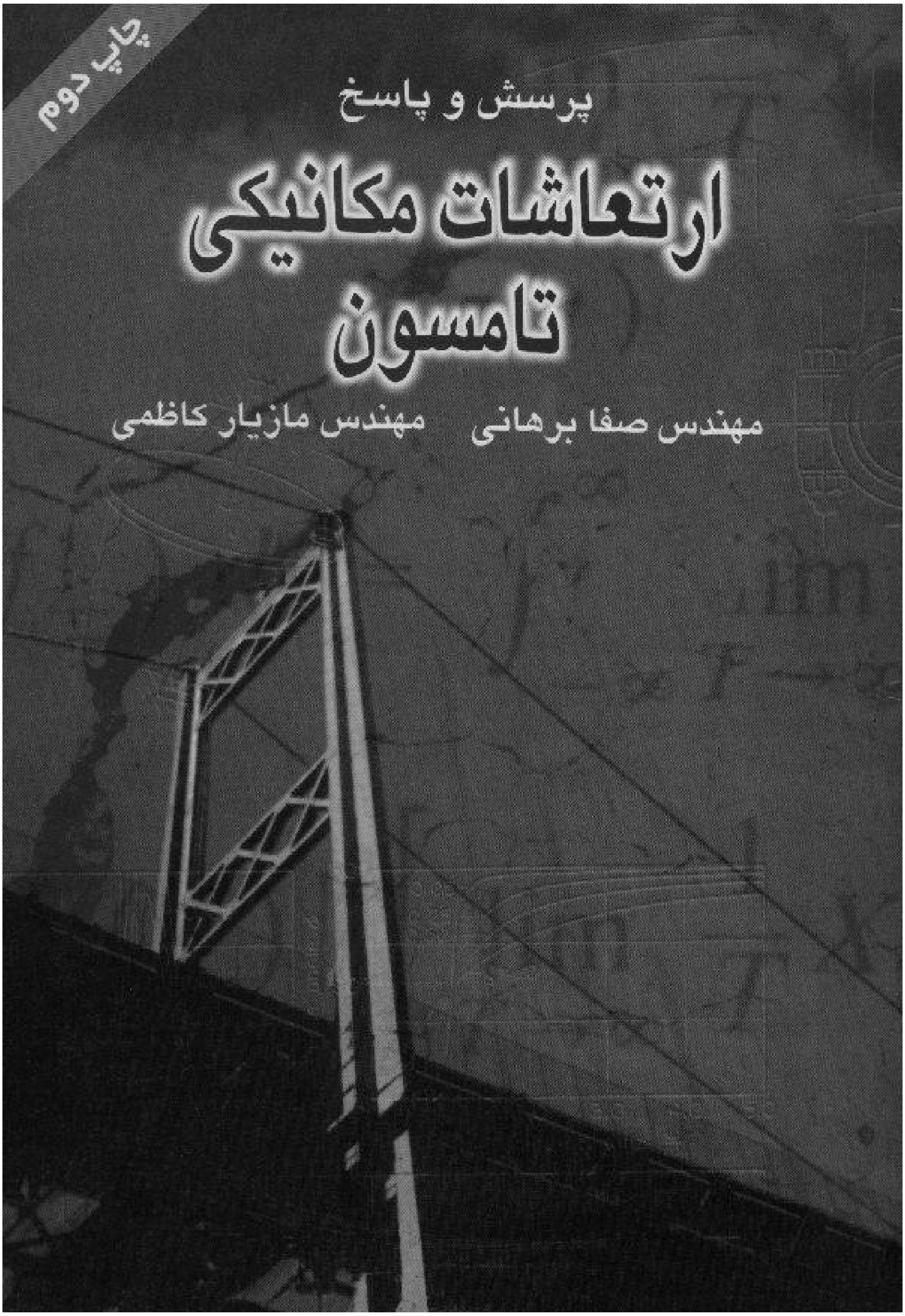

چاپ دوم
پرسش و پاسخ
ارتعاشات مکانیکی
تامسون
مهندس صفا برهانی
مهندس مازیار کاظمی

1

حرکت نوسانی

1-1 حرکتی هماهنگ دارای دامنه 0.20 cm و دوره تناوب 0.15 s است. تندی و شتاب بیشینه را بیابید.

$A=0.20\ cm \quad \& \quad \tau=0.15\ s \rightarrow \omega=\frac{2\pi}{\tau}=\frac{2\pi}{0.15}=41.89\ rad/s$

$x=A\sin\omega t \rightarrow \dot{x}=\omega A\cos\omega t \quad \& \quad \ddot{x}=-\omega^2 A\sin\omega t$

$\dot{x}_{max}=\omega A=41.89\times0.20=8.38\ cm/s \qquad \ddot{x}_{max}=\omega^2 A=350.9\ cm/s^2$

1-2 یک دستگاه شتاب‌سنج، ارتعاش هماهنگ سازه‌ای را 82 cps با شتاب بیشینه 50 g نشان می‌دهد. دامنه ارتعاش را بیابید.

$\omega=2\pi f=2\pi(82)=515.2\ rad/s \rightarrow \omega^2=0.2655\times10^6 \qquad g=980.4\ cm/s^2$

$x_{max}=\ddot{x}_{max}/\omega^2=(50\times980.4)/(0.2655\times10^6)=0.184\ cm$

1-3 یک حرکت هماهنگ دارای بسامد 10 cps و تندی بیشینه 4.57 m/s است. دامنه، زمان تناوب و شتاب بیشینه آن را بیابید.

$\omega=2\pi f=2\pi(10)=62.83\ ras/s \rightarrow \tau=\frac{1}{f}=0.10\ s$

$\dot{x}_{max}=\omega A=4.57\ m/s \rightarrow A=0.07274\ m \qquad \ddot{x}_{max}=\omega^2 A=287.1\ m/s^2$

1-4 جمع دو حرکت هماهنگ با دامنه‌های برابر و با اختلاف بسامدهای کم را بیابید. پدیده ضربان را که از این جمع به‌دست‌می‌آید شرح دهید.

$x=A[\sin(\omega_1 t)+\sin(\omega_2 t)]=2A\cos[(\omega_1-\omega_2)\frac{t}{2}]\ \sin[(\omega_1+\omega_2)\frac{t}{2}]$

چون اختلاف بسامدها ناچیز است

$\omega_1=\omega \& \omega_2=\omega+\Delta\omega \qquad \omega_1+\omega_2\cong2\omega$

$x\cong2A\cos(\Delta\omega\frac{t}{2})\sin(\omega t)$

1-5 بردار مختلط 4+3i را به شکل نمایی $Ae^{i\theta}$ نمایش دهید.

$A=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$z=4+3i=5(\cos\theta+i\sin\theta)=5\ e^{i\theta}$

$\theta=\tan^{-1}(\frac{3}{4})=36^\circ,52'=0.6435$ rad

1-6 دو بردار مختلط $(2+3i)$ و $(4+i)$ را جمع کنید و حاصل را به شکل $A\angle\theta$ نمایش دهید.

$(2+3i)+(4-i)=6+2iz=A\ e^{i\theta}$

$A=\sqrt{6^2+2^2}=6.325$ & $\theta=\tan^{-1}(\frac{2}{6})=18^\circ, 26'=0.3217$ rad

$z=6.325\ e^{0.3217i}=6.325\angle 18^\circ, 26^\circ$

1-7 نشان دهید که ضرب بردار $z=Ae^{i\theta}$ در i آن را به اندازه 90° می‌چرخاند.

$z=A(\cos\theta+i\sin\theta)=Ae^{i\theta}$

$iz=A(i\cos\theta-\sin\theta)A\{\cos(\theta+90)+i\sin(\theta+90)\}$

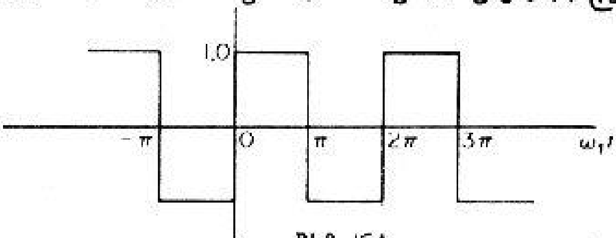
1-8 جمع دو بردار $5e^{i\pi/6}$ و $4e^{i\pi/3}$ و زاویه میان بردار برآیند و بردار اول را بیابید.

$\frac{\pi}{6}=30^\circ$

$R_x=5+4\cos30=5+3.47=8.47$ $\quad R_y=4\sin30=2.00$ $\quad R=8.7$

$\theta=\tan^{-1}(\frac{2}{8.70})=12^\circ, 57'$

1-9 سری فوریه موج چهارگوش نمایش داده در شکل P1-9 را به دست آورید.



شکل P1-9

چون $x(t)$ تابع فرد است،

$a_n=0 \qquad \tau=\frac{2\pi}{\omega_1}$

$$b_n=\frac{2}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x(t)\sin(n\omega_1 t)dt$$

$$b_n=\frac{\omega_1}{\pi}\left\{\int_{\frac{-\pi}{\omega_1}}^{0}(-1)\sin(n\omega_1 t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}}(-1)\sin(n\omega_1 t)dt\right\}$$

$$=\frac{\omega_1}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos(n\omega_1 t)}{n\omega_1}\right]_{\frac{-\pi}{\omega_1}}^{0}+\left[\frac{-\cos(n\omega_1 t)}{n\omega_1}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega_1}}\right\}=\frac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{برای } n\text{های زوج} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{برای } n\text{های فرد} \end{cases}$$

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\left\{\mathrm{Sin}(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\mathrm{Sin}(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\mathrm{Sin}(5\,\omega_1 t)+\ldots\right\}$$

1-10 اگر مبدا مختصات موج چهارگوش در شکل P1-9 به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست برده شود، سری فوریه آن را به‌دست‌آورید.

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_1} \quad \& \quad \omega_n=n\omega_1$$

x(t) تابعی زوج خواهد بود،

$$b_n=0$$

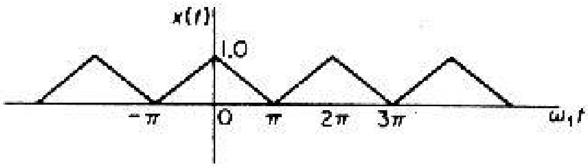
$$a_n=\frac{2}{\tau}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x(t)\mathrm{Cos}(n\omega_1 t)dt$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{Cos}(n\omega_1 t)d(\omega_1 t)+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}(n\omega_1 t)+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\mathrm{Cos}(n\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & n = 1, 5, 9, \ldots \\ \dfrac{-4}{n\pi} & n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\{\mathrm{Cos}(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\mathrm{Cos}(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\mathrm{Cos}(5\omega_1 t)+\ldots\}$$

1-11 سری فوریه موج مثلثی نمایش داده در شکل P1-11 را بیابید.



شکل P1-11

x(t) تابعی زوج است،

$$b_n=0$$

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{t+\pi}{\pi} & -\pi\le t\le 0 \\ \dfrac{\pi-t}{\pi} & 0\le t\le \pi \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \frac{1+\pi}{\pi}\mathrm{Cos}(n\omega_1 t)d(\omega_1 t)+\int_{0}^{\pi} \frac{\pi-t}{\pi}\mathrm{Cos}(n\omega_1 t)d(\omega_1 t)\right\}$$

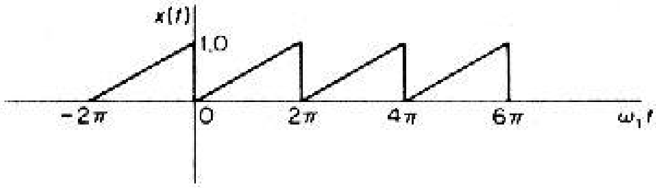
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-t}{\pi}\mathrm{Cos}(n\omega_1 t)d(\omega_1 t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\mathrm{Sin}(n\omega_1 t)\right]_0^{\omega_1 t=\pi}-\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\mathrm{Cos}(n\omega_1 t)+\frac{\omega_1 t}{n}\mathrm{Sin}(n\omega_1 t)\right]_0^{\omega_1 t=\pi}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{برای nهای زوج}\\ \frac{4}{n^2\pi^2} & \text{برای nهای فرد}\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left\{\mathrm{Cos}(\omega_1 t)+\frac{1}{3^2}\mathrm{Cos}(3\omega_1 t)+\frac{1}{5^2}\mathrm{Cos}(5\omega_1 t)+\ldots\right\}$$

1-12 سری فوریه موج دندهاره‌ای شکل P1-12 را بیابید. پاسخ مساله 1-12 رابه شکل نمایی دستور 1.2-4 کتاب نشان دهید.



شکل P1-12

$$x=\frac{\omega_1 t}{2\pi}$$

$$C_n=\frac{\omega_1 t}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\omega_1 t}{2\pi}e^{-in\omega_1 t}dt=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\omega_1 te^{-in\omega_1 t}d(\omega_1 t)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2n^2}\left\{-1+(1+i2\pi n)e^{-i2\pi n}\right\}=\frac{i}{2\pi n}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{Sin}(\omega_1 t)+\frac{1}{2}\mathrm{Sin}(2\omega_1 t)+\frac{1}{3}\mathrm{Sin}(3\omega_1 t)+\ldots\right\}$$

1-13 اندازه rms بخش مثبت موج سینوسی را به دست آورید.

$$x^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A^2\,\mathrm{Sin}^2\omega t dt=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_0^{\frac{T}{2}}\{1-\mathrm{Cos}(2\omega t)\}dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A^2}{4}-\frac{\mathrm{Sin}\,\omega t}{\omega t}\right\}=\frac{A^2}{4}\quad x_{rms}=\sqrt{x^2}=\frac{A}{2}$$

1-14 میانگین توان دوم موج دنده اره‌ای مساله 1-12 را به دست آورید. این کار را با دو روش

منحنی توان دوم و سری فوریه انجام دهید.

$$x(t)=\frac{\zeta}{2\pi} \quad \& \quad x^2(t)=\frac{\zeta^2}{4\pi^2} \qquad 0\le\zeta\le 2\pi$$

$$x^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2}{4\pi^2}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\zeta^3}{12\,\pi^2}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{3}$$

سری فوریه موج دنده اره‌ای چنین است:

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{Sin}(\omega_1 t)+\frac{1}{2}\mathrm{Sin}(2\omega_1 t)+\frac{1}{3}\mathrm{Sin}(3\omega_1 t)+\dots\right\}$$

$$x^2(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{Sin}(\omega_1 t)+\frac{1}{2}\mathrm{Sin}(2\omega_1 t)+\frac{1}{3}\mathrm{Sin}(3\omega_1 t)+\dots\right\}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\left\{\mathrm{Sin}^2(\omega_1 t)+\mathrm{Sin}^2(2\omega_1 t)+\mathrm{Sin}^2(3\omega_1 t)+\dots\right\}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi\omega_1 T}\Big[\mathrm{Cos}(\omega_1 t)\Big]_0^T+\frac{1}{4\pi\omega_1 T}\Big[\mathrm{Cos}(2\omega_1 t)\Big]_0^T+$$

$$+\frac{1}{9\pi\omega_1 T}\Big[\mathrm{Cos}(3\omega_1 t)\Big]_0^T+\frac{1}{2\pi^2 T}\left[t-\frac{\mathrm{Sin}(2\omega_1 t)}{2\omega_1}\right]_0^T+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2 T}\left[t-\frac{\mathrm{Sin}(4\omega_1 t)}{4\omega_1}\right]_0^T+\dots$$

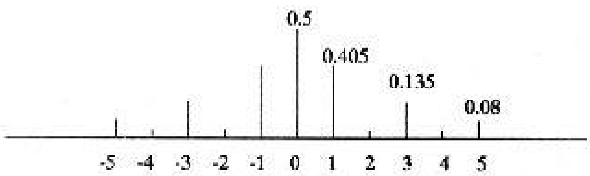
برای عدد صحیح k $\omega_1 T=2k_p \to \infty$ است.

$$x^2(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi k}x^2(t)dt=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi^2}\left\{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\right\}=\frac{1}{3}$$

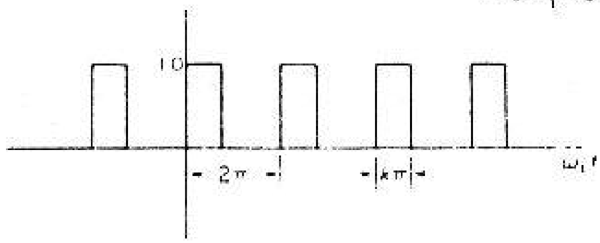
1-15 نمودار بسامد را برای موج مثلثی مساله 11-1 رسم کنید.

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left\{\mathrm{Cos}(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\mathrm{Cos}(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\mathrm{Cos}(5\omega_1 t)+\dots\right\}$$

$$b_n=0 \;\&\; c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=a_n \;\&\; c_0=a_0/2$$



1-16 سریه فوریه ضربه مستطیلی شکل P1-16 را بیابید. به ازای $k=\frac{2}{3}$ نمودار C_n و ϕ_n را در برابر n رسم کنید.



شکل P1-16

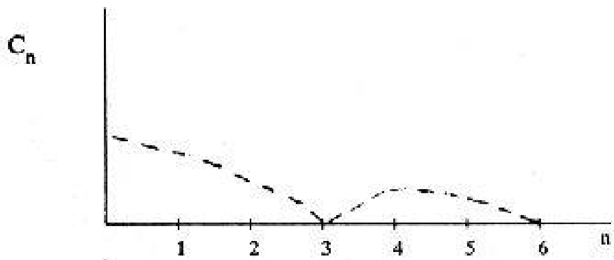
$$k=\frac{2}{3} \quad \& \quad c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{k}{2}=\frac{1}{3} \quad a_n=\frac{1}{n\pi}\mathrm{Sin}(nk\pi)=\frac{1}{n\pi}\mathrm{Sin}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

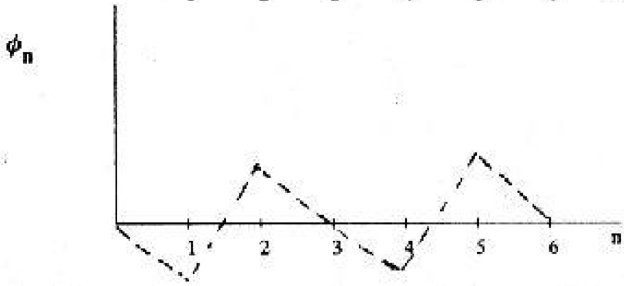
$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left\{1-\mathrm{Cos}(nk\pi)\right\}=\frac{1}{n\pi}\left\{1-\mathrm{Cos}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right\}$$

$$2c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\left\{1-\mathrm{Cos}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right\}$$

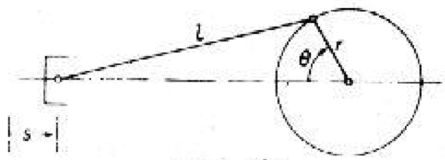
$$\phi_n=\tan^{-1}\left\{\frac{1-\mathrm{Cos}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}\right\}$$

n	1	2	3	4	5	6
C_n	0.2758	0.1379	0	0.0689	0.0552	0
ϕ_n	-60°	60°	0°	-60°	60°	0°





1-17 برای مکانیزم شکل 1-17، معادله جابه‌جایی پیستون، s را بنویسید و مولفه‌های هماهنگ و اندازه نسبی آنها را بیابید. اگر $\frac{r}{l}=\frac{1}{3}$ باشد، نسبت هماهنگ دوم به یکم چیست؟



شکل P1-17

$$l+r-s=r\cos\theta+l\cos\phi \qquad l\sin\phi=r\sin\theta$$

$$\cos\phi=\sqrt{1-(\frac{r}{l})\sin^2\theta}=1-\frac{1}{2}(\frac{r}{l})^2\sin^2\theta-\frac{1}{8}(\frac{r}{l})^4\sin^4\theta$$

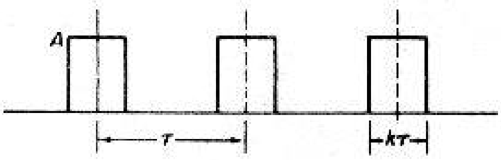
$$s=r\left\{1-\cos\theta+\frac{1}{2}(\frac{r}{l})\sin^2\theta+\frac{1}{8}(\frac{r}{l})^3\sin^4\theta+...\right\}$$

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \quad \& \quad \sin^4\theta=\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}-2\cos(2\theta)+\frac{1}{2}\cos(4\theta)\right\}$$

$$s=r\left\{1-\cos\theta+\frac{1}{4}(\frac{r}{l})\left[1-\cos(2\theta)\right]+...\right\}=r\left\{1+\frac{1}{4}(\frac{r}{l})-\cos\theta-\frac{1}{4}(\frac{r}{l})\cos(2\theta)+...\right\}$$

$$\frac{\text{هماهنگ دوم}}{\text{هماهنگ یکم}}=\frac{1}{4}(\frac{r}{l})=\frac{1}{12}$$

1-18 ریشه میانگین توان دوم (rms) ضربه مستطیلی شکل P1-18 را به ازای k=0.10 بیابید. اگر دامنه ضربه A باشد، اندازه ولتمتر rms چه خواهد بود؟



شکل P1-18

$$\overline{x^2}=\lim\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt=A^2k=0.10A^2 \qquad rms=\sqrt{\overline{x^2}}=0.3162A$$

1-19 ریشه میانگین توان موج مثلثی شکل P1-11 را بیابید.

$$x=1-\frac{t}{\pi} \qquad 0\le t\le\pi \qquad x^2=1-\frac{2t}{\pi}+\frac{t^2}{\pi^2}$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^T\left[1-\frac{2t}{\pi}+\frac{t^2}{\pi^2}\right]dt=\frac{1}{3}$$

1-20 یک ولتمتر rms، با دقت ± 0.5 Db کار می‌کند. اگر ارتعاشی به اندازه 2.5 mm را اندازه

بگیرید، اندازه درست خوانده شده با ولتمتر را برحسب mm بیابید.

$Db=20\log_{10}(\frac{x_1}{x_2})=0.50 \qquad \log_{10}(\frac{x_1}{x_2})=\frac{0.50}{20}=0.025$

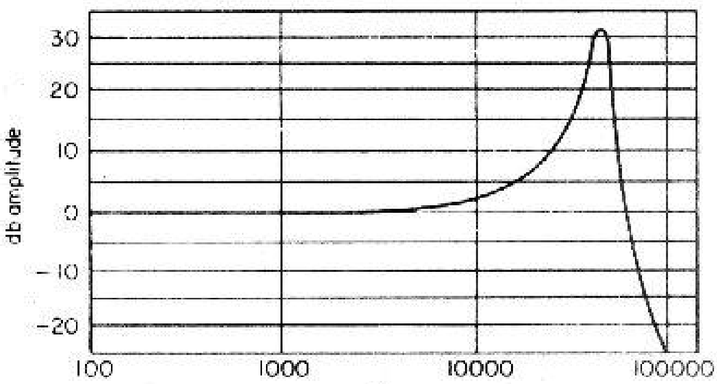
$\frac{x_1}{x_2}=10^{0.025}=1.0593 \rightarrow x_1=1.0593x_2=1.0593(2.5)=2.6481$ mm

خطا $=0.0593(2.5)= \pm 0.148$ mm

1-21 ضرایب بزرگنمایی یک ولتمتر که برای اندازه‌گیری ارتعاشی یک شتاب‌سنج به‌کارمی‌رود، برابر 10، 50 و 100 است. این اندازه‌ها چند دسی‌بل (Db) است؟

$Db=20\log_{10}(10)=20 \qquad Db=20\log_{10}(50)=33.98 \qquad Db=20\log(100)=40.0$

1-22 نمودار کالیبراسیون شتاب‌سنج پیزوالکتریک در شکل P1-22 آورده شده‌است. اگر بیشینه منحنی 32 Db باشد، نسبت پاسخ تشدید به پاسخ آن در بسامد 1000 cps چیست؟

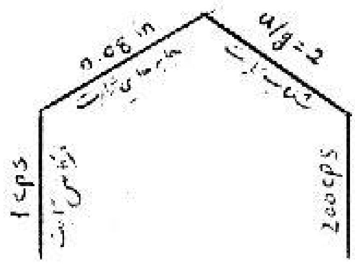


شکل P1-22

$Db=20\log_{10}(\frac{x_p}{x_{100}})=32 \qquad \frac{x_p}{x_{1000}}=10^{32/20}=39.8$

1-23 با به کارگیری نمودار پیوست A، دامنه‌های ارتعاشی را با ویژگیهای زیر بیابید.

$1\ Hz \le f \le 200\ Hz$ و $0.08''$=دامنه بیشینه و $2g$=شتاب بیشینه.



۲

ارتعاش آزاد

2-1 جرم 0.453 kg فنری بی‌وزن را 7.87 mm می‌کشد. بسامد طبیعی سیستم را بیابید.

از معادله 2.1-10 داریم:

$$f=\frac{15.76}{\sqrt{\Delta_{mm}}}=\frac{15.76}{\sqrt{7.87}}=5.62\text{Hz}$$

2-2 سیستم جرم-فنر m و k_1، دارای فرکانس طبیعی f_1است. اگر فنر دیگری با سختی k_2 را با فنر نخست سری ببندیم، فرکانس طبیعی سیستم به $\frac{1}{2}f_1$کاهش می‌یابد. سختی k_2 را برحسب k_1 بیابید.

$$f_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad \& \quad f_2=\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_1}{m}}=\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}} \rightarrow k_2=\frac{k_1}{3}$$

2-3 یک وزنه به جرم 4.53 kg به انتهای پایینی فنری وصل است که انتهای بالایی آن با زمان تناوب طبیعی 0.45 s نوسان می‌کند. هنگامی که جرم 2.26 kg به نقطه میانی همان فنر که بالا و پایین آن ثابت است، بسته شود، زمان تناوب طبیعی چه خواهد بود؟

$$k=(\frac{2\pi}{\tau_1})^2\ m_1=(\frac{2\pi}{0.45})^2(4.53)=883.5\text{N/m}$$

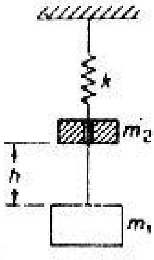
$$\tau_2=2\pi\ \sqrt{\frac{m_2}{4k}}=2\pi\ \sqrt{\frac{2.26}{41883.5}}=0.159\text{s}$$

2-4 جرم m به انتهای فنری با سختی **k** بسته شده است. فرکانس طبیعی سیستم 94 cpm است. هنگامی که جرم 0.453 kg به m افزوده شود، فرکانس طبیعی تا 76.7 cpm کاهش می‌یابد. جرم m و سختی k را برحسب N/m بیابید.

$$\frac{k}{m}=(2\pi f)^2=\left[\frac{2\pi(94)}{60}\right]^2 \qquad \frac{k}{m+0.453}=(\frac{2\pi(76.7)}{60})^2$$

$$\frac{m+0.453}{m}=(\frac{94}{76.7})^2 \rightarrow m=0.9028\text{kg} \quad \& \quad k=87.48\text{N/m}$$

2-5 جرم m_1 در تعادل استاتیکی از فنر **k** آویزان است. جرم m_2 از ارتفاع **h** بر روی m_1 می‌افتد و مانند نمایش شکل P2-5 به آن می‌چسبد. جابه‌جایی دستگاه را بیابید.



شکل P2-5

$$(m_1+m_2)\ddot{x}=-kx+m_2g$$

$$x(0)=0=\frac{m_2g}{k}+B \rightarrow B=-\frac{m_2g}{k} \qquad x(t)=\frac{m_2g}{k}+A\text{Sin}\ \omega t=B\text{Cos}\ \omega t$$

$$\dot{x}(0)=m_2\sqrt{\frac{2gh}{m_1+m_2}}=\omega A \rightarrow A=m_2\sqrt{\frac{2gh}{(m_1+m_2)\omega}} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{m_2g}{k}+m_2\left\{\frac{\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}\right\}\text{Sin}\omega t-\frac{m_2g}{k}\text{Cos}\omega t$$

$$=\frac{m_2g}{k}\{1-\text{Cos}\omega t\}+m_2\sqrt{\frac{2gh}{k(m_1+m_2)}}\text{Sin}\omega t$$

2-6 نسبت k/m برای یک سیستم جرم-فنر، 4.0 است. اگر جرم را از موقعیت تعادل، 2 cm پایین بکشیم و با تندی 8 cm/s رو به بالا رها کنیم، دامنه و شتاب بیشینه چه خواهد بود؟

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}=4.0 \rightarrow \omega_n=2\text{ rad/s}$$

$$x=x_\circ\text{Cos}\omega t+\frac{V_\circ}{\omega}\text{Sin}\omega t=2\text{Cos}(2t)-(\frac{8}{2})\text{Sin}(2t)$$

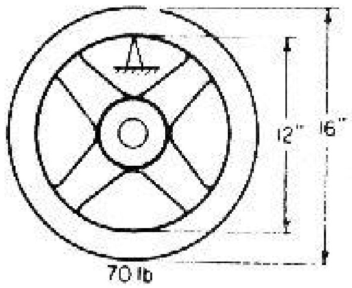
$$\dot{x}=-4\text{Sin}(2t)-8\text{Cos}(2t)=0 \rightarrow \tan(2t_p)=-2 \rightarrow 2t_p=116.57^\circ$$

$$x_{max}=2(-0.4472)-4(8944)=-4.472\text{ cm} \qquad \ddot{x}_{max}=\omega^2x_{max}=4(\pm4.472)=\pm17.89\text{ cm/s}^2$$

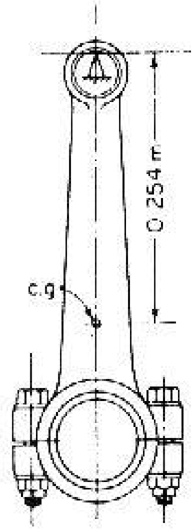
2-7 چرخ‌لنگری به وزن 70 lb را مانند آونگ شکل P2-8 از روی یک لبه تیز آویخته‌ایم. اگر زمان تناوب نوسان 1.22s باشد، ممان اینرسی چرخ لنگر را حول محور هندسی آن بیابید.

$$J_p\ddot{\theta}=-Wr\theta \rightarrow \ddot{\theta}=-\omega^2\theta$$

$$J_p=\frac{Wr}{\omega^2}=\frac{70(6)}{(\frac{2\pi}{1.22})^2}=15.83 \qquad J_\circ=J_p-\frac{Wr}{g}=15.83-\frac{70(6)^2}{386}=9.30\text{ lb-in-s}^2$$



شکل P2-7



شکل P2-8

2-8 مانند شکل P2-8 یک دسته پیستون آویخته به وزن 21.35N، در هر دقیقه 35 بار نوسان می‌کند. ممان اینرسی آن را حول گرانیگاه بیابید که فاصله‌اش از تکیه‌گاه 0.254 m است.

$\omega=\frac{2\pi(53)}{60}=5.55\ \mathrm{rad/s}$ $\quad J_p=\frac{Wr}{\omega^2}=0.1761$ $\quad J_{cg}=J_{.}-\frac{Wr}{g}=0.0356\ \mathrm{kg.m^2}$

2-9 چرخ لنگری به جرم M در صفحه افقی از سه سیم به طول 1.829 m، در دایره‌ای به شعاع 0.254 m در فواصل مساوی آویخته شده است. اگر زمان نوسان حول محور قائم در مرکز چرخ 2.17 s باشد، شعاع ژیراسیون آن را بیابید.

$r\theta = l\alpha \rightarrow \alpha=\frac{r\theta}{l}$ تغییر انرژی جنبشی = کار انجام شده

$\frac{Wl}{2}\left(\frac{r^2}{l^2}\right)\theta_{max}^{2}=\frac{1}{2}J\theta_{max}^{2}=\frac{1}{2}J\omega^2\theta_{max}^{2}$ $\quad J=\frac{Wk^2}{g}$

k شعاع ژیراسیون چرخ لنگر است.

