بسم الله الرحمن الرحیم

**مقدمه**

درس تحلیل سازه‌ها از اصلی‌ترین دروس رشته مهندسی عمران است که در کنکور کارشناسی ارشد این رشته نیز جزء دروس امتحانی می‌باشد. در مجموعه پیش‌رو که به سفارش مؤسسه پارسه تهیه شده است برای این درس در فصول جداگانه، خلاصه درس و نکات کلیدی مطرح شده و پس از اتمام خلاصه درس، منتخبی از تست‌های آزمون‌های پارسه در سال‌های گذشته آورده شده است که به نظر مؤلف، استاندارد و نزدیک به سوالات کنکور سال‌های قبل هستند. از آنجا که تست‌های کنکور کارشناسی ارشد در همه کتاب‌های تست موجود بحث شده‌اند از آوردن آنها در این مجموعه خودداری شده است تا هم تست‌های مطرح شده برای همه دانشجویان، جدید باشد و بتواند به آنها در سنجش صحیح سطح علمی‌شان کمک کند و هم اینکه دانشجویان بتوانند قضاوتی در مورد کیفیت آزمون‌های مؤسسه پارسه داشته باشند. امید می‌رود که این مجموعه بتواند در هفته‌های پایانی مانده به کنکور ارشد، یک جمع‌بندی مناسب به دانشجویان بدهد و با ارائه نکات مهم مباحث مختلف، آنها را برای کنکور ارشد آماده سازد. سخن آخر اینکه ارائه مجمل درس مفصلی مانند تحلیل سازه‌ها در این حجم محدود کار دشواری بوده است که علیرغم تجربه ده‌ساله مؤلف در تدریس این درس، احتمالاً عاری از کاستی نمی‌باشد، لذا از دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود با نظرات سازنده خود به بهبود این مجموعه یاری کنند.

**با آرزوی موفقیت**

**نادر فنائی**

**در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.**

**رشته: مهندسی عمران** **درس: تحلیل سازه ها**

| ردیف | مبحث | ۱۳۸۵ | ۱۳۸۶ | ۱۳۸۷ | ۱۳۸۸ | ۱۳۸۹ | مجموع ۵ سال | نسبت از کل |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | تعداد تست | تعداد تست | تعداد تست | تعداد تست | تعداد تست | | |
| 1 | پایداری و ناپایداری ، معینی و نامعینی | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 11 | 12% |
| 2 | ایستایی سازه های سه بعدی | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| 3 | تعیین نیروهای سازه‌های معین | 0 | 1 | 6 | 4 | 0 | 11 | 12% |
| 4 | رسم نمودار خمش و برش | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| 5 | رسم خط تاثیر تیرها | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 | 4% |
| 6 | رسم خط تاثیر خرپاها | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2% |
| 7 | رسم خط تاثیر تیرهای پانل دار | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| 8 | رسم خط تاثیر قابها | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| 9 | کاربرد خط تاثیر | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 6 | 7% |
| 10 | محاسبه تغییر شکل خمشی به روش لنگر سطح | 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0% |
| 11 | محاسبه تغییر شکل خمشی به روش تیر مزدوج | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 3% |
| 12 | محاسبه تغییر شکل خمشی به روش انتگرال گیری | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 3% |
| 13 | قضیه کاستلیانو | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1% |
| 14 | قضیه بتی ماکسول | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| 15 | انرژی و محاسبه تغییر شکل | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 22 | 24% |
| 16 | روش کار حقیقی | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2% |
| 17 | روش کار مجازی | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 6 | 7% |
| 18 | بررسی سازه های نامعین متقارن و پاد متقارن | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 3% |
| 19 | روش سازگاری تغییر مکان ها | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 14 | 16% |
| 20 | روش پخش لنگر | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1% |
| 21 | بررسی سازه های نامعین به روش شیب افت | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1% |
| | **جمع** | **20** | **20** | **20** | **20** | **10** | **90** | **100%** |

# فصل اول

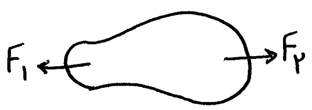
## پایداری و ناپایداری سازه‌ها

یک سازه مسطح را وقتی در حال تعادل می‌دانیم که تحت اثر یک بارگذاری خارجی نسبت به زمین ساکن بماند. برای این سازه معادلات تعادل در حالت استاندارد آن به صورت دو معادله تعادل نیرویی و یک معادله تعادل لنگر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

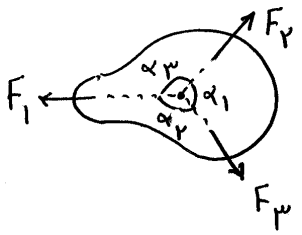
دو حالت خاص برای تعادل وجود دارد:

۱ـ عضو دو نیرویی: برای تعادل عضو دو نیرویی تحت اثر نیروهای $F_1$ و $F_2$، این نیروها بایستی همراستا، مختلف الجهت و از لحاظ مقدار مساوی باشند.




۲ـ عضو سه نیرویی: برای تعادل عضو سه نیرویی تحت اثر نیروهای $F_1$ ، $F_2$ و $F_3$ دو حالت وجود دارد:

الف) نیروهای $F_1$ ، $F_2$ و $F_3$ در یک نقطه همرس باشند. در این حالت برآیند مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهای $F_1$ ، $F_2$ و $F_3$ بایستی برابر صفر باشد که قانون سینوس‌ها این تعادل را ارضا می‌کند:




$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3}$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

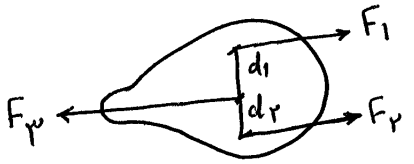
............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

ب) نیروهای $F_1$ ، $F_2$ و $F_3$ با یکدیگر موازی باشند. در این حالت علاوه بر اینکه برآیند نیروها بایستی صفر شود، فاصله بین نیروهای موازی بایستی به صورتی باشد که تعادل لنگر را برقرار کند:

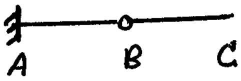
$$\begin{cases} F_1 + F_2 = F_3 \\ F_1 d_1 = F_2 d_2 \end{cases}$$



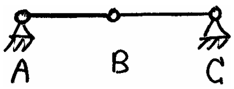

گاهی اوقات مفاهیم تعادل و پایداری معادل یکدیگر دانسته می‌شود و به جای یکدیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد که صحیح نیست. توضیح آنکه مفهوم تعادل تحت اثر یک بارگذاری مشخص معنا پیدا می‌کند، حال آنکه در پایداری بحث بارگذاری مطرح نیست. به عبارت دیگر پایداری یک مفهوم عام است و تعادل بخشی از پایداری است. یک سازه وقتی پایدار است که تحت اثر هر بارگذاری دلخواه روی سازه معادلات تعادل آن برقرار شود.

## انواع ناپایداری

۱) ناپایداری ایستایی: این ناپایداری زمانی به وجود می‌آید که قیود (تکیه‌گاه‌های) سازه برای برقراری معادلات تعادل کفایت نکند (مانند سازه زیر که در آن معادله تعادل لنگر BC حول B برقرار نمی‌شود). نحوه شناسایی سریع این نوع ناپایداری، درجه نامعینی است که در مبحث بعدی مورد بررسی قرار گرفته است، درجه نامعینی سازه‌های ناپایدار ایستایی منفی است.




۲) ناپایداری هندسی داخلی: در این نوع ناپایداری شرایط داخلی سازه مانع از برقراری معادلات تعادل می‌شود. متداول‌ترین مثال برای ناپایداری هندسی داخلی، سه مفصل داخلی پشت سرهم است. با اعمال یک نیرویی که دارای مؤلفه قائم است تعادل نیروها در راستای قائم در مفصل B برقرار نمی‌شود.




۳) ناپایداری هندسی خارجی: هندسه خارجی سازه همان تکیه‌گاه‌های سازه است. ناپایداری هندسی خارجی برای سازه زمانی به وجود می‌آید که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی همگی موازی باشند و یا همگی از یک نقطه بگذرند (سازه‌های زیر).


برای بررسی ناپایداری سازه‌ها می‌توان از روش بار آزمایشی استفاده کرد. در این روش با پیدا کردن یک بارگذاری در نقطه‌ای از سازه که معادلات تعادل برای آن برقرار نمی‌شود، ناپایداری ثابت می‌شود (همانطور که ناپایداری هندسی داخلی سازه دارای سه مفصل داخلی پشت سرهم تشریح شد). البته با روش بار آزمایشی پایداری ثابت نمی‌شود و این روش برای نشان دادن ناپایداری سازه مفید است. یکی از روش‌های بررسی پایداری و ناپایداری خرپاها روش بار صفر است. در روش بار صفر تلاش می‌شود بدون اعمال بارگذاری خارجی روی خرپا، ترکیب متعادل غیرصفر برای نیروی اعضای داخلی خرپا پیدا شود. چنانچه حتی یک عضو را بتوان یافت که در غیاب بارگذاری خارجی دارای نیروی غیر صفر باشد، خرپا ناپایدار است و در صورتی‌که در غیاب بارگذاری خارجی نیروی همه اعضای داخلی صفر شود، خرپا پایدار است. به‌طورکلی وقتی یک سازه پایدار تحت اثر بارگذاری قرار ندارد هیچ نیرو و تنشی نبایستی در آن به وجود بیاید.

**یادداشت:**

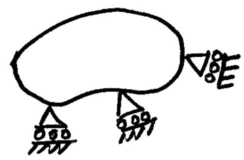
..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

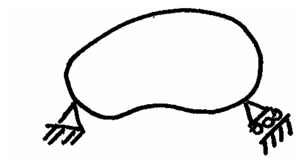
..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

متداول‌ترین روش برای بررسی پایداری و ناپایداری سازه‌ها استفاده از قوانین ترکیب اجسام صلب است. جسم صلب جسمی است که دارای تغییر شکل داخلی نمی‌باشد و فواصل نقاط آن از یکدیگر ثابت است. برای یک جسم صلب داشتن سه قید تکیه‌گاهی شرط لازم برای تعادل است، همرس نبودن و موازی نبودن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نیز شرط کافی برای تعادل می‌باشد. جسم صلب بایستی توسط سه قید تکیه‌گاهی که موازی و همرس نیستند به زمین متصل شده باشد تا پایداری هندسی خارجی آن برقرار شود. سه قید تکیه‌گاهی می‌تواند در قالب یک تکیه‌گاه گیردار (شکل ۱)، یک تکیه‌گاه مفصلی و یک تکیه‌گاه غلتکی (شکل ۲) و یا سه تکیه‌گاه غلتکی (شکل ۳) باشد. در حالتی‌که از یک تکیه‌گاه مفصلی و یک تکیه‌گاه غلتکی استفاده شود شرط پایداری آن است که عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتکی از تکیه‌گاه مفصلی نگذرد و در حالتی‌که قیود تکیه‌گاهی به صورت سه تکیه‌گاه غلتکی باشد شرط پایداری آن است که عکس‌العمل سه تکیه‌گاه در یک نقطه همرس نباشند و موازی نیز نباشند.



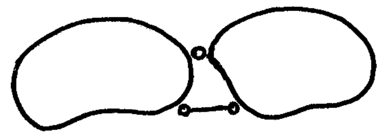
شکل (۳)



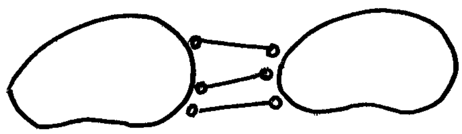
شکل (۲)

شکل (۱)

اگر تعداد اجسام صلب از یک به دو افزایش یابد می‌توان آن‌ها را با سه عضو دو نیرویی و یا یک مفصل و یک عضو دو نیرویی مطابق شکل‌های زیر به یکدیگر متصل کرد. شرط پایداری داخلی در سازه اول آن است که سه عضو دو نیرویی با یکدیگر موازی و یا همرس در یک نقطه نباشند و در سازه دوم بایستی امتداد عضو دو نیرویی از مفصل مشترک نگذرد. چنانچه دو عضو صلب این گونه به طور مناسب به یکدیگر متصل شده باشند و جسم صلب واحدی را تشکیل بدهند، این مجموعه بایستی توسط سه قید تکیه‌گاهی که موازی و همرس نیستند به زمین متصل شده باشد تا پایداری هندسی خارجی آن نیز برقرار شود.

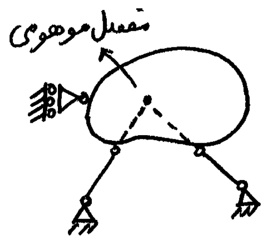


شکل (۲)

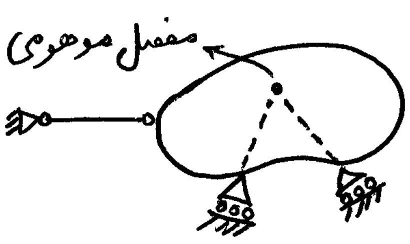


شکل (۱)

قبل از ادامه بحث بایستی مفصل موهومی تعریف شود. مفصل حقیقی، مفصلی است که واقعاً وجود دارد و می‌تواند در تکیه‌گاه یا بین دو جسم صلب نمود پیدا کند ولی مفصل موهومی در محل برخورد عکس‌العمل‌های دو تکیه‌گاه غلتکی و یا در محل برخورد دو عضو دو نیرویی تعریف می‌شود (شکل‌های زیر)




شکل (۲)




شکل (۱)

**یادداشت:**

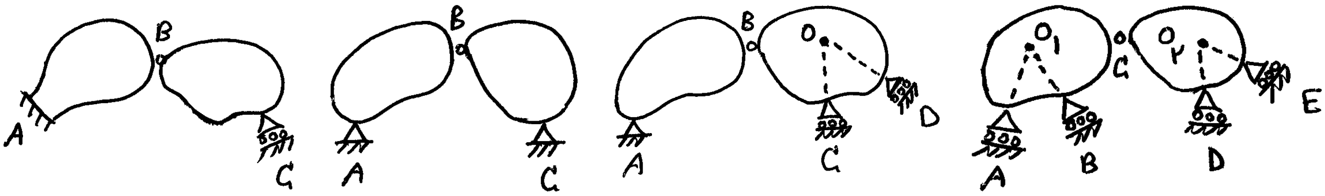
....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

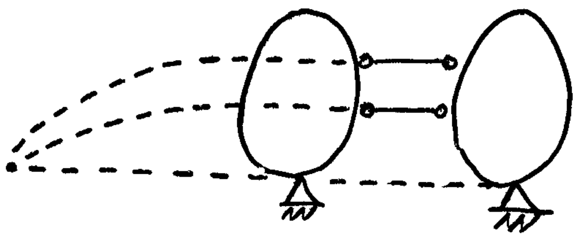
....................................................................................................

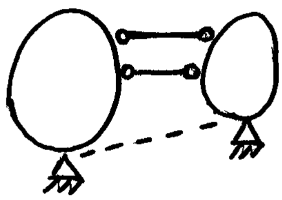
در این شکل‌ها شرط پایداری آن است که امتداد عضو دو نیرویی و یا عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتکی از مفصل موهومی نگذرد.
ممکن است در اتصال بین دو جسم صلب به جای سه عضو دو نیرویی از دو عضو دو نیرویی و یا یک مفصل استفاده شود که در این صورت بایستی یک قید به قیود تکیه‌گاهی اضافه شود و به جای سه قید تکیه‌گاهی از چهار قید تکیه‌گاهی استفاده شود.



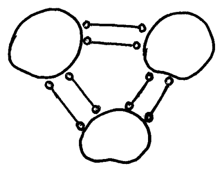
شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳ شکل ۴

در شکل ۱ شرط پایداری آن است که امتداد عکس‌العمل تکیه‌گاه C از مفصل مشترک B نگذرد.
در شکل ۲ شرط پایداری آن است که مفصل‌های A و B و C در یک امتداد واقع نباشند.
در شکل ۳ شرط پایداری آن است که مفصل‌های حقیقی A و B و مفصل موهومی O در یک امتداد واقع نباشند. در شکل ۴ شرط پایداری آن است که مفصل حقیقی C و مفصل‌های موهومی $O_1$ و $O_2$ در یک امتداد واقع نباشند.
چنانچه برای اتصال دو جسم صلب از دو عضو دو نیرویی موازی استفاده شود و مجموعه توسط دو تکیه‌گاه مفصلی به زمین متصل شود دو حالت خاص و مهم پیش می‌آید که در ادامه بررسی شده است:


شکل (۱)


شکل (۲)

در شکل (۱) اگر مفصل‌های تکیه‌گاهی را به یکدیگر وصل کنیم موازی اعضای دو نیرویی است. در این حالت مفصل موهومی متناظر دو عضو دو نیرویی در بی‌نهایت روی امتداد خط واصل بین مفصل‌های تکیه‌گاهی می‌افتد و سازه ناپایدار است. در شکل (۲) امتداد مفصل‌های تکیه‌گاهی موازی اعضای دو نیرویی نیست و مفصل موهومی روی امتداد خط واصل بین مفصل‌های تکیه‌گاهی نمی‌افتد و سازه پایدار است.
در اتصال سه جسم صلب به یکدیگر با 6 عضو دو نیرویی چنانچه مطابق شکل زیر بین هر دو جسم صلب دو عضو دو نیرویی موازی داشته باشیم ثابت می‌شود که مجموعه ناپایداری هندسی داخلی دارد.



در بحث پایداری و ناپایداری، هر نقطه از زمین و یا هر نقطه از یک سازه پایدار را نقطه مطمئن می‌نامند که سازه از این نقاط مطمئن می‌تواند گسترش پیدا کند.

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

# فصل دوم

# درجه نامعینی

اگر تحلیل یک سازه را با حل یک دستگاه معادله ریاضی شبیه‌سازی کنیم درجه نامعینی سازه برابر است با تعداد مجهولات دستگاه معادله منهای تعداد معادلات. درجه نامعینی تعداد مجهولات سازه اعم از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی یا نیروها و لنگرهای داخلی است که نمی‌توان آن‌ها را با استفاده از معادلات استاتیک به دست آورد. با فرض اینکه سازه خرپا باشد چنانچه تعداد اعضای خرپا، $M$ ، تعداد کل گره‌ها $N$ و تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برابر $R$ باشد درجه نامعینی خرپای مسطح و خرپای فضایی از روابط زیر به دست می‌آید:

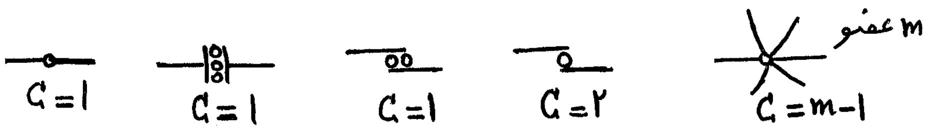
$D.I. = M + R - 2N$ (خرپای مسطح)

$D.I. = M + R - 3N$ (خرپای فضایی)

بهترین روش تعیین درجه نامعینی قاب مسطح روش حلقه است. در این روش تکیه‌گاه‌های سازه به یک مرجع فرضی وصل می‌شود و تعداد حلقه‌های ایجاد شده شمارش می‌شود. اگر تعداد حلقه‌های ایجاد شده برابر $N$ و تعداد معادلات شرطی برابر $C$ باشد درجه نامعینی سازه برابر است با:

$D.I. = 3N - C$

تعداد معادلات شرطی برای مفصل خمشی، مفصل برشی و مفصل محوری برابر 1 واحد است چون در این مفصل‌ها به ترتیب لنگر خمشی، نیروی برشی و نیروی محوری آزاد شده است ولی در غلتک تعداد معادلات شرطی دوتاست $(C = 2)$ چون هم لنگر خمشی و هم نیروی محوری آزاد شده‌اند. اگر در یک مفصل خمشی $m$ عضو به یکدیگر متصل شده باشند، تعداد معادلات شرطی برابر $C = m - 1$ می‌باشد.




**یادداشت:**

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

پیش‌فرض روش حلقه تکیه‌گاه‌های گیردار می‌باشد و بایستی برای هر تکیه‌گاه غیرگیردار به تعداد مؤلفه‌های تکیه‌گاهی که آزاد شده است و وجود ندارد، معادله شرطی (C) در نظر گرفت. بنابراین برای تکیه‌گاه گیردار غلتکی، مفصلی و غلتکی به ترتیب بایستی 1 ، 1 و 2 معادله شرطی درنظر گرفت. چنانچه سازه دارای فنرهای پیچشی یا انتقالی باشد می‌توان فنرها را از سازه حذف کرد و به تعداد آن‌ها در نهایت به درجه نامعینی سازه اضافه کرد چون هر فنر معادل یک درجه نامعینی است (در فنر انتقالی نیروی محوری و در فنر پیچشی لنگر مجهول است). کابل مانند یک عضو دو نیرویی است اما دارای عملکرد دوگانه است، بدین معنا که اگر تحت کشش باشد کار می‌کند ولی اگر تحت فشار باشد کار نمی‌کند و از سازه قابل حذف است ولی با توجه به روندی که بر کنکور حاکم است گویا اینطور فرض می‌شود که کابل‌ها همواره کار می‌کنند. بنابراین در تعیین درجه نامعینی سازه‌ای که دارای کابل است همه کابل‌ها را از سازه حذف می‌کنیم و در نهایت به تعداد آن‌ها به درجه نامعینی سازه اضافه می‌کنیم.

چنانچه در سازه مسطح تعدادی از بادبندها از روی یکدیگر رد شده باشند برای تعیین درجه نامعینی سازه از روش حلقه می‌توان فرض کرد که در محل برخورد هر دو بادبند که از روی یکدیگر رد شده‌اند، یک نیروی افقی و یک نیروی قائم و یک لنگر (جمعاً سه مؤلفه) وجود دارد و بدین ترتیب دو بادبند به یکدیگر اتصال دارند. در پایان بایستی به ازای این فرض، سه درجه از درجه نامعینی کسر کرد و یا یک حلقه از تعداد حلقه‌ها کم کرد (چون هر حلقه معادل سه درجه نامعینی می‌باشد).

