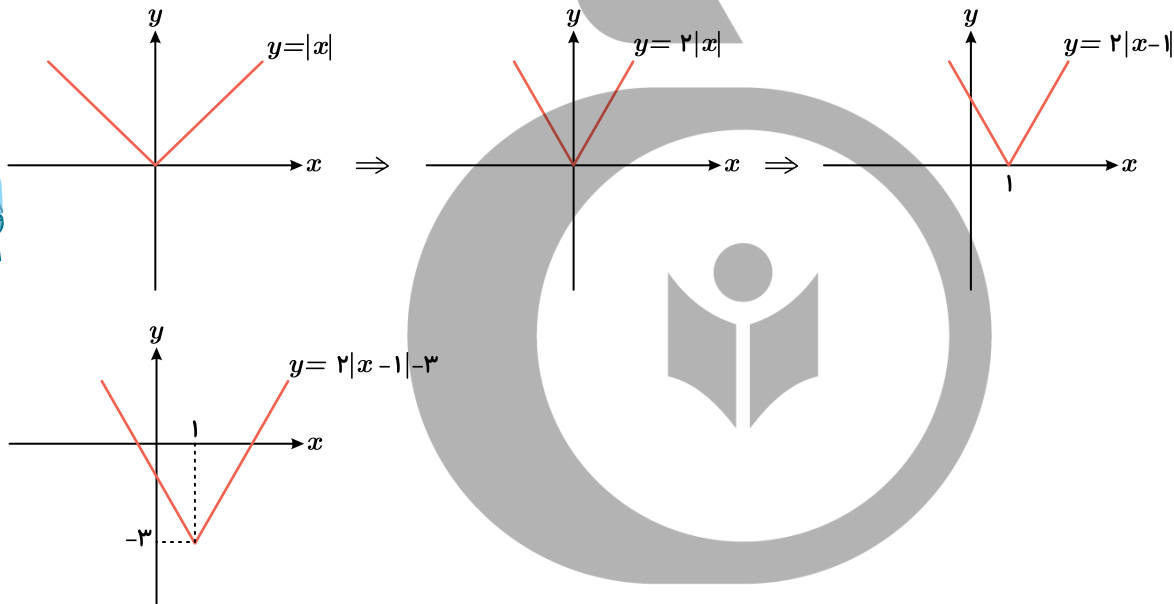
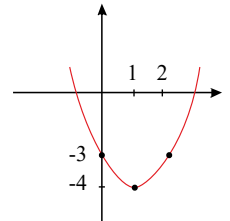
$$-2a = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$2a + 2b = -2 \Rightarrow 2 + 2b = -2 \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{دامنه} = \mathbb{R}$$

$$\text{بردار} = [-4, +\infty)$$



تابع  $f$  از سه خط  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$  تشکیل شده است. ابتدا باید معادله این خطها را به دست بیاوریم:

معادله خط  $L_1$ : نقاط  $(0, 0)$  و  $(-2, -4)$  روی این خط قرار دارند، بنابراین:

$$L_1 \text{ شیب خط: } m_1 = \frac{0 - (-4)}{0 - (-2)} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{(0,0)} 0 = 2 \times 0 + b$$

$$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = 2x$$

معادله خط  $L_2$ : این خط، خطی است افقی که محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. پس معادله خط  $L_2$  به صورت  $y = 1$  است.

معادله خط  $L_3$ : با توجه به اینکه نقاط  $(2, 2)$  و  $(4, 0)$  روی این خط واقع هستند، بنابراین:

$$L_3 \text{ شیب خط: } m_3 = \frac{2 - 0}{2 - 4} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow y = -1x + b \xrightarrow{(4,0)} 0 = (-1)(4) + b \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = -x + 4$$

بنابراین ضابطه تابع  $f$  به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & x \geq 2 \end{cases} \quad D_f = [-2, +\infty), R_f = (-\infty, 2]$$



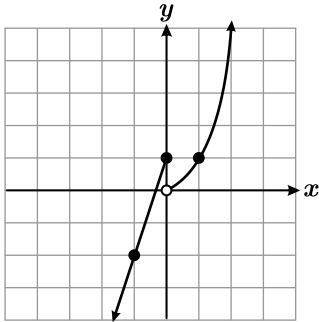
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