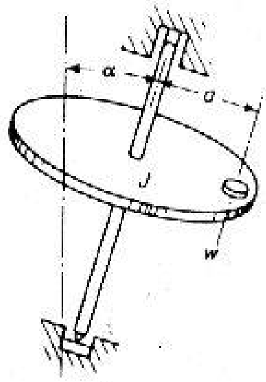
جابه‌جایی عمودی $=l(1-\cos\alpha)=\frac{l\alpha^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{r\theta}{l}\right)^2$

$\frac{Wr^2}{l}=\frac{Wk^2\omega^2}{g} \rightarrow k^2=\frac{r}{\omega}\sqrt{\frac{g}{l}}=0.2032 \rightarrow k=0.4507\mathrm{m}$

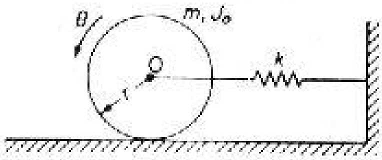
2-10 ممان اینرسی چرخ و محوری مانند شکل P2-10 که زاویه آن با محور قائم α است، J می‌باشد. فرکانس نوسان حاصل از چسباندن وزنه w lb را در فاصله α از محور آن بیابید.

$\sum M_{محور}=(a\sin\theta)w\sin\alpha$ $\quad \left(\frac{J+\omega a^2}{g}\right)\ddot{\theta}=-(a\sin\theta)w\sin\alpha\cong-(aw\sin\alpha)\theta$

$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{wa\sin\alpha}{J+\frac{wa^2}{g}}}$



شکل P2-10



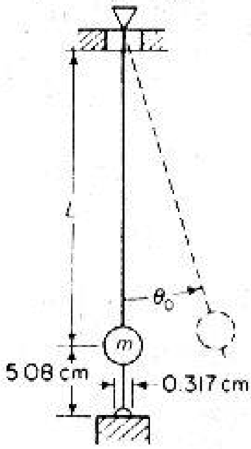
شکل P2-11

2-11 استوانه‌ای به جرم m و ممان اینرسی جرمی $J_\circ$ که بدون لغزش با غلتش ناب حرکت می‌کند مانند شکل P2-11 با فنر k بسته شده‌است. فرکانس طبیعی نوسان را بیابید.

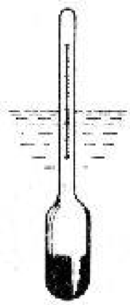
$$T=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{J\dot{\theta}_\circ^2}{2}=\frac{1}{2}(m+\frac{J_\circ}{r^2})\dot{x}^2$$

$$r\dot{\theta}=x=\omega\dot{x} \rightarrow U=\frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{J_\circ}{r^2}}}$$

2-12 یک زمان‌سنج با آونگی به طول L و زمان تناوب 2 s مانند شکل P2-12 ساخته شده است. یک سیم پلاتینی چسبیده به نوک آونگ هنگام گذشت از پایین‌ترین نقطه در اثر تماس با جیوه مدار الکتریکی را وصل می‌کند. (آ) طول آونگ L چیست؟ (ب) اگر سیم پلاتینی 0.3175 cm با جیوه تماس داشته باشد، دامنه θ در زمان تماس این در 0.01 s باشد چه اندازه خواهد بود؟ (فرض کنید که سرعت تماس یکنواخت و دامنه نوسان کم باشد.)



شکل P2-12



شکل P2-13

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L=g(\frac{\tau}{2\pi})^2=9.81(\frac{2}{2\pi})^2=0.994m$$

$V_{max}=L\omega\dot{q}_{\circ}=\frac{0.003175}{0.01}=0.3175\ m/s \qquad \theta_{\circ}=\frac{0.3175}{0.994\,\pi}=0.1017rad=5.826°$

2-13 مانند شکل **P2-13**، چگالی‌سنج شناور برای اندازه‌گیری چگالی مایعات به کار می‌رود. جرم شناور 0.0372kg است و به اندازه 0.0064m از طول آن از آب بیرون مانده‌است. زمان نوسان را برای هنگامی که شناور در سیالی با چگالی 1.20 نوسان می‌کند بیابید.

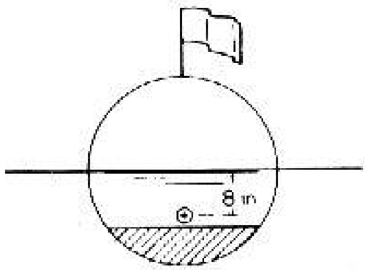
وزن حجمی آب $= 9802\ N/m^3$ $\rho=1.2(9802)=11762\ N/m^3$

نیروی شناوری $=\rho r^2 x\rho=m\ddot{x}=\omega x$ $r=0.0032m \rightarrow \tau=1.9\ s$

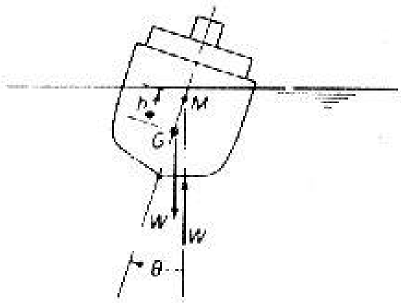
$\frac{1}{\omega}=\frac{\tau}{2\pi}=\sqrt{\frac{m}{\pi r^2 \nu}} \rightarrow m=0.0372kg$

2-14 یک شناور کروی به قطر 3 ft مانند شکل P2-14 تا نصف در آب فرو رفته است. گرانیگاه شناور 8 in از مرکز آن پایین‌تر است و زمان نوسان حرکت غلتشی آن 1.3 s است. ممان اینرسی شناور را حول محور دوران آن بیابید.

$-W(8\theta)=J_{\circ}\ddot{\theta}=-\omega^2 J_{\circ}\theta \rightarrow J_{\circ}=\frac{8W}{\omega^2}=0.3428W$



شکل P2-14



شکل P2-15

2-15 ویژگیهای ارتعاشی حرکت غلتشی یک کشتی به موقعیت M نسبت به G وابسته است. نقطه M نقطه تقاطع خط اثر نیروی شناوری و خط محور کشتی را نشان می‌دهد و فاصله آن تا G، مانند نمایش شکل P2-15 با h اندازه‌گیری می‌شود. موقعیت M به شکل کشتی بستگی دارد و برای نوسانهای کوچک به زاویه انحراف یعنی θ وابسته نیست. نشان دهید که زمان نوسان غلتشی از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{J}{Wh}}$$

که J ممان اینرسی جرمی کشتی حول محور غلتش و W وزن کشتی است. به‌طورکلی، محل

محور غلتش مجهول است و J از زمان نوسان الگوی آزمایشی به‌دست‌می‌آید.

$$-Wh\ddot{\theta}=J_o\ddot{\theta}=-\omega^2 J\theta \qquad \frac{1}{\omega}=\frac{\tau}{2\pi}=\sqrt{\frac{J}{Wk}} \rightarrow \tau=2\pi\sqrt{\frac{J}{W.k}}$$

2-16 یک ورق چهارگوش نازک را مانند شکل P2-16 ساخته‌اند. زمان نوسان آن را بیابید. اگر تنها در صفحه افق نوسان کند.

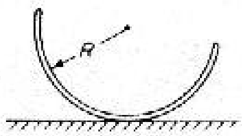
گرانیگاه آن در فاصله r از مرکز است. $(R-r)\theta=$ جابه‌جایی گرانیگاه

$$T_{max}=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2_{max}+\frac{1}{2}J_{c.g.}\dot{\theta}^2_{max}=\frac{1}{2}m\left\{(R-r)^2+(R^2-r^2)\right\}\omega^2\theta^2_{max}$$

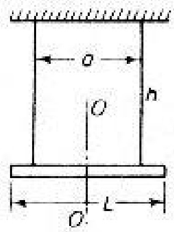
$$U_{max}=mgr(1-Cos\theta_{max})\cong\frac{1}{2}mgr\theta_{max}$$

$$T_{max}=U_{max}\ \omega^2=\frac{rg}{(R-r)^2+(R^2+r^2)}=\frac{rg}{2R(R-r)}$$

$$\tau=2\theta\sqrt{\frac{2R(R-r)}{rg}} \rightarrow t=\frac{2R}{\pi}\ \tau=2\pi\sqrt{\frac{R(\pi-2)}{g}}$$



شکل P2-16



شکل P2-17

2-17 میله‌ای یکنواخت به طول L و وزن W را از دو سیم متقارن مانند شکل P2-17 آویخته‌اند. معادله دیفرانسیل حرکت نوسانهای کوچک میله را حول محور عمودی O-O به دست آورید و زمان تناوب آن را بیابید.

$$U=mgh(1-Cos\phi)\cong\frac{1}{2}mgh\phi^2 \rightarrow h\phi=\frac{a\theta}{2}$$

$$U=mg\frac{a^2\theta^2}{8h}\quad T=\frac{m}{12}L^2.\frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\frac{mL^2}{12}\omega^2\theta^2 \qquad T_{max}=U_{max}\rightarrow\tau=\frac{2\pi L}{a}\sqrt{\frac{h}{3g}}$$

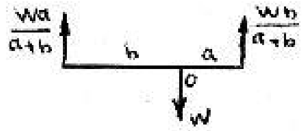
2-18 میله یکنواختی به طول L را به صورت افقی با دو ریسمان از دو انتها آویخته‌اند. اگر زمان تناوب این آونگ در صفحه میله و ریسمانها τ_1 و حول محور قائم گذرنده از گرانیگاه میله τ_2 باشد، نشان دهید که شعاع ژیراسیون میله حول گرانیگاه آن چنین به دست می‌آید:

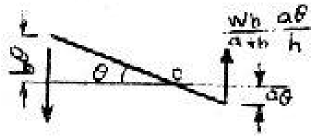
$$k=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)\frac{L}{2}$$

$$\tau_1=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \qquad T=\frac{m}{2}k^2\omega^2\theta^2 \qquad U=\frac{mg}{8h}L^2\theta^2$$

$$\tau_2=2\pi\sqrt{\frac{4hk^2}{gL^2}} \rightarrow k=(\frac{\tau_2}{\tau_1})\frac{L}{2}$$

2-19 میله‌ای یکنواخت با شعاع ژیراسیون k، از دو طناب به طول h و به فاصله‌های a و b از گرانیگاه آویزان است. ثابت کنید که میله حول خط گذرنده از گرانیگاهش نوسان می‌کند. فرکانس نوسان را بیابید.

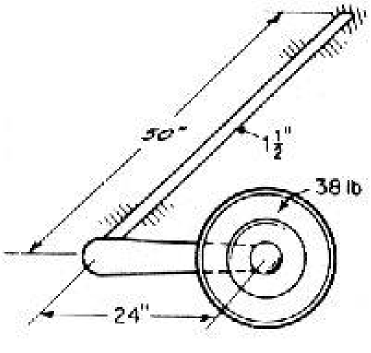




$$\sum M_o=J_{cp}\ddot{\theta}=-\frac{Wba}{a+b}\theta\frac{a}{h}-\frac{Wba}{a+b}\theta\frac{b}{h} \qquad \frac{W}{g}k^2\ddot{\theta}+\frac{Wab}{h}\theta=0 \quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gab}{hk^2}}$$

$$\sum F_{\text{افقی}}=0$$

2-20 یک میله فولادی به طول 50 in و قطر 1.5in که در شکل P2-20 می‌بینید، مانند یک فنر پیچشی در خودروهای سبک به کار می‌رود. اگر وزن محور و لاستیک 38 lb و شعاع ژیراسیون آن حول محور 9.0 in باشد، فرکانس طبیعی سیستم را بیابید. درباره اختلاف فرکانس طبیعی سیستم در زمان قفل بودن و قفل نبودن چرخ توضیح دهید.



شکل P2-20

برای چرخ قفل شده،

$$J_\circ = J_{cg} + m(24)^2 = m(k^2+24^2) = m(9^2+24^2) = 657m$$

$k=\frac{GI_p}{l} \rightarrow I_p=\frac{\pi D^4}{32}=0.497in^4=$ ممان اینرسی قطبی میله پیچشی

$G=11.2\times10^6 lb/in^2$ & $k=0.1113\times10^6 lb\text{-}in/rad$

$$J_\circ\ddot{\theta}+k\theta=0 \rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J_\circ}}=6.60cps$$

برای چرخ قفل شده،

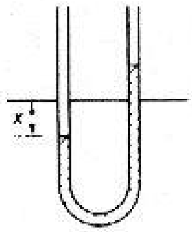
$$J_\circ=m(24)^2=576m \rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J_\circ}}=7.05cps$$

2-21 با به کارگیری روش انرژی نشان دهید زمان تناوب طبیعی نوسان سیال در درون مانومتر U شکل زیر از معادله زیر به دست می‌آید.

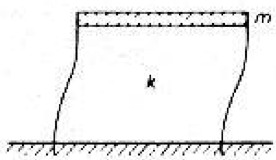
$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

که در آن l طول متر ستون سیال است.

$$\frac{l\rho}{g}\ddot{x}=-2x\rho \quad \rightarrow \quad \ddot{x}+\frac{2g}{l}x=0 \qquad \omega^2=\frac{2g}{l} \quad \rightarrow \quad \tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$



شکل P2-21



شکل P2-22

2-22 شکل P2-22 الگوی ساده شده‌ای از یک ساختمان یک طبقه را نشان می‌دهد. فرض کنید که ستونها در زمین درگیر شده باشد. زمان تناوب طبیعی، τ را بیابید. جدول سختی پایان گفتار را ببینید.

$$k=2\left(\frac{12EI}{l^3}\right) \qquad \tau=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{24EI}}$$

2-23 جرم موثر ستونهای مساله 2-22 را با فرض خیز از دستور زیر بیابید.

$$y=\frac{1}{2}y_{max}\left(1-\cos\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$y=0.5y_{max}\left\{1-Cos(\frac{\pi x}{l})\right\}Sin(\omega t)$$

$$\dot{y}=0.5y_{max}\left\{1-Cos(\frac{\pi x}{l})\right\}Cos(\omega t)$$

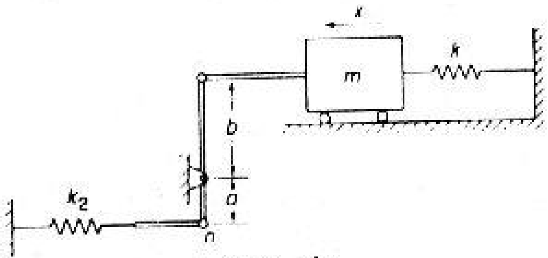
$$T=\frac{1}{2}\int_0^l m(x)\dot{y}^2dx=\frac{m}{8}y^2_{max}\int_0^l\left\{1-Cos(\frac{\pi x}{l})\right\}^2\omega^2Cos^2(\omega t)dx=$$

$$=\frac{m}{8}\dot{y}^2_{max}\,\omega Cos^2(\omega t)\int_0^l\left\{1-2Cos(\frac{\pi x}{l})+Cos^2(\frac{\pi x}{l})\right\}dx=$$

$$=\frac{m}{8}\dot{y}^2_{max}\,\omega^2Cos^2(\omega t)\left\{x-\frac{2l}{\pi}Sin(\frac{\pi x}{l})+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}Sin(\frac{2\pi x}{l})\right\}_0^l=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{m}{4}\cdot\frac{3l}{2})\omega^2y^2_{max}Cos^2(\omega t)\quad m_{eff}=\frac{3ml}{8}$$ برای هر ستون

2-24 جرم موثر سیستم نشان داده در شکل **P2-24** را برای نقطه n به دست آورید.



شکل P2-24

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J(\frac{\dot{x}}{b})^2\quad\&\quad x=\frac{b}{a}x_n$$

$$T=\frac{1}{2}m(\frac{b}{a})^2\dot{x}_n^2+\frac{1}{2}J(\frac{b}{a})^2(\frac{1}{b^2})\dot{x}_n^2=\frac{1}{2}\left\{m(\frac{b}{a})^2+\frac{J}{a^2}\right\}\dot{x}_n^2\qquad m_{eff}=m(\frac{b}{a})^2+\frac{J}{a^2}$$

2-25 بر نوک یک تیر یک‌سرگیردار به جرم m، وزنه‌ای به جرم M قرار دارد. جرم‌موثر تیر را که باید به M افزود بیابید، با این فرض که خیز تیر بی‌جرم و با یک نیرو در انتها به کاررود.

$$y=\frac{1}{2}y_\circ\left\{3(\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3\right\}$$

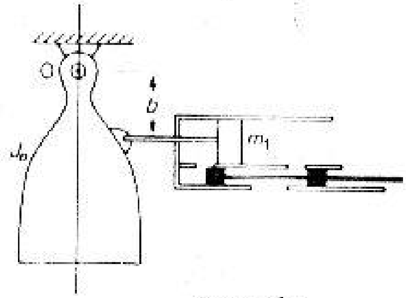
$$T=\frac{1}{2}m\int_0^l\dot{y}^2dx=\frac{m}{8}y_\circ^2\int_0^l\left\{9(\frac{x}{l})^4-6(\frac{x}{l})^5+(\frac{x}{l})^6\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{y}_\circ^2\,\frac{1}{4}\left\{\frac{9}{5}-1+\frac{1}{7}\right\}=\frac{1}{2}(\frac{33}{140}ml)\dot{y}_\circ^2$$

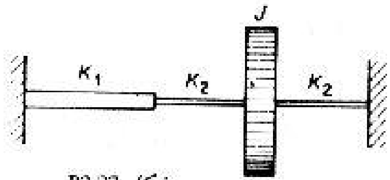
2-26 جرم موثر موتور جت شکل P2-26 را که باید به جرم m_1 افزود، چه اندازه است؟

$$T=\frac{1}{2}\left\{J_{o}\dot{\theta}^2+m_1(b\dot{\theta})^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{J_{o}+m_1b^2\right\}\dot{\theta}^2 \quad \& \quad \dot{\theta}=\frac{\dot{x}}{b}$$

$$T=\frac{1}{2}\left\{\frac{J_{o}}{b^2}+m_1\right\}\dot{x}^2 \rightarrow \; m_{eff}=\frac{J_{o}}{b^2}+m_1$$



شکل P2-26



شکل P2-27

2-27 سختی پیچشی موثر را برای محور شکل P2-27 و زمان تناوب طبیعی آن را بیابید.

$\theta_{o}=1$ چرخش & $T_{o}=$ گشتاور کل

$T_L=$ گشتاور J در سمت چپ & $T_R=$ گشتاور J در سمت راست

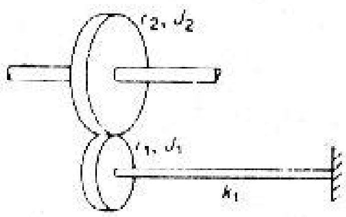
$$\left\{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right\}T_L=\theta_{o} \;\rightarrow\; \frac{1}{k_2}T_R=\theta_{o}$$

$$T=T_L+T_R\left\{\frac{1}{\left[\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right]}+k_2\right\}\theta_{o}=k\theta_{o} \qquad k_{eff}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}+k_2 \qquad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{J}}=\frac{2\pi}{\tau}$$

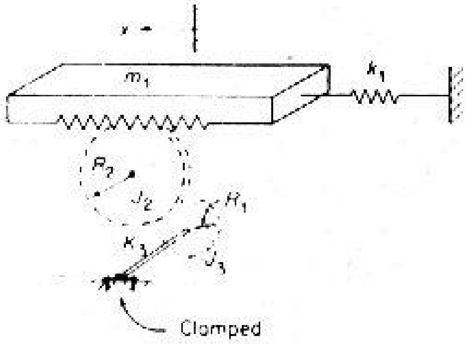
2-28 خواسته‌اند تا سیستم شکل P2-28 را با یک سیستم ساده خطی جرم-فنر با جرم موثر m_{eff} و سختی موثر k_{eff} جایگزین کنیم. m_{eff} و k_{eff} را برحسب متغیرهای داده شده بیابید.

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{\dot{x}}{R_2}\right)^2+\frac{1}{2}J_3\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\left(\frac{\dot{x}}{R_2}\right)^2=\frac{1}{2}\left\{m_1+\frac{J_2}{R_2^2}+\frac{J_3}{R_1^2}\right\}\dot{x}^2=\frac{1}{2}m_{eff}\dot{x}^2$$

$$U=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_3\left(\frac{x}{R_1}\right)^2=\frac{1}{2}k_{eff}x^2$$



شکل P2-29

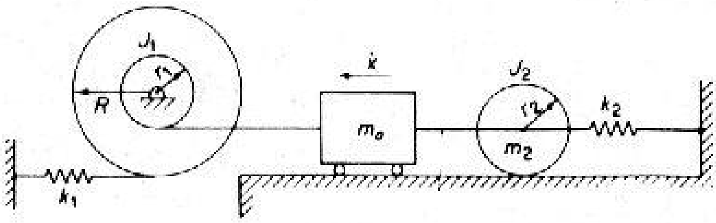


شکل P2-28

2-29 ممان اینرسی جرمی موثر را برای محور 1، در شکل P2-27 بیابید.

$$T=J_1\dot{\theta}_1^2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}J_2\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\dot{\theta}_1\right]^2=\frac{1}{2}\ \left\{J_1+J_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right\}\ \dot{\theta}_1^2=\frac{1}{2}J_{eff}\dot{\theta}_1^2$$

2-30 انرژی جنبشی سیستم شکل P2-30 را برحسب x به‌دست‌آورید. سختی را در $m_\circ$ به‌دست‌آورید و معادله فرکانس طبیعی را بیابید.



شکل P2-30

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}(m_\circ+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \qquad \dot{\theta}_1=\frac{\dot{x}}{r_1} \quad \& \quad \dot{\theta}_2=\frac{\dot{x}}{r_2}$$

$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{J_1}{{r_1}^2}+(m_\circ+m_2)+\frac{J_2}{{r_2}^2}\right]\dot{x}^2=\frac{1}{2}m_{eff}\dot{x}^2$$

$$U=\frac{1}{2}k_1(RQ_1)^2=\frac{1}{2}[k_2(r_2\theta_2)^2+k_2]x^2=\frac{1}{2}k_{eff}x^2 \qquad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$$

2-31 دورسنج یک ابزار اندازه‌گیری شانه‌ای است که از تیرهای یک‌سرگیردارکه در انتهای آنها وزنه گذاشته‌اند، ساخته شده است. هنگامی که فرکانس ارتعاش برابر با فرکانس طبیعی هر یک از شانه‌ها باشد، آن شانه مرتعش خواهدشد،از این رو فرکانسی را نشان می‌دهد. چه وزنه‌ای باید در انتهای یک شانه فولادی به ضخامت 0.1016 cm، پهنای 0.635 cm و طول 8.890 cm قرارداد تا فرکانس طبیعی 20 cps شود؟

از مساله 2-25 جرم موثر را داریم:

$$m_{eff}=M+\frac{33}{140}\ ml \qquad \text{حجم تیر}=0.1016(0.635)(8.890)=0.5435\ cm^3$$

$$\text{وزن حجمی فولاد}=0.07655\ N/cm^3 \qquad \text{وزن تیر}=0.5735(0.07655)=0.04390\ N$$

$$\text{جرم تیر}=\frac{0.04390}{9080}=0.00475kg=ml$$

$$\frac{33}{140}ml=0.001055 \quad \& \quad \text{سختی تیر}=\frac{3EI}{l^3}=k \ \ \& \ \ E=200\times10^9N/m^2$$

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{0.635(1016^3)}{12}=0.0000555\times10^{-8}m^4$$

$$k=\frac{3(200\times10^9)(555\times10^{-15})}{0.0889^3}=473.96\ N/m$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{eff}}}\quad \&\quad m_{eff}=M+0.001055=\frac{3EI}{l^3 4\pi^2 f^2}=\frac{473.96}{4\pi^2(400)}\qquad M=0.0289\ kg$$

2-32 وزنه‌ای به جرم 0.907 kg به انتهای فنری با سختی 7.0 N/cm چسبیده است. ثابت میرایی بحرانی را بیابید.

$$c=2\sqrt{km}=2\sqrt{700(0.907)}=50.4\ N.s/m$$

2-33 برای کالیبره کردن دمپر، سرعت پیستون آن را هنگام بارگذاری اندازه می‌گیرند. اگر وزنه $\frac{1}{2}$ lb، سرعت ثابت 1.20 in/s را پدید آورد، ضریب میرایی آن را به هنگام کار در سیستم مساله 2-32 به دست آورید.

$$f_d=cv\rightarrow c=\frac{f_d}{v}=\frac{0.50}{1.20}=0.417\ lb.s/in$$

$$c=0.417(4.448)(\frac{1}{2.54})=0.7303\ N.s/cm\qquad \zeta=\frac{c}{c_c}=\frac{73.03}{50.4}=1.45$$

2-34 یک سیستم ارتعاشی با شرایط آغازین $x=0$ و $\dot{x}=\nu_0$ مرتعش می‌شود. برای (آ) $\zeta=2.0$ (ب) $\zeta=0.50$ (پ) $\zeta=1.0$ باشد، معادله حرکت را بیابید. منحنی های بی‌بعد را برای هر سه بخش در منحنی $\frac{x\omega_n}{\nu_0}$-$\omega_n t$ رسم کنید.

(آ) $\zeta=2.0\qquad A=-B=\frac{\nu}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\qquad \frac{x\omega_n}{\nu_0}=\frac{1}{3.464}\left\{e^{-.268\omega_n t}-e^{-3.732\omega_n t}\right\}$

(ب) $\zeta=0.5\quad \frac{x\omega_n}{\nu_0}=\frac{1}{0.865}e^{-0.5\omega_n t}\sin(0.865\omega_n t)$

(پ) $\zeta=1.0\quad \frac{x\omega_n}{\nu_0}=(\omega_n t)e^{-\omega_n t}$

2-35 یک سیستم ارتعاشی میرا به جرم 2.267 kg و با فنری به سختی 17.5 N/cm، دارای دو دامنه متوالی 1.00 و 0.98 است. به دست آورید: (آ) فرکانس طبیعی سیستم میرا (ب) کاهش لگاریتمی، (پ) ثابت میرایی و (ت) ضریب میرایی.

$$\delta=\ln(\frac{x_1}{x_2})=\ln(\frac{1.0}{0.98})=0.0202\qquad \zeta=\frac{\delta}{2\pi}=\frac{0.0202}{2\pi}=0.003215$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1750}{2.267}}=27.78\cong\omega_d\qquad c=2m\omega_n\zeta=0.405N.s/m$$

2-36 یک سیستم ارتعاشی شامل جرم 4.534 kg و با فنری به سختی 35.0 N/cm و دمپری با ضریب میرایی 0.1243 N.s/cm است. بیابید: (آ) ضریب میرایی، (ب) کاهش لگاریتمی و (پ) نسبت دو دامنه متوالی.

$\zeta=\frac{c}{2m}\sqrt{\frac{km}{k}}=0.0493 \quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1/\zeta^2}}=0.3101 \qquad \frac{x_n}{x_n+1}=e^{\delta}=2.718^{0.3101}=1.364$

2-37 یک سیستم ارتعاشی شامل جرم $m=17.5g$، فنر $k=70.0N/cm$ و دمپر $c=0.70N.s/cm$ است. به دست آورید: (آ) ضریب میرایی، (ب) فرکانس طبیعی نوسانات میرا، (پ) کاهش لگاریتمی، و (ت) نسبت دو دامنه متوالی.

$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}}=0.10 \quad f_d=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m(1-\zeta^2)}{k}}=3.167\ Hz$

$\delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1/\zeta^2}}=0.6315 \qquad \frac{x_n}{x_{n+1}}=e^{0.6315}=1.874$

2-38 معادله دیفرانسیل حرکت سیستم شکل P2-38 را بیابید. (آ) ثابت میرایی بحرانی، و (ب) فرکانس طبیعی نوسانات میرا را بیابید.

$\sum M_o=-ac(a\dot{\theta})-ak(a\theta)=ml^2\ddot{\theta} \qquad \ddot{\theta}=\frac{c}{m}(\frac{a}{l})^2\dot{\theta}+\frac{k}{m}(\frac{a}{l})^2\theta=0$

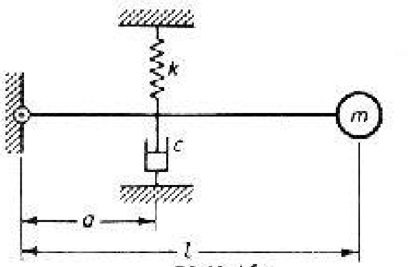
اگر $\theta=e^{st}$ باشد داریم،

$s_{1,2}=\frac{c}{2m}(\frac{a}{l})^2\pm\sqrt{(\frac{ca^2}{2ml^2})-\frac{k}{m}(\frac{a}{l})^2}$

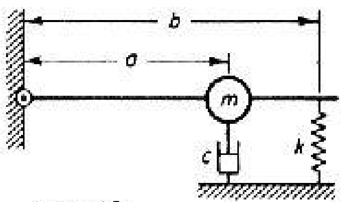
برای میرایی بحرانی

$\frac{c_c a^2}{2ml^2}=(\frac{a}{l})\sqrt{\frac{k}{m}}\rightarrow c_c=2(\frac{l}{a})\sqrt{km}$

$\omega_d=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}-(\frac{ca}{2ml})}=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \omega_n=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}\rightarrow \zeta=\frac{ca}{2l\sqrt{km}}$



شکل P2-38



شکل P2-39

2-39 معادله دیفرانسیل حرکت سیستم نشان داده در شکل P2-39 را به دست آورید و فرکانس طبیعی نوسانات میرا و ثابت میرایی بحرانی را بیابید.

$\sum M_c=ma^2\ddot{\theta}=-kb^2\theta-ca^2\dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta}=\frac{c}{m}\dot{\theta}+\frac{k}{m}(\frac{b}{a})^2\theta=0$

$\omega_n=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \& \quad \omega_d=\sqrt{(\frac{b}{a})^2-(\frac{c}{2m})^2} \qquad c_c=\frac{2b}{a}\sqrt{km}$

2-40 یک سیستم جرم-فنر با میرایی لزج، از موقعیت تعادل کشیده و رها می‌شود. اگر دامنه آن در هر نوسان 5٪ کاهش یابد، میرایی بحرانی سیستم چه اندازه است؟

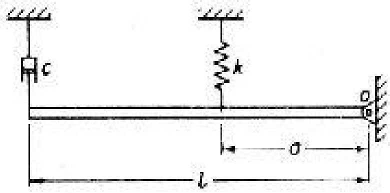
$$\delta=\ln\left(\frac{1}{0.95}\right)=0.05129 \qquad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=0.05129 \rightarrow \zeta=0.00816$$

2-41 یک میله صلب یکنواخت مانند شکل P2-41، به جرم m و طول l در نقطه O لولا شده و بر یک فنر و دمپر سوار شده‌است. اگر θ زاویه خروج از تعادل استاتیکی را نشان دهد، (آ) معادله‌ای برای θهای کوچک (ممان اینرسی میله حول O، $\frac{ml^2}{3}$ است)، (ب) معادله‌ای برای فرکانس طبیعی نامیرا و (پ) دستوری برای میرایی بحرانی بیابید.