تکیه‌گاه‌های سازه بر دو نوعند: خارجی و داخلی. تکیه‌گاه‌های خارجی، سازه را به زمین متصل می‌کنند ولی تکیه‌گاه‌های داخلی، بین دو قسمت سازه واقع شده‌اند. بایستی توجه داشت که در روش حلقه صرفاً تکیه‌گاه‌های خارجی به مرجع فرضی وصل می‌شوند و برای تکیه‌گاه‌های داخلی فقط معادله شرطی (C) نوشته می‌شود.

اگر درجه نامعینی سازه منفی باشد سازه ناپایدار ایستایی است، اگر درجه نامعینی سازه صفر باشد سازه معین (ایزو استاتیک) است و اگر درجه نامعینی سازه مثبت باشد سازه نامعین (هیپراستاتیک) است. بایستی توجه داشت معینی یا نامعینی سازه دلیلی بر پایداری سازه نیست و در این حالات پایداری سازه بایستی به طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرد.

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

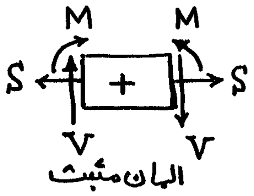
........................................................................................................

........................................................................................................

# فصل سوم

# تحلیل سازه‌های معین و نمودارهای برش و لنگر خمشی

یک سازه معین با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی قابل تحلیل است. با نوشتن معادلات تعادل برای کل سازه و یا قسمتی از سازه (چنانچه سازه دارای معادله شرطی باشد) یک دستگاه n معادله، n مجهول به دست می‌آید که با حل آن دستگاه، سازه تحلیل می‌شود. المانی که مقادیر مثبت قراردادی را برای نیروی محوری، برش و لنگر خمشی در سازه نشان می‌دهد به صورت زیر است:




با توجه به المان فوق نتیجه می‌شود نیروی محوری در صورتی‌که کششی باشد مثبت و در صورتی که فشاری باشد منفی است. نیروی برشی در صورتی‌که موجب چرخش ساعتگرد شود مثبت و در غیر این صورت منفی است. لنگر خمشی نیز اگر تارهای فوقانی را به فشار بیندازد مثبت و در غیر این صورت منفی است. بین لنگر خمشی $M(x)$ و برش $V(x)$ و بار گسترده $q(x)$ روابط زیر وجود دارد:

$$\frac{dM(x)}{dx}=V(x) \quad , \quad \frac{dV}{dx}=-q(x)$$

قابل ذکر است که بار گسترده $q(x)$ در صورتی که به طرف پایین باشد مثبت و در صورتی‌که به طرف بالا باشد منفی در نظر گرفته می‌شود. نکات مهمی که در رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی بایستی مدنظر قرار گیرد در زیر آورده شده است:

۱ـ در قسمتی از سازه که باری وجود ندارد برش ثابت است و خطی موازی با محور تیر می‌باشد و در آن قسمت از سازه لنگر خمشی به صورت خطی تغییر می‌کند.

۲ـ در نقطه‌ای که یک بار متمرکز اثر می‌کند در نمودار برش، پرش داریم. اگر جهت بار متمرکز به طرف پایین باشد پرش برابر با مؤلفه قائم این بار متمرکز به طرف پایین خواهد بود و اگر جهت بار متمرکز به طرف بالا باشد پرش برابر با مؤلفه قائم این بار متمرکز به طرف بالا خواهد بود. در نمودار لنگر در نقطه اعمال بار متمرکز شیب نمودار لنگر خمشی تغییر می‌کند و آن نقطه دارای دو شیب است که تفاضل شیب‌ها برابر است با مؤلفه قائم نیروی متمرکز اعمال شده در آن نقطه.

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

۳ـ در قسمتی از سازه که بار گسترده یکنواخت وجود دارد برش به صورت خطی تغییر می‌کند و شیب ثابتی دارد و در آن قسمت از سازه گشتاور خمشی به صورت سهمی (درجه ۲) تغییر می‌کند.
۴ـ گشتاورهای خمشی ماکزیمم و مینیمم در محلی به وجود می‌آیند که برش برابر صفر شود و چنانچه در این نقطه نیروی برشی از مقدار مثبت در سمت چپ نقطه برش صفر به مقدار منفی در سمت راست این نقطه تغییر کرده باشد گشتاور خمشی ماکزیمم است و در غیر این صورت مینیمم است.
۵ـ در نقطه‌ای که یک لنگر متمرکز اثر می‌کند در نمودار لنگر، پرش داریم. اگر جهت لنگر متمرکز ساعتگرد باشد پرش برابر با مقدار لنگر متمرکز به طرف بالا خواهد بود و اگر جهت لنگر متمرکز پاد ساعتگرد باشد برش برابر با مقدار لنگر متمرکز به طرف پایین خواهد بود.
۶ـ در یک سازه تحت اثر بارهای متمرکز نمودار لنگر به صورت خطی تغییر می‌کند و لنگر خمشی ماکزیمم در زیر بار متمرکزی اتفاق می‌افتد که در زیر آن بار برش تغییر علامت دهد.
۷ـ تفاوت در عرض‌های نمودار برش بین دو نقطه دو نقطه a و b برابر است با مساحت زیر نمودار بار گسترده بین دو نقطه a و b داریم:

$$V_b - V_a = -\int_{x_a}^{x_b} q(x)\,dx$$

محاسبه برش با استفاده از فرمول فوق روش جمع مساحت‌ها نام دارد و به شرطی قابل استفاده است که بین دو نقطه a و b بار متمرکزی اثر نکرده باشد.
۸ـ تفاوت در عرض‌های نمودار لنگر خمشی بین دو نقطه a و b برابر است با مساحت زیر نمودار برش بین دو نقطه a و b داریم:

$$M_b - M_a = \int_{x_a}^{x_b} V(x)\,dx$$

محاسبه لنگر با استفاده از فرمول فوق نیز روش جمع مساحت‌ها نام دارد و به شرطی قابل استفاده است که بین دو نقطه a و b لنگر متمرکزی اثر نکرده باشد.
۹ـ نقاط لنگر صفر همان نقاط عطف نمودار تغییر شکل خمشی سازه می‌باشند (با توجه به رابطه $y''(x) = \frac{M(x)}{EI}$)
۱۰ـ جهت تقعر نمودار لنگر خمشی را جهت بار گسترده تعیین می‌کند:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

اگر جهت بار گسترده به طرف پایین باشد جهت تقعر نمودار لنگر خمشی نیز به طرف پایین خواهد بود و اگر جهت بار گسترده به طرف بالا باشد جهت تقعر نمودار لنگر خمشی نیز به طرف بالا خواهد بود.
۱۱ـ اگر بار گسترده وارده بر سازه از درجه n باشد برش از درجه $n+1$، لنگر از درجه $n+2$، شیب از درجه $n+3$ و منحنی تغییر مکان از درجه $n+4$ خواهد بود.
۱۲ـ در یک سازه معین دارای فنر پیچشی یا انتقالی سختی این فنرهای پیچشی یا انتقالی هیچ تأثیری در نمودارهای برش و لنگر خمشی سازه ندارند چون تحلیل یک سازه معین از استاتیک به دست می‌آید و سختی فنرها در معادلات استاتیک وارد نمی‌شود.
۱۳ـ در یک سازه تحت اثر یک بارگذاری مستقیم مشخص چنانچه صلبیت خمشی همه اجزای سازه n برابر شود نمودارهای برش و لنگر خمشی سازه هیچ تغییری نمی‌کنند ولی خیز و شیب هر نقطه از سازه جدید نسبت به سازه اولیه $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود $\left(\Delta,\theta \propto \frac{1}{EI}\right)$. این مطلب ربطی به درجه نامعینی سازه ندارد و برای سازه معین و نامعین هر دو صحیح است.

**یادداشت:**

....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................
....................................................................................................

# فصل چهارم

# خرپا

خرپا سازه‌ای است که:

۱) تمام اتصالات آن مفصلی است.

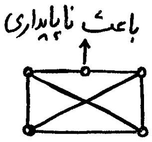
۲) بارگذاری به صورت نیروهای متمرکز در محل مفصل‌ها اثر می‌کند.

۳) اعضاء مستقیم هستند و محور مرکزی اعضاء در مفصل مشترک همرس هستند.

۴) وزن عضو در مقایسه با نیروی خارجی وارد بر مفصل‌ها قابل صرف‌نظر کردن است.

خرپا می‌تواند مسطح و یا فضایی باشد. از نگاه دیگر خرپا می‌تواند معین یا نامعین باشد. با توجه اینکه فقط از خرپای مسطح معین انتظار طرح سؤال می‌رود خرپای معین و تحلیل آن در اینجا مورد توجه قرار گرفته است.

خرپای معین به سه نوع ساده، مرکب و بغرنج تقسیم‌بندی می‌شود. خرپای ساده از یک مثلث پایه شروع می‌شود و با اضافه کردن متوالی دو عضو و یک مفصل، گسترش پیدا می‌کند. برای اینکه ناپایداری داخلی در این نوع خرپا ایجاد نشود بایستی در دو عضو و یک مفصلی که اضافه می‌شود حالت ۳ مفصل پشت سرهم پیش نیاید (اعضاء در امتداد یکدیگر نباشند)




شرط پایداری خارجی خرپای ساده داشتن ۳ عکس‌العمل تکیه‌گاهی غیرموازی و غیرهمرس است. خرپای مرکب از ترکیب دو یا چند خرپای ساده ساخته می‌شود. دو خرپای ساده می‌توانند توسط سه عضو خرپایی که موازی نباشند و در یک نقطه نیز همرس نباشند با یکدیگر ترکیب شوند و یک خرپای مرکب تولید کنند. همچنین این ترکیب می‌تواند توسط یک مفصل مشترک و یک عضو خرپایی ایجاد شود به شرطی که امتداد عضو خرپایی از مفصل مشترک نگذرد.

**یادداشت:**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

خرپای معینی که ساده و مرکب نباشد خرپای بغرنج است که برای تحلیل آن از روش هنبرگ استفاده می‌شود و البته مدنظر طراحان برای کنکور کارشناسی ارشد نمی‌باشد.

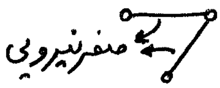
برای تحلیل خرپای ساده و یا مرکب می‌توان از روش مفصل و یا مقطع استفاده کرد. در روش مفصل در هر مفصل خرپا معادلات تعادل در راستاهای افقی و قائم نوشته می‌شود که با توجه به معین بودن خرپا در نهایت یک دستگاه n معادله، n مجهول حاصل می‌شود که قابل حل است.

این روش هرچند که همیشه جواب می‌دهد ولی برای کنکور به هیچ وجه مناسب نمی‌باشد، چون اولاً بسیار وقت‌گیر است و ثانیاً خروجی آن تحلیل کامل خرپا است که هیچ‌گاه مدنظر نیست (در سؤالات کنکور از این بخش فقط نیروی محوری یک عضو خرپا مدنظر است).

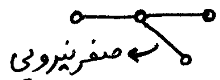
روش مناسب برای تحلیل خرپای معین روش مقطع می‌باشد. در این روش با زدن مقطعی قسمتی از خرپا از بقیه خرپا جدا می‌شود. سپس با نوشتن معادله تعادل لنگر حول یک نقطه مناسب و یا نوشتن معادله تعادل نیرو در یک راستای مناسب برای قسمت جدا شده نیروی عضو مورد نظر به دست می‌آید.

ممکن است نیروی بعضی از اعضای خرپا برابر صفر باشد که این اعضا را اعضای صفر نیرویی می‌نامند. توجه به نکات زیر در تعیین اعضای صفر نیرویی خرپا سودمند است:

۱) اگر دوعضو خرپایی در یک مفصل به یکدیگر متصل شده باشند چنانچه دو عضو در یک امتداد نباشند و در مفصل مشترک نیز نیرویی وارد نشود هر دو عضو صفر نیرویی هستند.




۲) اگر سه عضو خرپایی در یک مفصل به یکدیگر متصل شده باشند چنانچه دو عضو از این سه عضو در یک امتداد باشد ولی عضو سوم در امتداد بقیه نباشد و بر مفصل مشترک نیز نیرویی وارد نشود عضوی که در امتداد بقیه نیست، صفر نیرویی است.




ممکن است در یک خرپا تغییر مکان یک گره یا چرخش یک عضو خرپا یا تغییر فاصله دو گره نسبت به یکدیگر مدنظر باشد که دراین‌صورت بایستی از روش کار مجازی استفاده کرد. اگر تغییر مکان گرهی از یک خرپای n عضوی خواسته شده باشد بایستی یک نیروی واحد مجازی در جهت مورد نظر بر آن گره وارد کرد و از معادله کار مجازی استفاده کرد:

$$1\times\Delta+W_R=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i n_i \ell_i}{A_i E_i}+\sum_{i=1}^{n}n_i\alpha_i\ell_i\Delta T_i+\sum_{i=1}^{n}n_i\delta_i$$

در رابطه فوق $W_R$ کار مجازی ناشی از نشست تکیه‌گاهی می‌باشد که از ضرب عکس‌العمل تکیه‌گاهی ناشی از بار واحد مجازی در نشست حقیقی بدست می‌آید. اگر جهت نشست در جهت عکس‌العمل نظیر آن نشست باشد کار مربوطه مثبت و در غیر این صورت منفی می‌باشد.

سایر پارامترهای مورد استفاده در رابطه فوق در زیر تعریف شده‌اند:

$N_i$: نیروی عضو iام ناشی از بارگذاری حقیقی

$n_i$: نیروی عضو iام ناشی از بارگذاری مجازی

$\Delta T_i$: تغیر دمای عضو iام که اگر به صورت افزایش درجه حرارت باشد مثبت و اگر به صورت کاهش درجه حرارت باشد منفی درنظر گرفته می‌شود.

**یادداشت:**

................................................................................................

................................................................................................

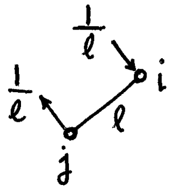
................................................................................................

................................................................................................

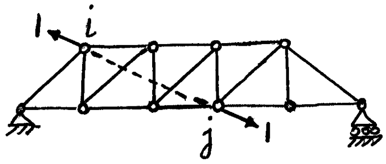
$\delta_i$: خطای ساخت عضو iام که اگر عضو بلندتر ساخته شده باشد، مثبت و اگر عضو کوتاهتر ساخته شده باشد، منفی درنظر گرفته می‌شود.
چنانچه $\Delta$ بدست آمده از رابطه فوق مثبت باشد نشان می‌دهد که تغییر مکان گره مورد نظر در جهت نیروی واحد مجازی اعمال شده است.

توصیه می‌شود که اگر خرپا دارای بارگذاری خارجی نیز هست ابتدا تحت اثر بار واحد مجازی تحلیل شود و سپس تحت اثر بارگذاری خارجی خود تحلیل شود چون معمولاً تحت اثر بار واحد مجازی بسیاری از اعضای خرپا صفر نیرویی می‌شوند که در نتیجه نیازی نیست نیروی این اعضاء تحت اثر بارگذاری حقیقی بدست آید.

اگر چرخش عضوی از خرپا به طول $\ell$ مدنظر باشد می‌توان مطابق شکل نیروهای مجازی مختلف‌الجهت و مساوی $\frac{1}{\ell}$ را عمود بر این عضو خرپایی اعمال کرد. در این صورت ترم $1\times\varphi$ جایگزین ترم $1\times\Delta$ در رابطه کار مجازی می‌شود و محاسبه یک مقدار مثبت برای $\varphi$ نشان می‌دهد که عضو موردنظر در جهت کوپل واحد اعمال شده چرخیده است.




چنانچه تغییر فاصله دو گره خرپا (مثلاً گره‌های i و j) مد نظر باشد بایستی مطابق شکل زیر بارگذاری مجازی را به صورت دو نیروی واحد دور شونده که در گره‌های i و j بر خرپا اثر می‌کنند، انتخاب کرد. در این صورت ترم $1\times\Delta_{j/i}$ جایگزین ترم $1\times\Delta$ در رابطه کار مجازی می‌شود و محاسبه یک مقدار مثبت برای $\Delta_{j/i}$ نشان می‌دهد که گره‌های i و j از یکدیگر دور شده‌اند.




**یادداشت:**

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

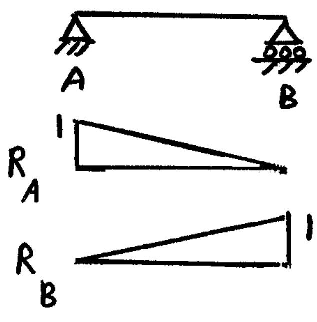
# فصل پنجم

# خط تأثیر

خط تأثیر نموداری است که تغییرات یک پارامتر سازه را با جابجا شدن بار واحد قائم به ما می‌دهد. این پارامتر می‌تواند عکس‌العمل تکیه‌گاهی، برش و یا لنگر خمشی در نقطه مشخصی از سازه باشد و چنانچه سازه به صورت خرپا باشد، نیروی محوری عضو مشخصی از خرپا باشد. در ادامه قواعد رسم خطوط تأثیر که با استفاده از کار مجازی اثبات می‌شوند، ارائه شده است:

### قاعده رسم خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی

برای رسم خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی قید تکیه‌گاهی مربوطه را حذف می‌کنیم و محل تکیه‌گاه را به میزان واحد به سمت بالا جابجا می‌کنیم. تغییر شکلی که سازه پیدا می‌کند بیانگر خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه موردنظر است. با توجه به این قاعده خط تأثیر عکس‌العمل‌های قائم تکیه‌گاه‌های A و B تیر زیر رسم شده است.




**نکته** : با توجه به تعادل نیروها در راستای قائم نتیجه می‌شود که مجموع خطوط تأثیر عکس‌العمل‌های قائم تکیه‌گاهی در یک سازه، مستطیلی با عرض واحد است. این مطلب کلی است و ربطی به معین بودن سازه یا نامعینی آن ندارد.

**یادداشت:**

..............................................................................................................................

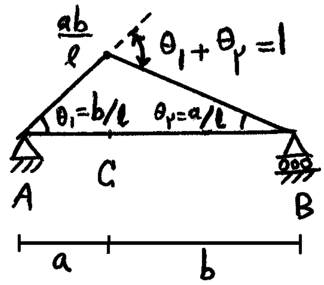
..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

## قاعده رسم خط تأثیر لنگر خمشی

برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی در یک نقطه، محل موردنظر را مفصل خمشی می‌کنیم، سپس بدون اینکه اجازه تغییر مکان نسبی بدهیم چرخش نسبی واحد ایجاد می‌کنیم. تغییر شکلی که سازه پیدا می‌کند بیانگر خط تأثیر لنگر خمشی محل موردنظر است. با توجه به این قاعده خط تأثیر لنگر خمشی نقطه C رسم شده است.



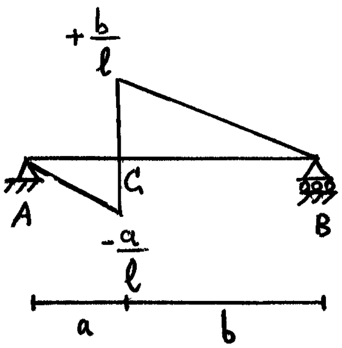

**نکته** : خط تأثیر لنگر خمشی در مفصل خمشی برابر صفر است.

**نکته** : اگر در محل مفصل برشی خط تأثیر لنگر خمشی رسم شود در محل مفصل برشی نیازی به تغییر مکان یکسان در چپ و راست مفصل برشی نیست و تغییر مکان نسبی خواهیم داشت.

**نکته** : اگر در نقطه‌ای از سازه مفصل برشی وجود داشته باشد در کلیه خطوط تأثیر آن سازه دیده می‌شود که شیب خط تأثیر در چپ و راست مفصل برشی یکسان است (چون درجه آزادی چرخشی مفصل برشی 1 واحد است) به جز یک مورد و آن مورد هم خط تأثیر لنگر خمشی در همان محل مفصل برشی است چون در این حالت ما خودمان محل مفصل برشی را مفصل خمشی کرده و به میزان واحد تغییر شیب ایجاد می‌کنیم.

## قاعده رسم خط تأثیر برش

برای رسم خط تأثیر برش در یک نقطه، محل موردنظر را مفصل برشی می‌کنیم، سپس بدون اینکه اجازه چرخش نسبی بدهیم تغییر مکان نسبی واحد ایجاد می‌کنیم. تغییر شکلی که سازه پیدا می‌کند بیانگر خط تأثیر برش محل موردنظر است. با توجه به این قاعده خط تأثیر برش نقطه C رسم شده است.




**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

**نکته** : در خط تأثیر برش شیب نمودار خط تأثیر مستقل از مکان گره موردنظر است و همواره برابر است به $-\frac{1}{\ell}$. بنابراین اگر نمودار خط تأثیر برش نقطه‌ای از یک تیر داده شده باشد چنانچه شیب آن را معکوس و قرینه کنیم طول تیر به دست می‌آید.

**نکته** : خط تأثیر برش در تکیه‌گاه انتهایی سمت چپ سازه همان خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه انتهایی سمت چپ است ولی خط تأثیر برش در تکیه‌گاه انتهایی سمت راست سازه قرینه خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه انتهایی سمت راست است. این مطالب کلی که برای هر سازه‌ای چه معین و چه نامعین صحیح است نشان می‌دهد که برای آنکه برش یک تکیه‌گاه انتهایی ماکزیمم شود بار متمرکز بایستی در محل آن تکیه‌گاه قرار گیرد.

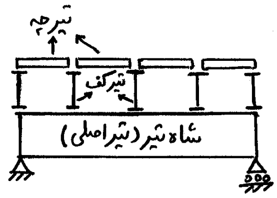
**نکته** : اگر در محل مفصل خمشی خط تأثیر برش رسم شود شیب خط تأثیر در چپ و راست مفصل خمشی برابر نخواهد بود.