دامنه  $f = \mathbb{R}$

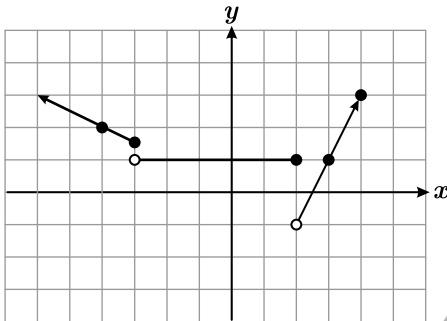
|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $y$ | 0 | 1 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| $x$ | 0 | -1 |
| $y$ | 1 | -2 |

$f$  برد  $= \mathbb{R}$



برای رسم تابع  $f$  همان‌طور که می‌بینید تابع دو ضابطه‌ای بوده، در ضابطه بالایی توان دو به ما می‌گوید که شکل حاصل سهمی خواهد بود اما دقت می‌کنیم باید سهمی را در محدوده دامنه  $(0, +\infty)$  رسم کنیم. عدد صفر عضو دامنه نمی‌باشد اما برای رسم و نقطه‌یابی از این مقدار کمک گرفته و در شکل آن را توخالی می‌گذاریم.



$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

دامنه  $g = \mathbb{R}$

|     |    |   |
|-----|----|---|
| $x$ | 2  | 3 |
| $y$ | -1 | 1 |

|     |     |    |
|-----|-----|----|
| $x$ | -3  | -4 |
| $y$ | 1.5 | 2  |

$g$  برد  $= (-1, +\infty)$

$$f(0) = 3(0) + 1 = 1, g(0) = 1, f(5) = 5^2 = 25, g(2) = 1, f(-2) = 3(-2) + 1 = -5, g(-\frac{1}{5}) = 1$$

۸۳

الف

$$y = ax + b \text{ : تابع خطی گذرنده از نقاط } (-3, 0), (-1, 1)$$

$$\begin{cases} 0 = -3a + b \\ 1 = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \cancel{b} = -1 \\ -3a + \cancel{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 1 + a = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, x \geq -1$$

$$(4, 2), (3, 1) \text{ : نقاط گذرنده از } \Rightarrow f(x) = x - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2 & x > 3 \\ 1 & -1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & x \leq -1 \end{cases}$$

$$x = -4 \leq -1 \Rightarrow f(-4) = \frac{1}{2}(-4) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 5 > 3 \Rightarrow f(5) = 5 - 2 = 3$$

ب

۸۴

الف

ضابطه تابع خطی به صورت  $y = ax + b$  می‌باشد.

$$(-3, 0), (-1, 2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = -3a + b \\ 2 = -a + b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3 \Rightarrow y = x + 3$$