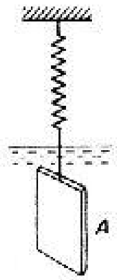
$$\sum M_o=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}=-cl^2\dot{\theta}-ka^2\theta \qquad \ddot{\theta}+\frac{3c}{m}\dot{\theta}+\frac{3k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\theta=0=\ddot{\theta}+2\zeta\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\,\theta$$

$$\omega_n=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{3k}{m}} \rightarrow s_{1,2}=\frac{30}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{3c}{2m}\right)^2-\frac{3k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2}$$

$$c_c=\frac{2a}{3l}\sqrt{3km} \rightarrow \omega_d=\frac{a}{l}\sqrt{\left(\frac{3k}{m}\right)\left\{1-\frac{3}{4mk}\left(\frac{cl}{a}\right)^2\right\}}$$



شکل P2-41



شکل P2-42

2-42 ورق نازکی به وزن W و مساحت A، از انتهای فنری آویزان است و مانند شکل P2-42 در یک سیال لزج نوسان می‌کند. اگر τ_1 زمان تناوب طبیعی نوسانات نامیرای آن (وقتی که در هوا ارتعاش می‌کند)، و τ_2 زمان تناوب میرای ورق در سیال باشد، نشان دهیدکه:

$$\mu=\frac{2\pi W}{gA\,\tau_1\tau_2}\sqrt{\tau_2^2-\tau_1^2}$$

که نیروی میرایی O وارد بر ورق $F_d=\mu 2Av$، 2A مساحت کل ورق و v سرعت است.

$$\frac{W}{g}\ddot{x}+2\mu A\dot{x}+kx=0 \rightarrow \tau_1=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}$$

$$f_2=\frac{1}{\tau_2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}-\left(\frac{\mu Ag}{W}\right)^2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{l_1}\right)-\left(\frac{\mu Ag}{W}\right)^2}$$

$(\frac{2\pi}{\tau_2})^2-(\frac{2\pi}{\tau_1})^2=-(\frac{\mu Ag}{W})^2 \rightarrow \mu=\frac{2\pi w}{Ag}\sqrt{\frac{\tau_2^2-\tau_1^2}{\tau_1^2\tau_2^2}}=\frac{2\pi W}{Ag\tau_1\tau_2}\sqrt{\tau_2^2-\tau_1^2}$

2-43 یک توپ جنگی به وزن 1200 lb دارای فنری به سختی 20000 lb/ft است. اگر پس از شلیک، توپ 4 ft عقب بیاید، بیابید (آ) سرعت اولیه عقب نشستن توپ، (ب) ضریب میرایی بحرانی دمپری که پس از عقب‌نشستن توپ کار می‌کند و (پ) زمان موردنیاز برای اینکه توپ به فاصله 2 in از موقعیت اولیه‌اش برسد.

$\omega_n=23.17$ rad/s $\rightarrow 0.5m\dot{x}^2_{max}=0.5kx^2_{max} \rightarrow \dot{x}_{max}=92.66$ ft/s

از معادله 19-2.3 داریم،

$x=e^{-\omega nt}\{0+\omega_n x(0)\}+x(0)e^{-\omega nt}\{1+\omega_n t\}=e^{-\omega_n t}\{1+\omega_n t\}=0.417$

از روش آزمون و خطا داریم:

$\omega_n t$	$e^{-\omega_n t}$	$e^{-\omega_n t}\{1+\omega_n t\}$
4.90	0.00745	0.439
4.96	0.007017	0.4182
7.97	0.006947	0.04147

$\omega_n t=4.96 \rightarrow t=0.214$ s

2-44 پیستونی به جرم 4.53 kg با سرعت 15.24 m/s درون لوله‌ای حرکت می‌کند که مانند شکل P2-44 آن را در انتهای لوله فنر و دمپر کارگذاشته‌اند. دامنه بیشینه پیستون را پس از برخورد با فنر و دمپر بیابید. چه مدت حرکت می‌کند؟

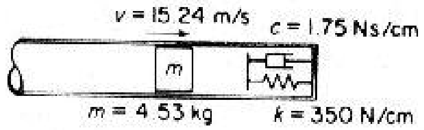
$\omega_n=\sqrt{\frac{3500}{4.53}}=87.89$ rad/s $\tau=\frac{2\pi}{\omega_n}=0.0715$

$c_c=2\sqrt{km}=797.04$ & $\zeta=0.2197$ $\tau_d=\tau\sqrt{1-\zeta^2}=0.0697$

$x=\frac{x(o)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{Sin}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})$

در دامنه بیشینه داریم:

$\mathrm{Sin}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})\cong 1.0 \rightarrow \omega_n t=\frac{\pi}{4}$ $x=0.1496 \rightarrow t=\frac{\tau_d}{4}=0.0174$ s



شکل P2-44

2-45 یک جاذب ارتعاشی باید چنان طرحی شود تا overshoot آن 10٪ تغییر مکان آغازین آن باشد. اگر ضریب میرایی ζ برابر با $\frac{1}{2}\zeta_1$ باشد، overshoot چه اندازه خواهد بود؟

از معادله 2.3-16 داریم: $x(o)=0$

$$\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}=\pi \rightarrow \cos(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})=-1 \ \& \ e^{-\zeta\omega_n t}=1$$

با روش آزمون و خطا $0.059 = \zeta_1$ به دست می‌آید.

$$\zeta=\frac{\zeta_1}{2}=0.295 \rightarrow \sqrt{1-\zeta^2}=0.9555$$

$$x)_{overshoot}=e^{(-0.295\pi/0.9555)}=0.379=37.9\%$$

2-46 محدودیتهای معادله $2\delta = \frac{\Delta U}{U}$ را برای $\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{2}$ توضیح دهید.

$$\frac{\Delta U}{U}=1-\exp(\frac{x_2}{x_1})^2=1-\exp(-2\zeta)=2\zeta-\frac{(2\zeta)^2}{2!}+\frac{(2\zeta)^3}{3!} \qquad (\frac{x_2}{x_1})=0.5^2=\exp(-2\zeta)$$

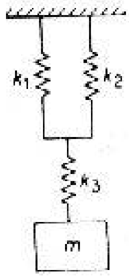
$2\zeta=1.386=$ جمله نخست سری $\qquad \frac{\Delta U}{U}=1-0.5^2=\frac{3}{4}=0.75$

اندازه درست $\frac{x_2}{x_1}$ برابر 0.5 است. خطای جمله $2\zeta \cong \frac{\Delta U}{U}$ برابر است با:

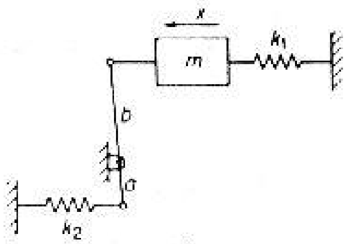
$$\frac{1.386-0.75}{0.75}=84.8\%$$

2-47 سختی موثر فنر شکل P2-47 را بیابید. k_1+k_2 با k_3 سری است.

$$k_{eff}=\frac{(k_1+k_2)k_3}{k_1+k_2+k_3}$$



شکل P2-47



شکل P2-49

2-48 انعطاف‌پذیری یک تیر به طول L با تکیه‌گاه ساده در $\frac{1}{3}$ از انتهای تیر چیست؟

$$y(x)=\frac{Pbx}{6EIL}(L^2-x^2-b^2) \qquad 0\le x\le a$$

اگر $x=\frac{L}{3}$ باشد سپس:

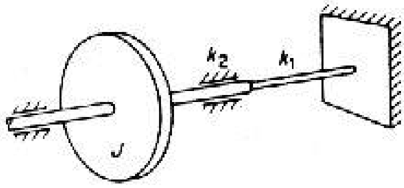
$$y(\frac{L}{3})=\frac{4PL^3}{243EI} \qquad \text{انعطاف‌پذیری} = \frac{y}{p}=\frac{4L^3}{243EI}$$

2-49 سختی موثر سیستم شکل P2-49 را برحسب x بیابید.

$$F=k_1 b\theta+\frac{a}{b}k_2 a\theta \quad \& \quad x=b\theta \qquad F=k_1x+(\frac{a}{b})^2 k_2 x \rightarrow k_{eff}=\frac{F}{x}=k_1+(\frac{a}{b})^2 k_2$$

2-50 سختی موثر سیستم شکل P2-50 را بیابید. سختی دو محور سری k_1 و k_2 است.

$$k_{eff}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$



شکل P2-50

2-51 سیستم جرم-فنر m و k، با تغییر مکان اولیه واحد و سرعت اولیه صفر به راه می‌افتد. منحنی lnX-n را رسم کنید که در آن X دامنه و در تناوب n است. (آ) $\zeta = 0.05$ و (ب) میرایی کولنی با نیروی میرایی $F_d=0.05k$ است. چه موقع دو دامنه برابر می‌شوند.

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left\{[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}]\mathrm{Sin}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})+\mathrm{Cos}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})\right\}$$

$$\omega_n=2\pi,2\pi,6\pi \rightarrow x(t)\cong\exp(-\zeta\omega_n t)(0+1)$$

برای اصطکاک کولنی،

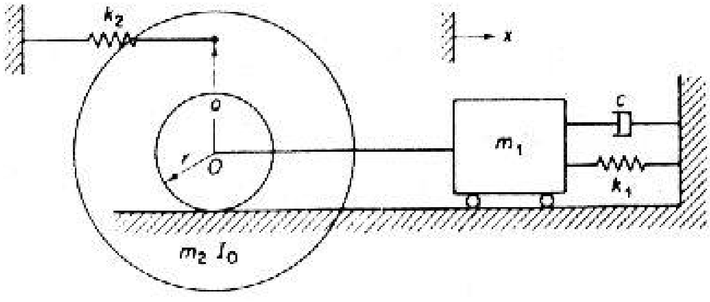
$$X_1-X_2=\frac{4F_d}{k}=0.2 \rightarrow X_n=1-0.2n$$

2-52 معادله دیفرانسیل حرکت و میرایی بحرانی سیستم شکل P2-52 را بیابید.

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}I_\circ(\frac{\dot{x}^2}{r})^2 \qquad U=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2(\frac{ax}{\pi+x})^2 \qquad \frac{d}{dt}(T+u)=-c\dot{x}\dot{x}$$

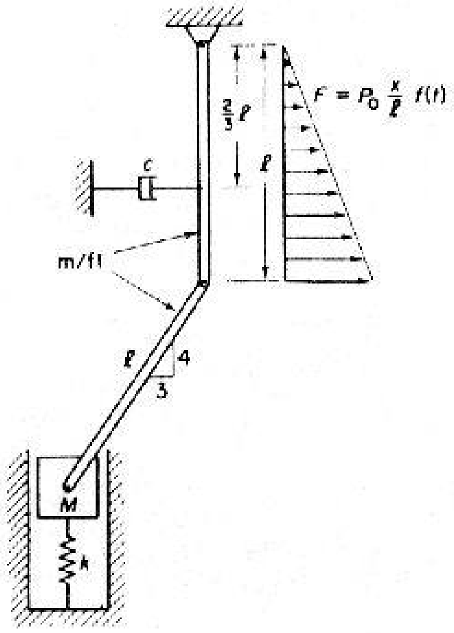
$$(m_1+m_2+\frac{I_\circ}{r^2})\ddot{x}+(k_1+k_2+\frac{k_2a}{r_0})x+c\dot{x}=0$$

$$c_c=2\sqrt{k_{eff}\cdot m_{eff}}=2\sqrt{(k_1+k_2+\frac{k_2a}{r})(m_1+m_2+\frac{I_\circ}{r^2})}$$



شکل P2-52

2-53 معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد سیستم شکل P2-53 را بیابید.



شکل P2-53

$$x^2+y^2=l^2 \rightarrow 2xdx+kydy=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \rightarrow \dot{y}=-\frac{3}{4}\dot{x}$$

$$T=\frac{1}{2}ml\left(\frac{l^2}{3}\right)\left(\frac{\dot{x}}{l}\right)^2+\frac{1}{2}\,ml\,\left\{\left(\frac{\dot{x}}{l}\right)^2+\left(\frac{\dot{y}}{l}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\,ml\frac{l^2}{12}\,\left\{\frac{4\dot{x}}{5l}+\frac{3\dot{y}}{5l}\right\}+\frac{1}{2}\,M\dot{y}^2$$

$$=\frac{1}{2}ml\,\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{9}{64}+\frac{1}{12}\,\left[\frac{16}{25}+\frac{81}{400}+\frac{72}{100}\right]\right\}\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\frac{9}{16}\dot{x}^2$$

$$=\frac{1}{2}(0.8541ml+0.5625\ M)x^2$$

$$U=\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}k\frac{9}{16}x^2 \rightarrow \frac{d}{dt}(T+U)=-c\frac{2}{3}l\frac{\dot{x}}{l}=-\frac{2}{3}c\dot{x}$$

$$(0.8541\ ml+0.5625\ M)\ddot{x}+0.5625\ kx+\frac{2}{3}c\dot{x}=0$$

۳ ارتعاش واداشته هماهنگ

3-1 قطعه‌ای از یک دستگاه به جرم 1.95 kg در یک فضای لزج مرتعش می‌شود. اگر نیروی هماهنگ 24.46 N با دامنه تشدید 1.27 cm و با زمان تناوب 0.25 آن را مرتعش کند، ضریب میرایی سیستم را بیابید.

$$x_{\text{تشدید}}=\frac{F}{c\omega_n}=\frac{F\tau}{2\pi c} \qquad c=\frac{F\tau}{2\pi x_{\text{تشدید}}}=\frac{24.46(0.2)}{2\pi(1.27\times10^{-2})}=61.3\ \text{N.s/m}$$

3-2 اگر سیستم مساله 3-1 با یک نیروی هماهنگ با فرکانس 4 cps مرتعش شود، درصد افزایش دامنه ارتعاش واداشته، در نبود دمپر چه خواهد بود؟

$$\frac{X_{\text{نامیرا}}}{X_{\text{میرا}}}=\sqrt{\frac{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}{(\omega_n^2-\omega^2)^2}}=R$$

$$\omega_n=\frac{2\pi}{\tau}=\frac{6.283}{0.2}=31.416\text{rad/s} \qquad \omega=8\pi=25.13\text{rad/s}$$

$$\frac{c\omega}{m}=\frac{61.3(8\pi)}{1.95}=490.1 \rightarrow R=2.44$$

3-3 وزنه‌ای چسبیده به فنری با سختی 525 N/m دارای دمپر است. هنگامی که وزنه کشیده و رها می‌شود، زمان تناوب نوسان، 1.80 s و نسبت دامنه‌های متوالی $\frac{4.2}{1.0}$ به‌دست‌می‌آید. هنگامی که نیروی F=2Cos3t بر سیستم وارد می‌شود، دامنه و زاویه فاز را بیابید.

$$\delta=\ln(4.2)=1.435=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \zeta=0.223$$

$$\omega_n=3.5806\text{rad/s} \ \& \ \omega=3\text{rad/s} \ \& \ \frac{\omega}{\omega_n}=0.8378$$

$$X=\frac{F_\circ}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]^2}}=0.00797\text{m}=0.797\text{cm}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}=\tan^{-1}1.2538=51.43^\circ$$

3-4 نشان دهید که در سیستم جرم-فنر میرا، دامنه بیشینه در نسبت فرکانسی به‌دست‌آمده

از رابطه زیر رخ می‌دهد:

$$(\frac{\omega}{\omega_n})_p=\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$(\frac{X}{X_\circ})^2=\frac{1}{(1-r)^2+(4\zeta^4 r)}=0 \quad \& \quad X_\circ=\frac{F}{k} \quad \& \quad r^2=(\frac{\omega}{\omega_n})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{X}{X_\circ})=\frac{2(1-r)-4\zeta^2}{[(1-r)^2+4\zeta^2 r]^2}=0 \rightarrow r=1-2\zeta^2=(\frac{\omega}{\omega_n})_p^2 \qquad (\frac{\omega}{\omega_n})_p=\sqrt{1-2\zeta^2}$$

3-5 یک سیستم جرم-فنر با نیروی $F_\circ \mathrm{Sin}\omega t$ تحریک می‌شود. دامنه تشدید 0.58 cm است. در فرکانس تشدید 0.80، دامنه 0.46 است. ضریب میرایی یا ζ سیستم را بیابید.

$$(\frac{\omega}{\omega_n})_{\text{تشدید}}=1.0 \qquad \frac{X}{X_\circ}=\frac{1}{2\zeta}=\frac{0.58}{X_\circ} \rightarrow X_\circ=1.16\zeta$$

در $\frac{\omega}{\omega_n}\neq 1.0$ داریم،

$$\frac{X}{X_\circ}=\frac{1}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^2}=\frac{0.46}{X_\circ} \rightarrow r=0.8 \quad \& \quad \zeta=0.1847$$

3-6 با جایگذاری پاسخ عمومی حالت پایدار $x=C_1\mathrm{Sin}\omega t+C_2\mathrm{Cos}\omega t$ در معادله دیفرانسیل حرکت و حل C_1 و C_2، روابط (3.1-3) و (3.1-4) را به‌دست‌آورید.

$$x=C_1\mathrm{Sin}\omega t+C_2\mathrm{Cos}\omega t \qquad \dot{x}=C_1\omega\mathrm{Cos}\omega t-C_2\omega\mathrm{Sin}\omega t \quad \ddot{x}=-C_1\omega^2\mathrm{Sin}\omega t-C_2\omega^2\mathrm{Cos}\omega t$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F$$

$$-m\omega[C_1\mathrm{Sin}\omega t+C_2\mathrm{Cos}\omega t]+C\omega[C_1\mathrm{Cos}\omega t-C_2\mathrm{Sin}\omega t]+k[C_1\mathrm{Sin}\omega t+C_2\mathrm{Cos}\omega t]=F_\circ\mathrm{Sin}\omega t$$

$$\begin{cases}[-m\omega^2C_1-c\omega C_2+kC_1]\mathrm{Sin}\omega t=F_\circ\mathrm{Sin}\omega t\\ [-m\omega^2C_2+c\omega C_1+kC_2]\mathrm{Cos}\omega t=0\end{cases}$$

$$\rightarrow C_1=\frac{(-k+m\omega^2)C_2}{c\omega} \quad \& \quad \frac{(-k+m\omega^2)(k-m\omega^2)C_2}{c\omega}-c\omega C_2=F_\circ$$

$$\rightarrow C_2=\frac{c\omega F_\circ}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}=\frac{(k-m\omega^2)F_\circ}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}$$

3-7 در سیستم شکل P3-7، معادله حرکت را بیابید و دامنه حالت‌پایدار و زاویه فاز را با به کارگیری جبر مختلط به‌دست‌آورید.

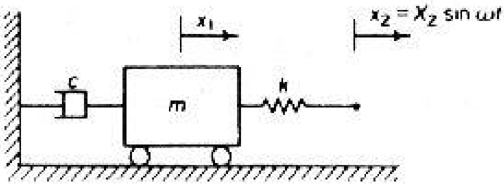
$$m\ddot{x}_1=-c\dot{x}_1+k(x_2-x_1) \rightarrow m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1+kx_1=kX_2\mathrm{Sin}\omega t$$

اگر $x_2=X_2e^{i\omega t}$ باشد، آنگاه داریم:

$$x=X_1e^{i(\omega t-\phi)}=\bar{X}_1e^{-i\phi}e^{i\omega t} \qquad [(k-m\omega^2)+i\omega c]\bar{X}_1=kX_2$$

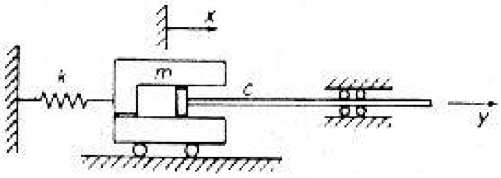
$$x_1=\frac{kX_2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+i\omega c}}=\frac{kX_2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$

$$X_1=\frac{kX_2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \quad \& \quad \phi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$$



شکل P3-7

3-8 در شکل P3-8، سیلندر m چسبیده به فنر k، با اصطکاک‌لزج c درون پیستون با $y=A\sin\omega t$ حرکت می‌کند. دامنه حرکت سیلندر و زاویه فاز آن را نسبت به پیستون بیابید.



شکل P3-8

$$m\ddot{x}=c(\dot{y}-\dot{x})+kx \rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y} \qquad y=Ye^{i\omega t} \rightarrow \dot{y}=i\omega Ye^{i\omega t}$$

$$x=Xe^{i(\omega t-\phi)}=\bar{X}e^{-i\phi}e^{i\omega t}=Xe^{i\omega t} \qquad (k-m\omega^2+i\omega c)X=i\omega Y$$

$$\bar{X}=\frac{i\omega Y}{k-m\omega^2+i\omega c}=\frac{i\omega Ye^{-i\psi}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=Xe^{-i\varphi}$$

$$Xe^{-i\phi}=\frac{i\omega Ye^{-i\psi}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \qquad e^{-i\phi}=e^{-i\psi}=e^{-i(\psi-\pi/2)}$$

$$X=\frac{\omega Y}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \quad \phi=\psi-\frac{\pi}{2} \rightarrow \tan\psi=\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$$

3-9 دستگاه شکل P3-9 برای یافتن ویژگیهای ارتعاشی سازه‌ای به جرم 181.4 kg به کار می‌رود. هنگام حرکت سازه از موقعیت تعادل دورسنج 900 rpm را نشان می‌دهد، که جرمهای خارج ازمرکز در بالاترین نقطه هستند و دامنه برابر 21.6 mm است. اگر نامیزانی هر جرم 0.0921 kg.m باشد، (آ) فرکانس طبیعی سازه، (ب) ضریب میرایی سازه، (پ) دامنه در 1200rpm و (ت) موقعیت زاویه‌ای جرمها را در لحظه‌ای که سازه از موقعیت تعادل پایین می‌آید به‌دست‌آورید.

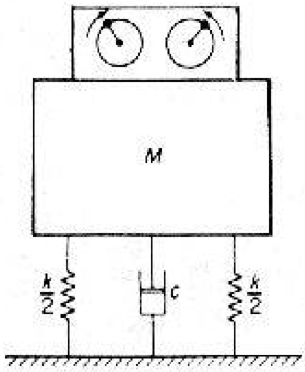
$f_n = 15\ \text{cps} = 900\ \text{cpm}$

$$\zeta = \frac{me}{2MX} = \frac{0.0921}{2(181.4)(21.6\times10^{-3})} = 0.0118$$

$$1200\ \text{rpm:} \qquad \frac{\omega}{\omega_n} = 0 \qquad \frac{1200}{900} = 1.333$$

$$X = \frac{me}{M}(1.333)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-1.333^2)^2 + [(2)(0.0118\times1.333)]^2}} = \left(\frac{0.0921}{181.4}\right)\left(\frac{1.777}{0.6047}\right) = 0.00149\text{m}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2(0.0118)(1.333)}{1-1.333^2} = \tan^{-1}(-0.0444) = 180^\circ - 2.32^\circ = 177.68^\circ$$



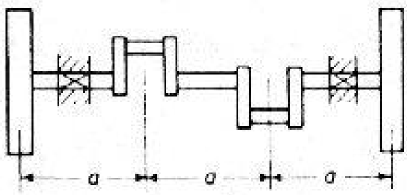
شکل P3-9

3-10 در دیسک دواری که حول مرکز هندسی‌اش می‌چرخد، دو سوراخ A و B را پدید آورده‌اند. قطر و موقعیت سوراخ A، $d_A=310$ mm، $r_A=30$ cm و $\theta_A=0^\circ$ است. قطر و موقعیت B، $d_B=5$ mm، $r_B=20$ cm و $\theta_B=90^\circ$ است. قطر و موقعیت سوراخ سوم را به شعاع 10 cm چنان بیابید که دیسک میزان باشد.

جرم سوراخ $= t_\gamma d^2$ & نامیزانی $= t_\gamma r d^2$

$$\sum M_x = 10 d_c^2 \ \text{Sin}\ \theta = 20\times5^2 \quad \& \quad \sum M_y = 10 d_c^2 \ \text{Cos}\ \theta = 30\times10^2$$

$$\tan\theta = 0.1667 \ \rightarrow\ \theta = 9.462^\circ \ \rightarrow\ \text{Sin}\theta = 0.1644 \qquad d_c^2 = 304.1\ \text{mm}^2 \ \rightarrow\ d_c = 17.44\ \text{mm}$$



شکل P3-10

3-11 در میل‌لنگ موتور دوسیلندر شکل P3-11، هر لنگ به وزن w lb در شعاع r جای

گرفته‌است. چه جرمهایی باید به هر دو چرخ‌لنگر در شعاع r in چسباند تا میزان شود.

P و Q را با نیروی معادله سیستم در انتهای صفحه جایگزین کنید. $P=Q=r\omega^2 w$

بالا $r=w/3$: وزن تعادل B پایین $r=w/3$: وزن تعادل A

3-12 یک دیسک صلب به وزن 10 lb، به وسط یک محور فولادی به طول 2 ft و قطر 0.5 in وصل شده‌است. سرعت بحرانی کمینه را بیابید.(تکیه‌گاه محور، یاتاقان ساده است.)

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad k=\frac{48EI}{l^3} \qquad I=\frac{\pi d^4}{64}$$

$$m=m_{\text{دیسک}}+0.486_{\text{محور}} \qquad \& \qquad k=309.0\ \text{lb/in}$$

$$0.486m_{\text{محور}}=\frac{0.648}{386} \rightarrow m=\frac{10}{386}+\frac{0.648}{386}=\frac{10.65}{386}$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{309\ (386)}{10.65}}=16.84\text{cps}=1028\ \text{rpm}$$

3-13 سرعت بحرانی کمینه مساله 3-12 را در دستگاه SI دوباره بیابید.

$$W=10\text{lb}=44.48\ \text{N} \qquad m=\frac{44.48}{9.81}=4.534\ \text{kg}$$

$$g=386\text{in/s}^2=9.81\ \text{m/s}^2 \qquad k=\frac{48EI}{l^3} \qquad E=200\times10^9\ \text{N/m}^2$$

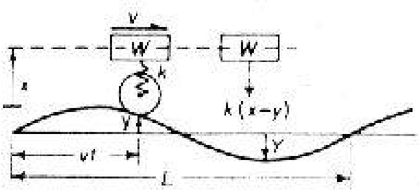
$$l=2\times0.3048=0.6096\ \text{m} \quad d=0.5(2.54\times10^{-2})=1.270\times10^{-2}\ \text{m}$$

$$I=\frac{\pi d^4}{64}=0.1277\times10^{-8}\ \text{m}^4 \qquad k=54116\ \ \text{N/m}$$

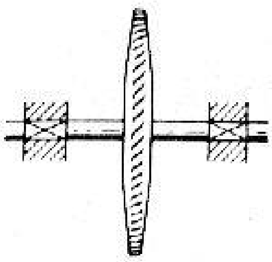
$$0.486\ m_{\text{محور}}=0.486\frac{\pi}{4}(1.27\times10^{-2})^2(0.6096) \qquad \rho=0.2938$$

$$\rho=7830\text{kg/m}^3=\ \text{جگالی} \qquad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{54116}{4.535+0.2938}}=16.86\ \text{Hz}$$

3-14 روتور توربینی به جرم 13.6 kg از میانه محور فولادی به طول 0.4064m، مانند شکل P3-14 سوار شده‌است. نامیزانی روتور 0.2879 kgcm است. نیروی وارد بر یاتاقانها را در 6000 rpm بیابید. اگر قطر محور فولادی 2.54 cm باشد، نتایج را با حالتی که همین روتور بر محوری به قطر 1.905 cm سوار است مقایسه کنید.(محور روی یاتاقان ساده است.)



شکل P3-16


شکل P3-14

$$d=2.54\ \text{cm}: \quad I=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi(2.54)^2}{64\times100^4}=2.043\times10^{-8}\ \text{m}^4$$

$k=\frac{48EI}{l}=2.922\times10^6$ N/m & m=14.38 kg

$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2.922\times10^6}{14.38}}=71.74$ Hz =4304 rpm $\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{6000}{4304}=1.394$

$$r=\frac{e(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}=-2.06e \qquad me=0.2879 \text{ kg.cm}$$

$e=\frac{0.2879}{13.6}=0.02117$ cm → $r=0.206(0.02117)=-0.04316$ cm $F=m(r+e)\omega^2=1273$ N

d=1.905 cm: $0.486m_{\text{محور}}=0.486(\frac{\pi}{4})(0.01905^2\times0.4064)(7830)=0.7708$

$m=m_{\text{دیسک}}+0.483m_{\text{محور}}=14.04$ kg

$I=0.6464\times10^{-8}m^4$ & $k=0.9441\times10^6$ $f_n=41.27$ Hz =2476 rpm

$\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{6000}{2476}=2.423$ → $r=-0.02552$ $r+e=0.00435$ → F=241.1 N

3-15 در توربین‌هایی که با سرعتی بالاتر از سرعت بحرانی کار می‌کنند، موانعی کار می‌گذارند تا به‌هنگام گذر از سرعت بحرانی دامنه را محدود کند. در توربین مساله 3-14 اگر لقی محور 2.54cm و موانع 0.0508cm و خروج‌ازمرکز 0.0212cm باشد، زمان لازم برای برخورد محور به موانع را بیابید. فرض کنید که در سرعت بحرانی، دامنه صفر باشد.

$r=r_o+\frac{e\omega t}{2}$ → $0.0508=0+0.0212(2\pi\times100)\frac{t}{2}$ $t=\frac{0.0508}{6.6602}=0.0075$ s

3-16 شکل P3-16 نمودار ساده فنری یک خودرو را در حال عبور از جاده‌ای ناهموار نشان می‌دهد. معادله دامنه W را برحسب سرعت‌بیابیدوسرعت‌نامطلوب‌رابه‌دست‌آورید.

$m\ddot{x}=-k(x-y)$ $y=Y\sin(\frac{2\pi vt}{L})$ $m\ddot{x}+kx=kY\sin(\frac{2\pi vt}{L})=kY\sin(\omega t)$

$\omega=\frac{2\pi v}{L}$ & $x=X\sin(\omega t)$

$X=\frac{Y}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ → $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{\omega}{\omega_n}=1$: $V=\frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

3-17 فنرهای یک خودرو در اثر وزن خودرو به اندازه 10.16 cm فشرده شده‌است. هنگامی که خودرو از جاده‌ای با شکل تقریبی موج سینوسی با دامنه 7.62 cm و طول موج 14.63 می‌گذرد، سرعت بحرانی را بیابید. دامنه ارتعاش در سرعت 64.4 km/h چقدر خواهد

بود؟(از میرایی چشمپوشی کنید.)

با مراجعه به مساله 3-16 و رابطه 2.1-10 کتاب داریم:

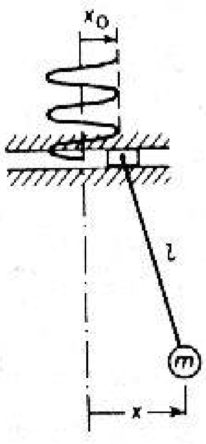
$$f_n=\frac{15.76}{\sqrt{\Delta}}=\frac{15.76}{\sqrt{101.6}}=1.563\ Hz \qquad \omega_n=2\pi f_n=9.824\ rad/s$$

$$v_{\text{بحرانی}}=\frac{L\omega_n}{2\pi}=\frac{14.63(9.82)}{2\pi}=22.87\ m/s \qquad v=64.4\ km/h=17.89\ m/s$$

$$\omega=\frac{2\pi v}{L}=\frac{2\pi(17.89)}{14.63}=7.683 rad/s$$

$$(\frac{\omega}{\omega_n})^2=(\frac{7.683}{9.824})=0.117 \qquad X=\frac{7.62}{1-0.6117}=19.62\ cm$$

3-18 نقطه آویختن آونگ ساده شکل P3-18 باحرکت هماهنگ $x_\circ = X_\circ Sin\omega t$ در خط افق نوسان می‌کند. با به کارگیری دستگاه مختصات نشان داده در شکل، معادله دیفرانسیل حرکت را برای نوسانات کوچک بنویسید. پاسخ $\frac{x}{x_\circ}$ را بیابید و نشان دهید که در $\omega=\sqrt{2}\omega_n$ در نقطه میانی l یک گره پدید می‌آید. نشان دهید که درکل، فاصله جرم از گره از رابطه $h = l(\omega_n/\omega)^2$ به‌دست می‌آید که در اینجا $\omega_n = \sqrt{g/l}$ است.