**نکته** : در محل یک تکیه‌گاه کناری برش چپ و راست معنا ندارد چون سازه فقط از یک طرف امتداد دارد ولی در محل یک تکیه‌گاه میانی که از هر دو طرف آن سازه ادامه دارد بایستی طراح دقیقاً مشخص کند که برش راست تکیه‌گاه مدنظر است و یا برش چپ تکیه‌گاه. در این حالت همواره تفاضل خط تأثیر برش راست تکیه‌گاه میانی از خط تأثیر برش چپ تکیه‌گاه میانی برابر است با خط تأثیر عکس‌العمل آن تکیه‌گاه میانی.

در صورتی‌که سازه معین دارای فنرهای پیچشی یا انتقالی باشد تحت اثر بارگذاری مقادیر برش و لنگر خمشی و نمودارهای آن‌ها مستقل از مقادیر سختی فنرهای پیچشی و انتقالی سازه است. نتیجه مهمی که از مطالب فوق حاصل می‌شود این است که اگر سازه معین دارای فنرهای پیچشی یا انتقالی باشد می‌توان برای سهولت کار سختی این فنرها را به بی‌نهایت میل داد و سپس در سازه جدیدی که حاصل می‌شود اقدام به رسم خط تأثیر پارامتر موردنظر نمود.

## قاعده رسم خط تأثیر تیر و تیرکف (تیرچه)

وقتی در پل‌سازی از یک شاه تیر استفاده می‌شود معمولاً بارگذاری به صورت مستقیم بر شاه تیر وارد نشده بلکه از طریق مجموعه تیرچه و تیرکف به شاه تیر انتقال پیدا می‌کند.




برای رسم خط تأثیر پارامتری از تیر اصلی به صورت زیر عمل می‌کنیم:
بدون توجه به تیر کف و تیرچه‌ها با توجه به قواعدی که گفته شد اقدام به رسم خط تأثیر پارامتر مربوطه در تیر اصلی می‌کنیم و تغییر شکل تیر اصلی را به دست می‌آوریم.
سپس بایستی با توجه به تغییر شکل تیر اصلی و موقعیت تیرهای کف و وضعیت تیرچه‌ها از روی تغییر شکل تغییر اصلی، تغییر شکل تیرچه‌ها که محل اعمال بار واحد است تعیین شده و به عنوان خط تأثیر پارامتر مربوطه ارائه گردد. واضح است که در محل تیر کف تغییر مکان تیر اصلی با تغییر مکان تیرچه‌های واقع بر تیر کف یکسان است که از این مطلب می‌توان برای رسم خط تأثیر تیر اصلی استفاده کرد.
کلیه خطوط تأثیر تیر اصلی در فاصله بین دو تیر کف (پک پانل) به صورت خطی تغییر می‌کند.

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## قاعده رسم خط تأثیر نیروی محوری اعضای خرپا

برای رسم خط تأثیر نیروی محوری هر عضو خرپا، آن عضو را از خرپا برداشته و دو گره دو سر عضو را به میزان واحد به یکدیگر نزدیک می‌کنیم. تغییر مکان گره‌هایی از خرپا که بار واحد بر آن‌ها اعمال می‌شود، بیانگر شکل خط تأثیر نیروی محوری عضو موردنظر است. بایستی توجه داشت که این قاعده همواره صحیح است ولی برای تعدادی از خرپاها به علت هندسه‌اشان جوابگو نیست، بدین معنا که در بعضی از خرپاها وقتی عضو موردنظر را از خرپا برمی‌داریم و گره‌های دو سر آن عضو را به میزان واحد به یکدیگر نزدیک می‌کنیم تشخیص نحوه تغییر شکل خرپا امکان‌پذیر نیست. برای این خرپاها بایستی بار واحد را در دو یا چند گره خاص خرپا اعمال کرد و با استفاده از روش‌های مفصل و مقطع نیروی عضو موردنظر را تحت اثر بار واحد در هریک از این گره‌ها محاسبه کرد. مقادیر محاسبه شده در حقیقت عرض خط تأثیر نیروی عضو موردنظر هستند و با استفاده از این مقادیر با توجه به خطی بودن شکل خط تأثیر، خط تأثیر موردنظر رسم می‌شود.

**نکته** : خط تأثیر نیروی محوری اعضای افقی فوقانی و تحتانی خرپا معمولاً شبیه خط تأثیر لنگر خمشی در تیرها است و خط تأثیر نیروی محوری اعضای قائم و مایل خرپا نیز معمولاً شبیه خط تأثیر برش در تیرها است.

**نکته** : خرپا چه معین باشد و چه نامعین، کلیه خطوط تأثیر آن به صورت خطی است.

## کاربرد خط تأثیر

۱) در صورتی‌که خط تأثیر پارامتری داده شده باشد و بارگذاری روی سازه به صورت تعدادی بار متمرکز باشد بایستی هر بار متمرکز را در عرض خط تأثیر در محل آن بار ضرب کرد و همه مقادیر به دست آمده را با هم جمع کرد.
۲) در صورتی‌که بار گسترده یکنواختی بر سازه اثر کند برای به دست آوردن پارامتر موردنظر بایستی شدت بار گسترده را در سطح زیر نمودار خط تأثیر در فاصله‌ای که بار گسترده بر سازه اثر می‌کند، ضرب کرد.

**نکته** : عرض خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی و برش بدون بعد است و سطح زیر این نمودارهای خط تأثیر از جنس طول است ولی عرض خط تأثیر لنگر خمشی از جنس طول است و سطح زیر نمودار خط تأثیر لنگر از جنس سطح است.

بارگذاری می‌تواند به صورت مرده و یا زنده باشد. بار مرده ناشی از وزن سازه است و بنابراین بایستی در همه دهانه‌ها درنظر گرفته شود ولی بار زنده ناشی از بارگذاری است و می‌توان آن را به هر ترتیبی بر دهانه‌ها اعمال کرد. فقط در صورتی می‌توان یک بارگذاری را مجزا کرد و قسمتی از آن را بر یک دهانه و قسمت دیگر را بر دهانه غیرمجاور آن اعمال کرد که آن بارگذاری زنده باشد.

**یادداشت:**

........................................................................................................
........................................................................................................
........................................................................................................
........................................................................................................

# فصل ششم

# تغییر شکل ارتجاعی سازه‌ها

## انرژی کرنشی

انرژی کرنشی، انرژی ذخیره شده در سازه ناشی از تغییر شکل سازه است که می‌تواند به صورت محوری، برشی، خمشی و پیچشی باشد. این عوامل به ترتیب در رابطه کلی انرژی کرنشی زیر آورده شده‌اند:

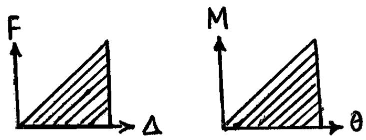
$$U=\int\frac{F^2(x)dx}{2EA(x)}+\int\frac{V^2(x)dx}{2GA'(x)}+\int\frac{M^2(x)dx}{2EI(x)}+\int\frac{T^2(x)dx}{2GJ(x)}$$

در رابطه فوق $F(x)$ ، $V(x)$ ، $M(x)$ و $T(x)$ به ترتیب نیروی محوری، برش، لنگر خمشی و لنگر پیچشی سازه را نشان می‌دهند و $A'(x)$ سطح مقطع مؤثر برشی می‌باشد. در تیرها و قاب‌ها معمولاً عمده انرژی کرنشی مربوط به خمش می‌باشد (ترم سوم) و از سایر ترم‌ها صرف‌نظر می‌شود. در خرپاها فقط انرژی کرنشی محوری (ترم اول) وجود دارد و از سایر ترم‌ها صرف‌نظر می‌شود.

روش کار حقیقی: در روش کار حقیقی براساس قانون بقای انرژی، کار خارجی انجام شده توسط بارگذاری با کار داخلی سازه که همان انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه $(U)$ است برابر قرار داده می‌شود:

$$W_{ext}=W_{int}=U$$

سطح زیر نمودار بار ـ تغییر مکان، کار خارجی انجام شده روی سازه است و در صورتی که بارگذاری به صورت لنگر خمشی متمرکز باشد سطح زیر نمودار لنگر ـ چرخش، کار خارجی را به ما می‌دهد. با توجه به رفتار خطی مصالح و سازه برای بارگذاری‌های فوق کار خارجی به ترتیب برابر $\frac{1}{2}F\Delta$ و $\frac{1}{2}M\theta$ می‌باشد.




**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

چنانچه سازه تحت اثر بارگذاری مرکب متشکل از بارهای متمرکز و لنگرهای خمشی متمرکز قرار گیرد، کار خارجی انجام شده توسط بارگذاری برابر است با:

$$W=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}P_i\Delta_i+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}M_j\theta_j$$

در این رابطه فرض شده است که m بار متمرکز ($P_1$ تا $P_m$) و n لنگر متمرکز ($M_1$ تا $M_n$) بر سازه اثر کرده است. قابل ذکر است که در این رابطه $\Delta_i$ تغییر مکان گره iام ناشی از جمیع بارها و لنگرها (نه فقط ناشی از بار متمرکز $P_i$) و $\theta_j$ چرخش گره jام ناشی از جمیع بارها و لنگرها (نه فقط ناشی از لنگر متمرکز $M_j$) می‌باشد.

## روش کار مجازی

کار مجازی عبارتست از کار انجام شده توسط یک نیروی حقیقی طی یک جابجایی مجازی و یا کار انجام شده توسط یک نیروی مجازی طی یک جابجایی حقیقی.

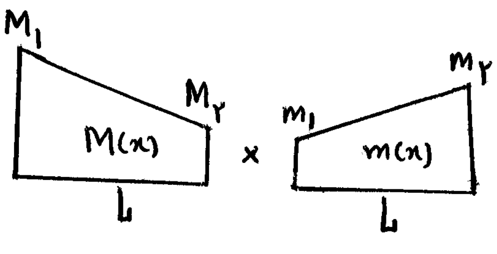
اصل کار مجازی بیان می‌کند که چنانچه بر یک سازه در حال تعادل، بارگذاری مجازی اعمال شود و یا جابجایی مجازی سازگار با قیود سازه داده شود در این صورت کار مجازی خارجی با کار مجازی داخلی برابر خواهد بود.

روش کار مجازی به دو بخش جابجایی مجازی و بارگذاری مجازی تقسیم می‌شود. از روش جابجایی مجازی در بخش خط تأثیر استفاده می‌شود و از روش بارگذاری مجازی در این فصل برای محاسبه خیز و شیب نقاط مورد نظر سازه استفاده می‌شود. چنانچه تغییر مکان نقطه‌ای از سازه مدنظر باشد بایستی بار واحد مجازی در آن نقطه بر سازه اعمال شود و چنانچه چرخش نقطه‌ای از سازه مدنظر باشد بایستی لنگر واحد مجازی در آن نقطه بر سازه اعمال شود. باتوجه به اینکه در تیرها و قاب‌ها معمولاً از اثر تغییر شکل محوری، برشی و پیچشی چشم‌پوشی می‌شود و فقط تغییر شکل خمشی در نظر گرفته می‌شود، رابطه کار مجازی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix}1\times\Delta\\1\times\theta\end{Bmatrix}=\int\frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

در رابطه فوق $M(x)$ و $m(x)$ به‌ترتیب نمودار لنگر خمشی سازه ناشی از بارگذاری حقیقی و مجازی می‌باشد. چنانچه هر دو نمودار لنگر خمشی $M(x)$ و $m(x)$ مطابق شکل زیر به‌صورت خطی باشند، داریم:

$$\int\frac{M(x)m(x)dx}{EI}=\frac{L}{6EI}\left[2M_1m_1+2M_2m_2+M_1m_2+M_2m_1\right]$$




**یادداشت:**

.........................................................................................................

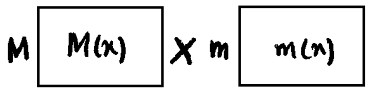
.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

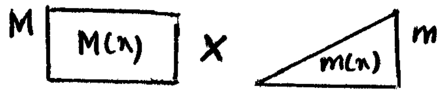
حالات خاص رابطه فوق عبارتند از:

۱) ضرب مستطیل در مستطیل:



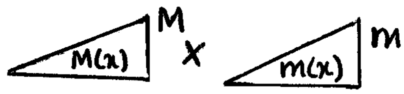

$$\int \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{EI}$$

۲) ضرب مستطیل در مثلث:



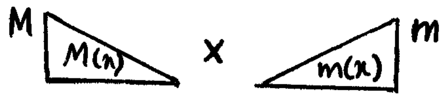

$$\int \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{2EI}$$

۳) ضرب مثلث در مثلث (حالت هم‌فاز):




$$\int \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{3EI}$$

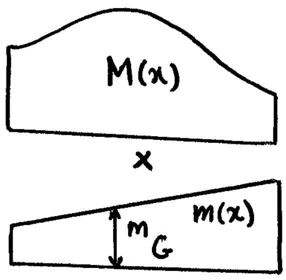
۴) ضرب مثلث در مثلث (حالت غیرهم‌فاز):




$$\int \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{6EI}$$

چنانچه از نمودارهای لنگر خمشی $m(x)$ و $M(x)$ یکی به‌صورت خطی و دیگری به‌صورت غیرخطی باشد، می‌توان از قاعده مور استفاده کرد:

$$\int \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{A_M \times m_G}{EI}$$




در رابطه فوق $A_M$ سطح زیر نمودار لنگر غیرخطی $M(x)$ است و $m_G$ مقدار لنگر در نمودار لنگر خطی $m(x)$ در محل مرکز سطح نمودار لنگر غیرخطی $M(x)$ است.

تعمیم رابطه کار مجازی در حالتی که خمش غالب است و سازه دارای فنرهای پیچشی و انتقالی است، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} 1\times\Delta \\ 1\times\theta \end{Bmatrix} = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI} + \sum_{i=1}^{m} \frac{M_{i\theta}\, m_{i\theta}}{K_{i\theta}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{is}\, f_{is}}{K_{is}}$$

در رابطه فوق فرض شده است که سازه دارای $m$ فنر پیچشی و $n$ فنر انتقالی است و داریم:

$M_{i\theta}$: لنگر فنر پیچشی $i$ام ناشی از بارگذاری حقیقی

$m_{i\theta}$: لنگر فنر پیچشی $i$ام ناشی از بارگذاری مجازی

$F_{is}$: نیروی فنر انتقالی $i$ام ناشی از بارگذاری حقیقی

$f_{is}$: نیروی فنر انتقالی $i$ام ناشی از بارگذاری مجازی

**یادداشت:**

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

## قضایای کاستیلیانو

در روش‌های انرژی، قضایای اول و دوم کاستیلیانو از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند:

قضیه اول کاستیلیانو: اگر انرژی کرنشی سازه به‌صورت تابعی از تغییر مکان و چرخش گره‌های مختلف سازه نوشته شود مشتق انرژی کرنشی سازه نسبت به تغییر مکان هر گره برابر است با نیرویی که در آن گره در جهت تغییر مکان آن گره اعمال شده است و مشتق انرژی کرنشی سازه نسبت به چرخش هر گره برابر است با لنگری که در آن گره در جهت چرخش آن گره اعمال شده است.

$$U = U(\Delta_i, \theta_i) \rightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i, \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = M_i$$

قضیه دوم کاستیلیانو: اگر انرژی کرنشی سازه به‌صورت تابعی از نیرو و لنگر گره‌های مختلف سازه نوشته شود مشتق انرژی کرنشی سازه نسبت به نیروی هر گره برابر است با تغییر مکان آن گره در جهت نیروی وارده به آن و مشتق انرژی کرنشی سازه نسبت به لنگر هر گره برابر است با چرخش آن گره در جهت لنگر وارده به آن:

$$U = U(F_i, M_i) \rightarrow \frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i, \frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i$$

**نکته** : قضیه دوم کاستیلیانو فقط برای سازه‌های خطی ارتجاعی قابل استفاده است ولی قضیه اول کاستیلیانو برای سازه‌های غیرخطی که ارتجاعی باشند نیز صحیح است. به بیان دیگر قضیه اول کاستیلیانو برای سازه‌های غیرخطی که در آن‌ها امکان جمع آثار وجود ندارد قابل استفاده می‌باشد.

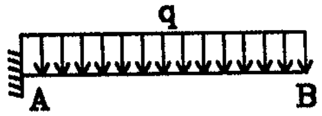
## تحلیل سازه نامعین با استفاده از روش سازگاری

این روش یکی از بهترین روشها برای تحلیل یک سازه نامعین می‌باشد. هر سازه نامعینی را می‌توان با حذف یک یا چند قید به یک سازه معین و پایدار تبدیل نمود که این سازه، سازه اولیه نامیده می‌شود. با نوشتن معادلات سازگاری که در واقع همان معادلات یکسان بودن شرایط هندسی در سازه اولیه و سازه جدید است، سازه تحلیل می‌شود. برای استفاده از این روش، حفظ کردن فرمول‌های زیر ضروری است. در روابط تیرهای پایه طول تیرها L و صلبیت خمشی آن‌ها EI می‌باشد.

1) $\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}, \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$


2) $\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}, \theta_B = \frac{ML}{EI}$


3) $\Delta_B = \frac{qL^4}{8EI}, \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$




**یادداشت:**

........................................................................................................................

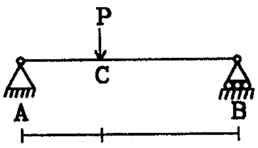
........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

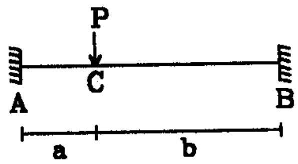
4) $\Delta_C=\dfrac{Pa^2b^2}{3EIL},\theta_A=\dfrac{Pab(L+b)}{6EIL},\theta_B=\dfrac{Pab(L+a)}{6EIL}$

حالت خاص : $a=b=\dfrac{L}{2}\rightarrow\Delta_C=\dfrac{PL^3}{48EI},\theta_A=\theta_B=\dfrac{PL^2}{16EI}$

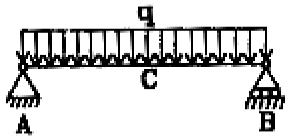



5) $\Delta_C=\dfrac{Pa^3b^3}{3EIL},M_A=\dfrac{Pab^2}{L^2},M_B=\dfrac{Pa^2b}{L^2},M_C=\dfrac{2Pa^2b^2}{L^3}$

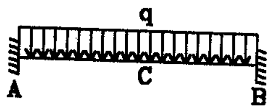
حالت خاص : $a=b=\dfrac{L}{2}\rightarrow\Delta_C=\dfrac{PL^3}{192EI},M_A=M_B=M_C=\dfrac{PL}{8}$



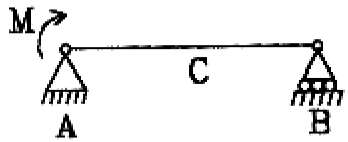

6) $\Delta_C=\dfrac{5qL^4}{384EI},\theta_A=\theta_B=\dfrac{qL^3}{24EI}$



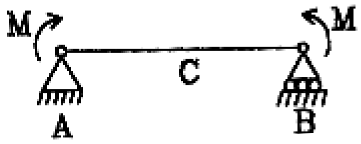

7) $\Delta_C=\dfrac{qL^4}{384EI},M_A=M_B=\dfrac{qL^2}{12},M_C=\dfrac{qL^2}{24}$



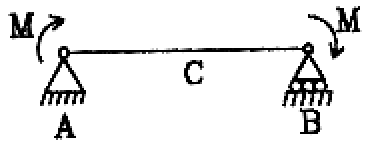

8) $\Delta_C=\dfrac{ML^2}{16EI},\theta_A=\dfrac{ML}{3EI},\theta_B=\dfrac{ML}{6EI}$



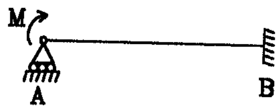

9) $\Delta_C=\dfrac{ML^2}{8EI},M_C=M,\theta_A=\theta_B=\dfrac{ML}{2EI}$



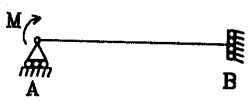

10) $\Delta_C=0,M_C=0,\theta_A=\theta_B=\dfrac{ML}{6EI}$



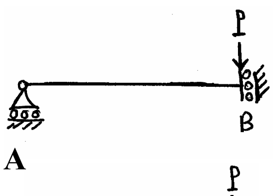

11) $\theta_A=\dfrac{ML}{4EI},M_B=\dfrac{M}{2}$ (هم‌جهت با M)




12) $\theta_A=\dfrac{ML}{EI},\Delta_B=\dfrac{ML^2}{2EI}$




13) $\theta_A=\dfrac{PL^2}{2EI}$ , $\Delta_B=\dfrac{PL^3}{3EI}$




14) $M_A=M_B=\dfrac{PL}{2},\Delta_B=\dfrac{PL^3}{12EI}$


یادداشت:

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

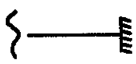
## روش تیر مزدوج

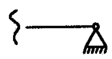
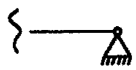
در این روش مسأله تعیین شیب‌ها و تغییر مکان‌های یک تیر تحت اثر بارگذاری حقیقی به مسأله تعیین برش و لنگر خمشی تیر مزدوج متناظر آن تحت اثر بار الاستیک تبدیل می‌شود. در روش تیر مزدوج بایستی مزدوج تیر از روی تیر اصلی تعیین شود و سپس نمودار لنگر خمشی تیر تحت اثر بارگذاری حقیقی $(M(x))$ بر صلبیت خمشی تیر $(EI)$ تقسیم شود و این بار الاستیک $\frac{M}{EI}$ به‌صورت بار گسترده بر تیر مزدوج اعمال شود. شیب هر نقطه از سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی برابر است با نیروی برشی در همان نقطه از سازه مزدوج و تغییر مکان هر نقطه از سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی برابر است با لنگر خمشی در همان نقطه از سازه مزدوج.