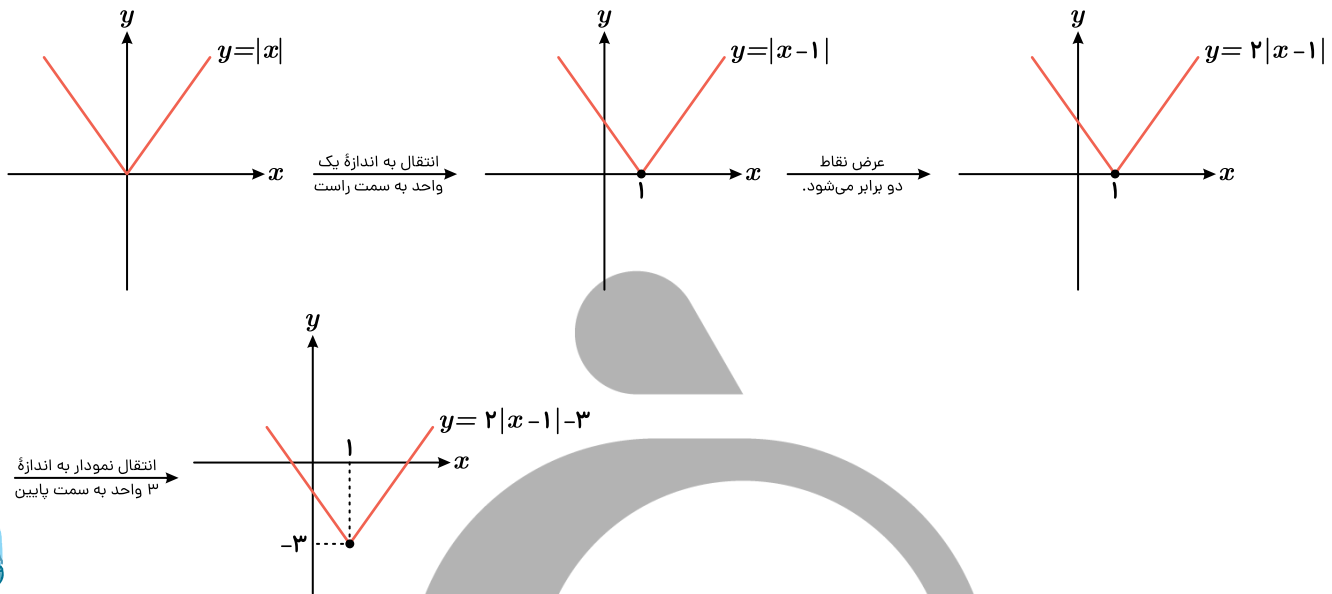


روی نمودار قرار دارند.  $(2, 1), (-1, 1) \Rightarrow y = 1$

روی نمودار قرار دارند.  $(4, 0), (2, -1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2a + b \\ 0 = 4a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

$f$  دامنه  $= (-\infty, +\infty)$  ,  $f$  برد  $= (-\infty, +\infty)$



۸۶ هر مداد ۳ حالت دارد:

$$\underline{3}, \underline{3}, \underline{3}, \underline{3} = 3^4$$

۸۷ الف) دقت کنید چون پاسخ به سوالات، مرحله به مرحله است و هر کدام از سوالات چهارگزینه‌ای، ۴ حالت دارد بنابر اصل ضرب داریم:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{10}$$

و برای سؤال‌های دو گزینه‌ای داریم:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

و چون به هر دو سری از سوالات با هم جواب می‌دهد تعداد حالات کل برابر است با:

$$4^{10} \times 2^6$$

ب) اگر بتواند به هر سؤال پاسخ بدهد یا ندهد آن وقت برای سؤال‌های ۴ گزینه‌ای، ۵ حالت وجود دارد: یکی از ۴ گزینه یا اینکه اصلاً جواب ندهد و برای سؤال‌های ۲ گزینه‌ای هم ۳ حالت وجود دارد: یکی از دو گزینه یا جواب ندادن به سؤال پس داریم:

$$5^{10} \times 3^5$$

۸۸ اگر رقم یکان را منفر در نظر بگیریم تعداد حالات عبارت است از:  $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

اگر رقم یکان را ۸ در نظر بگیریم تعداد حالات عبارت است از:  $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$

تعداد کل حالات:  $60 + 48 = 108$

راه حل دوم: با توجه به ارقام داده‌شده در سؤال داریم:

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300 = \text{تعداد کل اعداد چهار رقمی با ارقام غیرتکراری}$$

$$4 \times 4 \times 3 \times 4 = 192 = \text{تعداد اعداد فرد چهار رقمی با ارقام غیرتکراری}$$

$$300 - 192 = 108 = \text{تعداد اعداد زوج چهار رقمی با ارقام غیرتکراری}$$

۸۹ در دو حالت رقم‌های زوج و فرد یک‌درمیان قرار می‌گیرند:

$$4! \times 4! = \text{تعداد کلمات} \Rightarrow \text{ف ز ف ز ف ز ف ز: حالت اول}$$

$$4! \times 4! = \text{تعداد کلمات} \Rightarrow \text{ز ف ز ف ز ف ز ف: حالت دوم}$$

$$2 \times 4 \times 4! = \text{جواب}$$



$$\underbrace{2, 4, 6}_{\text{۲ شیء}}, \underbrace{1, 3, 5, 7}_{\text{۲ شیء}}$$

$$\text{تعداد اعداد مطلوب} = 2! \times 3! \times 4! = 2 \times 6 \times 24 = 288$$