شکل P3-18

$$x \cong x_\circ + l\theta \quad \& \quad \theta=\frac{x-x_\circ}{l} \quad m\ddot{x}=-mg\theta=\frac{-mg}{l}(x-x_\circ)$$

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x=\frac{g}{l}x_\circ \qquad x_\circ=X_\circ Sin\omega t \qquad x=XSin\omega t$$

$$X=\frac{X_\circ}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad \& \quad \omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

در $\omega=\sqrt{2}\omega_n$ ، $X=-X_\circ$ است و گره در $\frac{1}{2}$ است.

$$\frac{h}{|X|}=\frac{l-h}{|X_\circ|} \rightarrow h\left|\frac{X_\circ}{X}\right|=l-h=h\left[(\frac{\omega}{\omega_n})^2-1\right]$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}>1 \rightarrow h=l(\frac{\omega_n}{\omega})^2$$

3-19 با جایگذاری دامنه و زاویه فاز یعنی $y=Y\sin\omega t$ و $x=X\sin(\omega t-\phi)$ در معادله دیفرانسیل (3.5-1)، رابطه‌های (3.5-8) و (3.5-9) را به‌دست‌آورید.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky$$

$$(k-m\omega^2)\sin(\omega t-\psi)+c\omega X\cos(\omega t-\psi)=c\omega Y\cos(\omega t)+kY\sin(\omega t)$$

پس از بسط $\sin(\omega t-\psi),\cos(\omega t-\psi)$ داریم:

$$[(k-m\omega^2)\cos\psi+\omega c\sin\psi)]X=kY$$

$$[(k-m\omega^2)\sin\psi-\omega c\cos\psi)]X=-\omega cY$$

$$\tan\psi=\frac{mc\omega^3}{k(k-m\omega^2)+(c\omega)^2}$$

$$\frac{X}{Y}=\frac{k}{k(k-m\omega^2)\cos\psi+\omega c\sin\psi}=\frac{k^2+(c\omega)^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}}$$

3-20 رادیوی هواپیمایی به وزن 106.75 N باید از ارتعاشات ایجاد شده توسط موتور که فرکانس آن در بازه 1600 cpm تا 2200 cpm است، جدا شود. نشست استاتیکی رادیو برای 85٪ جداسازی ارتعاشی چه اندازه باید باشد.

$$f=15.76\sqrt{\frac{TR^{-1}+1}{\Delta}}$$

$$\frac{1600}{60}=15.76\sqrt{\frac{\frac{100}{15}+1}{\Delta_{mm}}} \rightarrow \Delta=2.678\text{ mm}$$

برای $f=2200$ cpm ، F_{TR} کمتر است.

3-21 یک واحد سرماساز به وزن 65 lb بر روی سه فنر هر یک به سختی k lb/in نشست کرده‌است. اگر این دستگاه با سرعت 580 rpm کارکند و تنها 10٪ نیروی ارتعاشی تکیه‌گاه بر دستگاه اثر کند، k چه اندازه باید باشد؟

$$TR=\frac{1}{(\frac{\omega}{\omega_n})^2-1}=0.10 \qquad (\frac{\omega}{\omega_n})^2=11$$

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}=\frac{\omega^2}{11} \rightarrow k=\frac{m\omega^2}{11}=56.5\text{lb/in}$$

برای هر فنر

$k=\frac{1}{3}(56.5)=18.8\ \text{lb/in}$

3-22 یک دستگاه صنعتی به جرم 453.4kg بر روی فنرهایی با خیز استاتیکی 0.508 cm نشسته‌است. اگر دستگاه به اندازه 0.2303 kg.m نامیزان باشد، (آ) نیروی انتقالی به کف در 1200 rpm و (ب) دامنه دینامیکی را در این سرعت بیابید.(میرایی را ناچیز بپندارید.)

$k=\frac{Mg}{\Delta}=875561\ \text{N/m}=8755.61\ \text{N/cm} \qquad \omega_n^2=\frac{k}{m}=1931.1 \quad \& \quad \frac{\omega}{\omega_n}=8.177$

$$X=\frac{me}{M}=\frac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(\frac{\omega}{\omega_n})^2-1}=0.165\times10^{-3}\ \text{m} \qquad F_{TR}=kX=506.7\ \text{N}$$

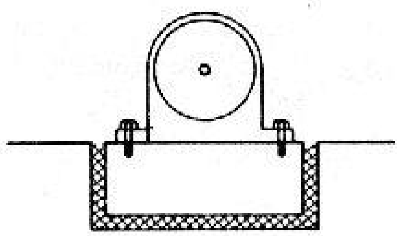
3-23 اگر دستگاه مساله 22-3 بر قطعه بزرگی از بتن به جرم 1200 kg سوار شود و سختی فنرهای زیر بتن چنان زیاد باشد که خیز استاتیکی 0.508 cm را پدید آورد، دامنه دینامیکی چه اندازه خواهد بود؟

$M=453.4+1136=1589.4\ \text{kg} \qquad k=875561\times\frac{1589.4}{453.4}=3069.295\times10^3\ \text{N/m}$

ω/ω_n نیز همان است.

$$X=\frac{me}{M}=\frac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(\frac{\omega}{\omega_n})^2-1}=0.165\times10^{-3}\ \text{m}$$

3-24 یک موتور الکتریکی به جرم 68 kg بر قطعه‌ای به جرم 1200 kg و با فرکانس طبیعی کل 160 cpm و ضریب میرایی $\zeta=0.10$ سوار شده‌است.(شکل P3-24 را بنگرید.) اگر نامیزانی موتور، نیروی هماهنگ F=100Sin31.4t را پدید آورد، دامنه ارتعاش قطعه و نیروی انتقالی کف را به‌دست‌آورید.



شکل P3-24

$M=68+1200=1268\text{kg} \qquad f_n=160\text{cpm}$

$\omega_n=2\pi\frac{160}{60}=16.75\text{rad/s} \quad \frac{\omega}{\omega_n}=\frac{31.4}{16.45}=1.8746$

$k=\omega_n^2M=355951\ \text{N/m}$

$X=110.5\times10^{-6}m=0.01105$ cm $\quad F_{TR}=kX\sqrt{1+(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}=42$ N

3-25 یک دستگاه اندازه‌گیری به جرم 113 kg باید در مکانی که شتاب 15.24 cm/s^2 و فرکانس 20 Hz دارد، کارگذاشته شود. پیشنهاد این است که دستگاه بر لاستیکی با ویژگی k=2802 N/cm و $\zeta=0.10$ سوار شود. شتاب انتقالی از دستگاه چه اندازه است؟

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=49.796$ rad/s $\qquad \omega=2\pi(20)=125.6$ rad/s

$\frac{\omega}{\omega_n}=2.5236 \qquad$ شتاب$=15.24=\omega^2Y \rightarrow Y=0.000965$ cm

$\left|\frac{X}{Y}\right|=0.2078 \rightarrow X=0.0002005$ cm

$\omega^2X=3.166\ cm/s^2=$ شتاب انتقالی

3-26 اگر دستگاه مساله 3-25 تنها بتواند شتاب 2.03 cm/s^2 را انتقال دهد، با فرض اینکه بتوان همان لاستیک را به‌کاربرد، چاره‌ای بیاندیشید. درستی پاسخ خود را بیازمایید. با افزودن جرم M، $\frac{\omega}{\omega_n}$ افزایش می‌یابد. باید X را به اندازه $(\frac{2.03}{3.166})(0.0002005)=0.0001285$ کاهش داد.

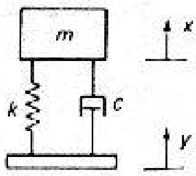
$$\frac{X}{Y}=\frac{1285}{9650}=0.1332\le\sqrt{\frac{1+(0.2\frac{\omega}{\omega_n})^2}{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2+(0.2\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

با آزمون و خطا، $\frac{\omega}{\omega_n}=4$ به دست می‌آید.

$\omega_n=31.4\sqrt{\frac{1}{M_i+M_*}} \rightarrow k=280200$ N/cm

$M_i+M_*=284 \rightarrow M_*=171$kg جرمی که باید بدان افزود.

3-27 در سیستم شکل P3-27، نشان دهید که انتقال نیرو $TR=\left|\frac{x}{y}\right|$ است. انتقال نیرو را برحسب دسی‌بل، $20\log|TR|$ برای $1<\frac{\omega}{\omega_n}<1.50$ و به ازای $\zeta=0.02,0.04,...,0.1$ رسم کنید.



شکل P3-27

معادله‌های (3.5-8) و (3.6-2) یکسان هستند. برای محاسبه $20\log|TR|$، نخست برای هر ζ با تغییر $\frac{\omega}{\omega_n}$، TR را محاسبه کنید. سپس Db را بیابید. برای این کار نوشتن برنامه کامپیوتری پیشنهاد می‌شود.

3-28 نشان دهید که انرژی تلف شده در هر بار ارتعاش یک سیستم میرای لزج چنین به دست می‌آید

$$W_d = \frac{\pi F_\circ}{k} \; \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [(2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}$$

$$W_d = \pi c \omega X^2 = 2\pi\zeta K X^2 \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\pi F_\circ^2}{k} \cdot \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [(2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}$$

3-29 نشان دهید که برای میرایی لزج، ضریب افت یا η به دامنه وابسته نیست و با فرکانس متناسب است.

$$\eta = \frac{W_d}{2\pi U} \quad \rightarrow \quad U = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \qquad W_d = \pi c w X_{max}^2 \qquad \eta = \frac{c\omega}{k}$$

3-30 معادله ارتعاش آزاد سیستم یک‌درجه آزادی را برحسب η تشدید به‌دست‌آورید.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m} \sin\omega t$$

$$X_{\text{تشدید}} = \frac{c\omega}{k} = \frac{c\omega_n}{k} = \frac{c}{c_c}\left(\frac{2m\omega_n^2}{k}\right) = 2\zeta \qquad \ddot{x} + \eta_{\text{تشدید}}\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m}\sin\omega t$$

3-31 نشان دهید که نمودار τ_n/τ_d در برابر ζ، یک ربع دایره است که در آن τ_d زمان تناوب طبیعی میرا و τ_n زمان تناوب طبیعی نامیراست.

$$\left(\frac{\tau_d}{\tau_n}\right) = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\tau_n}{\tau_d}\right)^2 = 1-\zeta^2 \qquad \left(\frac{\tau_n}{\tau_d}\right)^2 + \zeta^2 = 1 = \text{دایره‌ای به شعاع واحد}$$

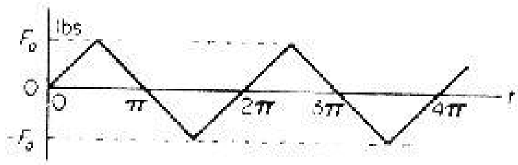
3-32 برای میرایی کم، انرژی تلف‌شده در هر بار ارتعاش تقسیم بر انرژی پتانسیل بیشینه برابر با 2δ و تنها $1/Q$ است. [معادله (3.7-6) را بنگرید.] برای میرایی لزج نشان دهید:

$$\boxed{\delta = \frac{\pi c \omega_n}{k}}$$

$$\frac{W_d}{U} = \frac{2\zeta\pi k X^2}{0.5 k X^2} = 4\zeta\pi \quad \rightarrow \quad \delta \cong 2\pi\zeta$$

$$\frac{W_d}{U} = 2\delta \quad \& \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \delta = \frac{c\pi}{m\omega_n} = \frac{c\pi\omega_n}{k} = \frac{W_d}{2m\omega_n}$$

3-38 اگر نیروی متناوب شکل P3-38 بر یک سیستم جرم-فنر وارد شود، نسبت پاسخ را بیابید و هماهنگی آن را با هماهنگ پایه مقایسه کنید.



شکل P3-38

$$F(t)=\frac{8F_\circ}{\pi^2}[\mathrm{Sin}(\omega_1 t)-\frac{1}{3^2}\mathrm{Sin}(3\omega_1 t)+\frac{1}{5^2}\mathrm{Sin}(5\omega_1 t)....]$$

$$x(t)=\frac{8\,F_\circ}{k\pi^2}\sum_{P=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2p-1)}\mathrm{Sin}[(2p-1)\,\omega_1 t]}{(2P-1)^2\quad 1-(\frac{(2P-1)\,\omega_1}{\omega_n})^2]^2+[2\zeta\,\frac{(2\,P-1)\,\omega_1}{\omega_n}]^2}$$

$$\frac{X_p}{X_1}=\frac{1}{(2p-1)^2}\qquad\frac{\left[1-(\frac{\omega_1}{\omega_n})^2\right]^2+(2\zeta\,\frac{\omega_1}{\omega_n})^2}{\left\{1-[(2p-1)\,(\frac{\omega_1}{\omega_n})^2\right\}^2+\left[2\zeta\,(2p-1)\,\frac{\omega_1}{\omega_n}\right]^2}$$

3-39 اگر نیروی تحریک در مساله P3-38، پایه یک دستگاه ارتعاشی ساده را بلرزاند، برای (آ) حرکت نسبی و (ب) برای حرکت مطلق جرم، معادله‌ای بیابید. فرض کنید که میرایی سازه $\delta=0.05$ باشد.

$$m\ddot{x}=-k(1+i\delta)(x-y)\quad\rightarrow\quad\ddot{x}+\frac{k}{m}(1+i\delta)x=\frac{k}{m}(1-i\delta)y$$

$$[-\omega_p^2+\omega_p^2(1+i\delta)]X_p=\omega_p^2(1-i\delta)\frac{8\delta_\circ(-1)^{(2p-1)}}{\pi^2(2p-1)^2}\mathrm{Sin}[(2P-1)\omega_1 t]$$

$$X_p=\frac{8\delta_\circ}{\pi^2}\;\frac{(1+i\delta)(-1)^{(2p-1)}\mathrm{Sin}[(2P-1)\omega_1 t]}{(2P-1)\,\sqrt{(1+i\delta)-[(2P-1)\omega_1/\omega_n]^2}}$$

اگر $z=x-y$ باشد، سپس

$$\ddot{z}+(\frac{k}{m})(1+i\gamma)z=-\ddot{y}$$

3-40 محور پیچش‌سنج شکل P3-40 با نوسان هماهنگ $\theta_\circ\mathrm{Sin}\omega t$ نوسان می‌کند. رابطه‌ای برای دامنه چرخ بیرونی نسبت به (آ) محور (ب) مبنای ثابت به‌دست‌آورید.

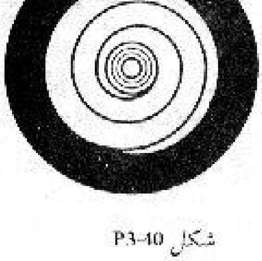
$$J\ddot{\theta}_2+k(\theta_2-\theta_1)=0\qquad\omega_n=\frac{k}{J}\qquad\ddot{\theta}+\omega_n^2\theta_2=\omega_n^2\theta_1=\omega_n^2\theta_1\mathrm{Sin}(\omega t)$$

اگر $\theta_2=\Theta_2\mathrm{Sin}(\omega t)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\Theta_2=\omega_n^2\Theta_1\cdot\frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)}\qquad\&\qquad\theta_2-\theta_1=(\Theta_2-\Theta_1)\mathrm{Sin}(\omega t)$$

$\theta_2=$ چرخ بیرونی & $\theta_1=$ محور

$$\Theta_2-\Theta_1=\frac{\omega_n^2\Theta_1}{(\omega_n^2-\omega^2)-\Theta_1}=\frac{\omega^2\Theta_1}{\omega_n^2-\omega^2}=\frac{r^2\Theta_1}{1-r^2}$$



شکل P3-40

نسبت به مبنای ثابت:

$$\Theta_2=\frac{\Theta_1}{1-r^2}$$

3-44 یک ارتعاش‌سنج با حساسیت $40\ \frac{mV}{cm/s}$ برای اندازه‌گیری بازه f=10 Hz تا f=2000 Hz به‌کار می‌رود. اگر شتابی برابر g در این بازه فرکانسی ایجاد شود، ولتاژ خروجی در (آ) 10 Hz و (ب) در 2000 Hz چه اندازه خواهد بود؟

حساسیت = 40 mV.s/cm   شتاب = $\omega^2 Y$ سرعت = ωY

(آ) 10cps → $\omega=62.83$ rad/s $\omega Y=\frac{981}{62.83}=15.61$ cm/s

ولتاژ خروجی=40(15.61)=624.5 mV

(ب) 2000cps → $\omega=12566$ rad/s $\omega Y=\frac{981}{12566}=0.07806$ cm/s

ولتاژ خروجی=40(0.07806)=3.123 mV

3-45 با به‌کارگیری معادله حرکت هماهنگ، رابطه میان سرعت و فرکانس را برای کار با ارتعاش‌سنج بیابید.

$\frac{\omega}{\omega_n}>>1 \rightarrow Z=Y$ ولتاژ ابزار $=\omega Z=\omega Y$

3-46 یک ارتعاش‌سنج دارای حساسیت 30 mV/cm/s است. با فرض اینکه محدوده خطای ابزار 3 mv (rms) باشد، فرکانس بیشینه ارتعاش را برای شتاب g بیابید. در فرکانس 200 Hz چه ولتاژی تولید می‌شود؟

حساسیت=30mV.s/cm $3mV=30(\omega Z)$ سرعت حد $=\omega Z=0.10$cm/s

$V_{min}=0.1=\frac{981}{2\pi f} \rightarrow f=1561$cps= فرکانس بیشینه

f=200 Hz : $V=\frac{981}{2\pi(200)}=0.7807$ ولتاژ خوانده شده =30(0.7807)=23.42 mV

٤ ارتعاشات گذرا

4-1 نشان دهید که t_p با پاسخ بیشینه سیستم جرم-فنر نسبت به تحریک ضربه یکه از معادله زیر به‌دست‌می‌آید.

$$\boxed{\tan\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t_p=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}$$

$$x=\frac{F}{m\omega_n(1-\zeta^2)}e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{Sin}[(1-\zeta^2)\omega_n t]$$

برای پاسخ بیشینه $\frac{dx}{dt}=0$ است.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\hat{F}.e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}\left[-\zeta\omega_n \mathrm{Sin}[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}]\right]+\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\mathrm{Cos}[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}]=0$$

$$\tan\left[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}\right]=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

4-2 تغییر مکان بیشینه سیستم جرم-فنر را به تحریک ضربه بیابید و دستور زیر را بیابید.

$$\boxed{\frac{x_{peak}\sqrt{km}}{F}=\exp\left\{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right]\right\}}$$

فرض کنید که $\theta=\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}$ است و

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \& \quad \mathrm{Sin}\theta=\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$x_{peak}=\frac{F\exp\left\{\left[\frac{-\zeta}{1-\zeta^2}\right]\tan^{-1}\left[\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right]\right\}}{m\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}.\sqrt{1-\zeta^2}$$

و با مرتب کردن این رابطه پاسخ به دست می‌آید.

4-3 نشان دهید که t_p با پاسخ بیشینه سیستم جرم-فنر میرا نسبت به تحریک نیروی $F_\circ$ از

رابطه $\omega_n t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ به دست می‌آید.

$$\frac{xk}{F_\circ}=1-\frac{\exp(-\zeta\omega_n t)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}-\psi] \qquad \tan\psi=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

برای پاسخ بیشینه، $\frac{d}{d(\omega_n t)}(\frac{xk}{F_\circ})=0$ است.

$$-\zeta\cos[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}-\psi]-\sqrt{1-\zeta^2}\sin[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}-\psi] \qquad \tan[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}-\psi]=-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\frac{\tan[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}]-\tan\psi}{1+\tan[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}]\tan\psi}=-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \tan[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}](1+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})=\tan[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}]=0$$

$$\omega_n t=\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

4-4 برای سیستم مساله 4-3، نشان دهید که پاسخ بیشینه برابر است با:

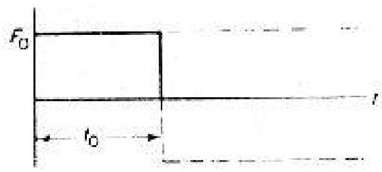
$$\boxed{(\frac{xk}{F_\circ})_{max}=1+\exp(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})}$$

$\omega_n t=\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ را در $(\frac{xk}{F_\circ})_{max}$ جایگذاری کنید.

$$(\frac{xk}{F_\circ})_{max}=1-\frac{1}{1-\zeta^2}\exp[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}]\cos(\pi-\psi)=1+\frac{1}{1-\zeta^2}\exp[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}]\cos\psi$$

$$\cos\psi=\sqrt{1-\zeta^2} \rightarrow (\frac{xk}{F_\circ})_{max}=1+\exp(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$$

4-5 نیروی پله‌ای به ارتفاع $h_\circ$ و مدت $t_\circ$ بر یک سیستم جرم–فنر نامیرا وارد می‌شود. اگر این نیروی پله‌ای با دو نیروی پله‌ای مانند شکل P4-5 جایگزین شود، از روش جمع آثار (Superposition) پاسخهای نامیرای سیستم را برای $t>0$ به دست آورید.



شکل P4-5

$$x=\frac{F_\circ}{k}[1-\cos(\omega_n t)] \qquad t\geq 0$$

$$x=\frac{2F_\circ}{k}\left\{1-\cos[\omega_n(t-t_\circ)]\right\} \qquad t\geq t_\circ$$

با جمع این دو داریم:

$$x=\frac{F_0}{k}\left\{Cos[\omega_n(t-t_0)]-Cos\omega_n t\right\} \qquad t\geq t_0$$

4-6 اگر نیروی دلخواه $f(t)$ بر یک دستگاه نوسانگر نامیرا که شرایط آغازین آن صفر نیست وارد شود، نشان دهید که پاسخ آن چنین است:

$$\boxed{x(t)=x_0Cos\omega_n t+\frac{v_0}{\omega_n}Sin\omega_n t+\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\xi)Sin\omega_n(t-\xi)d\xi}$$

$x(t)=\int_0^t f(\tau)Sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau=$ انتگرال ویژه

$x(t)=\frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}Sin(\omega_n t)+x(0)Cos(\omega_n t)=$ پاسخ همگن

پاسخ برابر است با مجموع انتگرال ویژه و پاسخ همگن.

4-7 نشان دهید که پاسخ به تحریک پله‌ای یکه یا $g(t)$ و پاسخ $h(t)$ به ضربه یکه با هم چنین وابسته هستند: $h(t)=\dot{g}(t)$.

$g(t)=\int_0^t h(t-\tau)d\tau=$ پاسخ به تحریک پله‌ای یکه $\rightarrow \quad \dot{g}(t)=h(t)$

4-8 نشان دهید که انتگرال کانولوشن را اینگونه نیز می‌توان نوشت:

$$\boxed{x(t)=f(0)g(t)+\int_0^t \dot{f}(\xi)g(t-\xi)d\xi}$$

که در آن $g(t)$ پاسخ به تحریک پله‌ای یکه است.

$$x=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \& \quad \dot{g}(t-\tau)=h(t-\tau)$$

$$x=\int_0^t f(\tau)\dot{g}(t-\tau)d\tau$$

با انتگرال‌گیری جزبه‌جز داریم:

$$x(t)=\Big[-f(\tau)g(t-\tau)\Big]_0^t+\int_0^t \dot{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \& \quad g(0)=0$$

$$x(t)=f(0)g(t)+\int_0^t \dot{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

4-9 در بخش **4-3**، معادله (a)، معادله کمکی دستگاه جرم-فنر-دمپر به دست آمد. جمله دوم را که از شرایط آغازین است با تبدیل داررون به دست آورید.

$$x(s)=\frac{(ms+c)x(0)+m\dot{x}(0)}{ms^2+cs+k}=\frac{(s+2\zeta\omega_n)x(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega^2}=\frac{\dot{x}(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega^2}$$

$$L^{-1}=\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega^2}=\frac{\exp(-\zeta\omega_n t)}{\omega_n(\sqrt{1-\zeta^2})}\mathrm{Sin}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$L^{-1}=\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\exp(-\zeta\omega_n t)\left\{\mathrm{Cos}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})-\frac{\zeta\omega_n t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{Sin}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})\right\}$$

$$x(t)-\exp(-\zeta\omega_n t)\left\{\frac{\dot{x}(0)\zeta\omega_n x(0)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{Sin}\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}+x(0)\mathrm{Cos}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})\right\}$$

4-10 پایه یک سیستم جرم-فنر-دمپر با سرعت $\dot{y}(t)=20(1-5t)$ تحریک می‌شود. اگر فرکانس طبیعی سیستم $\omega_n=10\ 1/s$ باشد، بیشینه تغییر مکان نسبی را بیابید.

$$\dot{y}=20u(t)=100t \quad \rightarrow \quad \ddot{y}(t)=20\delta(t)-100$$

$$\ddot{z}+\omega_n^2 z=-\ddot{y}=100-20\delta(t)$$

$$\overline{z}(s)=\frac{100}{s(s^2+\omega_n^2)}-\frac{20}{s^2+\omega_n^2}$$

$$z(t)=\frac{100(1-\mathrm{Cos}\omega_n t)}{\omega_n^2}-\frac{20\mathrm{Sin}\omega_n t}{\omega_n}$$

$$\dot{z}(t)=\frac{100\mathrm{Sin}\omega_n t}{\omega_n^2}-20\mathrm{Cos}\omega_n t=0$$

$$\tan\omega_n t=\frac{\omega_n}{5} \rightarrow z_{max}=100[1-\frac{5}{25+\omega_n^2}]-\frac{20}{\sqrt{25+\omega_n^2}}$$

4-11 ضربه سینوسی موج شکل P4-11 را درنظربگیرید. نشان دهید که:

$$(\frac{xk}{F_\circ})=\frac{1}{\frac{\tau}{2t_1}-\frac{2t_1}{\tau}}(\mathrm{Sin}\frac{2\pi t}{\tau}-\frac{2t_1}{\tau}\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{\tau}) \qquad t<t_1$$

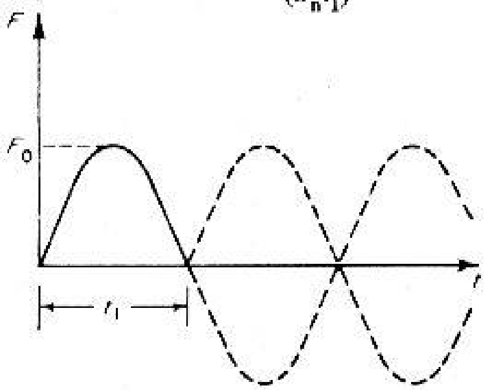
$$(\frac{xk}{F_\circ})=\frac{1}{\frac{\tau}{2t_1}-\frac{2t_1}{\tau}}\left[(\mathrm{Sin}\frac{2\pi t}{\tau}-\frac{2t_1}{\tau}\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{t_1})+(\mathrm{Sin}2\pi\frac{t-t_1}{\tau}-\frac{2t_1}{\tau}\mathrm{Sin}\pi\frac{t-t_1}{\tau})\right] \quad t>t_1$$

که در آن $\frac{2\pi}{\omega}=\tau$ است.

$$F_\circ \mathrm{Sin}\omega t=F_\circ \mathrm{Sin}(\frac{\pi t}{t_1}) \quad \ddot{x}+\omega_n^2 x=\frac{F_\circ}{m}\mathrm{Sin}(\frac{\pi t}{t_1}) \quad \omega_n=\frac{2\pi}{\tau}$$

$$x(t)=A\mathrm{Sin}\omega_n t+B\mathrm{Cos}\omega_n t+\frac{F_\circ \mathrm{Sin}(\frac{\pi t}{t_1})}{1+[\frac{\pi}{\omega_n t_1}]_2} \qquad \& \qquad \frac{\pi}{t_1\omega_n}=\frac{\tau}{2t_1}$$

$$x(0)=\dot{x}(0)=0 \quad \rightarrow \quad B=0 \quad \& \quad A=\frac{F_0}{m}\,\frac{\dfrac{\pi}{\omega_n t_1}}{1-\dfrac{\pi}{(\omega_n t_1)^2}}$$



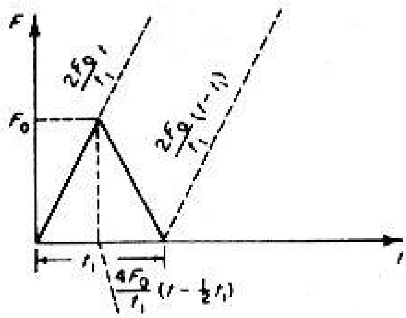
شکل P4-11

$$x=\frac{F_0/m}{\dfrac{\tau}{2t_1}-2\dfrac{t_1}{\tau}}\left\{\mathrm{Sin}\frac{2\pi t}{\tau}-\frac{2t_1}{\tau}\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{t_1}\right\} \qquad t<t_1$$

برای $t>t_1$ همین پاسخ را با پاسخی که در آن به جای t، $t-t_1$ قرار داده‌اید جمع کنید.

4-12 برای ضربه مثلثی نشان داده در شکل P4-12، نشان دهید که پاسخ چنین است:

$x=\frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\tau}{2\pi t_1}\mathrm{Sin}2\pi\frac{t}{\tau}\right)$	$0<t<\frac{1}{2}t_1$
$x=\frac{2F_0}{k}\left\{1-\frac{t}{t_1}+\frac{\tau}{2\pi t_1}\left[2\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{\tau}(t-\frac{1}{2}t_1)-\mathrm{Sin}2\pi\frac{t}{\tau}\right]\right\}$	$\frac{1}{2}t_1<t<t_1$
$x=\frac{2F_0}{k}\left\{\frac{\tau}{2\pi t_1}\left[2\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{\tau}(t-\frac{1}{2}t_1)-\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{\tau}(t-t_1)-\mathrm{Sin}2\pi\frac{t}{\tau}\right]\right\}$	$t>t_1$



شکل P4-12

$$\text{نیرو} = \begin{cases} F_1 = 2F_\circ \dfrac{t}{t_1} & 0<t<\dfrac{t_1}{2} \\ F_2 = -\dfrac{4F_\circ}{t_1}(t-\dfrac{t_1}{2})+F_1 & \dfrac{t_1}{2}<t<t_1 \\ F_3 = \dfrac{2F_\circ}{t_1}(t-\dfrac{t_1}{2})+F_2 & t_1<t \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل دربازه $0<t<\frac{t_1}{2}$ چنین است:

$$\ddot{x}+\omega_n x=\frac{2F_\circ t}{mt_1}=(\frac{2\omega_n^2 F_\circ}{kt_1})t= \text{ثابت} \qquad \bar{x}_1(s)=\frac{c}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

$$x_1(t)=\frac{c(\omega_n t+\sin\omega_n t)}{\omega_n^3}=\frac{2F_\circ}{k}\left[\frac{t}{t_1}-\frac{\tau}{2\pi t_1}\sin(\frac{2\pi t}{\tau})\right]$$

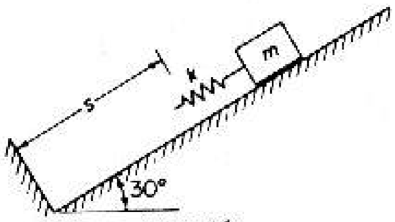
برای F_2، تحریک $-2ct+ct_1=2c(t-\frac{t_1}{2})$ است.

$$x_2(t)=x_1(t)-2x_1(t-\frac{t_1}{2}) \qquad \frac{t_1}{2}<t<t_1$$

برای F_3، تحریک $F_2+c(t-t_1)$ است.

$$x_3(t)=x_2(t)+x_1(t-t_1) \qquad t_1<t$$

4-13 سیستم جرم-فنر شکل P4-13 بر روی سطحی با زاویه 30° روبه‌پایین می‌لغزد. زمان تماس فنر با دیوار را بیابید.