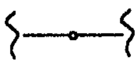
**نکته** : بار الاستیک از جنس نیرو یا نیروی گسترده یا لنگر متمرکز نیست بلکه از جنس عکس طول $\left(L^{-1}\right)$ می‌باشد.

**نکته** : هرچند که روش تیر مزدوج برای کلیه تیرها با هر بارگذاری دلخواهی قابل استفاده است ولی در حالت خاصی که هدف، محاسبه محل و مقدار تغییر مکان ماکزیمم باشد روش تیر مزدوج بهترین راه‌حل است. باتوجه به این که در محل تغییر مکان ماکزیمم، شیب برابر صفر است می‌توان برای تعیین مکان خیز ماکزیمم، محل برش صفر را به‌دست آورد و مقدار لنگر خمشی در این نقطه نیز تغییر مکان ماکزیمم را به ما می‌دهد.

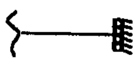
تبدیل تکیه‌گاه‌ها و یا شرایط داخلی را از تیر اصلی به تیر مزدوج می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

۱ـ انتهای آزاد  ↔ انتهای ثابت (گیردار) 

۲ـ انتهای ساده  ↔ انتهای ساده 

۳ـ تکیه‌گاه داخلی  ↔ مفصل داخلی 

۴ـ تکیه‌گاه مفصلی داخلی  ↔ تکیه‌گاه مفصلی داخلی 

۵ـ تکیه‌گاه گیردار غلتکی  ↔ تکیه‌گاه گیردار غلتکی 

۶ـ مفصل برشی در تیر اصلی  ← ممان متمرکز در محل مفصل برشی در تیر مزدوج 

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

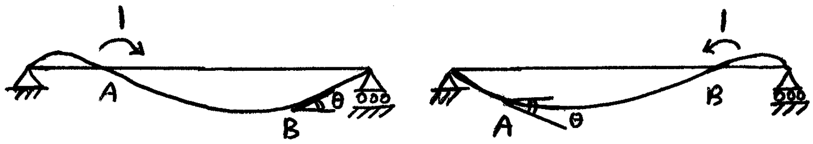
## قضیه دوجانبه بتی ـ ماکسول

قضیه دوجانبه بتی ـ ماکسول به‌عنوان نتیجه‌ای از اصل کار مجازی می‌تواند در قالب ۳ حالت زیر بیان شود:

۱) حالت نیرو ـ نیرو: اگر نیروی واحد در نقطه A از سازه اثر کند و تغییر مکان نقطه B برابر $\Delta$ باشد، چنانچه نیروی واحد در نقطه B از همان سازه اثر کند، تغییر مکان نقطه A همان $\Delta$ خواهد بود.


در شکل‌های فوق جهت اندازه‌گیری تغییر مکان در هر یک از نقاط با جهت اعمال بار واحد در آن نقاط یکسان است.

۲) حالت لنگر ـ لنگر: اگر لنگر واحد در نقطه A از سازه اثر کند و چرخش نقطه B برابر $\theta$ باشد، چنانچه لنگر واحد در نقطه B از همان سازه اثر کند، چرخش نقطه A همان $\theta$ خواهد بود.




۳) حالت نیرو ـ لنگر: اگر نیروی واحد در نقطه A از سازه اثر کند و چرخش نقطه B برابر $\theta$ باشد، چنانچه لنگر واحد در نقطه B از همان سازه اثر کند، تغییر مکان نقطه A برابر $\Delta$ است که $\Delta=\theta$ خواهد بود.


بایستی توجه داشت که حالت سوم (حالت نیرو ـ لنگر) بیشتر از حالات اول و دوم مورد توجه و علاقه طراحان است. در قضیه دوجانبه بتی ـ ماکسول سازه‌ها یکسان هستند. چنانچه صلبیت خمشی سازه‌ها یکسان نباشد بایستی نسبت صلبیت خمشی سازه‌ها در جواب نهایی لحاظ گردد، بدین صورت که در ابتدا فرض می‌کنیم صلبیت خمشی سازه‌ها یکسان هستند و از قضیه دوجانبه بتی ـ ماکسول استفاده می‌کنیم و سپس از قاعده زیر که در مبحث «تحلیل سازه‌های معین و نمودارهای برش و لنگر خمشی» به آن اشاره شد، استفاده می‌کنیم: در یک سازه تحت اثر بارگذاری مشخص چنانچه صلبیت خمشی همه اجزای سازه $n$ برابر شود خیز و شیب هر نقطه از سازه جدید نسبت به سازه اولیه $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود $\left(\Delta,\theta\propto\frac{1}{EI}\right)$.

**نکته** : در صورت استفاده از قضیه دوجانبه بتی ـ ماکسول در حالت سوم (حالت نیرو ـ لنگر) بایستی توجه داشت که واحد تغییر مکان مانند واحد طول در لنگر اعمال شده باشد، بدین معنا که اگر لنگر خمشی برحسب تن متر $(t.m)$ است بایستی تغییر مکان که ممکن است برحسب میلی‌متر یا سانتی‌متر داده شده باشد، به متر تبدیل شود.

**یادداشت:**

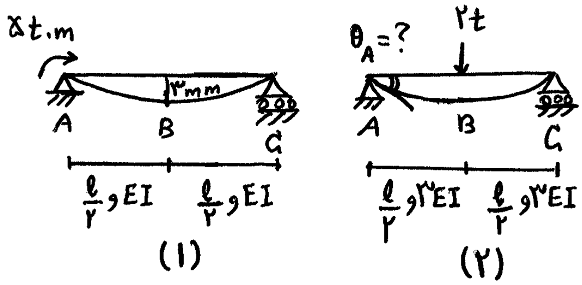
............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

**مثال: اگر تحت اثر لنگر $5\,\text{t.m}$ در تکیه‌گاه $A$، وسط تیر اول $3\,\text{mm}$ تغییر مکان یابد، تحت اثر نیروی قائم $2\,t$ در وسط تیر دوم، شیب تکیه‌گاه $A$ چقدر خواهد بود؟**




۱) $3\times10^{-4}$ rad
۲) $4\times10^{-4}$ rad
۳) $6\times10^{-4}$ rad
۴) $12\times10^{-4}$ rad

باتوجه به خطی بودن سازه‌ها نتیجه می‌شود که اگر به‌جای لنگر $5\,\text{t.m}$، لنگر $1\,\text{t.m}$ در تکیه‌گاه A در تیر اول اعمال شود تغییر مکان وسط تیر $\frac{3}{5}\text{mm}$ است که معادل با $0.6\times10^{-3}=6\times10^{-4}\,\text{m}$ می‌باشد. باتوجه به قضیه دو جانبه بتی ـ ماکسول اگر نیروی قائم $1t$ در وسط تیر اول اثر کند شیب تکیه‌گاه A برابر خواهد بود با $6\times10^{-4}$ رادیان. اگر به جای نیروی قائم $1t$، نیروی قائم $2t$ در وسط تیر اول اثر کند شیب تکیه‌گاه A دو برابر می‌شود $\left(12\times10^{-4}\,\text{rad}\right)$. اگر صلبیت خمشی تیر دوم نیز EI بود جواب تست $12\times10^{-4}$ rad می‌بود ولی باتوجه به اینکه صلبیت خمشی تیر دوم سه برابر تیر اول است پس جواب حاصل را بایستی در $\frac{EI}{3EI}=\frac{1}{3}$ ضرب کرد که نتیجه می‌شود شیب تکیه‌گاه A در تیر دوم برابر است با $4\times10^{-4}$ rad (گزینه دوم).

در تست‌های مشابه می‌توان به‌جای استفاده از قضیه دوجانبه بتی ـ ماکسول و استفاده از تناسب، درصورتی که صلبیت خمشی تیرها یکسان باشد مستقیماً از قانون تقابل کار استفاده کرد که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

برای یک سازه کاری که بارگذاری اول روی تغییر شکل (جابجایی‌ها و چرخش‌ها) حاصل از بارگذاری دوم انجام می‌دهد برابر است با کاری که بارگذاری دوم روی تغییر شکل (جابجایی‌ها و چرخش‌ها) حاصل از بارگذاری اول انجام می‌دهد: $W_{12}=W_{21}$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

# فصل هفتم

# شیب ـ افت

روش‌های تحلیل سازه به دو گروه کلی روشهای نرمی یا نیرو و روش‌های سختی یا جابجایی تقسیم‌بندی می‌شوند. در روشهای نرمی یا نیرو مجهولات، نیرو و لنگر هستند و در روش‌های سختی یا جابجایی مجهولات، تغییر مکان و شیب هستند. روش سختی شامل شیب ـ افت و پخش لنگر و قضیه اول کاستیلیانو می‌باشد و روش نرمی نیز شامل سایر روش‌ها ازجمله روش سازگاری تغییر شکل‌ها، کار حقیقی، کار مجازی، کار حداقل، تیر مزدوج و قضیه دوم کاستیلیانو می‌باشد. برای تحلیل سازه‌های با درجه نامعینی بالا روش سختی و برای سازه‌های با درجه آزادی بالا روش نرمی مناسب‌تر است.

در تحلیل سازه با روش شیب ـ افت معمولاً از تغییر شکل محوری اعضاء و نه نیروی محوری اعضاء چشم‌پوشی می‌شود، هرچند که در تست‌های مربوط به درجه آزادی گاهی اوقات از تغییر شکل محوری صرف‌نظر می‌شود و گاهی اوقات صرف‌نظر نمی‌شود. در روش شیب ـ افت مانند سایر روش‌ها فرض می‌شود که تغییر شکل‌ها کوچکند و مصالح خطی و ارتجاعی می‌باشند.

تست‌هایی که از مبحث شیب ـ افت مطرح می‌شود به دو بخش قابل تقسیم است: یا تعداد درجات آزادی سازه مورد پرسش قرار می‌گیرد و یا تحلیل یک سازه با استفاده از معادلات شیب ـ افت مدنظر می‌باشد.

## درجه آزادی

درجه آزادی سازه برابر است با تعداد تغییر مکان‌ها و چرخش‌های مستقل سازه که برای تعیین وضعیت سازه مورد نیاز است. درجه آزادی سازه برابر است با مجموع درجه آزادی انتقالی و درجه آزادی چرخشی سازه که در ادامه تشریح می‌شود:

۱) درجه آزادی انتقالی سازه $(D_1)$:می‌دانیم که هر گره غیرتکیه‌گاهی در یک سازه مسطح اجازه انتقال در دو راستا در درون صفحه سازه را دارد و چنانچه سازه فضایی باشد این گره اجازه انتقال در سه راستا در فضا را دارد. همچنین اگر عضوی در سازه تغییر شکل محوری نداشته باشد، باعث ایجاد یک محدودیت در تغییر مکان گره‌های دو سر خود می‌شود. بنابراین اگر تعداد گره‌های غیرتکیه‌گاهی سازه برابر M، تعداد تغییر مکان‌های تکیه‌گاهی سازه برابر N و تعداد اعضایی که از تغییر شکل محوری آن‌ها صرف‌نظر شده است، برابر P باشد روابط محاسبه درجات آزادی انتقالی $(D_1)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$D_1 = 2M + N - P$ (سازه مسطح) ، $D_1 = 3M + N - P$ (سازه فضایی)

**یادداشت:**

............................................................

............................................................

............................................................

............................................................

۲ـ درجه آزادی چرخشی $(D_2)$:در یک سازه مسطح برای هر گره صلب یک درجه آزادی چرخشی و برای هر مفصل خمشی به تعداد اعضایی که به یکدیگر مفصل شده‌اند، درجه آزادی چرخشی وجود دارد. در یک قاب فضایی برای هر گره صلب سه درجه آزادی چرخشی و برای هر مفصل خمشی به تعداد سه برابر اعضایی که به یکدیگر مفصل شده‌اند، درجه آزادی چرخشی وجود دارد.

در محاسبه تعداد اعضای فاقد تغییر شکل محوری که از درجات آزادی کل کسر می‌شوند باید توجه داشت که چنانچه یک گره با چند عضو مستقیماً به چند تکیه‌گاه متصل شود اگر دو تا از این اعضاء در یک امتداد باشند فقط یکی از این اعضاء به عنوان محدودکننده در نظر گرفته می‌شود، چون هر دو عضو ایجاد یک نوع محدودیت تغییر مکانی برای آن گره می‌کنند.

چنانچه از مبحث درجه آزادی تستی مطرح شود طراح بایستی مشخص کند که چه تعداد از اعضای سازه دارای تغییر شکل محوری هستند و چه تعداد از آن‌ها فاقد تغییر شکل محوری هستند. چنانچه تستی در مورد درجه آزادی مطرح شود ولی درمورد تغییر شکل محوری مطلبی گفته نشود مناسب است که اگر سازه مورد بررسی تیر و یا قاب است فرض شود همه اعضاء فاقد تغییر شکل محوری هستند ولی اگر سازه مورد بررسی خرپا است فرض شود همه اعضاء دارای تغییر شکل محوری هستند.

در خرپا اگر تعداد گره‌های غیرتکیه‌گاهی برابر $M$ و تعداد تغییر مکان‌های تکیه‌گاهی برابر $N$ باشد باتوجه به اینکه در خرپا از تغییر شکل محوری اعضاء صرفنظر می‌شود $(P=0)$، داریم:

$D_1 = 2M + N$ (خرپای مسطح)، $D_2 = 3M + N$ (خرپای فضایی)

**نکته** : درجه آزادی خرپا برابر است با درجه آزادی انتقالی آن. به عبارت دیگر برای خرپا درجه آزادی چرخشی در نظر گرفته نمی‌شود، چون درجه آزادی چرخشی هر عضو خرپا وابسته به درجات آزادی انتقالی گره‌های دو سر آن عضو خرپایی می‌باشد و پارامتر مستقلی نیست.

اگر قسمتی از سازه صلب باشد برای تعیین درجه آزادی سازه بایستی به موارد زیر توجه شود:

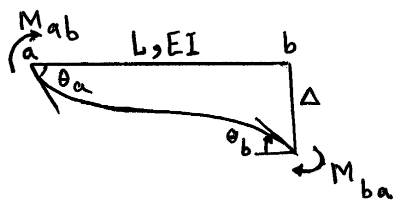
۱) در محاسبه تعداد گره‌های غیرتکیه‌گاهی سازه فقط گره اول و آخر عضو صلب در نظر گرفته شود و سایر گره‌های عضو صلب در محاسبه $M$ لحاظ نگردد.

۲) برای هیچ گرهی از عضو صلب درجه آزادی چرخشی در نظر گرفته نشود چون کل عضو صلب دارای یک درجه آزادی چرخشی است که آن هم وابسته به درجات آزادی انتقالی گره‌های اول و آخر عضو صلب است.

۳) در محاسبه تعداد اعضای فاقد تغییر شکل محوری، کل عضو صلب حتی اگر از چندین قسمت تشکیل شده باشد، یک عضو در نظر گرفته شود.

## معادلات شیب ـ افت

اگر عضو $ab$ به‌صورت زیر تغییر شکل یابد لنگرهای انتهایی در گره‌های $a$ و $b$ که آن‌ها را به‌ترتیب $M_{ab}$ و $M_{ba}$ می‌نامیم، برحسب چرخش و تغییر مکان نسبی عضو و همچنین بارگذاری روی عضو نوشته می‌شوند:




$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}\right) + M_{ab}^F$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_b + \theta_a - \frac{3\Delta}{L}\right) + M_{ba}^F$$

**یادداشت:**

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

اگر انتهای b مفصلی باشد و یا اینکه $M_{ab}=0$ باشد می‌توان از رابطهٔ $M_{ba}=0$، $\theta_b$ را برحسب سایر پارامترها به‌دست آورد و اگر $\theta_b$ را در رابطه $M_{ab}$ بگذاریم، خواهیم داشت:

$$M_{ab}=\frac{3EI}{L}\left(\theta_a-\frac{\Delta}{L}\right)+M^F_{ab}-\frac{1}{2}M^F_{ba}$$

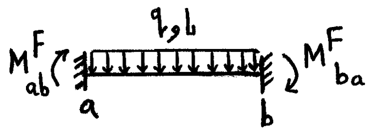
قرارداد در نظر گرفته شده برای روابط فوق به‌صورت زیر است:

۱) لنگر خمشی وارده بر انتهای یک عضو درصورتی‌که درجهت عقربه‌های ساعت باشد، مثبت و درصورتی‌که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد، منفی است.

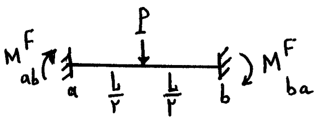
۲) چرخش گره در صورتی‌که در جهت عقربه‌های ساعت باشد، مثبت و درصورتی‌که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد، منفی است.

۳) تغییر مکان نسبی در راستای عمود بر عضو $(\Delta)$ درصورتی‌که خط مستقیم واصل بین گره‌های دو سر عضو در جهت عقربه‌های ساعت دوران کند، مثبت و درصورتی‌که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران کند، منفی است.

$M^F_{ab}$ و $M^F_{ba}$ در روابط شیب ـ افت لنگرهای گیرداری ناشی از بارگذاری هستند که اگر ساعتگرد باشند مثبت و اگر پادساعتگرد باشند منفی در نظر گرفته می‌شوند. تحت اثر بار متمرکز در وسط تیر و بار گسترده یکنواخت، لنگرهای $M^F_{ab}$ و $M^F_{ba}$ در شکل‌های زیر داده شده است.



$M^F_{ab}=-\frac{qL^2}{12}$ $\qquad$ $M^F_{ba}=+\frac{qL^2}{12}$



$M^F_{ab}=-\frac{PL}{8}$ $\qquad$ $M^F_{ba}=+\frac{PL}{8}$

چنانچه سازه دارای نشست یا چرخش تکیه‌گاهی باشد معمولاً بهترین روش تحلیل آن روش شیب ـ افت می‌باشد.

**نکته** : در تحلیل یک سازه با روش شیب ـ افت چنانچه در یک گره چندین عضو با اتصال صلب به یکدیگر متصل شده باشند همواره یکی از معادلات شیب ـ افت، نوشتن معادله تعادل لنگر در گره موردنظر است. چنانچه در این گره لنگر متمرکز ساعتگرد $M_0$ اثر کند، مجموع لنگرهای اعضای متصل به گره برابر خواهد بود با $+M_0$ و چنانچه لنگر متمرکز اعمالی پادساعتگرد باشد مجموع لنگرهای اعضای متصل به گره برابر خواهد بود با $-M_0$.

## جمع‌بندی:

۱ـ تحلیل خرپای معین با استفاده از روش ترکیبی مفصل و مقطع انجام می‌شود و اگر تغییر مکان گرهی از خرپا و پادوران عضوی از خرپا مدنظر باشد بایستی از روش کار مجازی استفاده نمود.

۲ـ چنانچه تغییر مکان و یا شیب گرهی از یک تیر معین و یا یک قاب معین مدنظر باشد معمولاً می‌توان از تیرهای پایه استفاده نمود ولی اگر استفاده از تیرهای پایه موثر نباشد بایستی از روش کار مجازی استفاده کرد.

۳ـ برای تحلیل یک تیرنامعین و یا یک قاب نامعین، معمولاً بهترین روش، روش سازگاری و استفاده از روابط تیرهای پایه می‌باشد.

۴ـ برای محاسبه مکان و مقدار خیر ماکزیمم تیر، بهترین روش، روش تیر مزدوج می‌باشد. محل برش صفر در تیر مزدوج مکان خیز ماکزیمم تیر را به ما می‌دهد چون در این نقطه در سازه اصلی شیب صفر می‌شود. اگر در این نقطه از سازه مزدوج لنگر خمشی محاسبه شود مقدار خیز ماکزیمم در تیر اصلی محاسبه شده است.

۵ـ بهترین روش تحلیل برای سازه‌ای که دچار نشست تکیه‌گاهی و یا چرخش تکیه‌گاهی شده است، روش شیب ـ افت می‌باشد.

**یادداشت:**

....................................................................................................

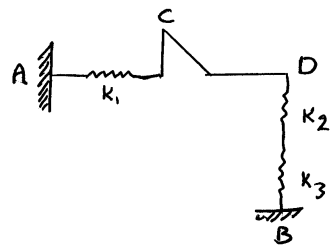
....................................................................................................

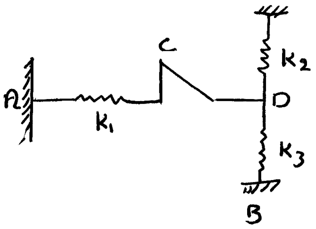
....................................................................................................

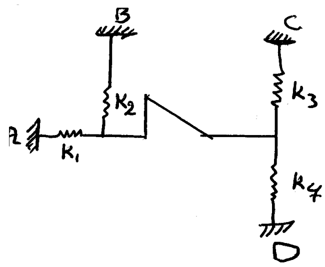
....................................................................................................

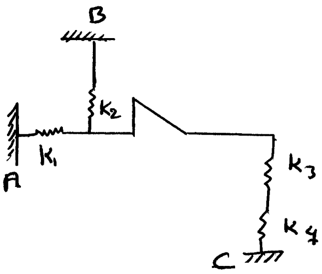
## سوالات

**۱ ـ کدام‌یک از سازه‌های زیر پایدار و معین می‌باشد؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

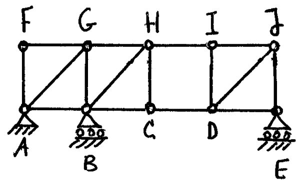
**حل :** گزینه ۴ درست است.

در گزینه اول فنرهای $K_2$ و $K_3$ دارای یک نیرو می‌باشند و واکنش تکیه‌گاه B، تک مجهولی می‌باشد. واکنش تکیه‌گاه A هم که در مقابل نیروی فنر متصل به آن مقاومت می‌کند، دارای یک مجهول در راستای فنر است. این دو واکنش تکیه‌گاهی در نقطهٔ D متقارب می‌باشند و در نتیجه سیستم سازه‌ای گزینه اول ناپایدار است.