ب

$$\text{تعداد اعداد مطلوب} = \underbrace{3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4}_{\text{رقم زوج}} = 720$$

۹۱

در ابتدا چون می‌توان به هر سؤال به ۵ حالت پاسخ داد (یکی از گزینه‌ها انتخاب شود یا بدون پاسخ (سفید) بماند) پس:

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{n \text{ تا}} = 5^n = 3125$$

$$\Rightarrow 5^n = 5^5 \Rightarrow n = 5$$

سه سؤال اضافه شود و شرط پاسخ‌گویی به تمام سؤالات را داشته باشیم:

$$\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{n \text{ تا}} = 4^8 = 2^{16}$$

۹۲

با توجه به صورت سؤال، برای آنکه اعداد موردنظر بزرگتر از ۵۰۰ باشند در رقم صدگان یکی از ارقام ۵، ۶ و ۷ و ۸ و ۹ می‌تواند قرار بگیرد و در حالت کلی برای اینکه مجموع ارقام یکان و دهگان ۸ باشد مجموعه اعداد  $\{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$  را خواهیم داشت، بنابراین داریم:

$$\begin{array}{cc} \text{یکان دهگان} & \text{صدگان} \\ \boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{8} \boxed{0} & \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{یکان دهگان} & \text{صدگان} \\ \boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{0} \boxed{8} & \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5 \end{array}$$

کل حالتی که رقم یکان و دهگان صفر یا ۸ باشد ۱۰ حالت است، به همین ترتیب برای مجموعه ارقام  $\{(1, 7), (2, 6), (3, 5)\}$  نیز همین روند را داریم:

کل حالتی که رقم یکان و دهگان ۱ یا ۷ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالتی که رقم یکان و دهگان ۲ یا ۶ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالتی که رقم یکان و دهگان ۳ یا ۵ باشد، ۱۰ حالت است.

$$\begin{array}{cc} \text{یکان دهگان} & \text{صدگان} \\ \boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{4} \boxed{4} & \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5 \end{array}$$

$$10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45 \quad \text{بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر خواهد بود با:}$$

۹۳ از ترکیب هر ۲ رنگ، هر ۳ رنگ و هر ۴ چهار رنگ، رنگ‌های جدید به وجود می‌آید. بنابراین داریم:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{4!}{2!1!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{4!0!} = 6 + 4 + 1 = 11$$

۱۱ رنگ از ترکیب ۴ رنگ اصلی بوجود می‌آید.

مجموع رنگ‌ها:

$$15 \text{ رنگ} = 4 \text{ رنگ اصلی} + 11 \text{ رنگ ترکیبی}$$

دقت کنید زمانی که نقاشی کشیده می‌شوند؛ خود رنگ‌های ترکیبی و اصلی دوباره با یکدیگر ترکیب می‌شوند و رنگ‌های جدیدتری بوجود می‌آیند.

پس در عمل، تعداد رنگ‌ها بیش‌تر از ۱۵ رنگ است.

۹۴ الف) برای تاس آبی ۶ حالت و برای تاس قرمز هم ۶ حالت وجود دارد (باتوجه به متفاوت بودن رنگ‌ها) طبق اصل ضرب (چون باهم پرتاب می‌شوند)  $6 \times 6 = 36$

دارد پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر ۳۶ است.