شکل P4-13

$$x=x(0)\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

$$\dot{x}=-\omega_n x(0)\sin\omega_n t+\dot{x}(0)\cos\omega_n t \qquad \& \qquad k\delta_{st}=\frac{mg}{2} \quad \& \quad \dot{x}(0)=\nu_\circ$$

در لحظه جدا شدن فنر از دیوار،

$$-\delta_{st}=-\delta_{st}+\cos\omega_n t+\frac{\nu_\circ}{\omega_n} \rightarrow \nu_\circ=\omega_n\delta_s+\sin\omega_n t+\nu_\circ\cos\omega_n t$$

$$\frac{\delta_{st}}{\nu_\circ}=\frac{2\delta_{st}+\omega_n t}{\omega_n\delta_s+\tan\omega_n t+\nu_\circ}$$

$$\tan\omega_n t=\frac{2\delta_{st}+\omega_n\nu_\circ}{\nu_\circ^2-\delta_s^2+\omega_n^2}\qquad \omega_n^2=\frac{2k}{m}\quad \delta_{st}=\frac{g}{\omega_n^2}\quad \nu_\circ=\sqrt{gs}$$

$$\tan\omega_n t=\frac{\sqrt{\frac{2\,mgs}{k}}}{s-\frac{gm}{2k}}$$

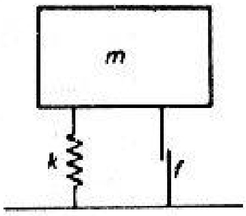
4-14 وزنه‌ای به جرم 38.6 lb روی چند فنر به سختی کل 6.4 lb/in نشسته است. اگر سیستم تاجایی چنان بالا برده شود که فنرها به طول آزادشان برسند و رها شود، بیشینه تغییر مکان m و زمان رسیدن به فشردگی بیشینه را بیابید.

$$\Delta=\frac{38.6}{6.4}=6.04\text{ in}\qquad \text{بیشینه تغییر مکان}=2\Delta=12.08\text{ in}$$

$$\text{rad/s}=\frac{2\pi}{\tau}\omega_n=\sqrt{64\left(\frac{386}{38.6}\right)}=8\rightarrow\tau=\frac{2\pi}{8}=0.786\text{ s}\qquad t_{max}=\frac{\tau}{2}=0.392\text{ s}$$

4-15 سیستم جرم-فنر نشان داده در شکل P4-15 دارای یک دمپر کولنی که نیروی اصطکاک ثابت f را پدید می‌آورد. نشان دهید که برای تحریک پایه، پاسخ چنین است:

$$\boxed{\frac{\omega_n z}{\nu_\circ}=\frac{1}{\omega_n t_1}\left(1-\frac{f t_1}{m\nu_\circ}\right)(1-\cos\omega_n t)-\sin\omega_n t}$$



شکل P4-15

$$m\ddot{x}=-k(x-y)-f\qquad z=x-y\qquad \ddot{z}+\omega_n^2 z=-\ddot{y}-\frac{f}{m}$$

$$z=\frac{-1}{\omega_n}\int_0^t\left(\ddot{y}(t)+\frac{f}{m}\right)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau$$

$$=\left(\frac{\nu_\circ}{\omega_n}\right)\int_0^t\left[\delta(t)-\frac{1}{t}+\frac{f}{m\nu_\circ}\right]\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau$$

$$=\frac{\nu_\circ}{\omega_n}\left\{\frac{1}{\omega_n t}\left[1-\frac{f}{m\nu_\circ}\right][1-\cos(\omega_n t)]-\sin\omega_n t\right\}$$

4-16 نشان دهید که پاسخ بیشینه مساله P4-15 چنین است.

$$\frac{\omega_n z_{max}}{\nu_\circ}=\frac{1}{\omega_n t_1}(1-\frac{ft_1}{m\nu_\circ})\left\{1-\frac{\frac{1}{\omega_n t_1}(1-\frac{ft_1}{m\omega_\circ})}{\sqrt{1+[\frac{1}{\omega_n t_1}(1-\frac{ft_1}{m\nu_\circ})]^2}}\right\}-\frac{1}{\sqrt{1+[\frac{1}{\omega_n t_1}(1-\frac{ft_1}{m\nu_\circ})]^2}}$$

با تقسیم این معادله بر $\omega_n t_1$ می‌توان $\frac{z_{max}}{\nu_\circ t_1}$ را به صورت تابعی از $\omega_n t_1$ و با پارامتر $\frac{ft_1}{m\nu_\circ}$ رسم کرد.

از مساله 4-15، z را داریم و از آن مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\nu_\circ}{\omega_n}\left\{\frac{1}{t}[1-\frac{f}{m\nu_\circ}]Sin(\omega_n t)-\omega_n Cos(\omega_n t)\right\}=0$$

$$\tan((\omega_n t)=\frac{\omega_n t_1}{1-\frac{ft_1}{m\nu}} \rightarrow Sin(\omega_n t)=\frac{\omega_n t_1}{\sqrt{(\omega_n t)_2+[1-\frac{ft_1}{m\nu_\circ}]^2}}$$

$$Cos(\omega_n t)=\frac{1-\frac{ft_1}{m\nu_\circ}}{\sqrt{(\omega_n t)_2+[1-\frac{ft_1}{m\nu_\circ}]^2}}$$

با جایگذاری این مقادیر در z رابطه موردنظر به دست می‌آید.

4-17 در مساله 4-16 بیشینه نیروی انتقالی به m چنین است:

$$F_{max}=f+|kz_{max}|$$

برای رسم این نیرو، به شکل بی‌بعد، باید آن را در $\frac{t_1}{m\nu_\circ}$ ضرب کرد.

$$\frac{F_{max}t_1}{m\nu_\circ}=\frac{ft_1}{m\nu_\circ}+(\omega_n t_1)^2(\frac{Z_{max}}{\nu_\circ t_1})$$

که می‌توان آن را به صورت تابعی از ωt_1 با پارامتر $\frac{ft_1}{m\nu}$ رسم کرد. $\left|\frac{\omega_n Z_{max}}{\nu_\circ}\right|$ و $\left|\frac{Z_{max}}{m\nu_\circ}\right|$ رابه‌صورت‌تابعی از $\omega_n t_1$ برای $\frac{ft_1}{m\nu_\circ}=0,0.20,1.0$ رسم کنید.

$$a=\frac{ft_1}{m\nu_\circ} \qquad x=\omega_1 t \qquad y=\left|\frac{\omega_n Z_{max}}{\nu_\circ}\right| \qquad \frac{F_{max}t_1}{m\nu_\circ}=b$$

$$\left|\frac{\omega_n Z_{max}}{\nu_\circ}\right|=\left|\frac{1}{x}(1-a)\{1-\frac{1-a}{\sqrt{x^2+(1-a)^2}}\}-\frac{x}{\sqrt{x^2+(1-a)^2}}\right|$$

$$\left|\frac{F_{max}+t_1}{m\nu_0}\right|=a+\left|\frac{(\omega_n t)^2(\omega_n \frac{Z_{max}}{\nu_0})}{\omega_n t}\right|=a+x\left|\frac{\omega_n Z_{max}}{\nu_0}\right|$$

x	$y)_{a=0}$	b	$y)_{a=0.2}$	b
1	0.4142	0.4142	0.4806	0.6806
2	0.6180	1.2360	0.6770	1.554
3	0.7208	2.1624	0.7683	2.504
4	0.7808	3.1232	0.8198	3.479
5	0.8198	4.099	0.8527	4.466
6	0.8471	5.0826	0.8755	5.453
8	0.8828	7.0624	0.9050	7.440
10	0.905	9.05	0.9232	9.432

4-20 یک سیستم جرم-فنر نامیرا به وزن w=16.1 lb دارای زمان تناوب طبیعی 0.5 s است. ضربه مثلثی شکل 2.0 lb-s به مدت 0.40 s به آن وارد می‌شود. تغییر مکان بیشینه جرم را بیابید.

$$m=\frac{16.1}{386}=0.417lb \qquad \frac{t_1}{\tau}=\frac{0.4}{0.5}=0.8$$

از شکل P4-21 داریم،

$$(\frac{xk}{F_0})_{max}=1.54 \rightarrow \omega_n=\frac{2\pi}{0.5}=4\pi \ rad/s$$

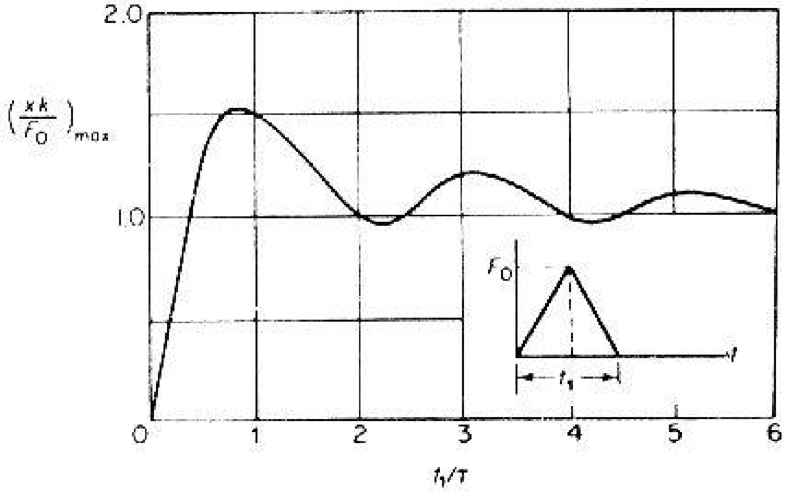
$$k=m\omega_n^2=6.585 \ lb/in \quad x_{max}=1.54\frac{F_0}{k} \rightarrow F=2lb.s=0.5\times 40\times F_0$$

$$F_0=10 \quad \& \quad x_{max}=\frac{1.54(10)}{6.585}=2.339 \ in$$

4-21 برای ضربه مثلثی که در مدت t_1، نشان دهید هنگامی که $\frac{t_1}{\tau}=\frac{1}{2}$ است، پاسخ بیشینه در $t=t_1$ رخ می‌دهد و می‌توان آن را از معادله زیر یافت:

$$\boxed{2Cos\frac{2\pi t_1}{\tau}(\frac{t_p}{t_1}-0.5)-Cos2\pi\frac{t_1}{\tau}(\frac{t_p}{t_1}-1)-Cos\frac{2\pi t_1}{\tau}.\frac{t_p}{t_1}=0}$$

این را می‌توان با دیفرانسیل‌گیری از معادله تغییر مکان در بازه $t>t_1$ به‌دست‌آورد. پاسخ طیف برای ضربه مثلثی در شکل P4-21 نشان داده شده‌است.



شکل P4-21

با دیفرانسیل‌گیری از سومین معادله مساله 4-12 داریم،

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2F_0}{kt_1}\left\{2Cos(\frac{2\pi t_1}{\tau})(\frac{t}{t_1}-\frac{1}{2})-Cos(\frac{2\pi t_1}{\tau})(\frac{t}{t_1}-\frac{1}{2})-Cos(\frac{2\pi t_1}{\tau})\right\}=0 \qquad t_p=t_1$$

4-22 اگر τ یک نوسانگر، خیلی طولانی‌تر از زمان تحریک یعنی t_1 باشد، پاسخ بیشینه در ناحیه $t>t_1$ رخ خواهد داد. برای نوسانگر نامیرا، انتگرالها چنین است:

$$x=\frac{\omega_n}{k}\left\{Sin\omega_n t\int_0^t f(\xi)Cos\omega_n\xi d\xi-Cos\omega_n t\int_0^t f(\xi)Sin\omega_n\xi d\xi\right\}$$

و چون $f(t)=0$ است، در $t>t_1$ تغییر نخواهد کرد. بنابراین با جایگذاری

$$ACos\phi=\omega_n\int_0^{t_1} f(\xi)Cos\omega_n\xi d\xi \qquad ASin\phi=\omega_n\int_0^{t_1} f(\xi)Sin\omega_n\xi d\xi$$

برای $t>t_1$، پاسخ، حرکت هماهنگ ساده با دامنه A خواهد بود. در این حالت پاسخ طیف را بررسی کنید.

$$x=\frac{A}{k}\left\{Sin(\omega_n t)Cos\phi-Cos(\omega_n t)Sin\phi\right\}=\frac{A}{k}Sin(\omega_n t-\phi)$$

پاسخ بیشینه در $\omega_n t-\phi=\frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

$$x_{max}=\frac{A}{k}\rightarrow A=\sqrt{\left[\int_0^t f(\tau)Sin(\omega_n t)d\tau\right]^2+\left[\int_0^t f(\tau)Cos(\omega_n\tau)d\tau\right]^2}$$

4-23 یک سیستم جرم-فنر نامیرا با نیروی تحریک مانند شکل P4-23 است. نشان دهید که:

$$\frac{kx(t)}{F_0}=\frac{1}{\omega_n t_0}(\omega_n t-\sin\omega_n t) \qquad t<t_0$$

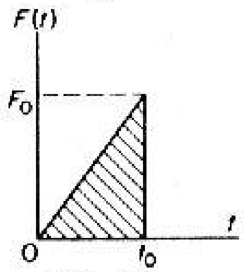
$$\frac{kx(t)}{F_0}=\frac{1}{\omega_n t_0}[\sin\omega_n(t-t_0)-\sin\omega_n t]+\cos\omega_n(t-t_0) \qquad t>t_0$$

$$F=F_0\frac{t}{t_0} \quad t<t_0 \qquad F=0 \quad t>t_0 \qquad h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

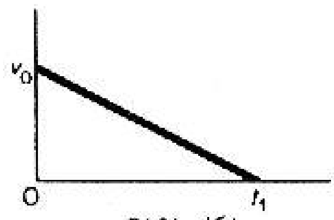
$$t<t_0:\ x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t\left(\frac{\tau}{t_0}\right)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=\frac{F_0}{k}\left\{\frac{t}{t_0}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t}\right\}$$

$$t>t_0 \quad x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t\left(\frac{\tau}{t_0}\right)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{F_0}{m\omega_n}\left\{\cos\omega_n(t-t_0)+\frac{1}{\omega_n t_0}[\sin\omega_n(t-t_0)-\sin\omega_n t]\right\}$$



شکل P4-23



شکل P4-24

4-24 پایه سیستم جرم-فنر نامیرا، با سرعتی مانند شکل P4-24 تحریک می‌شود. اگر زمان اوج در $t<t_1$ رخ دهد، نشان دهید که پاسخ طیف از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\frac{\omega_n Z_{max}}{v_0}=\frac{1}{\omega_1 t_1}-\frac{1}{\omega_n t_1\sqrt{1+(\omega_n t_1)^2}}-\frac{w_n t_1}{\sqrt{1+(\omega_n t_1)^2}}}$$

و نتیجه را رسم کنید.

$$v=v_0\left\{u(t)-\frac{t}{t_1}\right\} \rightarrow a=v_0\left\{\delta(t)-\frac{1}{t_1}\right\}=y(t)$$

با جایگذاری در معادله (4.2-5) برای بازه $0<t<t_1$ داریم،

$$z=-\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)\int_0^t\left\{[\delta(t)-\frac{1}{t_1}]\sin\omega_n(t-\tau)\right\}d\tau=\frac{v_0}{\omega_n}\left\{-\sin(\omega_n t)+\frac{1}{\omega_n t_0}[1-\cos(\omega_n t)]\right\}$$

$$\dot{Z}=\frac{v_0}{\omega_n}\left\{-\omega_n\cos(\omega_n t)+\frac{1}{t_1}\sin(w_n t)\right\}=0 \qquad Z_{max}:\ \tan(\omega_n t_p)=\omega_n t_1$$

$$\mathrm{Sin}(\omega_n t_p)=\frac{\omega_n t_1}{\sqrt{1+(\omega_n t_1)^2}} \qquad \mathrm{Cos}(\omega_n t_p)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_n t_1)^2}}$$

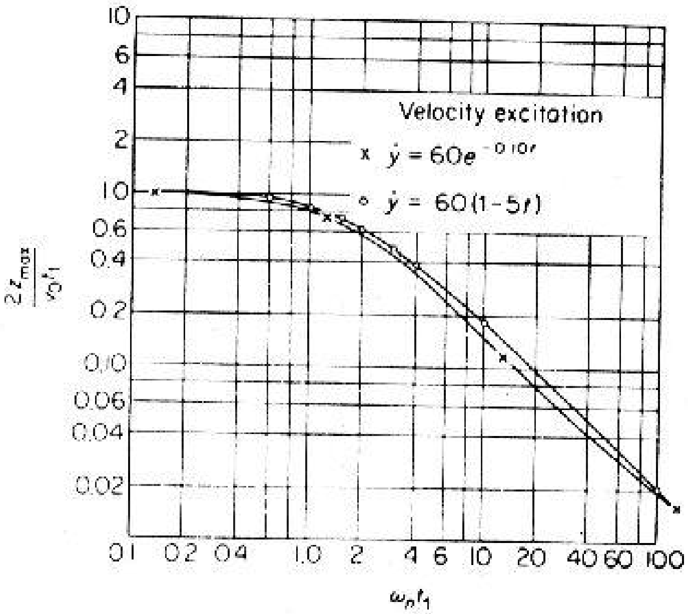
$$\frac{Z_{max}\omega_n}{\nu_\circ}=\frac{1}{\omega_n t_1}\ \frac{1}{\omega_n t_1\sqrt{1+(\omega_n t_1)^2}}\ \frac{\omega_n t_1}{\sqrt{1+(\omega_n t)}}$$

4-25 در مساله 24-4 اگر $t>t_1$ باشد، نشان دهید که پاسخ چنین است:

$$\boxed{\frac{\omega_n Z}{\nu_\circ}=-\mathrm{Sin}\ \omega_n t+\frac{1}{\omega_n t_1}\ [\mathrm{Cos}\omega_n(t-t_1)-\mathrm{Cos}\omega_n t]}$$

$$Z=\frac{\nu_\circ}{\omega_n}\int_0^t\left[\delta(t)-\frac{1}{t_1}\right]\mathrm{Sin}\left[\omega_n(t-\tau)\right]d\tau=\frac{\nu_\circ}{\omega_n}\left\{-\mathrm{Sin}(\omega t)+\frac{1}{\omega_n t_1}[\mathrm{Cos}\omega_n(t-t_1)-\mathrm{Cos}\omega_n t\right\}$$

4-28 شکل P4-28 طیف پاسخ یک سیستم جرم-فنر نامیرا را با دو سرعت تحریک گوناگون نشان می‌دهد. برای سرعت تحریک پایه $y(t)=60e^{-0.10t}$ مساله را پاسخ‌یابی کنید و درستی پاسخ را با یافتن چند نقطه از طیف بیازمایید.



شکل P4-28

$\nu_\circ=60$ است و برای $\omega_n t_\circ$های بزرگ داریم، (بیضی) $\left[\frac{2Z}{(\nu_\circ t_\circ)_{max}}\right]\cong\frac{2}{\omega_n t_\circ}$

در $\omega_n t_\circ=100$ از شکل P4-28 داریم: $\left[\frac{2Z}{(\nu_\circ t_\circ)_{max}}\right]=0.02$

برای $\omega_n t_\circ$های کوچک $\left[\frac{2Z}{(\nu_\circ t_\circ)_{max}}\right]\cong 1.0$

4-29 یک سیستم جرم-فنر با دمپر لزج، در آغاز در موقعیت تعادل است. اگر سیستم با نیروی هماهنگی با فرکانس $\omega=\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ تحریک شود،معادله حرکت آن رابیابید.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_{\circ}\text{Sin}\omega_n t$$

$$x(s)=\frac{\omega_n F_{\circ}}{m}\cdot\frac{1}{(s^2+\omega_n^2)(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2)}$$

با درنظرگرفتن معادله‌های (3.1-11) و (4.2-2) داریم،

$$x(t)=\frac{F_{\circ}}{c\omega_n}\left\{\frac{e^{-\zeta\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\text{Sin}(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2})+\text{Sin}^{-1}\sqrt{1-\zeta^2}-\text{Cos}\omega_n t\right\}$$

4-30 در مساله 4-29 نشان دهید که با میرایی کم، در زمان $t=\frac{1}{f_n\delta}$، دامنه به $(1-e^{-1})$ برابر اندازه حالت پایدار می‌رسد.(δکاهش لگاریتمی است.)

$$\delta\cong 2\pi\zeta\quad t=\frac{1}{f_n\delta}\quad:\quad \zeta\omega_n t=\frac{2\pi\zeta}{\delta}\cong 1.0$$

با جایگذاری در $x(t)$به دست آمده از مساله 4-29 خواهیم داشت:

$$x(t)=\frac{F_{\circ}}{c\omega_n}\left\{e^{-1}\text{Sin}(\omega_n t+90)-\text{Cos}(\omega_n t)\right\}=[\frac{F_{\circ}}{c\omega_n}e^{-1}-1]\text{Cos}(\omega_n t)$$

4-31 فرض کنید که یک سیستم با میرایی کم، با نیروی $F_{\circ}\text{Sin}\omega_n t$ تحریک شود که در آن ω_n فرکانس طبیعی سیستم است. اگر نیرو ناگهان حذف شود، معادله حرکت را بیابید. نشان دهید که در زمان $t=\frac{1}{f_n\delta}$، پس از حذف نیرو، دامنه e^{-1} برابر اندازه آغازین باشد.

پاسخ حالت پایدار چنین است:

$$x(t)=\frac{F_{\circ}}{c\omega_n}\text{Cos}\omega_n t$$

برای ζهای کوچک، پاسخ گذرا چنین است:

$$x(t)\cong X_1\exp(-\zeta\omega_n t)\text{Sin}(\omega_n t+\phi_1)\qquad x(0)=X_1\text{Sin}\phi_1=\frac{F_{\circ}}{c\omega_n}$$

$$\dot{x}(0)=X_1[\omega_n\text{Cos}\phi_1-\zeta\omega_n\text{Sin}\phi_1]\cong X_1\omega_n\text{Cos}\phi_1=0$$

$$\phi_1=90^{\circ}\qquad \&\qquad X_1=\frac{F_{\circ}}{c\omega_n}$$

$$\zeta\omega_n t=\frac{2\pi\zeta}{\delta}\cong 1.0\ \rightarrow x(t)=\frac{F_{\circ}}{ec\omega_n}\text{Cos}(\omega_n t)$$

۵ سیستم‌های دو درجه آزادی

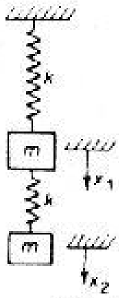
5-1 حرکت سیستم شکل **P5-1** و فرکانسهای طبیعی و مودهای آن را بیابید.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1=-kx_1+k(x_2-x_1) \\ m\ddot{x}_2=-k+k(x_2-x_1) \end{cases}$$

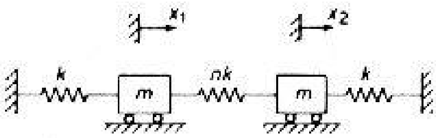
$$(2-\frac{m\omega^2}{k})X_1=X_2 \qquad \& \qquad X_1=(1-\frac{m\omega^2}{k})X_2$$

$$\lambda^2-3\lambda+1=0 \qquad \lambda=m\frac{\omega^2}{k}$$

$$\lambda=\begin{cases} 0.382=m\dfrac{\omega_1^2}{k} & \rightarrow \quad \dfrac{X_1}{X_2})_1=1-\lambda_1=0.614 \\ 2.618=m\dfrac{\omega_2^2}{k} & \rightarrow \quad \dfrac{X_1}{X_2})_2=1-\lambda_2=1.618 \end{cases}$$



شکل P5-1



شکل P5-2

5-2 مودها و فرکانسهای طبیعی سیستم شکل P5-2 را به ازای n=1 بیابید.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\{\ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2\}^T+\begin{bmatrix} k+nk & -nk \\ -nk & k+nk \end{bmatrix}\{x_1 \quad x_2\}^T=\{0 \quad 0\}^T$$

$$\lambda=m\frac{\omega^2}{k} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-n-\lambda & -n \\ -n & 1-n-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-2(1+n)\lambda+(1+2n)=0 \rightarrow \lambda=(1+n)\pm n$$

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{1+n-\lambda}{n}$$

$$\lambda = 1 = m\frac{\omega_1^2}{k} \quad : \quad \frac{X_1}{X_2})_1 = 1$$

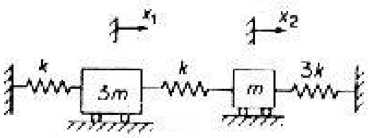
$$\lambda = 3 = m\frac{\omega_2^2}{k} \quad : \quad \frac{X_1}{X_2})_2 = -1$$

5-4 فرکانسهای طبیعی و مودهای سیستم در شکل P5-4 را بیابید.

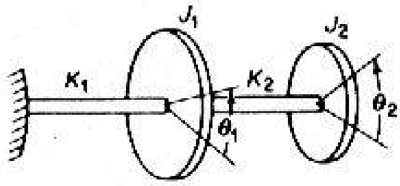
$$m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}^T + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \end{Bmatrix}^T$$

$$\lambda = m\frac{\omega^2}{k} \rightarrow \begin{vmatrix} 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3\lambda^2 - 14\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda = \begin{cases} 0.570 = m\frac{\omega_1^2}{k} & \rightarrow \frac{X_1}{X_2})_1 = 4-\lambda_1 = 0.614 \\ 4.096 = m\frac{\omega_2^2}{k} & \rightarrow \frac{X_1}{X_2})_2 = 4-\lambda_2 = -1.618 \end{cases}$$



شکل P5-4



شکل P5-5

5-5 مودهای طبیعی سیستم پیچشی شکل P5-5 را به ازای $K_1=K_2$ و $J_1=2J_2$ بیابید.

$$J^2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}^T + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \end{Bmatrix}^T$$

$$\lambda = J^2\frac{\omega^2}{k} \rightarrow \begin{vmatrix} 2-2\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(1-\lambda)-1 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda = \begin{cases} 0.293 = J_2\frac{\omega_1^2}{k} & \rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2})_1 = 0.707 \\ 1.707 = J_2\frac{\omega_2^2}{k} & \rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2})_2 = -0.707 \end{cases}$$

5-6 اگر در مساله 5-5 $K_1=0$ باشد، سیستم دو درجه آزادی با یک فرکانس طبیعی به‌دست‌می‌آید. مودهای این سیستم و سیستم جرم-فنر معادل آن را بیابید. نشان دهید که

با به کارگیری مختصات $\phi=(\theta_1-\theta_2)$ می‌توان این سیستم را به یک سیستم یک درجه آزادی تبدیل کرد.

$$k=0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-3\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \rightarrow \lambda(2\lambda-3)=0$$

$$\lambda=0 \quad \& \quad \lambda=1.5 \quad \rightarrow \quad \frac{\theta_1}{\theta_2}=-0.5$$

$$J_1\ddot{\theta}_1-k_2(\theta_2-\theta_1)=0 \quad \& \quad J_2\ddot{\theta}_2+k_2(\theta_2-\theta_1)=0$$

$$(\ddot{\theta}_2-\ddot{\theta}_1)+\left[\frac{k_2}{J_2}+\frac{k_2}{J_1}\right](\theta_2-\theta_1)=0 \quad \& \quad \phi=\pm(\theta_2-\theta_1)$$

$$\ddot{\phi}+K_2\left[\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\right]\phi=0 \quad \rightarrow \quad \omega_n=\sqrt{k_2\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}}$$

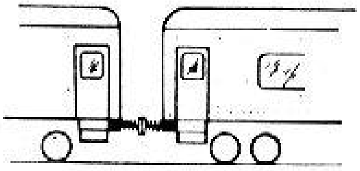
5-7 فرکانسهای طبیعی سیستم پیچشی شکل P5-7 را بیابید و مودهای آن را رسم کنید.

$G=11.5\times10^6$ psi،

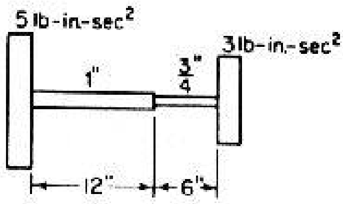
$$k_1=\frac{GI_p}{l}=0.0941\times10^6 \qquad k_2=0.0595\times10^6$$

$$k_{eff}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=0.0365\times10^6 \quad \omega_n=\sqrt{k_{eff}\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}}=139.4 \text{ rad/s}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{J_1\omega^2}{k_{eff}} & -1 \\ -1 & 1-\frac{J_2\omega^2}{K_{eff}} \end{vmatrix}=0 \rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2}=1-J_2\frac{\omega^2}{k_{eff}}=-0.5979$$



شکل P5-8



شکل P5-7

5-8 یک قطار برقی با دو واگن به وزن 50000 lb همانند شکل P5-8 با یک کوپلینگ به سختی 16000 lb/in به یکدیگر متصل هستند. فرکانس طبیعی سیستم را به دست آورید.

سختی کل سیستم 16000 lb/in است. گره در وسط فنر قرار دارد. بنابراین نوسانات آن مانند دو سیستم یک درجه آزادی، هر کدام با یک فنر به سختی 2k=32000lb/in جرم m است.

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{m}}=\sqrt{\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1m_2}}=15.72 \text{ rad/s}$$

5-9 با فرض دامنه‌های کم، معادله دیفرانسیل حرکت آونگ دوگانه شکل P5-9 را بیابید. نشان دهید که فرکانسهای طبیعی سیستم از معادله زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2})}}$$

نسبت دامنه‌ها، $\frac{x_1}{x_2}$ و موقعیت گره هر دو مود ارتعاشی را به دست آورید.

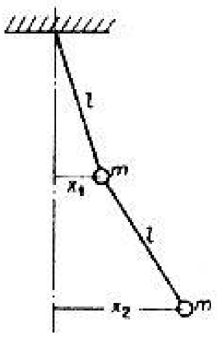
برای دامنه‌های کم، زوایا، $\frac{x_1}{l}$ و $\frac{x_2-x_1}{l}$ است. کشش نخها تقریباً 2 mg و 1 mg است.

$$\sum F_x = m\ddot{x} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -mg(\frac{x_1}{l}) + mg(\frac{x_2-x_1}{l}) \\ m\ddot{x}_2 = -mg(\frac{x_2-x_1}{l}) \end{cases}$$

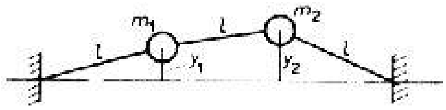
$$(3-\lambda)X_1 - X_2 = 0 \qquad -X_1 + (1-\lambda)X_2 = 0 \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\omega_n = \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l}} \rightarrow \begin{cases} 0.764\sqrt{(\frac{g}{l})} \\ 1.850\sqrt{(\frac{g}{l})} \end{cases}$$

$$\left.\frac{X_1}{X_2}\right)_1 = 1 - \lambda_1 = 0.414 \qquad \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_2 = -2.414$$



شکل P5-9



شکل P5-11

5-10 معادله حرکت آونگ دوگانه مساله 5-9 را برحسب θ_1 و θ_2 از راستای قائم بیابید.

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta}_1 = -2mg\theta_1 + mg\theta_2 \\ ml(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = mg\theta_2 \end{cases}$$

$$\lambda = \omega^2\frac{l}{g} \rightarrow (2-\lambda)\theta_1 - \theta_2 = 0 \rightarrow -\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{2} \rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}0.707\\ 1\end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}0.707\\ 1\end{Bmatrix}$$

5-11 مانند شکل P5-11 دو جرم m_1 و m_2 با یک نخ سبک، با نیروی کشش T به یکدیگر چسبیده‌اند. با فرض اینکه در هنگام تغییر مکان عمودی جرمها، T تغییر نکند، معادله حرکت را به شکل ماتریسی بنویسید.

$$\theta_1\cong\frac{y_1}{l} \quad \& \quad \theta_2\cong\frac{y_2}{l}$$

$$m_1\ddot{y}_1=-T\left(\frac{y_1}{l}\right)+T\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) \qquad m_2\ddot{y}_2=-T\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)-T\left(\frac{y_2}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{Bmatrix}+\frac{T}{l}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

5-12 اگر در مساله 5-11، هر دو جرم برابر باشد، نشان دهید که فرکانس طبیعی هر دو مود از فرمولهای $\omega=\sqrt{\frac{T}{ml}}$ و $\omega=\sqrt{\frac{3T}{ml}}$ به دست می‌آید.