در گزینه دوم هم، نیروی ایجاد شده در فنرهای $K_2$ و $K_3$، یکدیگر را در نقطه D قطع کرده و واکنش تک مجهولی تکیه‌گاه A هم، از نقطه D می‌گذرد و لذا سیستم گزینه ۲ هم به دلیل تقارب عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ناپدار است.

سیستم‌سازه‌ای در گزینه سوم، پایدار است ولی یک درجه نامعین است. سیستم گزینه چهارم پایدار و ایزواستاتیک می‌باشد.

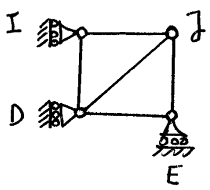
**۲ ـ خرپای زیر:**



۱) پایدار و 2 درجه نامعین است.
۲) پایدار و 1 درجه نامعین است.
۳) پایدار و معین است.
۴) ناپایدار است.

**حل :** گزینه ۳ درست است.

چون خرپای ACHF پایدار است می‌توانیم مطابق شکل زیر اعضای خرپای HI و CD را با دو تکیه‌گاه غلطکی شبیه‌سازی کنیم. خرپای DEJI توسط سه قید تکیه‌گاهی که نه موازی هستند و نه همرس، مهار شده است و بنابراین کل خرپا پایدار است.



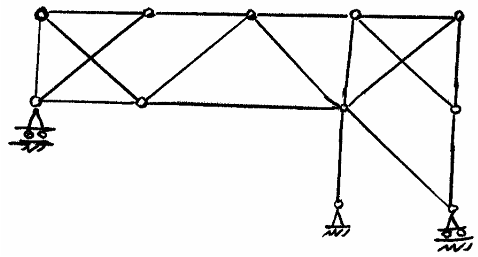
$M = 16\ ,\ R = 2+1+1 = 4\ ,\ N = 10$

$D.I. = M + R - 2N = 16 + 4 - 2\times 10 = 0$ (خرپا معین است.)

**یادداشت:**

........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................

**۳ـ خرپای شکل مقابل:**

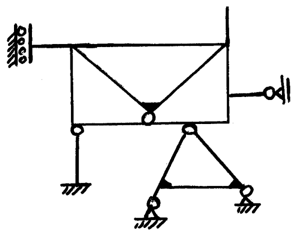


۱) پایدار و معین است.
۲) پایدار و یک درجه نامعین است.
۳) پایدار و دو درجه نامعین است.
۴) ناپایدار است.

**حل :** گزینه ۴ درست است.

خرپای نشان داده شده با سه قید موازی به زمین متصل شده (قید افقی ندارد) بنابراین ناپایدار است.

**۴ـ مطلوبست درجه نامعینی قاب شکل زیر:**

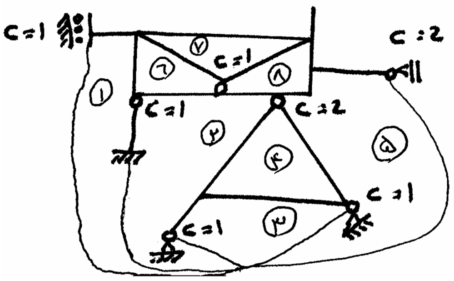


۱) 13
۲) 14
۳) 15
۴) 16

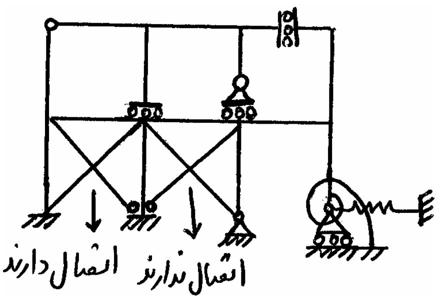
**حل :** گزینه ۳ درست است.

با استفاده از روش حلقه درجه نامعینی قاب را تعیین می‌کنیم.

$$\text{D.I.} = 3\text{N} - \text{C} = 3\times 8 - (1+1+1+2+1+1+2) = 15$$




**۵ـ درجه نامعینی قاب زیر کدام است؟**




۱) 21
۲) 23
۳) 24
۴) 25

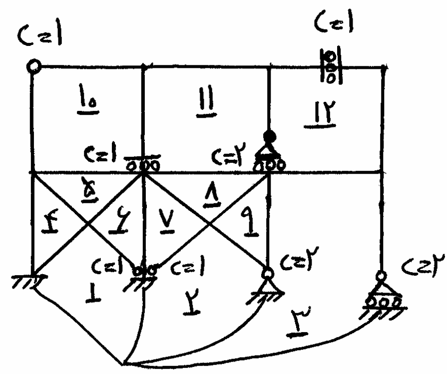
**یادداشت:**

........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................
........................................................................................................................................

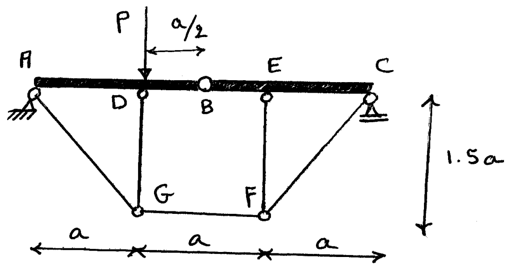
**حل :** گزینه ۳ درست است.

از روش حلقه برای تعیین درجه نامعینی قاب استفاده می‌کنیم. فنرهای پیچشی و انتقالی را حذف می‌کنیم و به ازای آنها 2 درجه به درجه نامعینی قاب اضافه می‌کنیم. در دهانه دوم که بادبندها اتصال ندارند فرض می‌کنیم که اتصال دارند (بین آنها نیروهای افقی و قائم و یک لنگر خمشی رد و بدل می‌شود) و در انتها 1 واحد از تعداد حلقه‌ها کسر می‌کنیم:

$$D.I.= 3N - C = 3(12-1)-(1+1+2+2+1+2+1+1)$$
$$= 3\times 11 - 11 = 33 - 11 = 22$$
$$D.I. = 22 + 2 = 24$$




**۶ـ دو تیر AB و BC که در نقطه B به یکدیگر مفصل شده‌اند، توسط میله های دو سر ساده نیز به یکدیگر مرتبط می‌باشند. تحت اثر بار منفرد P مقدار لنگر خمشی در نقطهٔ D چقدر است؟**




۱) صفر

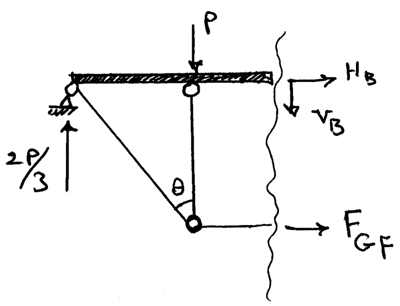
۲) $\frac{7Pa}{6}$

۳) $\frac{2Pa}{3}$

۴) $\frac{Pa}{6}$

**حل :** گزینه ۴ درست است.

مقطعی در نظر گرفته می‌شود تا از مفاصل خمشی B و G بگذرد. نیروهای مؤثر به این دو نقطه را نشان داده و معادلهٔ تعادل لنگر را حول نقطهٔ B می‌نویسیم. در این حالت نیروی محوری عضو GF بدست می‌آید. البته قبل از آن، با نوشتن معادله تعادل برای کل سیستم، واکنش تکیه‌گاه A را محاسبه کرده‌ایم. سپس با تشکیل مثلث نیرویی در گره G نیروی داخلی عضو AG را محاسبه می‌کنیم و سپس این نیرو را در جهت قائم تصویر کرده تا لنگر نقطهٔ D محاسبه گردد.




$$\circlearrowleft^{+}\sum M_C = 0 \quad\Rightarrow\quad R_A \times 3a - P\times 2a = 0$$
$$R_A = \frac{2}{3}P$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................................

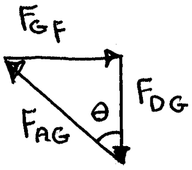
..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

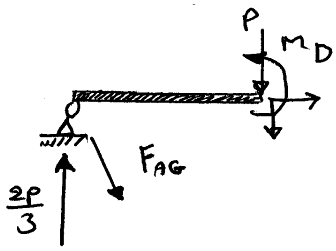
$$\circlearrowleft^{+}\sum M_B = 0 \quad\Rightarrow\quad F_{GF}\times 1.5a + \frac{Pa}{2} - \frac{2P}{3}\times 1.5a = 0 \quad\Rightarrow\quad F_{GF} = \frac{P}{3}\ \text{(کششی)}$$

با استفاده از مثلث نیروهای در گره G داریم:




$$\frac{\frac{P}{3}}{\sin\theta} = \frac{F_{AG}}{1} \quad\Rightarrow\quad F_{AG} = \frac{P}{3\sin\theta}\ \text{(فشاری)}$$

حال نیروی معادل خارجی که به صورت فشاری برای عضو AG اثر می‌کند را در نقطهٔ A نشان می‌دهیم و لنگر در نقطه D را حساب می‌کنیم.



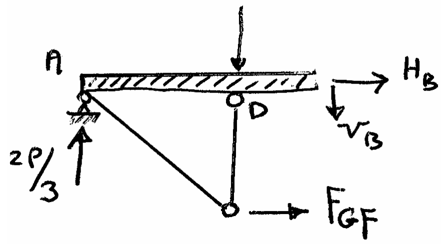

$$\circlearrowleft^{+}\sum M_D = 0 \quad\Rightarrow\quad M_D - \frac{2P}{3}a + F_{AG}\,a\cos\theta = 0$$

$$M_D = \frac{2P}{3}a - \frac{Pa}{3\sin\theta}\times\cos\theta$$

$$M_D = \frac{2Pa}{3} - \frac{Pa}{3}\cot\theta\ ,\ \cot\theta = 1.5$$

$$M_D = \frac{2Pa}{3} - \frac{Pa}{2} = \frac{Pa}{6}$$

**راه‌حل دوم:** نیروی $F_{GF} = \frac{P}{3}$ خواهد بود. با توجه به شکل زیر با نوشتن تعادل لنگر حول تکیه‌گاه A مقدار $V_B$ محاسبه شده و می‌توان لنگر در نقطهٔ D را به‌صورت زیر محاسبه کرد.

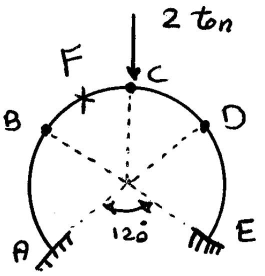



$$\circlearrowleft^{+}\sum M_A = 0 \quad\Rightarrow\quad -Pa + F_{GF}(1.5a) - V_B\times(1.5a) = 0$$

$$V_B = -\frac{P}{3}$$

$$\circlearrowleft^{+}\sum M_D = 0 \quad\Rightarrow\quad -M + \frac{P}{3}\times(0.5a) = 0 \quad\Rightarrow\quad M = \frac{Pa}{6}$$

**۷ـ در قاب متقارن شکل زیر، نقاط D,C,B مفصل خمشی هستند. مقدار لنگر خمشی در نقطهٔ F در وسط قطعهٔ BC برحسب تن ـ متر چقدر است؟ (شعاع قاب دایره‌ای برابر 1m است)**




۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

۲) $2 - \sqrt{3}$

۳) $1$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**یادداشت:**

.......................................................................................................

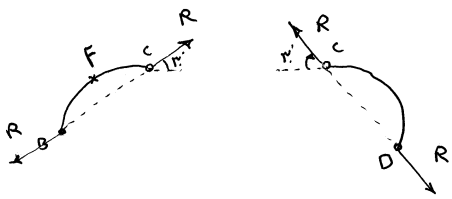
.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

**حل** : گزینه ۲ درست است.

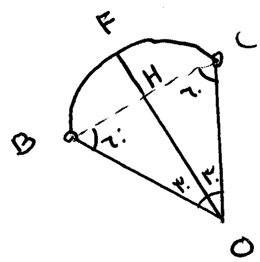
اعضاء BC و CD دو نیرویی هستند و به این صورت مدل می‌شوند. به علت تقارن، دو نیروی موجود در اعضاء BC و CD را R می‌نامیم.
(با نوشتن معادله تعادل افقی هم تساوی نیروهای موجود BC و CD نتیجه می‌شد.)




با نوشتن معادله تعادل قائم در گره C داریم:

$$\frac{R}{2}+\frac{R}{2}=2\text{ton} \quad \Rightarrow \quad R=2\text{ton}$$

اگر مرکز دایره را o بنامیم با توجه به شکل مقدار FH محاسبه می‌شود.



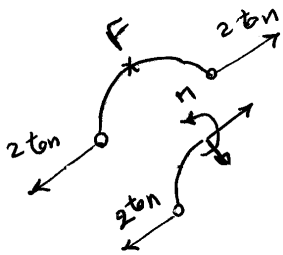

$$\overline{OF}=1\text{m}$$

$$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ m}$$

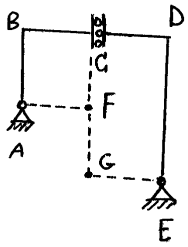
$$\overline{FH}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{m}$$

لنگر خمشی به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$M=2\times\overline{FH}=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(2-\sqrt{3}\right)\text{ton.m}$$




**۸ـ در قاب زیر با اعمال نیروی متمرکز قائم P در چپ و راست مفصل برشی C عکس‌العمل تکیه‌گاه A به ترتیب از کدام نقاط می‌گذرد؟** $\left(AB=BC=CD=\frac{DE}{2}=\ell\right)$



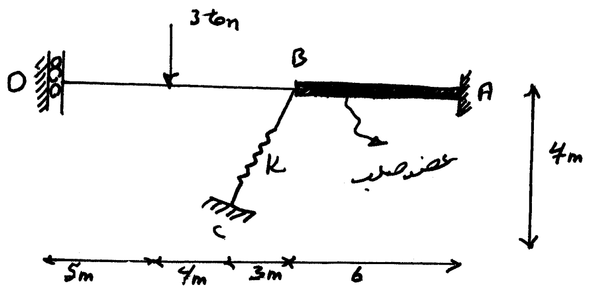

۱) G , C
۲) F , D
۳) G , F
۴) F , G

**یادداشت:**
........................................................................................................
........................................................................................................
........................................................................................................
........................................................................................................

**حل :** گزینه ۴ درست است.

اگر نیروی متمرکز قائم P در چپ مفصل برشی C اثر کند عکس‌العمل تکیه‌گاه E بایستی افقی باشد چون اگر عکس‌العمل این تکیه‌گاه مؤلفه قائم داشته باشد تعادل نیروها در راستای قائم برای قسمت CDE برقرار نمی‌شود. در این حالت هم نیروی قائم P و هم عکس‌العمل تکیه‌گاه E از گره G می‌گذرند و اگر حول گره G تعادل لنگر را برای کل قاب بنویسیم، نتیجه می‌شود که عکس‌العمل تکیه‌گاه A هم بایستی از گره G بگذرد. اگر نیروی P در راست مفصل برشی اثر کند با توجه به تعادل افقی قسمت ABC بایستی عکس‌العمل تکیه‌گاه A افقی باشد و از گره F بگذرد.

**۹ ـ در قاب شکل زیر، برش ایجاد شده در گرهٔ B چقدر می‌باشد؟**




۱) برش ایجاد شده به سختی فنر ربط دارد.

۲) $-3$

۳) $-\frac{5}{6}$

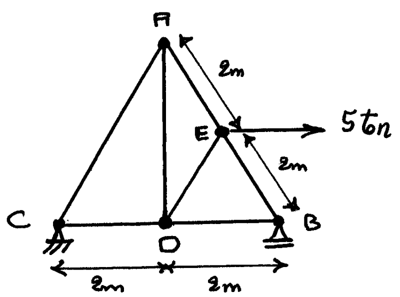
۴) $-\frac{13}{6}$

**حل :** گزینه ۲ درست است.

از خاصیت‌های عضو صلب این است که، تغییر مکان نسبی نقاط (بدون دوران عضو صلب) صفر می‌باشد. نقطه A که متصل به تکیه‌گاه گیردار است، تغییر مکان افقی و قائم ندارد و لذا در نقطهٔ B هم، تغییر مکان افقی و قائم وجود ندارد. پس فنر که به نقطهٔ B متصل شده است، تغییر مکانی نخواهد داشت و طبیعتاً نیرویی هم در آن ایجاد نمی‌شود. بار 3ton توسط تکیه‌گاه D، تحمل نشده و تمام بار به تکیه‌گاه گیردار می‌رسد. مطابق شکل داریم:


$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow V + 3 = 0 \Rightarrow V = -3\text{ton}$$

**۱۰ ـ در خرپای شکل زیر، نیروی محوری میله AD چقدر می‌باشد؟ (مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.)**




۱) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ton فشاری

۲) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ton کششی

۳) 2.5 ton فشاری

۴) 2.5 ton کششی

**یادداشت:**

.....................................................................................................................................

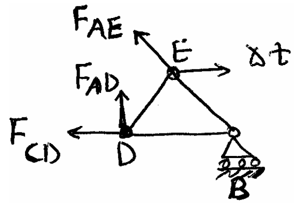
.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

**حل :** گزینه ۱ درست است.

مقطعی در نظر گرفته می‌شود تا میله‌های AE و AD و CD را قطع کند. با گشتاورگیری حول نقطه B داریم:




$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_B = 0 \Rightarrow \quad -F_{AD}\times 2 - 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2 = 0$$

$$F_{AD} = \frac{-5\sqrt{3}}{2}\,\text{ton}$$

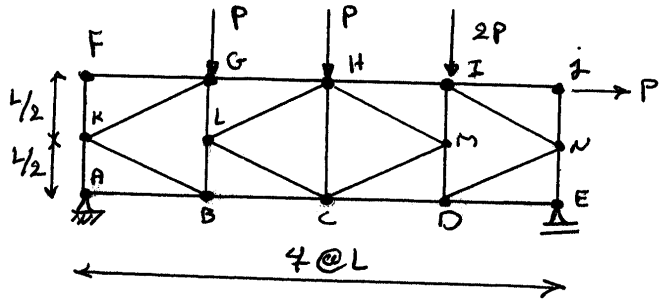
**۱۱ ـ در خرپای شکل زیر، نیروی میله CD برابر است با:**

۱) صفر

۲) 1.5 P

۳) 2 P

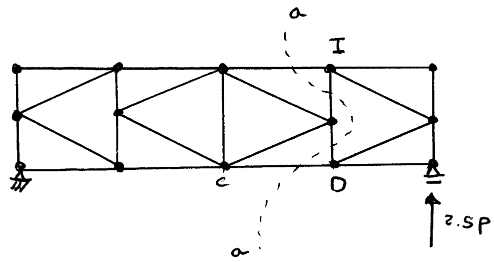
۴) 2.5 P



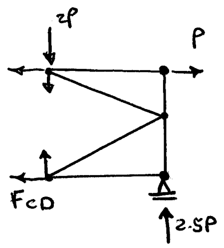

**حل :** گزینه ۴ درست است.

با لنگری حول نقطه A ، داریم:

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_A = 0 \quad\Rightarrow\quad R_{yE}\times 4L - PL - PL - P\times 2L - 2P\times 3L = 0 \quad\Rightarrow\quad R_{yE} = 2.5P$$




مقطع $(a-a)$ را در شکل فوق برای یافتن نیروی میله CD انتخاب می‌کنیم، و با گشتاورگیری حول I ، نیروی CD را محاسبه می‌نمائیم.




$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_I = 0 \quad\Rightarrow\quad -F_{CD}\times L + 2.5PL = 0 \quad\Rightarrow\quad F_{CD} = 2.5P$$

**یادداشت:**

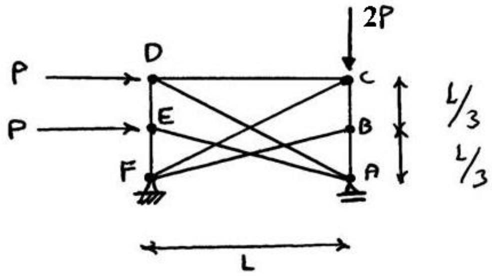
........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**۱۲ ـ خرپای مقابل تحت تأثیر نیروهای متمرکز در نقاط E و D و C قرار گرفته است. نیروی محوری میله AB کدام است؟**




۱) 2P فشاری

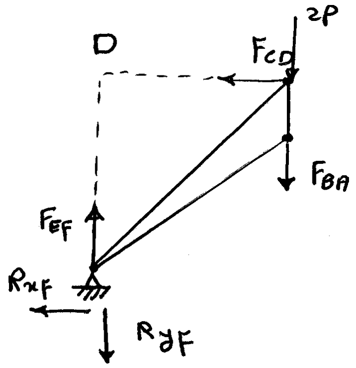
۲) $\frac{P}{3}$ فشاری

۳) $\frac{10P}{3}$ فشاری

۴) $\frac{2P}{3}$ فشاری

**حل :** گزینه ۳ درست است.

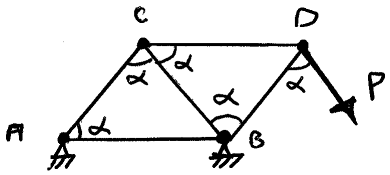
اگر خرپای FBC را جدا کنیم، خواهیم داشت:




(کل خرپا) $\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_{xF} + 2P = 0 \Rightarrow R_{xF} = 2P$

$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_D = 0 \Rightarrow -2P \times \frac{2L}{3} - F_{BA} \times L - 2PL = 0 \Rightarrow F_{BA} = \frac{-10P}{3}$

**۱۳ ـ در خرپای شکل زیر، اعضاء دارای طول L می‌باشند. عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A برابر است با:** $(\alpha = 60^\circ)$




۱) صفر

۲) $\frac{P}{2}$

۳) $\frac{P\sqrt{3}}{2}$

۴) به دلیل نامعین بودن خرپا، نیروی اعضاء به صلبیت محوری آنها مرتبط می‌باشد.