ب) با فرض این‌که مؤلفه اول، تاس آبی باشد:

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3) \\ (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

پ

$$A - B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\} = A$$

$$A \cap C = \{(3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$$





$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{1} \binom{7}{1}}_{\text{یکی اول و یکی غیر اول}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{هر ۲ اول}} = ۳۵ + ۱۰ = ۴۵ \rightarrow P(A) = \frac{۴۵}{۶۶} = \frac{۱۵}{۲۲}$$

۹۷) برای این که کتاب ریاضی در بین کتاب‌ها نباشد، باید ۳ کتاب از بین ۴ کتاب باقی‌مانده انتخاب شوند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!1!}}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{4}{10} = ۴۰\%$$

۹۸) برای این که مجموع دو عدد زوج شود هر دو باید فرد باشند یا هر دو باید زوج باشند. به علاوه

چون دو کارت را با هم بیرون می‌آوریم. پس  $(b, a)$  یا  $(a, b)$  فرقی نمی‌کند.

$$n(A) = \left\{ (1, 3)(1, 5)(1, 7)(1, 9)(3, 5)(3, 7)(3, 9)(5, 7)(5, 9)(7, 9) \right. \\ \left. (2, 4)(2, 6)(2, 8)(2, 10)(4, 6)(4, 8)(4, 10)(6, 8)(6, 10)(8, 10) \right\}$$

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2} = ۴۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۴۵} = \frac{۴}{۹}$$

۹۹

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (درد, ۱)(درد, ۲)(درد, ۳)(درد, ۴)(درد, ۵)(درد, ۶) \\ (پدپ, ۱)(پدپ, ۲)(پدپ, ۳)(پدپ, ۴)(پدپ, ۵)(پدپ, ۶) \\ (دپد, درد) \\ (پدپ, درد) \end{array} \right\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۱۶} = \frac{۱}{۸}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad ۱۰۰$$

$$\text{انتخاب دومین کالا} \quad \text{انتخاب A} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ P(A) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{۴}{۱۰}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$\text{انتخاب دومین کالا} \quad \text{انتخاب C} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{پ) } P(C) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad ۱۰۱$$

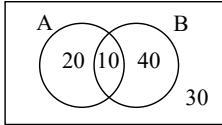
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{4} \binom{10}{5} \binom{8}{6}}{\binom{25}{15}} = \frac{\frac{7!}{4!3!} \times \frac{10!}{5!5!} \times \frac{8!}{6!2!}}{\frac{25!}{15!10!}} = \frac{۲۴۶۹۶۰}{۳۶۲۸۷۶۰} \approx \frac{۷}{۱۰۰}$$

۱۰۲

$$\begin{array}{ll} ۱, ۱ & \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{۲۰} \\ ۲, ۲ & \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{۲۰} \\ ۳, ۳ & \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{۲۰} \\ ۴, ۴ & \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{۲۰} \\ ۱ - \frac{۴}{۲۰} = \frac{۱۶}{۲۰} = \frac{۴}{۵} \end{array}$$



باتوجه به نمودار ون مقابل (اعداد روی نمودار بیانگر درصد احتمال هستند) داریم:



الف) احتمال این که حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

یعنی با  $A$  یا با  $B$  یا هر دو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} - \frac{10}{100} = \frac{70}{100}$$

ب) باتوجه به نمودار، احتمال این که فقط با سلاح  $A$  تیراندازی کند  $\frac{20}{100}$  است.

ج) احتمال این که با هر دو سلاح تیراندازی کند یعنی  $P(A \cap B)$  که باتوجه به نمودار برابر  $\frac{10}{100}$  است.

۱۰۴ فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$S = \{ (س, ۱), (پ, ۱), (س, ۲), (پ, ۲), (س, ۳), (پ, ۳), (س, ۴), (پ, ۴), (س, ۵), (پ, ۵), (س, ۶), (پ, ۶) \}$$

الف) اگر پیشامد زوج آمدن تاس را  $A$  بنامیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد فرد آمدن تاس،  $A'$  است و برابر است با  $\frac{۱}{۲}$  با  $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

ب) اگر پیشامد رو آمدن سکه را  $B$  بنامیم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد پشت آمدن سکه،  $B'$  است و برابر است با:  $P(B') = 1 - P(B) = \frac{۱}{۲}$

ج) پیشامد تاس فرد و سکه پشت بیاید یعنی  $(A' \cap B')$

د) پیشامد تاس فرد یا سکه پشت بیاید یعنی  $(A' \cup B')$

$$P(A' \cap B') = \frac{n(A' \cap B')}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲}$$

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$