از مساله 5-11 داریم،

$$\lambda=\omega^2\left(\frac{ml}{T}\right)$$

$$\begin{bmatrix}2-2\lambda & -1\\ -1 & 2-2\lambda\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \rightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \rightarrow \lambda_1=1\ \&\ \lambda_2=3$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{T}{ml}} \quad \& \quad \omega_2=\sqrt{\frac{3T}{ml}}$$

$$\left.\frac{Y_1}{Y_2}\right)_1=1 \quad \& \quad \left.\frac{Y_1}{Y_2}\right)_2=-1$$

5-13 اگر در مساله 5-11، $m_1=2m$ و $m_2=m$ باشد، فرکانسها و مودهای طبیعی را بیابید.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \rightarrow 2\lambda^2-6\lambda+3=0 \rightarrow \lambda_1=1\ \&\ \lambda_2=3$$

$$\omega_1=0.792\sqrt{\frac{T}{ml}} \quad \& \quad \omega_2=1.538\sqrt{\frac{T}{ml}}$$

$$\begin{Bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}1.0\\ 0.732\end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{Bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}1.0\\ -2.732\end{Bmatrix}$$

5-14 سیستم پیچشی شکل P5-14 از محوری به سختی k_1، یک توپی به شعاع r و ممان اینرسی J_1، چهار فنر برگی به سختی k_2 و چرخی به شعاع R و ممان اینرسی J_2 ساخته شده‌است. معادله دیفرانسیل نوسانات پیچشی را با فرض اینکه یک انتهای محور ثابت است، بیابید. نشان دهید که معادله فرکانسی آن چنین ساده می‌شود.

$$\boxed{\omega^4-\left(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\frac{J_2}{J_1}\omega_{22}^2\right)\omega^2+\omega_{11}^2\ \omega_{22}^2}$$

که در آن ω_{11} و ω_{22} فرکانسهای طبیعی ناهمگیر و اندازه آنها چنین است:

$$\boxed{\omega_{11}^2=\frac{K_1}{J_1} \qquad \omega_{22}=\frac{4k_2R^2}{J_2}}$$

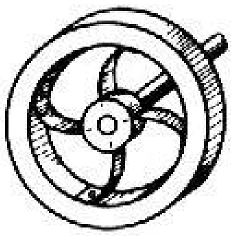
$$J_1\ddot{\theta}_1=-K_1\theta_1+k_2(\theta_2-\theta_1)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2=-K_2(\theta_2-\theta_1) \qquad \& \qquad K_2=4k_2R^2$$

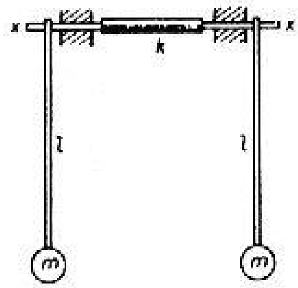
$$\text{خیز فنر}=R(\theta_2-\theta_1)=\frac{F}{k_2} \qquad \text{گشتاور}=RF=k_2R^2(\theta_2-\theta_1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(K_1+K_2)}{J_1}\omega^2 & \frac{-k_2}{J_2} \\ \frac{-k_2}{J_2} & \frac{k_2}{J_1-\omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega^4-\left|\frac{K_1}{J_1}+\frac{K_2}{J_1}+\frac{K_2}{J_2}\right|\omega^2+\left|\frac{K_1K_2}{J_1J_2}\right|=0$$



شکل P5-14



شکل P5-15

5-15 دو آونگ آزاد یکسان مانند شکل P5-15، حول محور x-x می‌چرخند و با یک لوله لاستیکی به سختی پیچشی k lb.in/rad به یکدیگر وصل شده‌اند. فرکانس طبیعی و مودهای ارتعاشی آن را بیابید و چگونگی آغاز این حرکت رابیان کنید.اگر l=19.3in و mg=3.86 lb و k=2.0 lbin/rad باشد. زمان ضربان (beat) را برای آغاز حرکت از $\theta_1=0$ و $\theta_2=\theta_0$ بیابید. فاز حرکت را به هنگامی که دامنه آن به صفر میل می‌کند، بررسی کنید.

$$ml^2\ddot{\theta}_1=-mgl\theta_1+k(\theta_2-\theta_1) \qquad ml^2\ddot{\theta}_2=-mgl\theta_2-k(\theta_2-\theta_1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{g}{l}+\frac{k}{ml^2}-\omega^2 & -\frac{k}{ml^2} \\ \frac{-k}{ml^2} & \frac{g}{l}+\frac{k}{ml^2}-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega^4-2\left[\left(\frac{g}{l}\right)+\left(\frac{k}{ml^2}\right)\right]\omega^2+\left(\frac{g}{l}\right)\left[\left(\frac{g}{l}\right)+\left(\frac{2k}{ml^2}\right)\right]=0 \qquad \omega^2=\left(\frac{g}{l}\right)+(1\pm1)\left[\frac{k}{ml^2}\right]$$

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2}=\frac{(\frac{g}{l})+(\frac{k}{ml^2})-\omega^2}{\frac{k}{ml^2}} \qquad \begin{Bmatrix}\Theta_1\\\Theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\Theta_1\\\Theta_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}=4.4721 \text{ rad/s} \quad \& \quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{ml^2}}=4.5906 \text{ rad/s}$$

$$\Theta_1(0)=0\ ,\ \Theta_2(0)=\Theta_\circ \quad \& \quad \dot\Theta_1(0)=\dot\Theta_2(0)=0$$

$$\Theta_1=\frac{\Theta_\circ}{2}\text{Cos}\omega_1 t-\frac{\Theta_\circ}{2}\text{Cos}\omega_2 t=\Theta_\circ\text{Sin}[\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t]\text{Sin}[\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1)t]$$

$$\Theta_2=\frac{\Theta_\circ}{2}\text{Cos}\omega_1 t-\frac{\Theta_\circ}{2}\text{Cos}\omega_2 t=\Theta_\circ\text{Cos}[\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t]\text{Cos}[\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1)t]$$

$$\Theta_1=\Theta_\circ\text{Sin}(0.0593t)\text{Sin}(4.5314t)$$

$$\Theta_2=\Theta_\circ\text{Cos}(0.0593t)\text{Cos}(4.5314t)$$

و زمان ضربان به دست می‌آید

$$\tau_b=\frac{\pi}{0.0593}=52.978 \text{ s}$$

5-16 معادله‌های حرکت سیستم مساله 5-4 را با شرایط آغازین $x_1(0)=A$، $\dot x_1(0)=x_2(0)=\dot x_2(0)=0$ است بیابید.

از مساله 5-4 داریم:

$$\lambda=\begin{cases}0.5691 & \rightarrow \quad \frac{X_1}{X_2})_1=3.4309\\ 4.09726 & \rightarrow \quad \frac{X_1}{X_2})_2=-0.0972\end{cases}$$

با اعمال شرایط آغازین،

$$x_1=3.4309C_1\text{Cos}(\omega_1 t)-0.0972C_2\text{Cos}(\omega_2 t)$$

$$x_2=1.0000C_1\text{Cos}(\omega_1 t)-1.0000C_2\text{Cos}(\omega_2 t)$$

در $t=0$،

$$A=3.4309C_1-0.0972C_2 \quad \& \quad 0=C_1+C_2 \quad \rightarrow \quad C_1=-C_2$$

$$A=-3.4309C_2-0.0972C_2=-3.5281C_2$$

$$\boxed{C_2=-0.2834\text{ A}} \qquad \boxed{C_1=0.2834\text{ A}}$$

$$x_1=0.9724A\text{Cos}(\omega_1 t)+0.0276A\text{Cos}(\omega_2 t)$$

$$x_2=0.2834A\text{Cos}(\omega_1 t)+0.2834A\text{Cos}(\omega_2 t)$$

5-17 آونگ دوگانه مساله 5-9 با شرایط آغازین $x_1(0)=x_2(0)=X$ و $\dot x_1(0)=\dot x_2(0)=0$ نوسان می‌کند. معادله‌های حرکت را بیابید.

$x_1=0.414A\cos(\omega_1 t)-2.414B\cos(\omega_2 t)$

$x_2=1.000A\cos(\omega_1 t)+1.000B\cos(\omega_2 t)$

در $t=0$ با اعمال شرایط آغازین داریم،

$X=0.414A-2.414B \quad \& \quad X=A+B \rightarrow A=X-B$

$X=0.414(X-B)-2.414B$

$\boxed{B=-0.2072\ X} \qquad \boxed{A=1.2072\ X}$

$x_1=X[0.4998\cos(\omega_1 t)+0.5002\cos(\omega_2 t)]$

$x_2=X[1.2728\cos(\omega_1 t)+0.2072\cos(\omega_2 t)]$

5-18 بر جرم سبک مساله 5-1 ضربه‌ای زده می‌شود و به آن تندی آغازینی برابر با $\dot{x}_2(0)=V$ می‌دهد. معادله حرکت را بیابید.

از مساله 5-1 داریم:

$$\left(\frac{X_1}{X_2}\right)_1=0.614 \qquad , \left(\frac{X_1}{X_2}\right)_2=-1.618$$

چون $x_1(0)=\dot{x}_1(0)=x_2(0)=0$ است،

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=A\begin{Bmatrix} 0.614 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B\begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=-\omega.A\begin{Bmatrix} 0.614 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\sin(\omega_1 t+\phi_1)-\omega_2 B\begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\sin(\omega_2 t-\phi_2)$$

در $t=0$،

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=A\begin{Bmatrix} 0.614 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\cos\phi_1+B\begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\cos\phi_2$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ V \end{Bmatrix}=-\omega_1 A\begin{Bmatrix} 0.614 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\sin\phi_1-\omega_2 B\begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\sin\phi_2$$

$$\phi_1=\phi_2=90^\circ \rightarrow \quad -\omega_1 A(0.614)=\omega_2 B(1.618)$$

$$B=\frac{-V}{3.635\omega_2}=\frac{-0.2751V}{\omega_2} \qquad A=\frac{-0.7249V}{\omega_1}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\frac{0.7249\ V}{\omega_1}\begin{Bmatrix} 0.614 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\sin(\omega_1 t)+\frac{V}{3.635}\begin{Bmatrix} -1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\sin(\omega_2 t)$$

$$\omega_1=0.618\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \& \qquad \omega_2=1.618\sqrt{\frac{k}{m}}$$

5-19 اگر مساله 5-1 با شرایط آغازین $x_1(0)=0, x_2(0)=1.0$ و $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ حرکتش را آغاز کند، نشان دهید که معادله‌های حرکت سیستم چنین است:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t)&=0.447\text{Cos}\omega_1 t-0.447\text{Sin}\omega_2 t \\ x_2(t)&=0.722\text{Cos}\omega_1 t-0.278\text{Cos}\omega_2 t \\ \omega_1&=\sqrt{\frac{0.382k}{m}} \quad \omega_2=\sqrt{\frac{2.618k}{m}} \end{aligned}}$$

از جایگذاری شرایط آغازین در مساله 5-18 داریم:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}=A\begin{Bmatrix} 0.614 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\text{Cos}\phi_1+B\begin{Bmatrix} 1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\text{Cos}\phi_2$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=-\omega_1 A\begin{Bmatrix} 0.614 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\text{Sin}-\omega_2 B\begin{Bmatrix} 1.618 \\ 1.000 \end{Bmatrix}\text{Sin}\phi_2$$

$$\phi_1+\phi_2=0^\circ \rightarrow 0.614A=1.618B \rightarrow B=0.3795A$$

$$0.1=A+0.3795\ A \rightarrow \boxed{A=0.7249} \quad \boxed{B=0.2751}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} 0.4451 \\ 0.7249 \end{Bmatrix}\text{Cos}(\omega_1 t)+\begin{Bmatrix} -0.4451 \\ 0.2751 \end{Bmatrix}\text{Cos}(\omega_2 t)$$

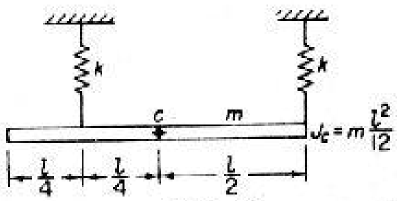
5-20 در شکل P5-20، مختصه x برای تغییر مکان نقطه c و θ ساعتگرد برای نمایاندن پیچش میله یکنواخت به‌کاربرید و فرکانسها و مودهای طبیعی آن را بیابید.

$$m\ddot{x}=-k(x+\frac{l\theta}{2})-k(x-\frac{l\theta}{4}) \qquad J\ddot{\theta}=-k(x+\frac{l\theta}{2})(\frac{l}{2})+k(x-\frac{l\theta}{4})(\frac{l}{4})$$

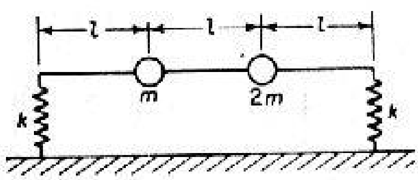
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & \frac{kl}{4} \\ \frac{kl}{4} & \frac{5kl^2}{16} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\omega^2\frac{m}{k} & \frac{l}{4} \\ \frac{l}{4} & \frac{5}{16}-\frac{\omega^2 J}{k^2} \end{vmatrix}=0$$

$$\omega^2[\frac{mJ}{k^2 l}]-\omega^2[\frac{5m}{16k}+\frac{2J}{kl}]+\frac{9}{16}=0 \qquad \frac{x}{\theta}=-4[\frac{5}{16}-\frac{\omega^2 J}{kl}]$$



شکل P5-20



شکل P5-21

5-21 با به‌کارگیری مختصات x_1 و x_2 به ترتیب در m و 2m معادله ماتریسی حرکت سیستم شکل P5-21 را بیابید. معادله‌ای برای فرکانسها و مودهای طبیعی را بیابید.

$$m\ddot{x}_1+m\ddot{x}_2=-k(2x_1-x_2)-k(2x_2-x_1)$$

$$J_{cm}=m(\frac{2l}{3})^2+2m(\frac{l}{3})^2=\frac{2ml^2}{3}$$

معادله گشتاور را می‌نویسیم:

$$\frac{2ml^2}{3}[\frac{(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)}{l}]=k(2x_2-x_1)(\frac{4l}{3})-k(2x_1-x_2)(\frac{5l}{3})$$

$$m\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}1 & 1\\ 14 & -13\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\lambda=\frac{m\omega^2}{k}\longrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 1-2\lambda\\ 14-2\lambda & -13+2\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$2\lambda^2-15\lambda+9=0\longrightarrow\lambda_1=0.658\ \&\ \lambda_2=6.842 \qquad \omega_1=0.81\sqrt{\frac{k}{m}}\ \&\ \omega_2=2.62\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{1-2\lambda}{-(1-\lambda)}$$

$$\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.921\\ 1\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2.17\\ 1\end{Bmatrix}$$

5-22 در مساله 21-5 اگر مختصات x و θ در نقطه m به‌کاررود، چه نوع همگیری پدید می‌آید؟

$$2m(\ddot{x}_1-l\ddot{\theta})+m\ddot{x}_1=-k(x_1-l\theta)-k(x_1-2l\theta)$$

$$J\ddot{\theta}=-k(x_1-2l\theta)(\frac{4l}{3})-k(x_1-l\theta)(\frac{5l}{3})$$

اگر ماتریس جرم و سختی را مرتب کنید می‌بینید که همگیری استاتیکی و همگیری دینامیکی پدیدار است.

5-23 شکل ماتریسی مساله‌های 9-5 و 10-5 را با یکدیگر مقایسه کنید و نوع همگیری هر کدام را نشان دهید.

از مساله 9-5 داریم:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+(\frac{g}{l})\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

از ماتریس سختی درمی‌یابیم که همگیری استاتیکی پدیدار است. از مساله 10-5 داریم،

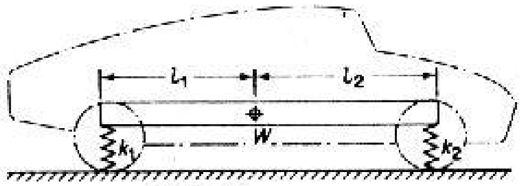
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}+\left(\frac{g}{l}\right)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

همگیری استاتیکی و دینامیکی θ پدیدار است.

5-24 اطلاعات زیر برای خودرو نشان داده در شکل P5-24 است.

$W=3500\ lb$ $\quad k_1=2000\ lb/ft$ $\quad k_2=2400\ lb/ft$

$l_1=4.4$ ft $\quad l_2=5.6$ ft $\quad r=4$ ft=G شعاع ژیراسیون



شکل P5-24

مودهای طبیعی ارتعاش را بیابید و جای گره هر مود را نشان دهید.

$$a=\frac{k_1+k_2}{m} \qquad b=\frac{k_2 l_2-k_1 l_1}{m} \qquad c=\frac{k_2 l_2^2-k_1 l_1^2}{mr^2}$$

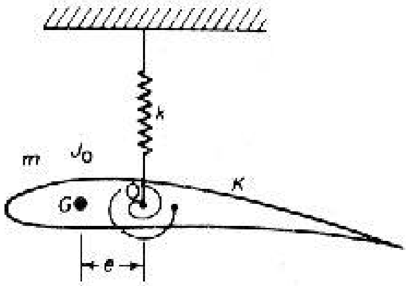
$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + ax + b\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + c\theta + b\frac{x}{r^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \omega^4 - (a+c)\,\omega^2 + \left(ac - \frac{b^2}{r^2}\right) = 0$$

$$\frac{X}{\Theta}=\frac{-b}{a-\omega^2} \longrightarrow a=40.5\ \&\ b=42.8\ \&\ c=65.6$$

$\omega_1^2=36.57 \qquad \omega_2^2=69.53$

$\left.\frac{X}{\Theta}\right)_1=-10.9$ ft/rad $\qquad \left.\frac{X}{\Theta}\right)_2=-1.47$ ft/rad

5-25 مقطع بال هواپیمایی مانند شکل P5-25 در تونل باد، بر فنر خطی k و فنر پیچشی K سوار شده‌است. اگر گرانیگاه به اندازه e جلوتر از تکیه‌گاه باشد، معادله‌های دیفرانسیل حرکت سیستم را بنویسید. $m(\ddot{x}-e\ddot{\theta})+kx=0$



شکل P5-25

$\sum M_G=0 J_G\ddot{\theta}+k\theta+kex$

$J_o=J_G+me^2 \longrightarrow (J_o-me^2)\ddot{\theta}+k\theta+kex=0$

5-26 فرکانسها و مودهای طبیعی سیستم شکل P5-26 را با این شرایط بیابید:

$gm_1=3.86\ \text{lb} \quad gm_2=1.93\ \text{lb} \quad k_1=20\ \text{lb/in} \quad k_2=10\ \text{lb/in}$

هنگامی که نیروی $F_1=F_o\text{Sin}\,\omega t$ به سیستم داده می‌شود، معادله‌های دامنه را بیابید و آنها را در برابر ω/ω_{11} رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}\text{Sin}(\omega t)$$

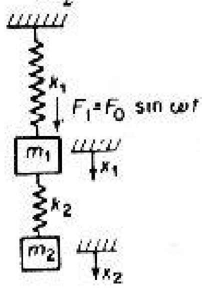
$$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}\text{Sin}(\omega t)$$

$$\begin{bmatrix} 30-0.010\omega^2 & -10 \\ -10 & 10-0.005\,\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

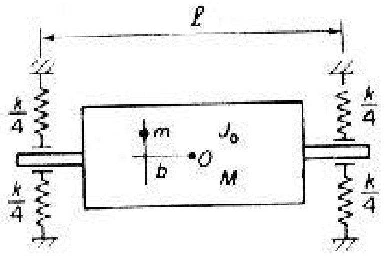
$$\omega^4-5000\,\omega^2+(4\times10^6)=0 \longrightarrow \omega^2=2500 \pm \sqrt{2.25*10^6}$$

$\omega_1=31.6\ \text{rad/s} \quad \& \quad \omega_2=63.3\ \text{rda/s}$

$\left.\frac{X_1}{X_2}\right)_1=\frac{1}{2} \qquad \frac{X_1}{X_2}=-1.0$



شکل P5-26



شکل P5-27

5-27 روتور سوار بر یاتاقانها در شکل P5-27، آزادانه در یک صفحه حرکت می‌کند. روتور با جرم M و ممان اینرسی J_o حول خط عمود بر محور، نسبت به O متقارن است. اگر نامیزانی کوچک mr در آن تغییر مکان محوری b از مرکز o را پدید آورد، معادله حرکت را بر حسب فرکانس چرخشی ω بنویسید.

$\sum F=-kx+mr\omega^2\text{Cos}(\omega t)=(M+m)\ddot{x}\cong M\ddot{x}$

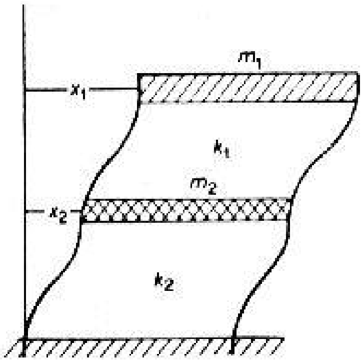
با فرض m<M

$\sum M_o=-k(\frac{l^2}{4})\theta+mr\omega^2 b\text{Cos}(\omega t)=J_o\ddot{\theta}$

5-28 ساختمان دو طبقه شکل P5-28، یک سیستم با جرم متمرکز است که در آن $m_1=\frac{1}{2}m_2$ و $k_1=\frac{1}{2}k_2$ است. نشان دهید که مودهای طبیعی چنین است.

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_1=2 \qquad \omega_1^2=\frac{k_1}{2m_1}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_2=-1 \qquad \omega_2^2=\frac{2k_1}{m_1}$$



شکل P5-28

$$\left.\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1+k_1(x_1-x_2)=0 \\ m_2\ddot{x}_2-k(x_1-x_2)+k_2x_2=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \lambda=\frac{m_1\,\omega^2}{k_1}$$

$$(1-\lambda)x_1-x_2=0 \longrightarrow -x_1+(3-2\lambda)x_2=0 \qquad \lambda^2-\frac{5}{2}\lambda+1=0 \longrightarrow \lambda=\frac{m\omega^2}{k}$$

$$\lambda=\begin{cases} 0.5 & \longrightarrow \omega_1=\sqrt{\dfrac{k_1}{2m_1}} \\ 2.0 & \longrightarrow \omega_2=\sqrt{\dfrac{2k_1}{2m_1}} \end{cases}$$

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{1}{1-\lambda} \qquad \left.\frac{x_1}{x_2}\right)_1=2.0 \quad \& \quad \left.\frac{x_1}{x_2}\right)_2=-1$$

5-29 در مساله 5-28، اگر نیرو جرم m_1 را به اندازه واحد از موقعیت تعادل خارج کند و سیستم از این موقعیت رها شود، معادله حرکت هر جرم را با روش جمع مودهای طبیعی بیابید.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=A\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\cos(\omega_1 t)+B\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\cos(\omega_2 t)$$

$$\dot{x}_1(0)=x_2(0)=0 \longrightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} = A\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + B\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$A = \frac{4}{9} \qquad B = \frac{-1}{9}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \end{Bmatrix} \mathrm{Cos}\,(\omega_1 t) + B_. \begin{Bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{Bmatrix} \mathrm{Cos}\,(\omega_2 t)$$

5-30 در مساله 5-29 نسبت برش بیشینه را برای طبقه اول و دوم بیابید.

از مساله پیش داریم:

$$x_1=\frac{8}{9}\,\mathrm{Cos}(\omega_1 t)+\frac{1}{9}\,\mathrm{Cos}(\omega_2 t)$$

$$x_2=\frac{4}{9}\,\mathrm{Cos}(\omega_1 t)-\frac{1}{9}\,\mathrm{Cos}(\omega_2 t)$$

$$\longrightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{2m_1}} \qquad \omega_2=2\omega_1=\sqrt{\frac{2k_1}{m_1}}$$

نیروی برش طبقه اول $= k_2x_2=2k_1x_2$ نیروی برش طبقه دوم $= k_1(x_1-x_2)$

$$\text{نسبت برش بیشینه}=\frac{(2x_2)_{max}}{(x_1-x_2)_{max}}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t}=-\frac{4}{9}\,\omega_1\mathrm{Sin}(\omega_1 t)-\frac{1}{9}\,\omega_1\mathrm{Sin}(\omega_2 t) \quad =\frac{-\omega_1}{9}[4\mathrm{Sin}(\omega_1 t)-2\mathrm{Sin}(\omega_1 t)]=0$$

$$=4[\mathrm{Sin}(\omega_1 t)-\mathrm{Sin}(\omega_1 t)\mathrm{Cos}(\omega_1 t)]=0$$

$$\mathrm{Cos}(\omega_1 t)=1 \longrightarrow (\omega_1 t)=0.360 \longrightarrow (x_2)_{max}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial(x_1-x_2)}{\partial t}=-\frac{4}{9}\,\omega_1\mathrm{Sin}(\omega_1 t)+\frac{4}{9}\,\omega_1\mathrm{Sin}(2\omega_1 t)=0 \quad =\mathrm{Sin}(\omega_1 t)[1-2\mathrm{Cos}(\omega_1 t)]=0$$

$$\mathrm{Cos}(\omega_1 t)=-0.5 \longrightarrow \omega_1 t=120 \longrightarrow (x_1-x_2)_{max}=\frac{4}{9}(-0.05)+\frac{2}{9}(-0.5)=\frac{1}{3}$$

نسبت برش $=2$

5-31 مساله 5-29 را اگر نیروی وارد، m_2 را به اندازه واحد جابه‌جا کند دوباره حل کنید.

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = A\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + B\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \longrightarrow \boxed{A=\frac{2}{3}} \quad \boxed{B=\frac{1}{3}}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = A\begin{Bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \mathrm{Cos}\,(\omega_1 t) + B\begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \mathrm{Cos}\,(\omega_2 t)$$

5-32 فرض کنید که در مساله 5-28 زمین لرزه ساختمان را با معادله $x_g=X_g \sin\omega t$ در راستای افق تکان دهد. عکس‌العمل ساختمان را بیابید و نمودار آن را در برابر $\frac{\omega}{\omega_1}$ رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3-2\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 2X_g \end{Bmatrix} \longrightarrow \lambda_1=\frac{1}{2} \ \& \ \lambda_2=2$$

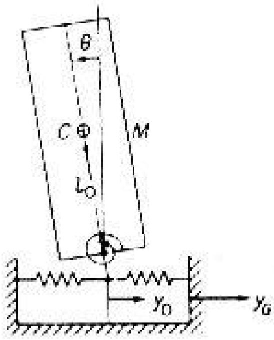
از قانون کرامر داریم،

$$X_1=\frac{X_g\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2\lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)} \qquad X_1=\frac{X_g\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)}$$

$$x_1=X_1 \sin\omega t \qquad x_2=X_2 \sin\omega t$$

$$\frac{x_1}{x_g}=\frac{2\sin\omega t}{(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)} \qquad \frac{x_2}{x_g}=\frac{2(1-\lambda)\sin\omega t}{(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)}$$

5-33 برای شبیه‌سازی اثر زمین‌لرزه بر ساختمان، پی ساختمان با دو فنر با سختی خطی k_h و سختی پیچشی k_r بر زمین قرارگرفته است. اگر زمین با حرکت هماهنگ $Y_g=Y_G \sin\omega t$ بلرزد،معادله‌های حرکت را بر حسب مختصات شکل P5-33 بیابید.



شکل P5-33

فرض کنید ρ شعاع ژیراسیون باشد،

$$M(\ddot{Y}_g-l_\circ \ddot{\theta})=k_h(Y_G-Y_\circ)$$

$$M\rho_c^2 \ddot{\theta}=k_h(Y_G-Y_\circ)l_\circ-k_h\theta+Mgl_\circ \theta$$

5-34 با جایگذاری روابط زیر معادله‌های مساله 5-33 را پاسخ یابی کنید:

$$\omega_h^2=\frac{k_h}{M} \ , \ \omega_r^2=\frac{k_r}{Me_c^2} \ , \ (\frac{l_c}{l_\circ})^2=\frac{1}{3} \ , \ (\frac{\omega_r}{\omega_h})^2=4$$

اولین فرکانس طبیعی و مود ارتعاشی آن برابر است با

$$\frac{\omega_r}{\omega_h}=0.734 \quad \& \quad \frac{Y_\circ}{l_\circ\theta}=-1.14$$

که نشان می‌دهد که بیشتر حرکت انتقالی انجام می‌شود. دومین فرکانس طبیعی و مود آن را برآورد کنید (تغییر مکان سقف = $Y_1=Y_\circ-2l_\circ\theta$).

$$\lambda=\frac{\omega}{\omega h}\longrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda^2 & -1 \\ 1 & \frac{4-\lambda^2}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_\circ \\ l\theta_\circ \end{Bmatrix}=Y_\circ e^{i\phi}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda^4-8\lambda^2+4=0 \qquad \lambda=\frac{\omega}{\omega h}=\begin{cases} 0.734 \\ 2.73 \end{cases}$$

در مود ارتعاشی اول،

$$\frac{Y_\circ}{l\theta_\circ}=\frac{\lambda^2-4}{3}=-1.15$$

اگر $Y_1=Y_\circ-2l_\circ\theta$ تغییر مکان سقف ساختمان باشد،

$$\frac{Y_1}{l\theta_\circ}=\frac{Y_\circ}{l\theta_\circ}=-2-1.15-2=-3.15$$

و برای مود ارتعاشی دوم،

$$\frac{Y_\circ}{l\theta_\circ}=1.15 \qquad \frac{Y_\circ}{l\theta_\circ}=-0.85 \qquad \frac{Y_1}{Y_\circ}=2.73$$

5-35 آرایش پاسخ و مود مساله‌های 5-33 و 5-34 در شکل P5-35 نشان داده شده‌است. درستی مود ارتعاشی چند نسبت فرکانسی را بررسی کنید.

از مساله 5-34 داریم،

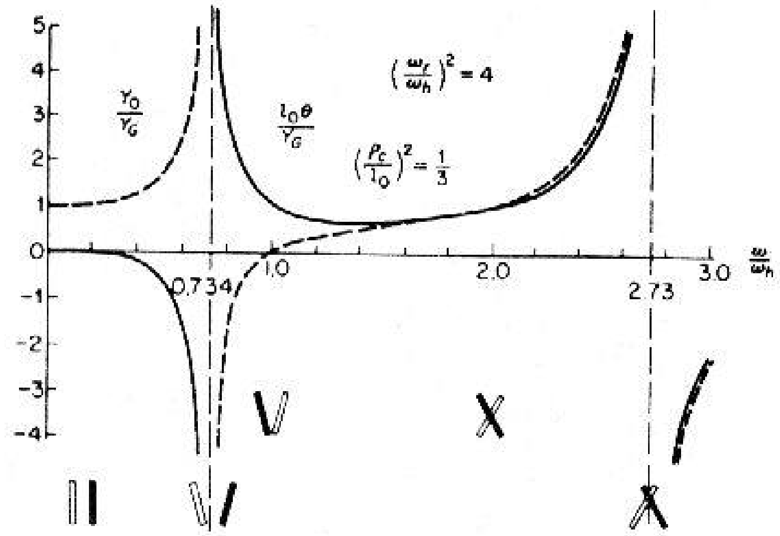
$$\det=\lambda^4-8\lambda^2+4\longrightarrow \det=0:\lambda=\frac{\omega}{\omega_h}=\begin{cases} 0.734 & \text{مود اول} \\ 2.73 & \text{مود دوم} \end{cases}$$

با به کارگیری قانون کرامر،

$$\frac{Y_\circ}{Y_G}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 1 & \frac{4-\lambda^2}{3} \end{vmatrix}}{\lambda^4-8\lambda^2+4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1-\lambda^2}{\lambda^4-8\lambda^2+4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 1 & \frac{4-\lambda^2}{3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{l_0\theta_0}{Y_G} = \frac{}{\lambda^4 - 8\lambda^2 + 4} = \frac{\lambda^2}{\lambda^4 - 8\lambda^2 + 4}$$



شکل P5-35

5-36 فاصله اتصالهای کشویی یک بزرگراه بتنی 45 ft است. این اتصالها به خودروهایی که با سرعت ثابت از آن می‌گذرند، ضربه‌های متوالی وارد می‌کند. سرعتی که در خودروی مساله 5-24، ارتعاشات پیچشی و نوسانی پدید می‌آورد، بیابید.

$v\tau = l \longrightarrow v = \frac{l}{\tau} = l f_n$

از مساله 5-24 فرکانس ارتعاشات خطی $f_1 = 0.962$ و ارتعاشات پیچشی $f_2 = 1.327$ است.