**حل :** گزینه ۲ درست است.

**یادداشت:**

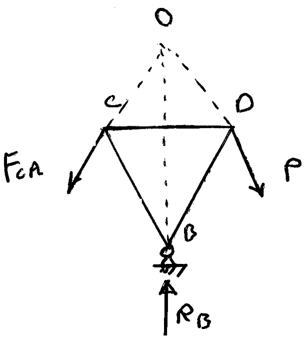
..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

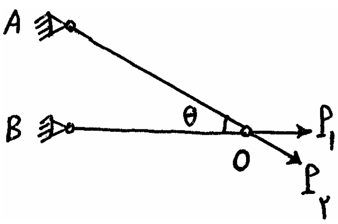
اگر قطعه BCD را از خرپا جدا کنیم، خواهیم داشت:




قطعه BCD، 3 نیرویی است و برای تعادل، باید 3 نیرو متقارب باشند به دلیل تقارن در شکل، 3 نیرو هم را در O قطع می‌کنند و عکس‌العمل تکیه‌گاه B در راستای قائم خواهد بود. پس اگر تکیه‌گاه B، عکس‌العمل افقی نداشته باشد، مؤلفه افقی بار وارده را تکیه‌گاه A تحمل می‌کند و لذا داریم:

$$\overset{+}{\longrightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow P\sin 30^\circ - R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = \frac{P}{2}$$

**۱۴ ـ در خرپای زیر نسبت $\frac{P_2}{P_1}$ چقدر باشد تا مفصل O تغییر مکان قائم نداشته باشد؟** $(AE = \text{const})$




۱) $P_1 = P_2 \cos\theta$

۲) $P_2 = P_1 \cos\theta$

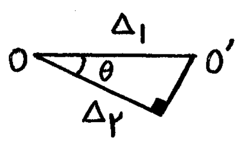
۳) $P_2 = P_1 \cos^2\theta$

۴) $P_1 = P_2 \cos^2\theta$

**حل :** گزینه ۳ درست است.

راه حل اول: نیروی اعضای OA و OB به ترتیب برابر $P_2$ و $P_1$ است و داریم:

$$OB = \ell \quad \rightarrow \quad OA = \frac{\ell}{\cos\theta}, (\Delta\ell)_{OB} = \Delta_1 = \frac{P_1\ell}{AE}, (\Delta\ell)_{OA} = \Delta_2 = \frac{P_2 \times \frac{\ell}{\cos\theta}}{AE} = \frac{P_2\ell}{AE\cos\theta}$$




$$\Delta_2 = \Delta_1\cos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{P_2\ell}{AE\cos\theta} = \frac{P_1\ell}{AE} \times \cos\theta \quad \rightarrow \quad P_2 = P_1\cos^2\theta$$

**یادداشت:**

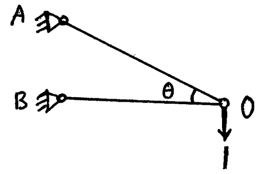
........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

راه حل دوم: از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. با اعمال نیروی واحد قائم در مفصل O داریم:



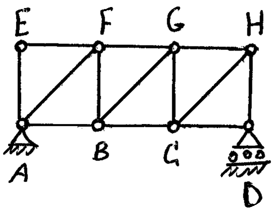

$$O:\sum F_y=0 \;\rightarrow\; n_{OA}\sin\theta=1 \;\rightarrow\; n_{OA}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$O:\sum F_x=0 \;\rightarrow\; n_{OB}+n_{OA}\cos\theta=0 \;\rightarrow\; n_{OB}=-n_{OA}\cos\theta=-\operatorname{cotg}\theta$$

$$1\times\Delta V_0=\sum\frac{N_i n_i \ell_i}{A_i E_i}=\frac{P_1\times(-\operatorname{cotg}\theta)\times\ell}{AE}+\frac{P_2\times\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{\ell}{\cos\theta}}{AE}=$$

$$\frac{L\operatorname{cotg}\theta}{AE}\left(-P_1+\frac{P_2}{\cos^2\theta}\right)=0 \;\rightarrow\; -P_1+\frac{P_2}{\cos^2\theta}=0 \;\rightarrow\; P_2=P_1\cos^2\theta$$

**۱۵ ـ در خرپای زیر که طول اعضای افقی و قائم برابر $\ell$ و ضریب انبساط حرارتی اعضاء $\alpha$ است اگر دمای عضو BG به میزان $\Delta T$ کاهش یابد، دوران این عضو چقدر خواهد بود؟**




۱) $\frac{1}{3}\alpha\Delta T$ ساعتگرد

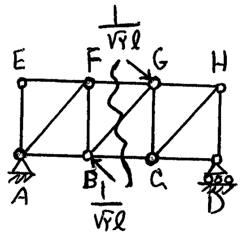
۲) $\frac{1}{3}\alpha\Delta T$ پادساعتگرد

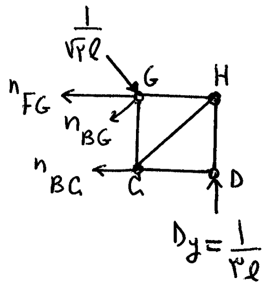
۳) $\frac{1}{6}\alpha\Delta T$ ساعتگرد

۴) $\frac{1}{6}\alpha\Delta T$ پادساعتگرد

**حل**: گزینه ۱ درست است.

از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. مطابق شکل نیروهای موازی و مختلف‌الجهت $\frac{1}{\sqrt{2}\,\ell}$ را در گره‌های B و G اعمال می‌کنیم و برای محاسبه نیروی عضو BG از روش مقطع و نوشتن تعادل نیروها در راستای قائم استفاده می‌کنیم:




$$\sum M_A=0 \;\rightarrow\; D_y\times3\ell=\frac{1}{\sqrt{2}\,\ell}\times\sqrt{2}\,\ell=1 \;\rightarrow\; D_y=\frac{1}{3\ell}\uparrow$$

$$CDHG:\sum F_y=0 \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}n_{BG}+\frac{1}{\sqrt{2}\,\ell}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3\ell}$$

$$\rightarrow\; n_{BG}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\ell}-\frac{1}{2\ell}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{6\ell}$$

$$1\times\phi_{BG}=\sum n_i\alpha_i\ell_i\Delta T_i=n_{BG}\alpha\ell'(-\Delta T)=-\frac{\sqrt{2}}{6\ell}\times\alpha\times\sqrt{2}\,\ell\times(-\Delta T)=\frac{1}{3}\alpha\Delta T \;\rightarrow\; \phi_{BG}=\frac{1}{3}\alpha\Delta T\ (\text{ساعتگرد})$$

**یادداشت:**

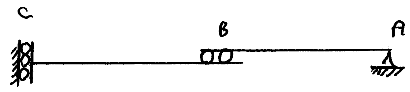
.................................................................................................

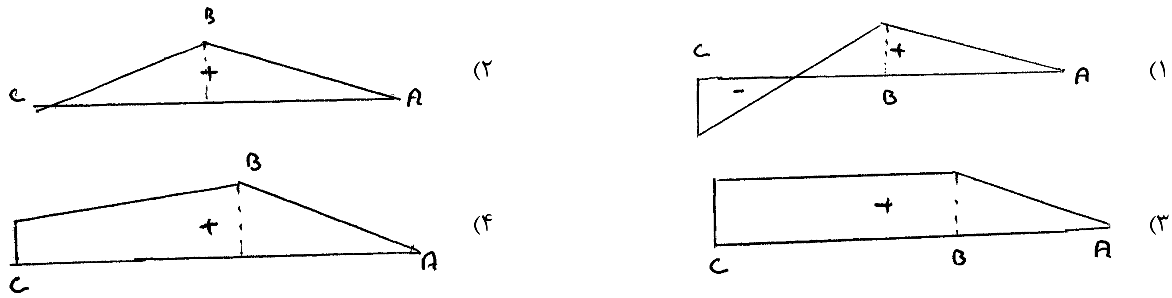
.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

**۱۶ ـ خط تأثیر لنگر خمشی نقطه B ، در کدام گزینه صحیح ترسیم شده است؟**

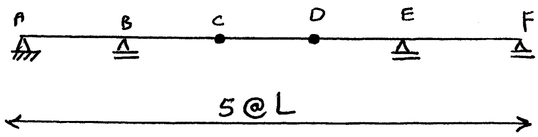



**حل :** گزینه ۳ درست است.

زمانی‌که بار واحد در قسمت CB قرار بگیرد، عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A برابر واحد خواهد بود و لنگر آن حول نقطه B مقدار ثابت $1\times\overline{AB}$ می‌باشد. پس عرض خط تأثیر در ناحیه BC باید مقدار ثابتی باشد، که فقط گزینه سوم دارای چنین ویژگی می‌باشد. قابل ذکر است که مفصل محوری واقع در B هیچ تأثیری روی رفتار سازه تحت اثر بار واحد قائم ندارد و خطوط تأثیر سازه می‌تواند بدون توجه به این مفصل محوری رسم شود.

**۱۷ ـ تیر سرتاسری زیر مفروض است. کدام گزینه نادرست است؟**




۱) اگر بار گسترده‌ای با شدت یکنواخت $2\dfrac{\text{ton}}{\text{m}}$ و طول $\dfrac{L}{2}$ در ناحیه DF ، قرار بگیرد، عکس‌العمل تکیه‌گاه A صفر می‌باشد.

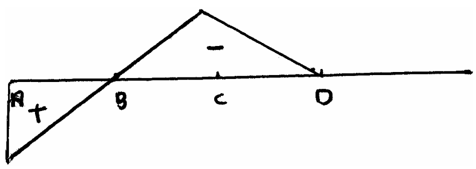
۲) خط تأثیر برش در وسط BC ، یک مستطیل و یک مثلث قائم‌الزاویه است.

۳) عکس‌العمل تکیه‌گاه F وقتی به سمت پایین می‌باشد که بار متمرکز 1 ton در ناحیه EC قرار بگیرد.

۴) اگر بار متمرکز 1 ton در ناحیه CF قرار بگیرد، عکس‌العمل تکیه‌گاه B صفر خواهد بود.

**حل :** گزینه ۴ درست است.

در گزینه اول، خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه A به‌صورت زیر است:




**یادداشت:**

..........................................................................................................................................

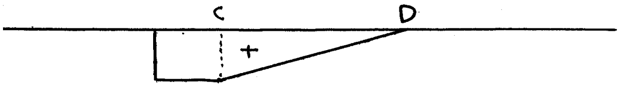
..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

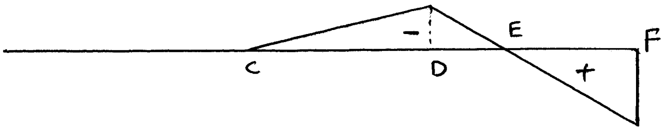
..........................................................................................................................................

پس اگر بار در ناحیه DF ، قرار بگیرد، عکس‌العمل تکیه‌گاه A صفر می‌شود.

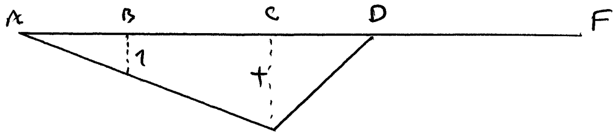
در گزینه دوم، خط تأثیر برش در وسط BC به‌این صورت می‌باشد که از یک مستطیل و یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شده است.




در گزینه سوم، خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه F به‌صورت زیر می‌باشد:

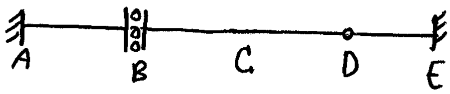



در گزینه سوم اگر بار در ناحیه EF باشد، عکس‌العمل F به‌طرف بالا است و وقتی بار در ناحیه EC می‌باشد، عکس‌العمل F به سمت پایین خواهد بود.

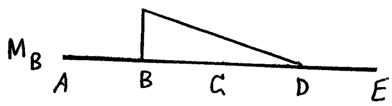



در گزینه چهارم، بار باید در ناحیه DF باشد تا عکس‌العمل B صفر شود. پس گزینه چهارم غلط است.

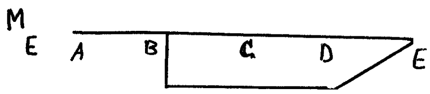
**۱۸ ـ کدام‌یک از خطوط تأثیر تیر زیر صحیح نیست؟**



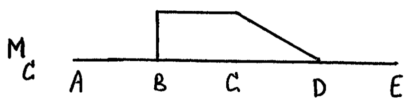

۱)



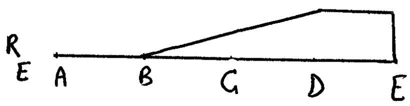

۲)




۳)

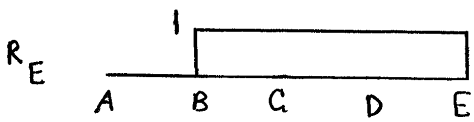



۴)




**حل :** گزینه ۴ درست است.

خط تأثیر $R_E$ صحیح نیست. با جابجایی تکیه‌گاه E به میزان واحد به طرف بالا و با توجه به پیوستگی شیب در محل مفصل برشی B، نتیجه می‌شود که تیردر قسمت BCDE یک واحد بالا می‌آید:




**یادداشت:**

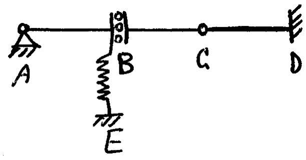
..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

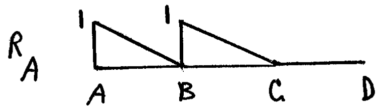
..........................................................................................

**۱۹ ـ کدام‌یک از خطوط تأثیر زیر صحیح نیست؟**



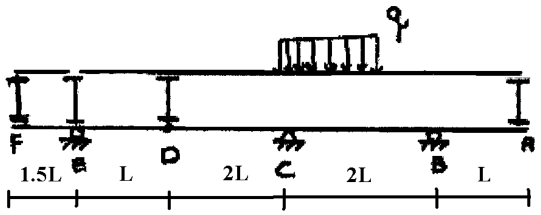
**حل :** گزینه ۱ درست است.

خط تأثیر $R_A$ صحیح نیست. با توجه به وجود فنر انتقالی با جابجایی واحد تکیه‌گاه A ، سمت چپ مفصل برشی B جابجا نمی‌شود و فقط می‌چرخد که با توجه به پیوستگی شیب در مفصل برشی قسمت BC نیز بالا می‌آید و خط تأثیر $R_A$ به‌صورت زیر خواهد بود:



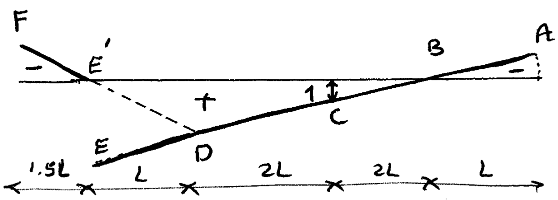
**۲۰ ـ بار گسترده‌ای به طول 3L، مطابق شکل سرتاسر سازهٔ تیر و تیرچه را طی می‌کند. اگر حداکثر عکس‌العمل تکیه‌گاه C برابر 6ton باشد، مقدار عددی بار گسترده چقدر خواهد بود؟**

۱) $\frac{2}{L}$
۲) $\frac{3}{2L}$
۳) $\frac{8}{7L}$
۴) $\frac{9}{7L}$



**حل :** گزینه ۳ درست است.

خط تأثیر تکیه‌گاه C در تیر اصلی به‌صورت زیر خواهد بود، که با نقطه‌یابی خط تأثیر عکس‌العمل C در دستگاه تیر و تیرچه به‌صورت زیر است:



**یادداشت:**

..........

..........

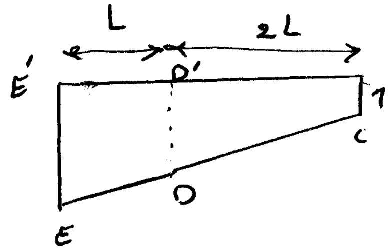
..........

..........

با توجه به خط تأثیر رسم شده بار باید در ناحیه EC قرار بگیرد تا بیشترین مساحت را از خط تأثیر بپوشاند. مساحتی که باید محاسبه شود در شکل زیر رسم شده است.

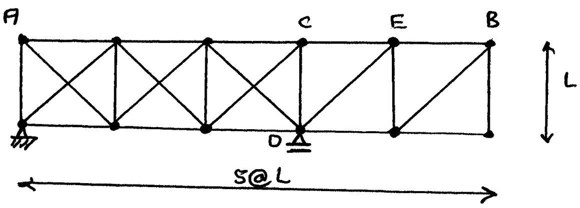
$$\frac{EE'}{5L}=\frac{1}{2L}\Rightarrow EE'=\frac{5}{2}$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\left(1+\frac{5}{2}\right)\times\frac{3L}{2}=\frac{21L}{4}$$

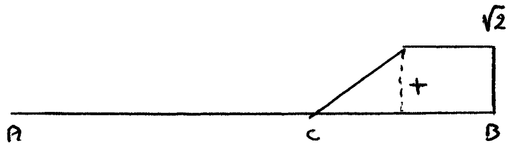



$$R_{max(c)}=\frac{21L}{4}\times q=6\Rightarrow q=\frac{24}{21L}$$

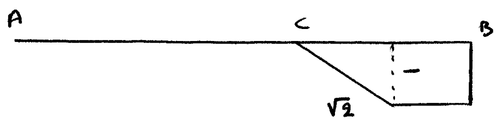
**۲۱ ـ اگر بار واحد قائم ، از A تا B حرکت کند، خط تأثیر نیروی محوری عضو DE کدام است؟**



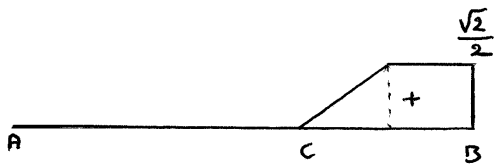

۱)



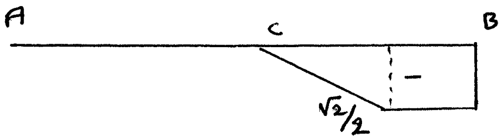

۲)




۳)

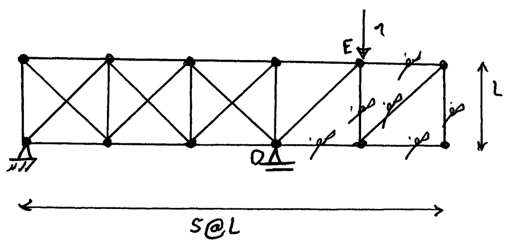



۴)




**حل** : گزینه ۲ درست است.

اگر بار واحد قائم در نقطه E قرار بگیرد، خواهیم داشت:



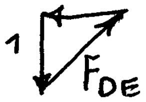

**یادداشت:**

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

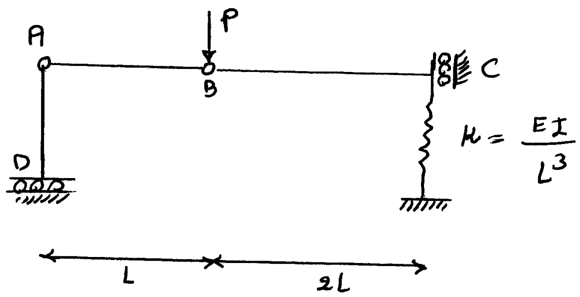
.................................................................................................




$$\frac{F_{DE}}{1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow F_{DE} = \sqrt{2}$$ (فشاری)

اگر بار در گره‌های A و C و یا بین آن‌ها قرار گیرد، نیروی عضو DE صفر است. راه‌حل دیگر مسأله این است که اگر عضو DE از خرپا برداشته شود و آنگاه دو گره D و E به میزان واحد به‌هم نزدیک شوند، در اثر این جابجایی شکلی که برای خرپا به‌دست می‌آید که در گزینه ۲ رسم شده است.

**۲۲ ـ در قاب شکل زیر، تغییر مکان قائم نقطه B چقدر است؟** $(EI = constant)$




۱) $\frac{11PL^3}{3EI}$

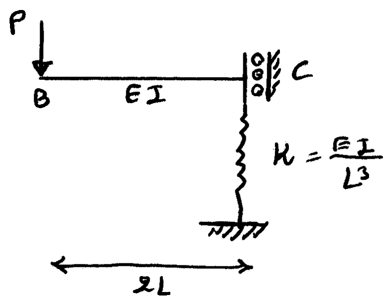
۲) $\frac{7PL^3}{3EI}$

۳) $\frac{4PL^3}{3EI}$

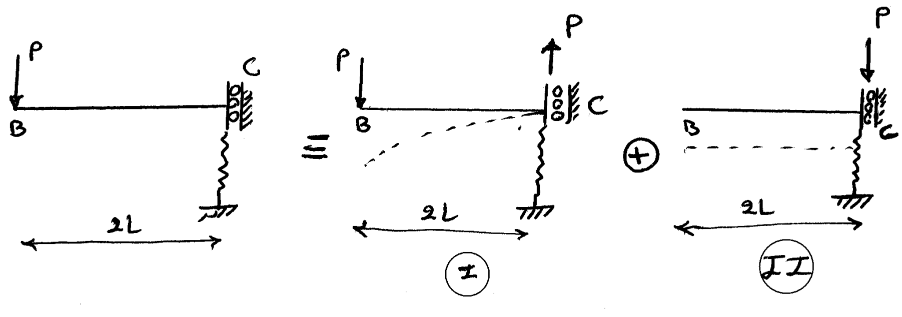
۴) $\frac{7PL^3}{6EI}$

**حل :** گزینه ۱ درست است.

چون عضو AB دو سر مفصل است برش تحمل نمی‌کند، بنابراین تمام بار P به BC تعلق می‌گیرد و سازه به این‌صورت مدل می‌شود:




در مدل جدید سازه، تمام بار P به فنر می‌رسد. با قرار دادن بار P در تکیه‌گاه گیردار غلطکی به‌سمت بالا می‌توان از تغییر طول فنر جلوگیری کرد و لذا مدل جدیدی در نظر می‌گیریم:




**یادداشت:**

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

به‌عبارت دیگر در مدل (I) تکیه‌گاه گیردار غلطکی C حرکتی ندارد و المان BC مانند تیر یکسر گیردار رفتار می‌کند. تغییر مکان قائم B در این حالت برابر است با:

$$\delta_B = \frac{P(2L)^3}{3\times EI} = \frac{8PL^3}{3EI}$$

در مدل (II) تیر BC مانند قطعه صلب رفتار کرده و تمام نقاط آن به یک میزان به سمت پایین می‌آیند. علت این امر این است که تمام نیروی p به فنر خطی می‌رسد و تیر BC تحت خمش و برش نمی‌باشد.

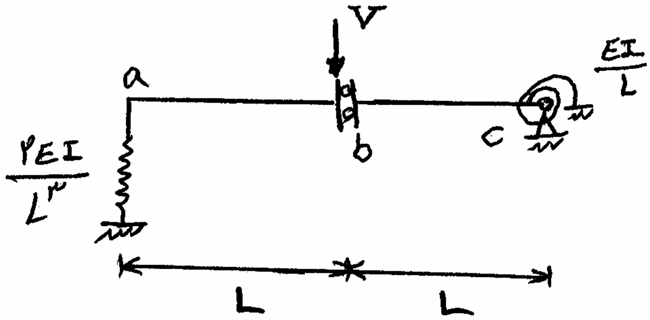
تغییر مکان نقطه B ، همان تغییر مکان نقطه C است و C نیز به میزان فشردگی فنر پایین می‌آید.

$$\delta_{\text{فنر}} = \frac{P}{K_{\text{فنر}}} = \frac{PL^3}{EI}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\Delta_B = \delta_B + \delta_{\text{فنر}} = \frac{8PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{EI} = \frac{11PL^3}{3EI}$$

**۲۳ ـ در اثر اعمال نیروی قائم V ، خیز قائم تیر در سمت راست مفصل برشی b کدام است؟ ( EI در تیر ثابت است.)**




۱) $\frac{VL^3}{2EI}$

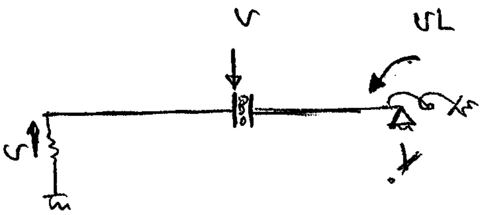
۲) $\frac{3VL^3}{2EI}$

۳) $\frac{VL^3}{EI}$

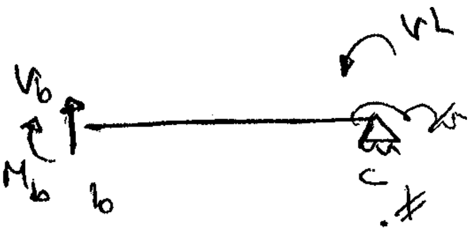
۴) صفر

**حل :** گزینه ۲ درست است.

ابتدا سازه را تحلیل می‌کنیم. نتیجه تحلیل سازه در شکل روبرو آمده است.




اکنون bc را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم.




**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

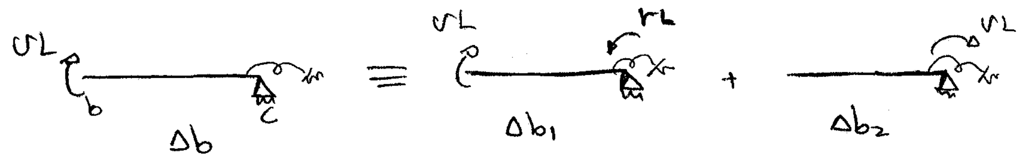
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad V_b = 0$$
$$\sum M_b = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = VL$$

ابتدا با اعمال لنگر VL (در همین جهت بدست آمده) اجازه دوران را از فنر پیچشی می‌گیریم:

$$\Delta b_1 = \frac{M_b L^2}{2EI} = \frac{VL^3}{2EI}$$ مثل تیرطره

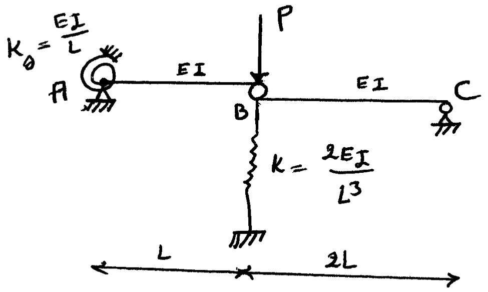
پس همین لنگر (VL) را به فنر پیچشی در جهت ساعتگرد وارد می‌کنیم:

$$\Delta b_2 = \theta_c L = \frac{M_c}{\frac{EI}{L}} L = \frac{VL^3}{EI}$$



$$\Delta b = \Delta b_1 + \Delta b_2 = \frac{3VL^3}{2EI}$$

**۲۴ ـ در قاب شکل زیر، تغییر طول فنر چقدر است؟**

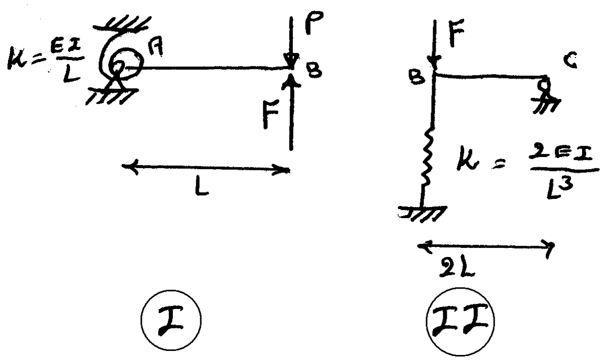



۱) $\frac{8PL^3}{33EI}$ ۲) $\frac{2PL^3}{3EI}$

۳) $\frac{4}{11}\frac{PL^3}{EI}$ ۴) $\frac{PL^3}{11EI}$

**حل :** گزینه ۳ درست است.

انفصال B ، برش را منتقل می‌کند. اگر مقطعی در نظر بگیریم، تغییر مکان B در المان AB و BC با هم برابر خواهد بود. علت این موضوع این است که دو طرف انفصال B به یک اندازه تغییر مکان خواهند داشت.




**یادداشت:**

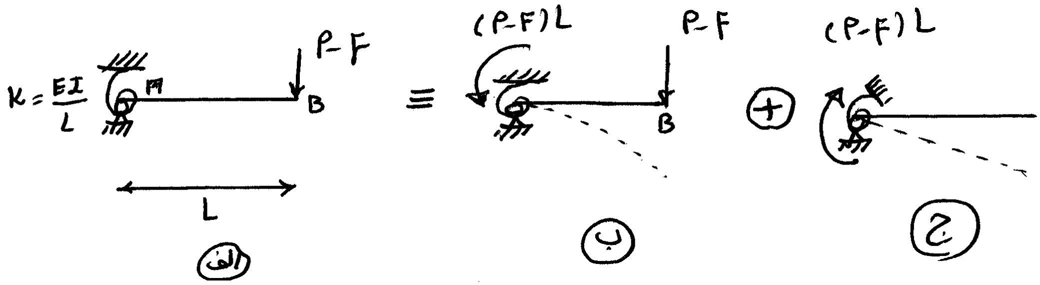
..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

در مدل ① نیروی "$P-F$"، گشتاوری در جهت عقربه‌های ساعت در فنر پیچشی ایجاد می‌کند. با استفاده از ایده‌ی باز و بسته کردن فنرها داریم:




مدل الف که همان مدل (I) است به دو مدل (ب) و (ج) قابل تبدیل است. در مدل (ب) فنر پیچشی دورانی ندارد و المان AB مانند تیر یکسر گیردار رفتار می‌کند.

در این‌حالت تغییر مکان نقطه B برابر است با:

$$\delta_{B1} = \frac{(P-F)L^3}{3EI}$$

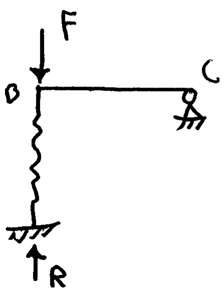
در مدل (ج) المان AB رفتاری صلب گونه دارد و دورانی در فنر پیچشی به میزان $\frac{(P-F)L}{K_{\text{فنر}}}$ در نقطه A ، ایجاد می‌شود.

در حالت (ج) نیز تغییر مکان B به این‌صورت محاسبه می‌شود:

$$\theta_A = \frac{\delta_{B_2}}{L} \quad , \quad \theta_A = \frac{M_{\text{فنر}}}{K_{\text{فنر}}} = \frac{(P-F)L}{\frac{EI}{L}}$$

$$\delta_{B_2} = \frac{(P-F)L^3}{EI} \downarrow$$

در مدل (II)، تمام نیروی F به فنر می‌رسد، زیرا:




$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad F \times 2L - R \times 2L = 0 \quad \Rightarrow \quad R = F$$

$$\delta_{B_3} = \frac{R}{K} = \frac{FL^3}{2EI} \downarrow$$

با برابر قرار دادن تغییر مکان B در دو مدل I و II داریم:

$$\delta_{B_1} + \delta_{B_2} = \delta_{B_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{(P-F)L^3}{3EI} + \frac{(P-F)L^3}{EI} = \frac{FL^3}{2EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{8P}{11}$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

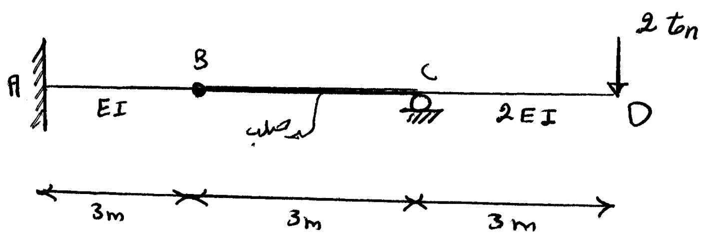
..........................................................................................

..........................................................................................

با استفاده از مدل (II) داریم:

$$\Delta_B = \delta_{B_3} = \frac{8P}{11} \times \frac{L^3}{2EI} = \frac{4PL^3}{11EI}$$

**۲۵ ـ در تیر زیر تغییر مکان گره D کدام است؟** $(EI = \text{const})$

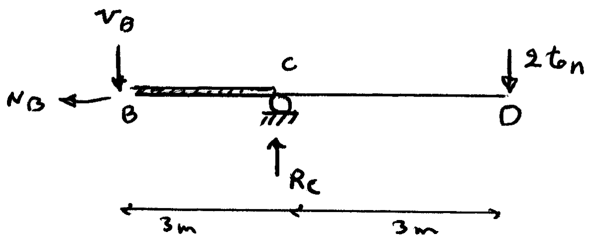



۱) $\frac{27}{EI}$ ۲) $\frac{18}{EI}$

۳) $\frac{9}{EI}$ ۴) $\frac{3}{EI}$

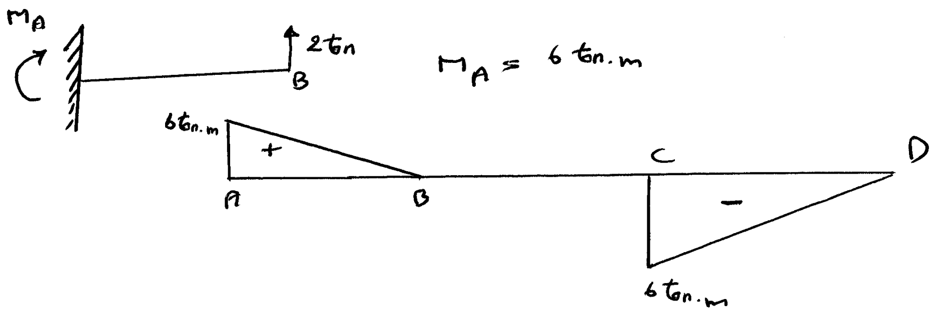
**حل :** گزینه ۱ درست است.

از روش بار واحد مسأله را حل می‌کنیم. ابتدا نمودار لنگر خمشی را در نواحی AB و CD رسم می‌کنیم. در روش بار واحدی نیازی به ترسیم دیاگرام لنگر در ناحیه صلب نمی‌باشد. زیرا $EI \to \infty$ میل کرده و تلفیق دو دیاگرام عبارت مربوطه را صفر می‌کند.

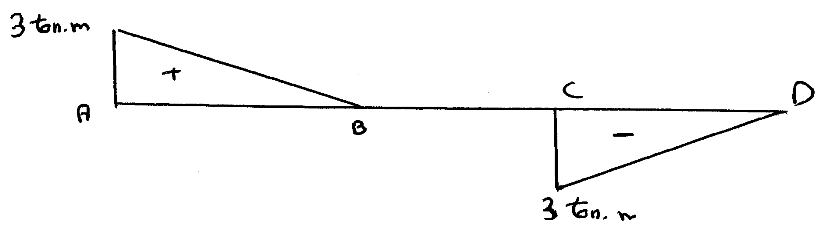



$$M_C = -2 \times 3 = -6 \text{ton.m}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B \times 3 - 2 \times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 2\text{ton}$$




دیاگرام بار واحد نیز به‌صورت زیر رسم می‌شود:




$$\Delta_D^V = \frac{3}{6 \times 2EI}[2 \times 6 \times 3] + \frac{3}{6EI}[2 \times 6 \times 3] = \frac{27}{EI}$$

**یادداشت:**

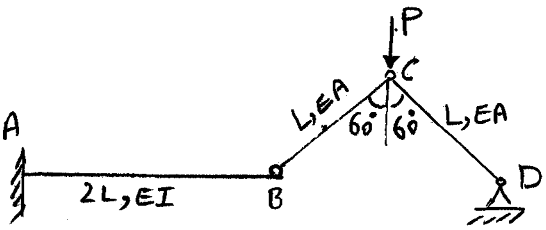
....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

**۲۶ ـ در شکل مقابل خیز قائم نقطهٔ C کدام است؟** $\left(I=\dfrac{AL^2}{6}\right)$

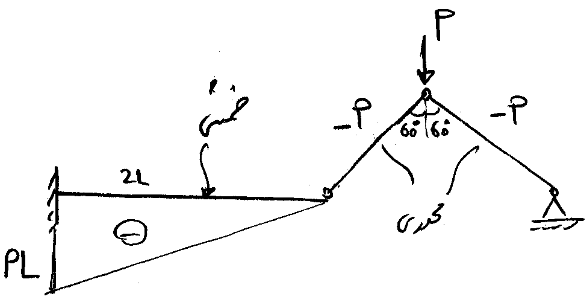



۱) $\dfrac{12PL}{EA}$  ۲) $\dfrac{10PL}{EA}$

۳) $\dfrac{3PL}{EA}$  ۴) $\dfrac{6PL}{EA}$

**حل** : گزینه ۴ درست است.

با استفاده از روش کار حقیقی داریم:

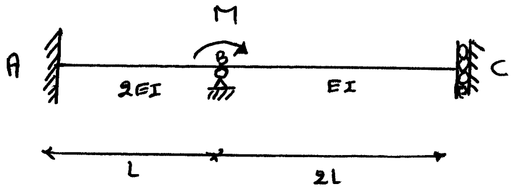



$$P\frac{\Delta_c}{2}=\sum\int\frac{M^2}{2EI}dx+\sum\frac{N^2}{2EA}L$$

$$P\frac{\Delta_c}{2}=\frac{1}{2EI}\times\frac{(PL)^2\times 2L}{3}+2\times\frac{P^2L}{2EA}$$

$$\Rightarrow \Delta_c=\frac{2PL^3}{3EI}+\frac{2PL}{EA}\xrightarrow{I=\frac{AL^2}{6}}\Delta_c=\frac{6PL}{EA}$$

**۲۷ ـ مقدار عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A چقدر است؟**




۱) $\dfrac{12M}{17L}$  ۲) $\dfrac{16M}{17L}$

۳) $\dfrac{24M}{17L}$  ۴) $\dfrac{30M}{17L}$

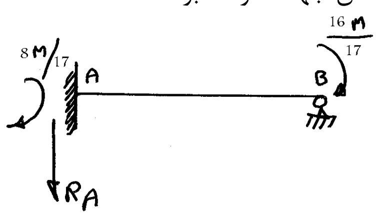
**حل** : گزینه ۳ درست است.

در ابتدا مشخص می‌کنیم که چه میزان از لنگر M به BA و BC می‌رسد.

$$K_{BA}=\frac{4\times 2EI}{L}=\frac{8EI}{L}\quad,\quad K_{BC}=\frac{EI}{2L}$$

$$M_{BA}=\frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}}\times M=\frac{\frac{8EI}{L}}{\frac{8EI}{L}+\frac{EI}{2L}}\times M=\frac{16M}{17}$$

تیر AB را می‌توان به‌صورت زیر مدل کرد. دقت شود که اگر در یک تیر «یکسر گیردار و یکسر ساده» لنگر متمرکزی در تکیه‌گاه ساده وارد شود، لنگر تکیه‌گاه گیردار نصف همان لنگر و در همان جهت خواهد بود.




**یادداشت:**

........................................................................................................................

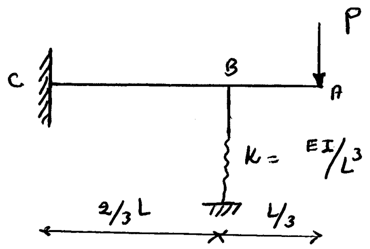
........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; \frac{16M}{17}+\frac{8M}{17}-R_A L = 0 \;\Rightarrow\; R_A = \frac{24}{17}\frac{M}{L}$$

**۲۸ ـ تغییر مکان فنر در اثر بارگذاری نشان داده شده، چقدر است؟** $(EI = const)$

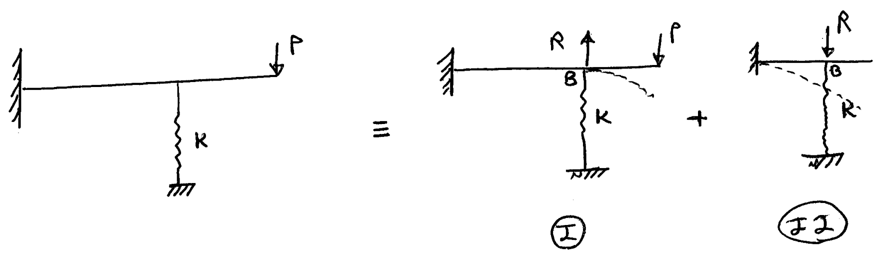



۱) $\frac{7PL^3}{196EI}$ ۲) $\frac{7PL^3}{25EI}$

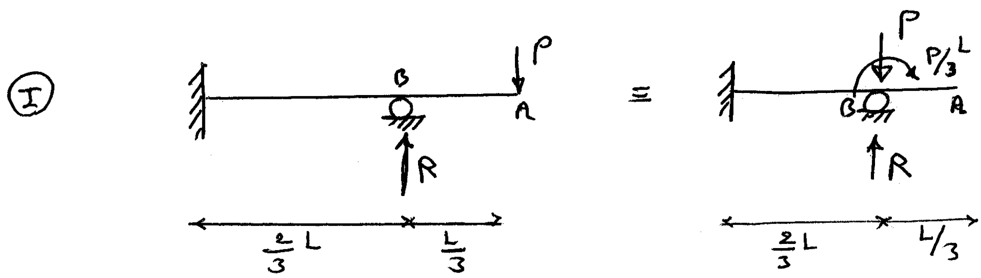
۳) $\frac{14PL^3}{89EI}$ ۴) $\frac{7PL^3}{50EI}$

**حل :** گزینه ۳ درست است.

از ایدهٔ باز و بسته کردن گره‌ها مسأله را حل می‌کنیم. هدف محاسبهٔ R است.




در مدل (I)، گره B تحت بار منفرد R حرکت ندارد و می‌تواند مانند مدل زیر در نظر گرفته شود.




$$R = P + \frac{\frac{P}{3}L + \frac{1}{2}\times\frac{PL}{3}}{\frac{2}{3}L} = \frac{7P}{4}$$

در مدل I گره B حرکت نداشته و در مدل (II) تغییر مکان B به دلیل اتصال موازی تیر طره و فنر خطی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta_B = \frac{R}{K_{\text{تیر}} + K_{\text{فنر}}} = \frac{\frac{7P}{4}}{\frac{3EI}{\left(\frac{2}{3}L\right)^3}+\frac{EI}{L^3}} = \frac{14PL^3}{89EI}$$

**یادداشت:**

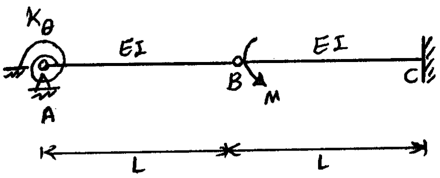
............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

**۲۹ ـ در سازهٔ مقابل لنگر در نقطهٔ A کدام است؟** $\left(K_\theta = \dfrac{3EI}{L}\right)$




۱) $M$

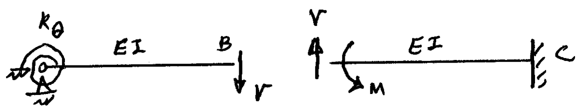
۲) $\dfrac{M}{2}$

۳) $\dfrac{M}{3}$

۴) صفر

**حل :** گزینه ۲ درست است.

این سازه یک تیر با یک درجه نامعینی است و اگر $V_B$ را به عنوان قید اضافی در نظر بگیریم داریم:

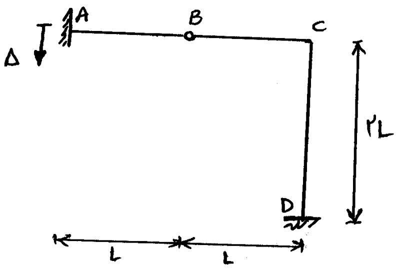



$$\begin{cases} \left(\Delta_B\right)_L = \dfrac{VL^3}{3EI} + \dfrac{(VL)}{K_\theta} \times L = \dfrac{2}{3}\dfrac{VL^3}{EI} \\ \left(\Delta_B\right)_R = \dfrac{ML^2}{2EI} - \dfrac{VL^3}{3EI} \end{cases}$$

در ادامه با توجه به تساوی خیز راست و چپ B داریم:

$$\frac{2}{3}\frac{VL^3}{EI} = \frac{ML^2}{2EI} - \frac{VL^3}{3EI} \rightarrow V = \frac{1}{2}\frac{M}{L} \rightarrow M_A = V \times L = \frac{M}{2}$$

**۳۰ ـ در شکل مقابل تکیه‌گاه A به اندازهٔ $\Delta$ نشست قائم کرده و نقطهٔ C دورانی ندارد. عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A کدام است؟ (EI ثابت فرض می‌شود.)**




۱) $\dfrac{3EI\Delta}{L^3}$

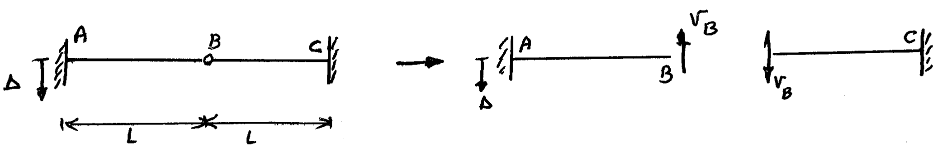
۲) $\dfrac{2EI\Delta}{L^3}$

۳) $\dfrac{EI\Delta}{L^3}$

۴) $\dfrac{3}{2}\dfrac{EI\Delta}{L^3}$

**حل :** گزینه ۴ درست است.

اگر دوران C صفر شود، نقطهٔ C را می‌توان مانند یک تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفت.