$v_1 = 45(0.962) = 43.29 \text{ ft/s} = 29.5 \text{ mph}$

$v_2 = 45(1.327) = 59.72 \text{ ft/s} = 40.7 \text{ mph}$

5-37 برای سیستم مساله P5-37، $W_1 = 200$ lb و وزن جاذب $W_2 = 50$ lb است. اگر W_1 با نامیزانی 2 lb.in در سرعت چرخشی 1800 rpm تحریک شود، بهترین اندازه سختی جاذب یا k_2 را بیابید. دامنه ارتعاش W_2 چه اندازه خواهد بود؟

$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = m_e e\omega^2 \sin\omega t$

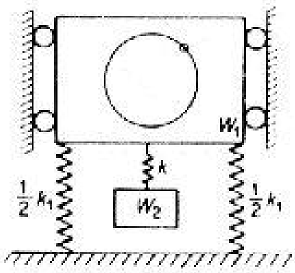
$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$

$\frac{k_2}{m_2}$ را می‌توان با فرکانس تحریک ω^2 برابر قرار داد.

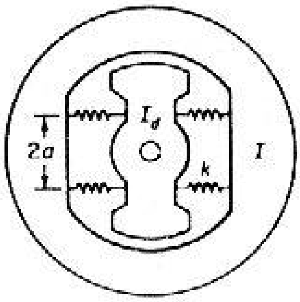
$k_2 = m\omega^2 = 4600 \text{ lb/in}$

در $x_1=0$ نیروی جاذب برابر و منفی نیروی تحریک خواهد بود.

$$k_2X_2=m_\circ e\omega^2 \longrightarrow X_2=\frac{m_\circ e\omega^2}{k_2}=\frac{m_\circ e\omega^2}{m_2}=0.4\ \text{in}$$



شکل P5-37



شکل P5-39

5-38 اگر در مسأله 5-37 دمپر c بین W_1 و W_2 نصب شود، معادله‌های دامنه را از روش جبر مختلط بیابید.

$$m_1\ddot{x}_1+c(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_1x_1+k_2(x_1-x_2)=m_\circ e\omega^2\, e^{i\omega t}$$

$$m_2\ddot{x}_2+c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_2(x_2-x_1)=0$$

$$x_1 = X_1e^{i\omega t} \qquad\qquad x_2 = X_2e^{i\omega t}$$

$$\left\{\frac{(k_1+k_1)}{m_1}+C(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-\omega^2+\frac{i\omega c}{m_1}\right\}X_1-\left[\frac{k_2+i\omega c}{m_1}\right]X_2=\frac{m_\circ e\omega^2}{m_1}$$

$$-\left[\frac{k_2}{m_1}+\frac{i\omega c}{m_2}\right]X_1+\left[\frac{k_2}{m_2}-\omega^2+\frac{i\omega c}{m_2}\right]X_2=0$$

$$X_1=\frac{m_\circ e\omega^2(k_2-m_2\omega^2+ic\omega)}{(k_1+k_2-m_1\omega^2+i\omega c)(k_2-m_2\omega^2+ic\omega)-(k_2+ic\omega)^2}$$

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_2-ic\omega}{k_1-m_2\omega^2+ic\omega}$$

5-39 چرخ‌لنگری با ممان اینرسی I دارای یک جاذب ارتعاشی پیچشی با ممان اینرسی I_d است که مانند شکل P5-39، آزادانه حول محور می‌چرخد. چهار فنر پیچشی به چرخ‌لنگر وصل است. معادله‌های دیفرانسیل حرکت سیستم و پاسخ تحریک سیستم با گشتاور هماهنگ را بیابید.

$$I\ddot{\theta}_1-4ka^2(\theta_1-\theta_2)=M_\circ \text{Sin}(\omega t)$$

$$I_d\ddot{\theta}_2+4ka^2(\theta_2-\theta_1)=0 \quad \longrightarrow \lambda=\frac{\omega^2 I}{ka^2} \quad \& \quad n=\frac{I_d}{I}$$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 4-n\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_\circ \\ 0 \end{Bmatrix} \text{Sin}\omega t$$

$$\theta_1 = \frac{(4-n\lambda)M_\circ \text{Sin}\,\omega t}{n\lambda^2+4(1+n)\lambda+15} \quad , \quad \theta_1 = 0 : \lambda = \frac{4}{n}$$

5-42 الک به‌کاررفته برای جداسازی اندازه‌های گوناگون زغال‌سنگ، صفحه‌ای است که با فرکانس 600 cpm نوسان می‌کند. وزن دستگاه 500 *lb* و فرکانس پایه آن 400 Cpm است. اگر جاذبی به وزن 125 *lb* برای حذف ارتعاش صفحه به‌کاررود، سختی جاذب و دو فرکانس طبیعی دستگاه را بیابید.

فرکانس طبیعی جاذب باید با فرکانس تحریک برابر باشد.

$$\omega_{22}^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{386\ k_2}{125} = (20\pi)^2 \longrightarrow k_2 = 1278 lb/in$$

فرکانس طبیعی سیستم از صورت معادله (5.5-1) به دست آورید که چنین ساده می‌شود:

$$(\frac{\omega}{\omega_{22}})^4 - \{1+(\frac{\omega_{11}}{\omega_{22}})^2[1+\mu(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}})^2]\}(\frac{\omega}{\omega_{22}})^4 + (\frac{\omega_{11}}{\omega_{22}})^2 = 0$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{125}{500} = 0.25 \quad \& \quad (\frac{\omega_{11}}{\omega_{22}})^2 = (\frac{400}{600})^2 = \frac{1}{2.25}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_{22}} \longrightarrow \lambda^4 - 1.695\ \lambda^2 + \frac{1}{2.25} = 0 \longrightarrow \lambda^2 = (\frac{\omega}{\omega_{22}})^2 = 0.845 \pm 0.164$$

5-43 در یک واحد سرماساز، بخشی از لوله‌ای که ماده سردساز را حمل می‌کند، هنگام کار کمپرسور با سرعت 232 rpm، به شدت می‌لرزد. برای حذف لرزش، پیشنهاد شده تا سیستم جرم-فنری مانند جاذب به لوله آویخته شود. برای آزمایش جاذبی به جرم 2.0 *lb* که در 232 cpm میزان شده، فرکانسهای 198 و 272 cpm به‌دست‌می‌آید. اگر سیستم جاذب چنان طرح شود که فرکانسهای طبیعی، خارج از بازه 160 تا 320 cpm باشد، وزن و سختی فنر چه اندازه باید باشد؟

شکل 5.5-3 را ببینید. برای وزنه 2 *lb* که در 232 rpm میزان شده. فرکانسهای طبیعی به‌دست‌می‌آید

$$(\frac{\omega}{\omega_{22}})^2 = \frac{198}{232} = 0.845 \quad \& \quad (\frac{\omega}{\omega_{22}})^2 = \frac{272}{232} = 1.17$$

با این اعداد نسبت جرم از شکل 5.5-3 به دست می‌آید.

$$\mu \cong 0.10$$

برای خارج کردن فرکانسهای طبیعی از بازه این فرکانس

$(\frac{\omega}{\omega_{22}})^2 = \frac{160}{232} = 0.69$ & $(\frac{\omega}{\omega_{22}})^2 = \frac{320}{232} = 1.38$

شکل 5.5-3 نشان می‌دهد که $0.57 \geq \mu$ است. چون

$$\mu_1 = \frac{(m_2)_1}{m_1} = \frac{2}{m_1} = 0.10 \longrightarrow m_1 = 20 lb$$

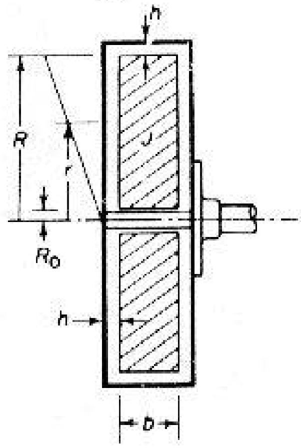
$$\mu_2 = \frac{(m_2)_1}{m_2} = 0.57 \longrightarrow m_2 = 0.57(20) = 11.4\ lb$$

$$k_2 = m\omega^2 = 17.9\ lb/in$$

5-44 شکل P5-44 گونه‌ای از دمپر پیچشی به‌کاررفته در میل‌لنگ خودرو را نشان می‌دهد. J صفحه توپری است که فاصله خالی بین آن و دیواره ساکن با روغنی به ضریب لزجت μ پُرشده‌است. این دمپر با حرکت نسبی میان این دو کار می‌کند. معادله گشتاور تحریک دمپر را در سرعت ω بیابید. فرض کنید که توزیع سرعت سیال در میان صفحه توپر و دیواره خطی است.

$T = \mu$ (تغییرات سرعت) (شعاع) (مساحت)

$$= 2\int_{R_0}^{R} 2\pi\mu\,(\frac{\omega r}{h})\,r^2\,dr + 2\pi\mu\,(\frac{\omega R}{h})\,R^2\,b = 2\pi\mu\omega\,\frac{\omega R^2}{h}\,[0.5\,(R - \frac{R_0^4}{R^3}) + b]$$



شکل P5-44

5-45 برای دمپر لزج هودل (Houdaille) با نسبت جرم $\mu=0.25$، ضریب میرایی بهینه ξ_0 و فرکانس بیشترین واکنش را بیابید.

ضریب میرایی بهینه از معادله (5.7-7) به دست می‌آید:

$$\xi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}} = 0.1054$$

فرکانسی که در آن بیشترین واکنش را با دامنه بیشینه دارد از معادله (5.7-8) به دست می‌آید:

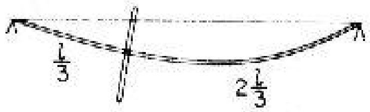
$$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{\frac{2}{2+\mu}}=0.943$$

5-46 اگر در مساله 5-45، $\zeta=0.10$ باشد، دامنه اوج را با دامنه بهینه آن مقایسه کنید.

دامنه اوج را برای μ و ζ می‌توان از شکل 5.7-5 به دست آورد. دیده می‌شود که اندازه بهینه (پایین‌ترین نقطه منحنی) در $\mu=0.25$ دارای $\zeta\cong0.105$ است که مانند مساله 5-45 به‌دست‌می‌آید. بنابراین

$$\frac{\theta_{max}\,(\xi=0.1)}{\theta_{max}\,(\xi=0.105)}\cong 1.0$$

5-48 تیری با تکیه‌گاه ساده به طول l و سختی EI، دارای دیسک نازک و صلبی است که مانند شکل P5-48 در نقطه $\frac{l}{3}$ وصل است. معادله‌های حرکت را برحسب y و θ بیابید و $(\frac{\omega}{\omega y})^2$ را در برابر $\frac{J_d}{ml^2}$ رسم کنید.



شکل P5-48

با به‌کارگیری روش همان سطح، شیب و خیز تیر را بر اثر M_0 در $\frac{l}{3}$ به دست می‌آوریم

$$\delta_B=l\theta_A\left\{\frac{M_0 l}{18}\left(\frac{2l}{3}+\frac{l}{9}\right)-\frac{4M_0 l}{18}\left(\frac{4l}{9}\right)\right\}\ \frac{1}{EI}=-\frac{M_0 l^2}{18\ EI}$$

$$\delta_c=\frac{M_0 l}{18}\qquad y_B=|\theta_A|\frac{l}{2}+\delta_c=\frac{4}{9}\left(\frac{M_0 l^2}{18\ EI}\right)$$

$$\theta_B-\theta_1=\frac{M_0 l}{18\ EI}\longrightarrow\theta_B=\frac{M_0 l}{9\ EI}$$

اینک خیز و شیب را در اثر F_0 به دست می‌آوریم

$$y=F_0\frac{bx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)\qquad y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4F_0 l}{3\times81(EI)}$$

$$\frac{dy}{dx}=F_0\frac{b}{6EIl}(l^2-3x^2-b^2)\qquad \frac{dy}{dx}\bigg|_{\frac{1}{3}}=\frac{2F_0 l^2}{81EI}$$

$$y=\frac{4}{3\times81}\cdot\frac{l^3}{EI}F_0+\frac{4}{9\times81}\cdot\frac{l^2}{EI}M_0\quad\&\quad\theta=\frac{2l^2}{81EI}F_0+\frac{l}{9EI}M_0$$

$$F=m\omega^2y\quad\&\quad M_0=(J_p-J_d)\omega_1\omega\,\theta$$

در چرخش هماهنگ، $\omega=\omega_1$ است.

$\lambda=\frac{m\omega^2 l^3}{81EI}$, $b=(\frac{r}{l})^2$ $(J_p-J_d)=m[\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{4}]=\frac{mr^2}{4}$

$\frac{y}{l}=\lambda[\frac{4}{3l}y+\frac{b}{2}\theta]$ & $\theta=\lambda[\frac{2}{l}y+\frac{9b}{4}\theta]$

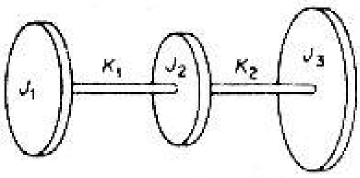
$$\begin{vmatrix} 1-\frac{4}{3}\lambda & -\frac{b}{2}\lambda \\ -2\lambda & 1-\frac{9b}{4}\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2b\lambda^2-(\frac{4}{3}+\frac{9b}{4})\lambda+1=0$$

$b=0$: $\lambda=\frac{3}{4}$ & $\omega=7.8\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$

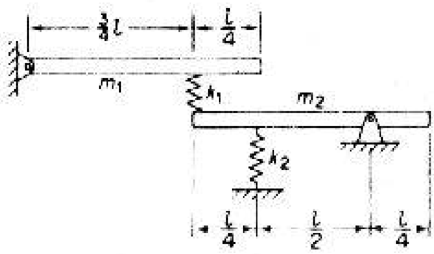
$b=1$: $\lambda_1=0.347$ & $\lambda_2=1.443$

b	λ	$\frac{\omega}{\sqrt{\frac{ml^3}{EI}}}$
0	0.75	7.8
0.1	0.6 , 7.16	6.96 , 24.1
0.5	0.516 , 1.944	6.42 , 12.54
1.0		5.3 , 10.82

5-51 شکل P5-51 یک سیستم یک درجه آزادی را نشان می‌دهد. معادله مشخصه این سیستم، دارای یک ریشه صفر و دو فرکانس ارتعاش خطی است. مفهوم فیزیکی این واقعیت را که سه مختصه نیاز است اما دو فرکانس به دست می‌آید، بیان کنید.



شکل P5-52



شکل P5-52

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1=k_1(\theta_2-\theta_1) \\ J_2\ddot{\theta}_2=-k_1(\theta_2-\theta_1)+k_2(\theta_3-\theta_2) \\ J_3\ddot{\theta}_3=-k_2(\theta_3-\theta_2) \end{cases}$$

$$\phi=(\theta_2-\theta_1)\ \&\ \psi=(\theta_3-\theta_2)$$

$$\begin{cases} J_2\ddot{\phi}_1=-k_1(1+\frac{J_2}{J_1})\phi+k_2\psi \\ J_3\ddot{\psi}=k_1(\frac{J_2}{J_1})\phi-k_2(1+\frac{J_3}{J_2})\psi \end{cases}$$

$$\omega^4-\left[\frac{k_1}{J_1}+\frac{k_2}{J_2}(1+\frac{k_1}{k_2}+\frac{J_2}{J_3})\right]\omega^2+(\frac{k_1}{k_1})(\frac{k_2}{J_2})(\frac{J_1J_2J_3}{J_3})=0$$

5-52 شکل **P5-52** دو میله یکنواختِ صلب با طول مساوی و جرمهای مختلف را نشان می‌دهد. معادله‌های حرکت، فرکانسها و مودهای طبیعی را از روش ماتریسی بیابید.

اگر تغییر مکان m_1، θ_1 پادساعتگرد و تغییر مکان m_2، θ_2 ساعتگرد باشد،

$$J_1\ddot{\theta}_1=-\frac{3lk_1}{4}(\theta_1-\theta_2)\frac{3l}{4}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2=\frac{3lk_1}{4}(\theta_1-\theta_2)\frac{3l}{4}\frac{1}{2}(lk_2\theta_2)\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}+lk_1\begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{9}{16} \\ -1 & \frac{9}{16}+\frac{k_2}{4k_1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$J_1=\frac{m_1l^2}{3}\quad \&\quad J_2=(\frac{1}{12}+\frac{1}{16})ml^2$$

5-53 نشان دهید که مودهای ارتعاشی مستقیم مساله 5-51 متعامد هستند.

$$\begin{bmatrix} k_1\left(1+\frac{J_2}{J_1}\right)-\omega J_2 & -k \\ -k_1\frac{J_3}{J_2} & k_2\left(1+\frac{J_3}{J_1}\right)-\omega^2J_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\phi}{\psi}=\frac{k_2}{k_1(1+\frac{J_2}{J_1})-\omega^2J_2}=\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_3-\theta_2}$$

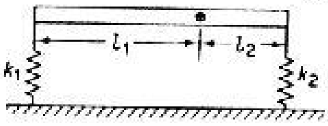
$$=\frac{\frac{\theta_2}{\theta_1}-1}{\frac{\theta_3}{\theta_2}-\frac{\theta_2}{\theta_1}}$$

با قرار دادن مقادیر عددی k_2 و J_2 ثابت کنید که

$$J_1\theta_1^i\theta_2^j+J_2\theta_2^i\theta_2^j+J_3\theta_3^i\theta_3^j=0$$

5-54 برای سیستم شکل **P5-54** مختصات x_1 و x_2 را در دو انتهای تیر به‌کاربرید و نوع

همگیری پیش آمده را بیان کنید.



شکل P5-54

تغییر مکان نقطه c $=x_1+(\frac{l_1}{l_1+l_2})(x_2-x_1)=\frac{l_2x_1+l_1x_2}{l_1+l_2}$

$$T=\frac{1}{2}m[\frac{l_2\dot{x}_1+l_1\dot{x}_2}{l_1+l_2}]+\frac{1}{2}J_c[\frac{\dot{x}_2-\dot{x}_1}{l_1+l_2}]$$

$$U=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2$$

پس همگیری دینامیکی پیش می‌آید.

5-55 از روش تبدیل لاپلاس، مساله حل شده در بخش 5-4 را دوباره، حل کنید و نشان دهید که پاسخ آن چنین است:

$$\boxed{\begin{aligned}x(t)&=1.499[1-\mathrm{Cos}(16.09t]-0.3875[1-\mathrm{Cos}(31.64t)]\ \mathrm{cm}\\ y(t)&=2.334[1-\mathrm{Cos}(16.09t)]+0.993[1-\mathrm{Cos}(31.64t)]\ \mathrm{cm}\end{aligned}}$$

از بخش 5.4 تبدیل لاپلاس معادله‌های دیفرانسیل با شرایط اولیه صفر چنین است:

$$(s^2+540)\overline{x}(s)-180\overline{y}(s)=0$$

$$-720\overline{x}(s)+(720+s^2)\overline{y}(s)=\frac{16}{s}$$

$$\overline{x}(s)=\frac{180\ \overline{y}(s)}{s^2+540}\quad \&\quad -720\ [\frac{180}{s^2+540}]\overline{y}(s)+(720+s^2)\overline{y}(s)=\frac{16}{s}$$

معادله را برحسب y می‌نویسیم:

$$(s^4+1260s^2+259200)\overline{y}(s)=\frac{16}{s}(s^2+540)$$

ریشه‌ها به دست می‌آید

$$s^2=-630\pm\sqrt{396900-259200}=-630\pm 371.08$$

$$s_1^2=-258.92\longrightarrow s_1=\pm 16.091\ i$$

$$s_2^2=-1001.08\longrightarrow s_2=\pm 31.640\ i$$

$$\overline{y}(s)=\frac{16(s^2+54)}{s(s^2+258.92)(s^2+1001.08)}=\frac{16(s^2+540)}{s(s\pm 16.09\ i)(s\pm i)}31.64$$

$$=\frac{C_1}{s+16.091\,i}+\frac{C_2}{s-16.091\,i}+\frac{C_3}{s+31.64\,i}+\frac{C_4}{s+31.64\,i}+\frac{C_5}{s}$$

$$\boxed{C_1=-0.0117}\quad \boxed{C_2=-0.0117}\quad \boxed{C_3=-0.004965}$$

$$\boxed{C_4=-0.004965}\quad \boxed{C_5=0.0333}$$

پس از جایگذاری این مقادیر در معادله y(s) داریم

$$\bar{y}(s)=\frac{-0.0117}{s+16.091i}\frac{-0.0117}{s-16.091i}\frac{-0.004965}{s+31.64i}\frac{0.009965}{s-31.64i}+\frac{0.0333}{s}$$

$$y(t)=0.0333-0.0117(e^{-16.091\,it}+e^{16.09\,it})-0.004965(e^{-91.64\,it}+e^{91.64\,it})$$

$$=0.0333-0.0234\mathrm{Cos}(16.091)-0.0993\mathrm{Cos}(31.64\,t)\mathrm{m}$$

$$=2.34[1-\mathrm{Cos}(16.09\,t)]+0.993[1-\mathrm{Cos}(31.64\,t)]\ \mathrm{cm}$$

$$\bar{x}(s)=\frac{180y(s)}{s^2+540}=\frac{180(16)}{s(s^2+258.92)(s^2+1001.08)}=\frac{B_1}{s}+$$

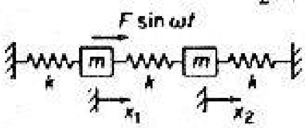
$$+\frac{B_2}{s-16.09\,i}+\frac{B_3}{s-16.09\,i}+\frac{C_4}{s+31.64i}+\frac{C_5}{s-31.64i}$$

$$\bar{x}(s)=\frac{0.111}{s}\frac{0.007495}{s+16.09i}\frac{0.007495}{s-16.09i}+\frac{0.001938}{s+0.001938}+\frac{0.001938}{s-31.64i}$$

$$x(t)=0.0111-0.01499\mathrm{Cos}(16.09t)+0.003875\mathrm{Cos}(31.64\,t)\mathrm{m}$$

$$=1.4999[1-\mathrm{Cos}(16.09\,t)+0.3875[1-\mathrm{Cos}(31.64\,t)]\ \mathrm{cm}$$

57 - 5 از روش تبدیل لاپلاس پاسخ ارتعاش واداشته سیستم شکل P5-57 را بیابید. شرایط آغازین $x_1(0)$، $x_2(0)$، $\dot{x}_1(0)$ و $\dot{x}_2(0)$ است.



شکل P5-57

$$m\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_\circ\\0\end{Bmatrix}\mathrm{Sin}\omega t$$

$$ms^2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{x}_1(s)\\\bar{x}_2(s)\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{x}_1(s)\\\bar{x}_2(s)\end{Bmatrix}=$$

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{F_\circ\omega}{s^2+\omega^2}+msx_1(0)+m\dot{x}_1(0)\\[2ex] msx_2(0)+m\dot{x}_2(0)\end{Bmatrix}$$

از حل ماتریس داریم:

$$(ms^2+2k)^2-k^2=0 \longrightarrow s^2=-\frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m}$$

$$\bar{x}_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{F_\circ \omega}{s^2+\omega^2} + msx_1(0) + mx_1(0) & -k \\ msx_2(0) + mx_2(0) & ms^2 + 2k \end{vmatrix}}{(s^2 + \frac{k}{m})(S^2 + \frac{3k}{m})\, m}$$

$$\bar{x}_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} ms^2 + 2k & \frac{F_\circ \omega}{s^2+\omega^2} + msx_1(0) + mx_1(0) \\ -k & msx_2(0) + mx_2(0) \end{vmatrix}}{(s^2 + \frac{k}{m})(s^2 + \frac{3k}{m})\, m}$$

در ارتعاش حالت پایا، $x(0)$ و $x(0)$ صفر و $s = i\omega$ است.

$$x_1(s) = \frac{[\frac{2k}{m} - \omega^2]\, F_\circ \operatorname{Sin}(\omega t)}{(\frac{k}{m} - \omega^2)(\frac{3k}{m} - \omega^2)} \qquad x_2(s) = \frac{kF_\circ \operatorname{Sin}(\omega t)}{(\frac{K}{m} - \omega^2)(\frac{3k}{m} - \omega^2)\, m}$$

٦ ویژگیهای سیستم ارتعاشی

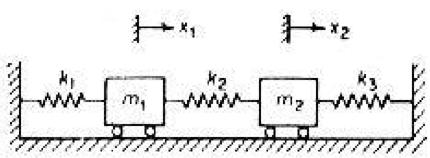
6-1 برای سیستم جرم-فنر شکل **P6-1**، ماتریس تغییر شکل را بیابید.

$F_1=-k_1x_1-k_2(x_1-x_2)$ & $F_2=-k_3x_2-k_2(x_2-x_1)$

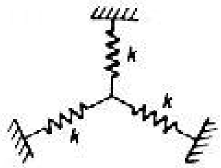
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_2+k_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \end{Bmatrix}=[k]^{-1}\begin{Bmatrix} \frac{F_1}{F_2} \end{Bmatrix}=$$

$$\frac{-1}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}\begin{bmatrix} k_2+k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$



شکل **P6-1**



شکل **P6-2**

6-2 سه فنر هر یک با سختی k lb/in و با زاویه 120° به صورت متقارن همچون شکل **P6-2** به یکدیگر بسته شده‌اند. ثابت کنید که ضرایب تاثیر اتصال، مستقل و برابر $1.5\frac{k}{1}$ است.
اگر اتصال O تا O' کشیده شود و δ کوچک باشد،

$F_1=k\delta\cos\theta \qquad F_2=k\delta\cos(60-\theta) \qquad F_3=k\delta\cos(60-\theta)$

نیرو در راستای تغییر مکان δ چنین خواهد بود،

$$F=F_1\cos\theta+F_2=k\delta\cos(60-\theta)+F_3=k\delta\cos(60-\theta)$$
$$=k\delta[\cos^2\theta+\cos^2(60-\theta)+\cos^2(60-\theta)]=1.5k\delta$$

که پاسخ مستقل از θ است.

$$\frac{\delta}{F}=\frac{1}{1.5k}$$

6-3 تیر یکنواختی به طول l بر روی تکیه‌گاه ساده با وزنه‌هایی در l 0.25 و l 0.6 بارگذاری شده است. ضرایب تاثیر بارگذاری در این نقاط را به دست آورید.

اگر فاصله l 0.25 را نقطه 1 و l 0.6 را نقطه 2 نامگذاری کنیم،

$$\iota=\frac{Pbx}{6EI}(l^2-x^2-b^2) \qquad x\leq a$$

$$a_{11}=\frac{0.75(0.25l^3)}{6\ EI}(1-0.25^2-0.75^2)=\frac{0.0114l^3}{EI}$$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{0.25(0.4l^3)}{6EI}(1-0.4^2-0.25^2)=\frac{0.013l^3}{EI}$$

$$a_{22}=\frac{0.4(0.6l^3)}{6EI}(1-0.6^2-0.25^2)=\frac{0.01924l^3}{EI}$$

$$a=\frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix}0.0114 & 0.013\\ 0.013 & 0.01924\end{bmatrix}$$

6-4 ماتریس تغییر شکل تیر یک سرگیردار نشان داده در شکل P6.4 را به دست آورید و ماتریس سختی آن را از وارون ماتریس تغییر شکل بیابید.

$$a_{11}=\frac{(l/4)^4}{3El}=\frac{l^3}{192EI} \quad \& \ \theta_{11}=\frac{(l/4)^2}{3El}=\frac{l^2}{192\ EI}$$

$$a_{21}=a_{11}+\frac{1}{4}\theta_{11}=\frac{l^3}{192EI}+\frac{l^3}{128\ EI}=\frac{2.5l^3}{192\ EI}$$

$$a_{31}=a_{21}+\frac{l^3}{128EI}=\frac{4l^3}{192\ EI}$$

$$a_{41}=a_{31}+\frac{l^3}{128\ EI}=\frac{5.5l^3}{192\ EI}$$

$$a_{22}=\frac{(l/2)^3}{3El}=\frac{l^3}{24EI} \quad \& \ \theta_{22}=\frac{(l/2)}{2EI}=\frac{l^2}{8\ EI}$$

$$a_{32}=a_{22}+\frac{l}{4}\theta_{22}=(\frac{1}{24}+\frac{1}{32})\frac{l^3}{EI}=\frac{7l^3}{96\ EI}$$

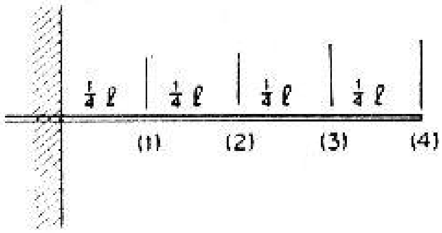
$$a_{42}=(\frac{7}{96}+\frac{1}{32})\frac{l^3}{EI}=\frac{10l^3}{96\ EI}$$

$$a_{33}=\frac{(3l/s)^3}{3EI}=\frac{9l^3}{64EI} \quad \& \ \theta_{33}=\frac{(3l/4)^2}{2EI}=\frac{9l^2}{32\ EI}$$

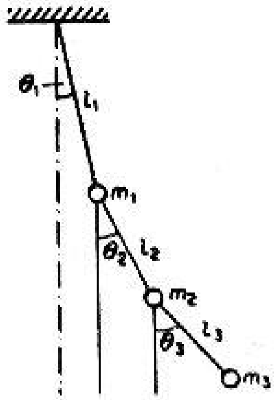
$$a_{43}=a_{33}+\frac{1}{4}\theta_{33}=(\frac{9}{64}+\frac{9}{128})\frac{l^3}{EI}=\frac{27l^3}{128\ EI} \quad a_{44}=\frac{l^3}{3\ EI}$$

$$a=\frac{l^3}{EI}\left|\frac{2.5}{192}\ \frac{1}{24}\ \frac{7}{96}\ \frac{10}{96}\right|=\frac{l^3}{192\,EI}\left|\ 20\ \ 14\ \ 82.5\ \right|$$

$$a=\frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix}\frac{1}{192} & \frac{2.5}{192} & \frac{4}{192} & \frac{5.6}{192}\\ \frac{2.5}{192} & \frac{1}{24} & \frac{7}{96} & \frac{10}{96}\\ \frac{4}{192} & \frac{7}{96} & \frac{9}{64} & \frac{27}{128}\\ \frac{5.5}{192} & \frac{10}{96} & \frac{27}{128} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=EI\frac{l^3}{192}\begin{bmatrix}1 & 2.5 & 4 & 5.5\\ 2.5 & 8 & 14 & 20\\ 4 & 14 & 27 & 40.5\\ 5.5 & 20 & 40 & 64\end{bmatrix}$$



شکل P6-4



شکل P6-5

6-5 ضرایب تاثیر آونگ سه‌گانه شکل P6-5 را به دست آورید.

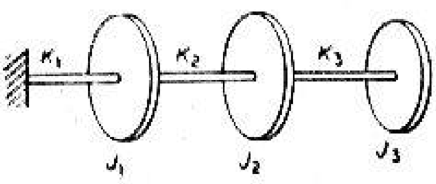
$\frac{a_{11}}{l_1}(m_1+m_2+m_3)g=1 \qquad a_{11}=a_{21}=a_{31}=[\frac{1}{m_1+m_2+m_3}]\frac{l_1}{g}$

$[\frac{a_{22}-a_{12}}{l_2}](m_2+m_3)g=1 \qquad a_{22}=a_{32}=[\frac{1}{m_2+m_3}](\frac{l_2}{g})+[\frac{1}{m_1+m_2+m_3}](\frac{l_1}{g})$

$[\frac{a_{33}-a_{21}}{l_1}]m_3g=1 \qquad a_{33}=[\frac{1}{m_3}]\frac{l_3}{g}+[\frac{1}{m_2+m_3}](\frac{l_2}{g})+[m_1+m_2+m_3](\frac{l_1}{g})$

$a_{ij}=a_{ji}$

6-6 ماتریس سختی سیستم شکل P6-6 را بیابید و از وارون آن، ماتریس تغییر شکل را برآورد کنید.