**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

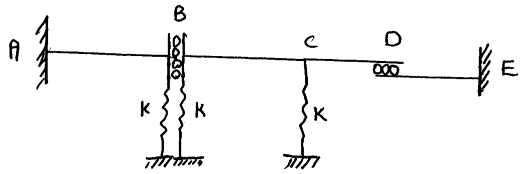
..........................................................................................

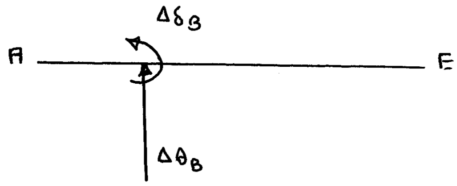
$$(\Delta_B)_L = \Delta - \frac{V_B L^3}{3EI} \quad , \quad (\Delta_B)_R = \frac{V_B L^3}{3EI}$$

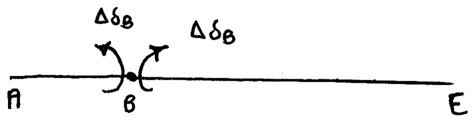
$$(\Delta_B)_L = (\Delta_B)_R \ \rightarrow\ \Delta - \frac{V_B L^3}{3EI} = \frac{V_B L^3}{3EI} \ \rightarrow\ V_B = \frac{3}{2}\frac{EI\Delta}{L^3}$$

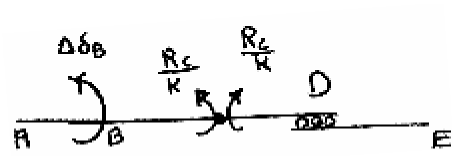
$$\sum F_y = 0 \ \rightarrow\ R_A = V_B = \frac{3}{2}\frac{EI\Delta}{L^3}$$

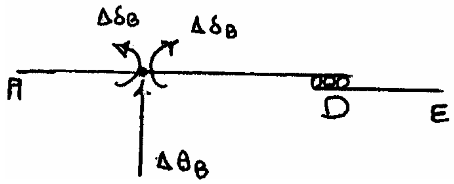
**۳۱ ـ مزدوج تیر ترسیم شده در کدام گزینه، صحیح نمایش داده شده است؟**




۱)


۲)


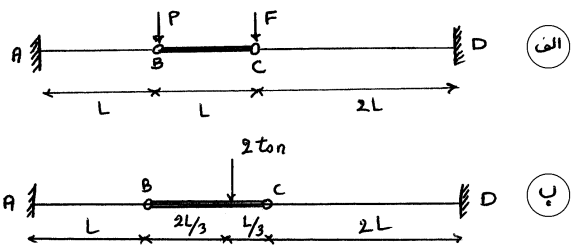
۳)


۴)


**حل :** گزینه ۳ درست است.

در نقطه B اختلاف تغییر مکان داریم که با $\Delta\delta_B$ آن را نشان می‌دهیم. در نقطه c که فنر خطی داریم، دو طرف فنر خطی به میزان معلومی تغییر مکان دارند و اختلاف شیب در دو طرف فنر خطی موجود نمی‌باشد و لذا از یک مفصل خمشی و دو لنگر در دو طرف آن در تیر مزدوج بهره می‌بریم. در نقطه D هیچ اختلاف تغییر مکان و یا اختلاف دورانی در تیر اصلی نداریم و لذا از همین انفصال در تیر مزدوج بهره می‌بریم. در حقیقت در نقطه D در تیر مزدوج نباید هیچ‌گونه اختلاف لنگر و یا اختلاف برشی وجود داشته باشد که انفصال محوری آزاد این خاصیت را دارد.

**۳۲ ـ در تیر شکل (الف)، اگر انرژی حاصل از خمش به‌صورت $u = aP^2 + bF^2$ باشد، در این‌صورت برای این‌که در تیر شکل (ب) تغییر مکان قائم نقاط B و C برابر گردند، نسبت $\frac{a}{b}$ چقدر باید باشد؟ (سختی خمشی عضوهای AB و CD با هم متفاوت می‌باشد)**




۱) $\frac{1}{2}$

۲) 2

۳) 1

۴) $\frac{3}{2}$

**یادداشت:**

........................................

........................................

........................................

........................................

**حل :** گزینه ۲ درست است.

در مدل (الف) بار P به AB و بار F به CD می‌رسد. زیرا عضو BC دو سر مفصل بوده و برشی تحمل نمی‌کند. مطابق قضیه دوم کاستیلیانو در تیر (الف) داریم:

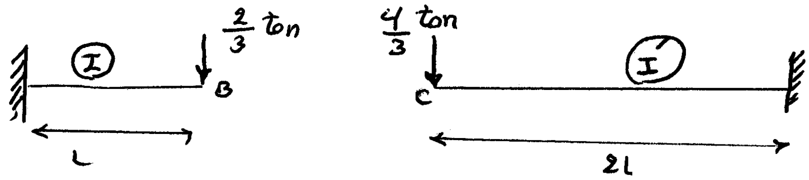
$$\frac{\partial u}{\partial P}=\delta_B \Rightarrow 2aP=\frac{PL^3}{3EI} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial F}=\delta_C \Rightarrow 2bF=\frac{F(2L)^3}{3EI'} \qquad \text{(II)}$$

با تقسیم نظیر به نظیر دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{I'}{8I}$$

در تیر (ب)، المان BC که مانند تیر دو سر ساده رفتار می کند، مطابق شکل برش‌هایی در B و C به‌وجود می‌آورد.



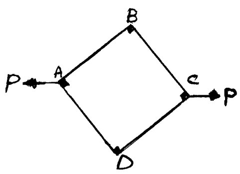

مطابق صورت سوال تغییر مکان B و C باید برابر باشند:

$$\frac{\frac{2}{3}L^3}{3EI}=\frac{\frac{4}{3}(2L)^3}{3EI'} \Rightarrow \frac{I'}{I}=16$$

اگر به‌جای $\frac{I'}{I}$ در رابطه‌ی بالا، عدد 16 را قرار بدهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{8}\times 16=2$$

**۳۳ ـ در قاب مربعی مقابل، لنگر در نقطهٔ B چقدر است؟ (EI و L برای اعضاء ثابت است.)**

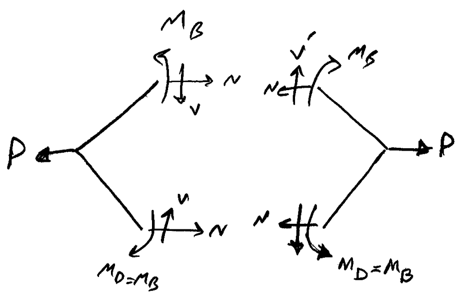



۱) $\frac{\sqrt{2}}{8}PL$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}PL$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}PL$ ۴) $\sqrt{2}PL$

**حل :** گزینه ۱ درست است.

می‌توان سازه را به صورت مقابل بررسی کرد. در این سازه به علت تقارن، $v=v'=0$ بوده و $N=\frac{P}{2}$ بوده و $M_D=M_B$ می‌باشد.



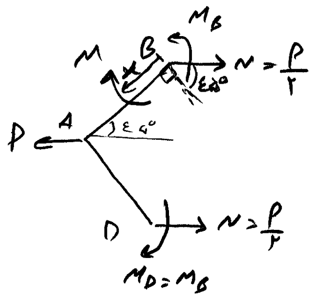

**یادداشت:**

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................



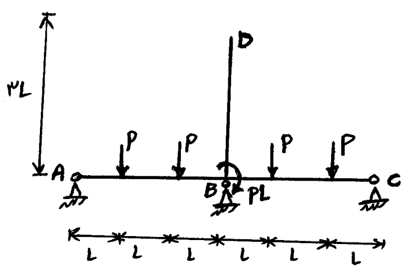

حال به محاسبهٔ لنگر در نقطه‌ای به فاصلهٔ x از نقطهٔ B روی عضو AB می‌پردازیم :

$$M = M_B - \frac{P}{2}\cos 45^\circ \times x = M_B - \frac{\sqrt{2}P}{4}x$$

قضیه دوم کاستیلیانو : $M_B$ لنگر داخلی $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial M_B} = 0 \Rightarrow 4\displaystyle\int_0^L \frac{\frac{du}{\partial M_B}dx}{EI} = 0$

$$\int \frac{\left(M_B - \frac{\sqrt{2}}{4}Px\right)\times 1 \times dx}{EI} = 0 \Rightarrow M_Bx - \frac{\sqrt{2}}{8}Px^2\Big|_0^L = 0 \qquad \Rightarrow M_BL = \frac{\sqrt{2}}{8}PL^2 \Rightarrow M_B = \frac{\sqrt{2}}{8}PL$$

**۳۴ ـ در سازهٔ مقابل تغییر مکان افقی نقطهٔ D کدام است؟ (EI ثابت فرض شود.)**

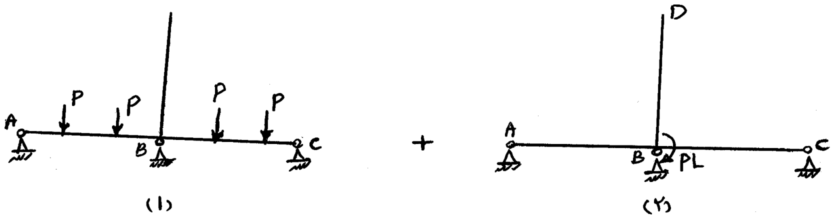



۱) $\frac{3}{2}\frac{PL^3}{EI}$ ۲) $\frac{9}{8}\frac{PL^3}{EI}$

۳) $\frac{2}{3}\frac{PL^3}{EI}$ ۴) $\frac{8}{9}\frac{PL^3}{EI}$

**حل** : گزینه ۱ درست است.

این سازه را می‌توان به مجموع دو سازهٔ متقارن و پادمتقارن تبدیل کرد. در سازهٔ متقارن (سازهٔ ۱)، شیب B صفر بوده و با توجه به عدم بارگذاری بر روی BD، تغییر مکان D صفر است. در سازهٔ (۲) با بارگذاری پادمتقارن داریم:

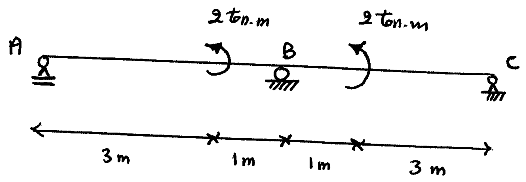



سازهٔ (۲) : $\theta_B = \dfrac{M}{K_{BA} + K_{BC}} = \dfrac{M}{\frac{3EI}{3L} + \frac{3EI}{3L}} = \dfrac{ML}{2EI}$

$$\Delta_D = \theta_B \times L_{DB} = \frac{ML}{2EI} \times 3L = \frac{3}{2}\frac{ML^2}{EI} = \frac{3}{2}\frac{(PL)L^2}{EI} = \frac{3}{2}\frac{PL^3}{EI}$$

**یادداشت:**

**۳۵ـ عکس‌العمل تکیه‌گاه C چقدر می‌باشد؟**




۱) صفر

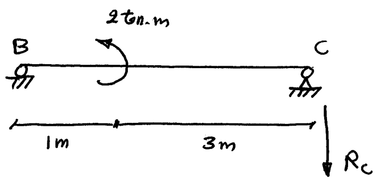
۲) 0.25 ton

۳) 0.5 ton

۴) 1 ton

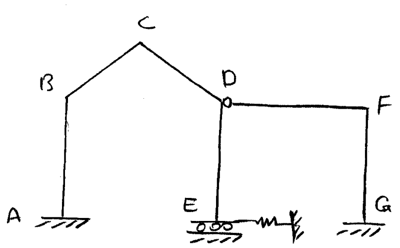
**حل :** گزینه ۳ درست است.

تیر مورد بحث دارای تقارن محوری معکوس می‌باشد و لذا می‌توان در تکیه‌گاه B از تکیه‌گاه غلطکی بهره برد و لذا مدل ساده شدهٔ تیر به این‌صورت می‌باشد.




$$R_C = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,\text{ton}$$

**۳۶ـ درجهٔ آزادی دورانی و انتقالی سازهٔ زیر کدام است؟ (اعضای قاب فاقد تغییر شکل‌های محوری می‌باشند.)**




۱) 3 , 5

۲) 4 , 5

۳) 3 , 4

۴) 4 , 4

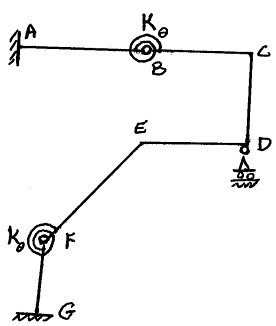
**حل :** گزینه ۱ درست است.

سازه 5 درجه آزادی دورانی دارد. $\left(\theta_B\ ,\ \theta_C\ ,\ \theta_{D_L}\ ,\ \theta_{D_R}\ ,\ \theta_F\right)$

باتوجه به هندسه سازه، تعداد گره‌های غیرتکیه‌گاهی سازه برابر 4، تعداد تغییر مکان‌های تکیه‌گاهی سازه برابر 1 و تعداد اعضای فاقد تغییر شکل محوری سازه برابر 6 است و داریم:

$M = 4, N = 1, P = 6$ ، $D_1 = 2M + N - P = 2 \times 4 + 1 - 6 = 3$

**۳۷ـ درجه آزادی دورانی در روش شیب افت برای سازهٔ مقابل کدام است؟**




۱) 6

۲) 7

۳) 8

۴) 9

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

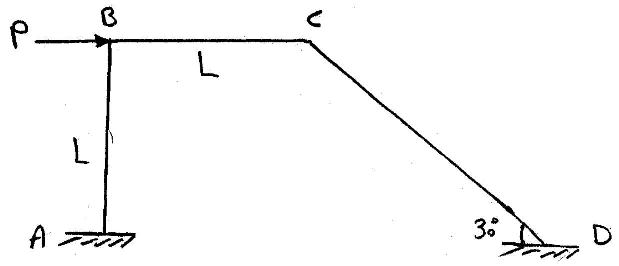
..........................................................................................................

..........................................................................................................

**حل :** گزینه ۲ درست است.

ابتدا باید دقت شود که برای به دست آوردن درجهٔ آزادی دورانی می‌توان فنرهای دورانی را در نظر نگرفت (چرا؟). در گره‌های D، E و C یک درجه آزادی دورانی و در نقاط هریک از نقاط F و B دو درجه آزادی دورانی موجود بوده و سازه در مجموع 7 درجه آزادی دورانی دارد.

**۳۸ـ با توجه به روش شیب و افت، اگر چرخش محور عضو AB برابر $\phi$ باشد در این‌صورت چرخش محور عضو CD کدام است؟**



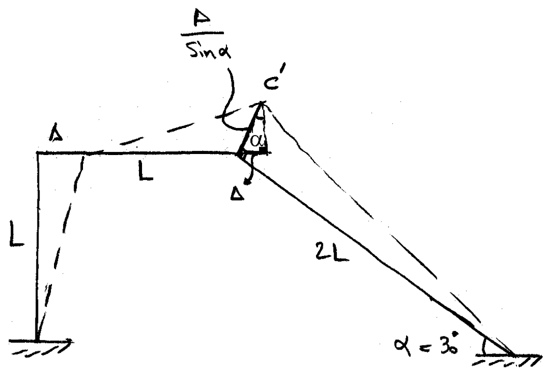

۱) $\phi$

۲) $\frac{1}{4}\phi$

۳) $\frac{1}{2}\phi$

۴) $\frac{1}{8}\phi$

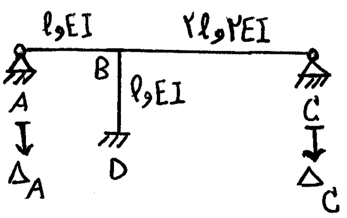
**حل :** گزینه ۱ درست است.




$$\psi_{AB} = \frac{\Delta}{L} = \phi$$

$$\psi_{CD} = \frac{\frac{\Delta}{\sin\alpha}}{2L} = \frac{\Delta}{L} = \phi$$

**۳۹ـ در قاب زیر تکیه‌گاه‌های A و C تحت اثر نشست‌های تکیه‌گاهی قائم به میزان $\Delta_A$ و $\Delta_C$ قرار گرفته‌اند. چه رابطه‌ای بین $\Delta_A$ و $\Delta_C$ برقرار باشد تا ستون BD به خمش نیفتد؟**




۱) $\Delta_A = 2\Delta_C$

۲) $\Delta_C = 2\Delta_A$

۳) $\Delta_A = 4\Delta_C$

۴) $\Delta_C = 4\Delta_A$

**یادداشت:**

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

.....................................................................................................................

**حل :** گزینه ۲ درست است.

با استفاده از معادلات شیب ـ افت اصلاح شده در گره B تعادل لنگر را می‌نویسیم و توجه داریم که هم $M_{BD}$ و هم $\theta_B$ هر دو صفر هستند.

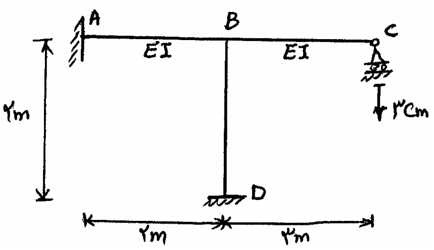
$$M_{BA}=\frac{3EI}{\ell}\left(\theta_B-\frac{\Delta}{\ell}\right)=\frac{3EI}{\ell}\left(0+\frac{\Delta_A}{\ell}\right)=\frac{3EI}{\ell^2}\Delta_A$$

$$M_{BC}=\frac{3EI'}{\ell'}\left(\theta_B-\frac{\Delta}{\ell'}\right)=\frac{3\times 2EI}{2\ell}\left(0-\frac{\Delta_C}{2\ell}\right)=-\frac{3EI}{2\ell^2}\Delta_C$$

$$B:\sum M=0\ \rightarrow\ M_{BA}+M_{BD}+M_{BC}=0\ \rightarrow\ \frac{3EI}{\ell^2}\Delta_A-\frac{3EI}{2\ell^2}\Delta_C=0\ \rightarrow\ \Delta_A-\frac{1}{2}\Delta_C=0$$

$$\rightarrow\ \Delta_C=2\Delta_A$$

**۴۰ ـ در سازهٔ روبرو، در اثر نشست تکیه‌گاهی $\Delta_C = 3\ \text{cm}$، شیب ایجاد شده در این تکیه‌گاه چند رادیان است؟**




۱) $2\times10^{-2}$ (rad)

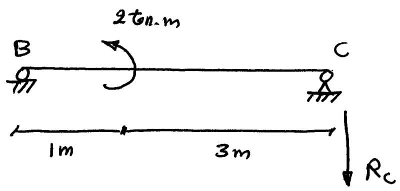
۲) $10^{-2}$ (rad)

۳) $6\times10^{-2}$ (rad)

۴) $1.4\times10^{-2}$ (rad)

**حل :** گزینه ۳ درست است.

تیر مورد بحث دارای تقارن محوری معکوس می‌باشد و لذا می‌توان در تکیه‌گاه B از تکیه‌گاه غلطکی بهره برد و لذا مدل ساده شدهٔ تیر به این‌صورت می‌باشد.




$$R_C=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\text{ton}$$

**حل :** گزینه ۴ درست است.

$$M_{BA}+M_{BC}+M_{BD}=0\ \rightarrow\ \frac{2EI}{2}\left(2\theta_B+\theta_A-\frac{3\Delta_{AB}}{2}\right)+\frac{3EI}{3}\left(\theta_B-\frac{\Delta_{BC}}{3}\right)+\frac{2EI}{2}\left(2\theta_B+\theta_D-\frac{3\Delta_{BD}}{2}\right)=0$$

در رابطه بالا برای $M_{BC}$ از رابطه شیب افت اصلاح شده استفاده شده است. با توجه به این‌که $\Delta_{AB}$ و $\Delta_{BC}$ صفر است، داریم:

$$5\theta_B-\frac{0.03}{3}=0\ \rightarrow\ \theta_B=2\times10^{-3}\ \text{rad}$$

$$M_{CB}=0\ \rightarrow\ \frac{2EI}{2}\left(2\theta_C+\theta_B-\frac{3\Delta_{BC}}{3}\right)=0$$

$$\rightarrow\ 2\theta_C+2\times10^{-3}-30\times10^{-3}=0\ \rightarrow\ \theta_C=1.4\times10^{-2}\ \text{(rad)}$$

**یادداشت:**

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................