هر بار یک دیسک را به اندازه واحد می‌چرخانیم در حالی که دو دیسک دیگر ثابت هستند و سپس گشتاور لازم به دست می‌آید:

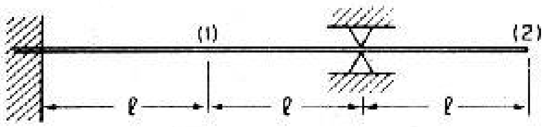
$$\theta_1 = 1.0 \quad T_1 = k_1 + k_2 \quad T_{\circ} = -k_1 \quad T_2 = -k_2 \quad T = 0$$
$$\theta_2 = 1.0 \quad T_1 = -k_2 \quad T_2 = k_2 + k_3 \quad T_3 = -k_3$$
$$\theta_3 = 1.0 \quad T_1 = 0 \quad T_2 = -k_3 \quad T_3 = -k_3$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

و برای ماتریس تغییر شکل به هر دیسک گشتاور واحد بدهید و چرخش را اندازه بگیرید.

6-7 ماتریس تغییر شکل تیر یکنواخت شکل P6-7 را از روش لنگر سطح بیابید.



شکل P6-7

خیز در $R = 0$،

$$0.5(2Rl)(2l)(\frac{4l}{3})-\frac{1}{2}(Pl)(l)(\frac{5l}{3})=0 \qquad R=\frac{5P}{16} \qquad 2Rl=\frac{5Pl}{8}$$

لنگر سطح حول (1) = خیز در نقطه (1)

$$EIy_1=\frac{5Pl}{16}(l)(\frac{l}{2})+\frac{1}{2}(\frac{5Pl^2}{16})(\frac{2l}{3}) \;=Pl^3(\frac{5}{32}+\frac{5}{48}-\frac{1}{3})=-\frac{3.5}{48}Pl^3$$
$$a_{11}=\frac{3.5l^3}{48\ EI}=\frac{7l^3}{96EI}$$

لنگر سطح حول (2) = خیز در نقطه (2)

$$EIy_2=\frac{5Pl}{8}(2l)(\frac{7l}{2})-\frac{1}{2}(Pl^2)\frac{8l}{3}=\frac{Pl^3}{8} \qquad a_{21}=a_{12}=\frac{l^3}{8\,EI}$$

خیز در $R=0$

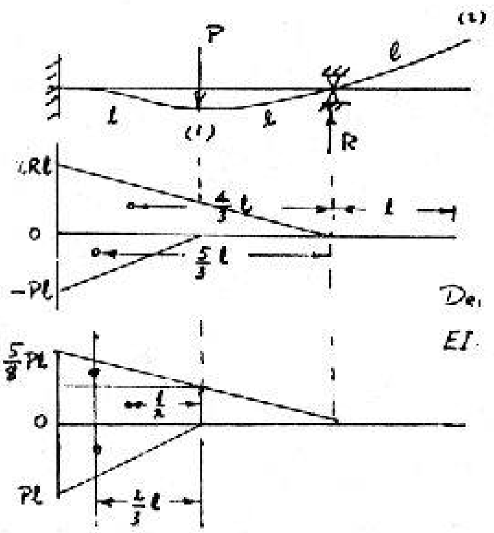
$$(Pl^2)l+\frac{1}{2}(2Pl)(2l)(\frac{4}{3}l)=0 \qquad Pl^3(2+\frac{8}{3})=Rl^3(\frac{8}{3}) \longrightarrow R=\frac{7P}{4}$$

برای a_{22}:

$$\frac{1}{2}(3Pl)(3l)(2l)-\frac{1}{2}(\frac{7Pl}{2})(2l)(l+\frac{4l}{3})=EIy_2$$

$$Pl^3(9-8.666)=(\frac{5.4}{6}\ \frac{49}{6})Pl^3=\frac{5Pl^3}{6}$$

$$a_{22}=\frac{5l^3}{6EI} \qquad a=\frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix}\frac{7}{96} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$$



6-8 ماتریس تغییر شکل ساختمان چهار طبقه شکل 6.1-3 و از آن ماتریس سختی را بیابید.

$$a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=\frac{l^3}{12\,EI} \qquad a_{21}=\frac{l^3}{12\,EI} \qquad a_{22}=a_{23}=a_{24}=\frac{2l^3}{12EI}$$

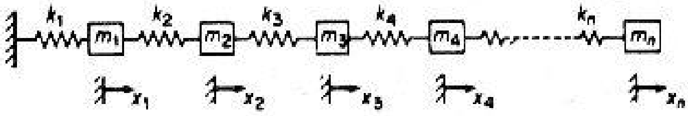
$$a_{31}=\frac{l^3}{12\,EI} \qquad a_{32}=\frac{2l^3}{12\,EI} \qquad a_{33}=a_{34}=\frac{3l^3}{12EI}$$

$a_{41}=\frac{l^3}{12\ EI}$ $\qquad a_{42}=\frac{2l^3}{12\ EI}$ $\qquad a_{43}=\frac{3l^3}{12\ EI}$ $\qquad a_{44}=\frac{4l^3}{12\ EI}$

$$[a]=\frac{l}{12EI}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{-1} = [a]^{-1} \longrightarrow [k] = \frac{12EI}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6-9 سیستمی مانند شکل P6-9 را با n فنر سری درنظربگیرید و نشان دهید که ماتریس سختی یک ماتریس نواری است.



شکل P6-9

به هر جرم تغییر مکانی به اندازه واحد بدهید و تغییر مکان بقیه جرمها را صفر بگیرید و سپس اندازه نیروی لازم به دست می‌آید برای مثال $x_1=1.0$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k & 0 & 0 & \cdots \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \cdots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

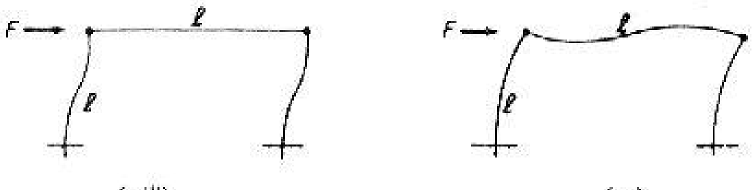
6-10 سختی یک قاب را برای میله بالایی صلب و تغییر شکل پذیر مقایسه کنید. فرض کنید همه طولها و EIها یکسان باشد. اگر میله بالایی شکل (ب)P6-10 در گوشه‌ها لولا شده باشد، نسبت دو فرکانس طبیعی را بیابید.

(آ) $k=2[\frac{12EI}{l^3}]=\frac{24EI}{l^3}$

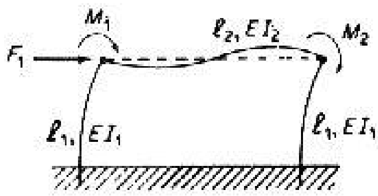
(ب) $F=\frac{EI}{l^3}(24-6l\theta_2-6l\theta_3)$ $\qquad M=\frac{EI}{l^2}(-6+8l\theta_2+2l\theta_3)=0$

$\theta_2=\theta_3=0 \longrightarrow -6+10\,\theta l=0 \longrightarrow \theta=0.6l$

$F=\frac{16.8\ EI}{l^3}$ نسبت فرکانسها $=\frac{24}{16.8}$



شکل P6.10



شکل P6.11

6-11 قاب مستطیلی شکل P6.11 در زمین ثابت شده است. ماتریس سختی سیستم بارگذاری شده را بیابید.

از جدول 6.1، a از برهم‌نهی θ_2 + θ_1 + δ است، در مود δ

$F=\frac{24EI_1\delta}{l^3_1}$ & $M_2=M_3=\frac{-6EI_1\delta}{l^2_1}$

برای مود θ_1

$F_1=\frac{-6EI_1\sigma_1}{l^3_1}$ & $M_1=[\frac{-4EI_1}{l_1}+\frac{4\ EI_2}{l_2}]\theta_1$ & $M_2=\frac{2EI_2}{l_2}\theta_1$

برای مود θ_2 همانند θ_1 است ولی در گوشه راست. نتایج δ و θ_1 و θ_2 را جمع کنید.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\ EI_1}{l_1^3} & \frac{-6\ EI_1}{l_1^2} & \frac{-6\ EI_1}{l_1^2} \\ \frac{-6\ EI_1}{l_1^2} & \frac{-4\ EI_1}{l_1}+\frac{4\ EI_2}{l_2} & \frac{2\ EI_2}{l_2} \\ \frac{-6\ EI_1}{l_1^2} & \frac{2\ EI_2}{l_2} & \frac{-4\ EI_1}{l_1}+\frac{4\ EI_1}{l_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

6-15 با به‌کارگیری ماتریس الحاقی، مودهای ارتعاشی سیستم جرم-فنر در شکل P6-15 را بیابید.

$$m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\lambda=\frac{m\omega^2}{k}\longrightarrow\begin{vmatrix}2.3\lambda & -1\\ -۱ & 1\text{-}\lambda\end{vmatrix}=0\longrightarrow\lambda^2-\frac{5}{3}\lambda+\frac{1}{3}=0$$

$$\lambda=\begin{cases}0.2323\\ 1.4343\end{cases}$$

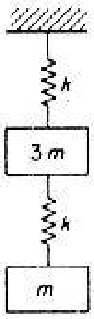
$$\text{ماتریس الحاقی}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

با جایگذاری λ_1 در هر یک ستون:

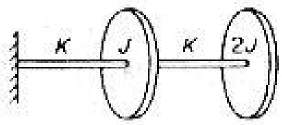
$$\text{مود اول}=\begin{Bmatrix}0.7677\\ 1.000\end{Bmatrix}$$

با جایگذاری λ_1 در ستون

$$\text{مود اول}=\begin{Bmatrix}0.4343\\ 1.000\end{Bmatrix}$$



شکل P6-15



شکل P6-16

6-16 برای سیستم شکل P6-16، معادله‌های حرکت را به شکل ماتریس بنویسید و از ماتریس الحاقی، مودهای ارتعاشی را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix}J & 0\\ 0 & 2J\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2l & -k\\ -k & l\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

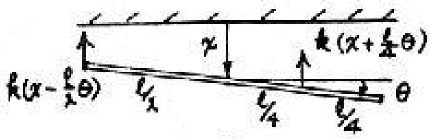
$$\lambda=\frac{J\omega^2}{k}\longrightarrow\begin{vmatrix}\frac{2-\lambda}{-1} & \frac{-1}{1-2\lambda}\end{vmatrix}=0\qquad 2\lambda^2-5\lambda+1=0$$

$$\lambda=\begin{cases}0.2192\\ 2.2808\end{cases}\longrightarrow\text{ماتریس الحاقی}=\begin{bmatrix}1-2\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}1.00\\ 1.781\end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}1.00\\ -0.2808\end{Bmatrix}$$

6-17 ماتریس مودهای ارتعاشی (joda*l* matrix) یا P و ماتریس وزنی مودهای سیستم شکل **P6-17** یعنی P را به دست آورید. نشان دهید که P یا P بر ماتریس متعامد خواهند بود.

ابتدا پیکر آزاد جسم را رسم می‌کنیم.



$$\frac{ml^2}{l_2}\ddot{\theta}=\frac{l}{2}k(x-\frac{1}{2}\theta)\frac{l}{2}k(x+\frac{1}{4}\theta)=\frac{l}{4}kx=\frac{5l^2}{16}\theta$$

$$m\ddot{x}=-k(x-\frac{l}{2}\theta)-k(x+\frac{1}{4})\theta=-2kx-k\frac{l^2}{4}\theta$$

$$m\begin{bmatrix}\frac{l^2}{12} & \\ 0 & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{x}\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}\frac{5l^2}{16} & \frac{-1}{4}\\ \frac{-1}{4} & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\lambda=\begin{cases}1.664\\ 4.106\end{cases} \longrightarrow \frac{l\theta}{x}=4(2-x)=\begin{cases}1.0424\\ -8.428\end{cases}$$

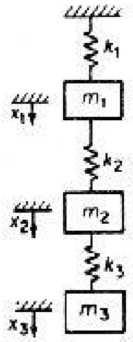
$$\begin{Bmatrix}\theta\\ x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1.424}{l}\\ 1.000\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}\theta\\ x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{-8.424}{l}\\ 1.000\end{Bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1.424}{l} & 1.00\\ \frac{-8.424}{l} & 1.00\end{bmatrix}$$

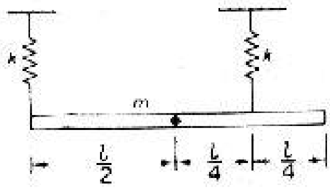
$$P'kP=\begin{bmatrix}\frac{1.424}{l} & 1.00\\ \frac{-8.424}{l} & 1.00\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5l^2}{16} & \frac{-l}{4}\\ \frac{-l}{4} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1.424}{l} & \frac{-8.424}{l}\\ 1.00 & 1.00\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.9219 & 0.0013\\ 0.0013 & 28.3880\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}1.9217 & 0\\ 0 & 28.3888\end{bmatrix}$$

که قطری است.



شکل P6-18



شکل P6-17

6-18 ماتریس تغییر شکل سیستم جرم-فنر سه‌درجه آزادی شکل P6-18 را بیابید و معادله حرکت ماتریس آن را بنویسید.

نیروی واحدی در نقطه 1 وارد کنید.

$$a_{11}=a_{21}=a_{31}=a_{12}=a_{13}=\frac{1}{k_1}$$

نیروی واحدی در نقطه 2 وارد کنید.

$$a_{22}=a_{32}=a_{23}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

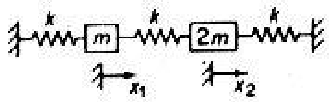
و به همین شکل نیروی واحد را در نقطه 3 وارد کنید.

$$a_{33}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}$$

و معادله حرکت ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{Bmatrix}=\omega^2\begin{bmatrix}m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

6-19 ماتریس مودها، P و ماتریس وزنی آن $\tilde{P}$ را برای سیستم شکل P6.19 بیابید و پس از قطری کردن ماتریس سختی آن، معادله‌های حرکت را ناهمگیر سازید.



شکل P6-19

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\quad \&\ \lambda=\frac{m\omega^2}{k}$$

$$\begin{vmatrix}\frac{2-\lambda}{-1}&\frac{-1}{2-2\lambda}\end{vmatrix}=0\longrightarrow \lambda^2-3\lambda+\frac{3}{2}=0\longrightarrow \lambda=\begin{cases}0.634\\2.366\end{cases}$$

$$\frac{x_1}{x_2}=2(1-\lambda)=\begin{cases}0.732\\-2.732\end{cases}\longrightarrow P=\begin{bmatrix}0.732&-2.732\\1.000&1.000\end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}MPy+\tilde{P}kPy=0$$

$$\begin{bmatrix}2.533&0\\0&9.48\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.606&0\\0&22.33\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

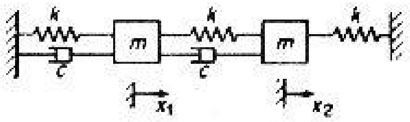
6-20 برای آونگ دوگانه‌ای با مختصات θ_1 و θ_2، P را بیابید. نشان دهید که P، معادله‌های حرکت را ناهمگیر می‌کند.

$$\frac{l}{g}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\\ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

همگیر دینامیکی است و از مساله 10 - 5 داریم:

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.707\\1.000\end{Bmatrix}\qquad\qquad \begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.707\\1.00\end{Bmatrix}$$

6-24 ماتریس میرایی سیستم شکل P6.24 را بیابید و نشان دهید که متناسب نیست.



شکل P6.24

$$m\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+c\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F.\\0\end{Bmatrix}\text{Sin}\omega t$$

6-25 با به‌کارگیری ماتریس مودها، P سیستم مساله 6.24 را چنان بنویسید که ماتریس میرایی آن همگیر باشد و آن را از روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\lambda=\frac{m\omega^2}{k}\longrightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\longrightarrow \lambda=1,3$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\qquad\qquad \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\longrightarrow P=\frac{2}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$x=\tilde{P}y\longrightarrow \tilde{P}'M\tilde{P}\ddot{y}+\tilde{P}'C\tilde{P}y+\tilde{P}'k\tilde{P}y=\tilde{P}'F$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}+\frac{C}{2m}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix}+\frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{Bmatrix} F_\circ \\ -F_\circ \end{Bmatrix}\operatorname{Sin}\omega t$$

ماتریس میرایی همگیر است.

$$\ddot{y}_1+\frac{c}{2m}(\dot{y}_1-\dot{y}_2)+\frac{k}{m}y_1=\frac{F_\circ}{\sqrt{2m}}\operatorname{Sin}\omega t$$

$$\ddot{y}_1+\frac{c}{2m}(-\dot{y}_1-\dot{y}_2)+\frac{3k}{m}y_2=\frac{-F_\circ}{\sqrt{2m}}\operatorname{Sin}\omega t$$

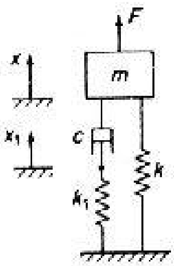
پاسخ حالت‌پایا چنین است.

$$\left(\frac{k}{m}-\omega^2+\frac{c\omega}{2m}i\right)Y_1-i\left(\frac{c\omega}{2m}\right)Y_2=\frac{F_\circ}{\sqrt{2m}}$$

$$-i\left(\frac{c\omega}{2m}\right)Y_1+\left(\frac{3k}{m}-\omega^2+\frac{c\omega}{2m}i\right)Y_2=\frac{-F_\circ}{\sqrt{2m}}$$

$$Y_1=\frac{\dfrac{F_\circ}{\sqrt{2m}}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{c\omega}{2m}i \\ -1 & \dfrac{3k}{m}-\omega^2+\dfrac{5c\omega}{2m}i \end{vmatrix}}{\left(\dfrac{k}{m}-\omega^2+\dfrac{c\omega}{2m}i\right)\left(\dfrac{3k}{m}-\omega^2+\dfrac{5c\omega}{2m}i\right)+\left(\dfrac{c\omega}{2m}\right)^2}$$

6-26 سیستم میرایی لزج خطی شکل P6-26 را در نظر بگیرید. معادله‌های حرکت سیستم با مختصات اینرسی x و x_1 چنین است.



شکل P6-26

$$m\ddot{x}=-kx-c(\dot{x}-\dot{x}_1)+F$$

$$0=c(\dot{x}-\dot{x}_1)-kx_1$$

معادله حرکت را به شکل ماتریس بنویسید.

$$\omega_\circ^2=\frac{k}{m}\qquad \alpha=\frac{k_1}{c}\qquad \beta=\frac{k_1}{m}$$

دوباره معادله را می‌نویسیم

$$\ddot{x}=-\omega_\circ^2 x-\beta x_1+\frac{F}{m} \qquad \dot{x}_1=\dot{x}-\alpha x_1$$

$$x_1=z_1 \qquad \dot{x}_1=\dot{z}_1 \qquad x=z_2 \qquad \dot{x}=z_3=\dot{z}_2$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\omega_\circ^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m} \end{Bmatrix}$$

6-27 با مقایسه سیستم لزج خطی شکل P6.26 و یک سیستم لزج میرایی نشان دهید میرایی که لزج معادل و سختی معادل آن چنین است:

$$c_{eq} = \frac{c}{1+\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)^2} \qquad k_{eq} = \frac{k+(k_1+k)\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)^2}$$

$$F=kx+c(\dot{x}-\dot{x}_1) \qquad (1)$$

$$k_1x_1=c(\dot{x}-\dot{x}_1) \qquad (2)$$

با فرض اینکه F هماهنگ باشد، از (2) داریم:

$$X_1=\frac{i\omega c}{k_1+i\omega c}x=i\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)\frac{x}{1+i\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)}$$

و با جایگذاری در معادله (1)

$$F = kx + i\omega c\left[1-\frac{i\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)}{1+i\left(\frac{\omega c}{k_1}\right)}\right]$$

$$=\frac{\left[k\left(1+i\left(\frac{i\omega c}{k_1}\right)+i\omega c\right]\right.}{1+\frac{i\omega c}{k_1}}\times\frac{\left[1-\frac{i\omega c}{k_1}\right]}{\left[1-\frac{i\omega c}{k_1}\right]}x$$

$$=\left[\frac{k+(k+k)\left(\frac{i\omega c}{k_1}\right)^2}{1-\left(\frac{i\omega c}{k}\right)^2}+\frac{i\omega c}{1+\left(\frac{\omega c}{k}\right)^2}\right]x=[keq+i\omega C_{eq}]\,x$$

6-28 درستی رابطه $X_i' kX_j = 0$ را با به‌کارگیری مساله 6-16 ثابت کنید.

از مساله 6-16 داریم:

$$X_1=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.000\\ 1.781\end{Bmatrix}\qquad X_2=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.000\\ -0.2808\end{Bmatrix}$$

$$X_1'-kX_2=\{1.000\quad 1.781\}k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.00\\ -0.20808\end{Bmatrix}$$

$$=\{1.00\quad 1.78\quad -1.28281\}\begin{Bmatrix}2.2808\\ -1.2808\end{Bmatrix}=2.2808-2.281=-0.0003\cong 0$$

6-31 ضرایب عددی معادله‌های حرکت مود دوم و سوم مثال 6.9-1 را برآورد کنید.

با مراجعه به مثال 6.9-1 برای ϕ_i و ω_i داریم

مود دوم:

$$m_{22}\ddot{q}_2+c_{22}\dot{q}_2+k_{22}q_2=-u_\circ(t)\sum_{i=1}^{10} m_i\phi_2(x_i)$$

$$m_{22}=\sum_{i=1}^{100} m_i\phi(x_i)=5.5235\ m$$

$$c_{22}=2\xi_2\,\omega_2 m_{22}=2\xi_2[0.445\sqrt{\frac{k}{m}}]m_{22}=0.8902\xi_2 m_{22}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k_{22}=\omega_2^2 m_{22}=\frac{0.1981m_{22}k}{m}$$

$$\sum_{i=1}^{100} m_i\phi_2(x_i)=-2.2470m$$

$$\ddot{q}_2+0.8902\,\xi_2\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{q}_2+0.1981(\frac{k}{m})q_2=0.4068\ddot{u}_\circ(t)$$

مود سوم:

$$m_{33}=80.5957\ m\qquad \frac{c_{33}}{m_{33}}=2\,\xi_3\,[0.7307\sqrt{\frac{k}{m}}]=1.461\,\xi_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k_{32}=0.5339\,\frac{k}{m}\qquad \sum_{i=1}^{10} mi\,\phi_3\,(xi)=2.8095\ m$$

$$\ddot{q}_3+1.4614\,\xi_3\sqrt{\frac{k}{m}}\,\dot{q}_3+0.5339\,\frac{k}{m}\,q_3=-0.3268\ddot{u}_\circ(t)$$

6-32 اگر شتاب $\ddot{u}(t)$ زمین در مثال 1 - 6.9، یک پالس سینوسی با دامنه $a_\circ$ و زمان t_1 مانند شکل P6-32 باشد، بیشینه q را در هر مود و اندازه x_{max} را مانند بخش 6.9 به دست آورید.

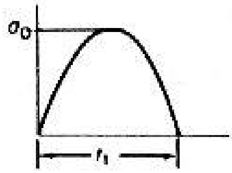
از مثال 6.9-1 داریم:

$$\ddot{q}_1+0.299\,\xi_1\sqrt{\frac{k}{m}}\,\dot{q}_1+0.02235\ \sqrt{\frac{k}{m}}\,q_1=-1.2672\ddot{u}_\circ(t)$$

$$\omega_1^2=0.02235\frac{k}{m} \rightarrow \omega_1=0.1495\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\Pi}{\tau_1} \rightarrow \tau_1=42.028\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega_2=\frac{2\Pi}{\tau_2}=0.4451\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \tau_2=14.1168\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega_3=0.7307\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \tau_3=8.5989\sqrt{\frac{m}{k}}$$



شکل P6-32

برای یافتن شوک طیف شکل 4.4-3 را ببینید،

$$\frac{t_1}{\tau_1}=0.5 \rightarrow (\frac{xk}{F_\circ})_{max}=1.13$$

طرف ثانی معادله دیفرانسیل چنین است:

$$-\ddot{u}_\circ(t)\frac{\sum m\,\phi_1}{\sum m\,\phi_1^2}=-1.2672\ddot{u}_\circ=\frac{F_\circ}{m}$$

از مقایسه با $\ddot{q}_\circ + 2\zeta\omega_n\dot{q}+\omega_n q=\frac{F_\circ}{m}$

$$F_\circ=-1.2672\ ma_\circ$$

و با جایگذاری در $(\frac{xk}{F_\circ})_{max}$ داریم،

$$(\frac{qk}{F_\circ})_{max}=\frac{qk}{-1.2672\ ma} \rightarrow$$ مود اول: . . . .

$$(q_1)_{max}=-1.5\ (4068\ \frac{ma_\circ}{k})=0.6102\ \frac{ma_\circ}{k}$$

و بدینسان برای مود دوم و سوم داریم،

$$(q_2)_{max}=1.5\ (\frac{0.4068\ ma_\circ}{k})=0.6102\ \frac{ma_\circ}{k}$$

$$(q_3)_{max}=1.13(\frac{-0.3268\ ma_\circ}{k})=-0.3693\ \frac{ma_\circ}{k}$$

$$x(t)=\phi_1q_1+\phi_2q_2+\phi_3q_3+\ldots$$

برای طبقه دهم $\phi_1=1.0$ است.

$$x(t)=q_1+q_2+q_3$$

از معادله 6.9-6 داریم:

$$|x(10)|_{max}=(q_1)_{max}^2+\sqrt{(q_2)_{max}^2+(q_3)^2}$$

$$=1.90+\sqrt{0.610^2+0.369^2}(\frac{ma_\circ}{k})=2.61\frac{ma_\circ}{k}$$

6.33 مودهای ارتعاشی آونگ دوگانه مسأله 5-9 چنین است:

$$\omega_1=0.764\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \omega_2=1.850\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\phi_1=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}0.707\\ 1.000\end{Bmatrix} \qquad \phi_2=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}$$

اگر به جرم پایینی ضربه‌ای به اندازه $\hat{F}_0\delta(t)$ زده شود، پاسخ آن را از اصل بر هم‌نهی مودهای ارتعاشی بیابید.

تغییرات ممنتوم = ضربه

$$t=0 \qquad \text{سرعت}=\frac{\hat{F}_0}{m}=V(0)=l\dot{\theta}_2(0)$$

$$\theta_2(0)=\frac{\hat{F}_0}{ml} \rightarrow \dot{\theta}_1(0)=0 \rightarrow \theta=\phi_1q_1+\phi_2q_2$$

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}q_1+\begin{Bmatrix}-0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}q_2=$$

$$=\begin{Bmatrix}0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}A\sin\left[0.764\sqrt{\frac{g}{l}}t\right]+\begin{Bmatrix}-0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}B\sin\left[1.85\sqrt{\frac{g}{l}}t\right]$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{Bmatrix}=0.764\begin{Bmatrix}0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}A\cos\left[0.764\sqrt{\frac{g}{l}}t\right]+1.85\begin{Bmatrix}-0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}B\cos\left[1.85\sqrt{\frac{g}{l}}t\right]$$

$$t=0:\quad \sqrt{\frac{g}{l}}\begin{Bmatrix}0\\ \frac{F}{ml}\end{Bmatrix}=0.764\begin{Bmatrix}0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}A+1.85\begin{Bmatrix}-707\\ 1.000\end{Bmatrix}B$$

$$0=0.764(0.707)A-1.85(0.707)B \rightarrow B=0.413A$$

$$\left(\frac{F_0}{ml}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}=0.764\,A+1.85(0.413\,A)=1.528\,A$$

$$\boxed{A=0.6544\left(\frac{F}{ml}\right)\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)} \qquad \boxed{B=0.2703\left(\frac{F}{ml}\right)\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)}$$

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\frac{F}{ml}\sqrt{\frac{g}{l}}\left[0.6544\begin{Bmatrix}0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}\sin\left[0.764\sqrt{\frac{g}{l}}t\right]+0.2703\begin{Bmatrix}-0.707\\ 1.000\end{Bmatrix}\sin\left[1.85\sqrt{\frac{g}{l}}t\right]\right]$$

6-35 با به کارگیری دو مود ارتعاشی، معادله‌های حرکت ساختمان پنج طبقه را با سختی انتقالی k_t و پیچشی $k_r=\infty$ در پایه به دست آورید (شکل P6.35 را ببینید).

$$y(t)=l\phi_1q_1+l\phi_2q_2+l\phi_3q_3+l\phi_4q_4+l\phi_5q_5$$

دو مود اول چنین به دست می‌آید.

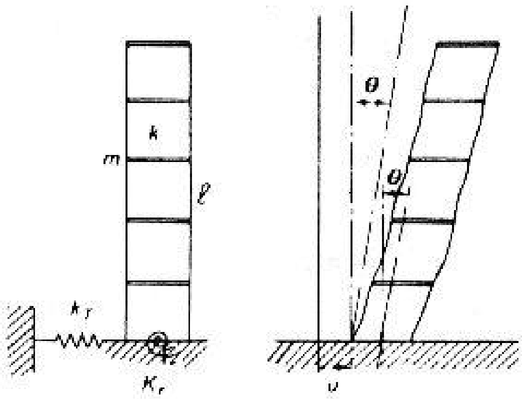
$$m\frac{\omega_1^2}{k}=0.08101 \rightarrow \tau_1=22.08\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\phi_1 = \{0.1699 \quad 0.3260 \quad 0.4557 \quad 0.5485 \quad 0.5969\}$$

$$m\frac{\omega_2^2}{k} = 0.6903 \quad \rightarrow \quad \tau_2 = 7.563\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\phi_2 = \{0.4557 \quad 0.5969 \quad 0.3260 \quad -0.1699 \quad -0.5485\}$$

$$\frac{\sum m\,\phi_1}{\sum m\,\phi_1^2} = 2.097 \qquad \frac{\sum m\,\phi_2}{\sum m\,\phi_2^2} = 0.6602$$



شکل P6-35

در $k_r=\infty$، $\theta=0$ است و تنها حرکت انتقالی زمین با انتقال خطی هر طبقه جمع می‌شود. برای حالت فراگیر $\theta \neq 0$ می‌توان معادلات لاگرانژ را به کار برد. برای یک جرم معادله نیرو را بنویسید (طبقه سوم را بنگرید)،

$$m(\ddot{u}+\ddot{y}_3)=-k(y_3-y_2)+k(y_4-y_3)$$

پنج معادله شبیه به این معادله را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{y}_5 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix}$$

$$= -m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ddot{u}$$

یا $M\ddot{y}+ky=-M\ddot{u}$ که با در نظر گرفتن $y=\phi_1 q_1+\theta_2 q_2$ معادله ناهمگیر از $P'kP$ چنین به دست می‌آید.

$$\{y_1 \quad y_2\}=\left[\{\theta_1\}\{\theta_2\}\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=Pq$$

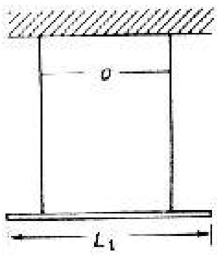
$$P'MP\ddot{q} + P'kPq = -P'M\ddot{u}$$

معادله‌های مود به دست می‌آید.

$$\ddot{q}_1+\omega_1^2\ q_1=-\frac{\sum m\ \phi_1}{\sum m\ \phi_1^2}\ \ddot{u}$$

$$\ddot{q}_2+\omega_2^2\ q_2=-\frac{\sum m\ \phi_2}{\sum m\ \phi_2^2}\ \ddot{u}$$

6-36 نوسانات جانبی و پیچشی سیستم شکل P6-36، برای اندازه ویژه‌ای از $\frac{a}{l}$ دارای فرکانسهای طبیعی مساوی است. این اندازه را بیابید و فرض کنید که نامیزانی e برابر با me است، معادله‌های حرکت را بیابید.



شکل P6-36

نوسان پیچشی $\phi=\frac{q\ \theta}{2\ l} \rightarrow J\ddot{\theta}=-mga^2\frac{\theta}{4l}$

$$\omega_r^2=\frac{mga^2}{4lJ}=3\frac{g}{l}\left(\frac{a}{l}\right)^2$$

بیرون از صفحه نوسان، آونگ ساده با $\omega^2=\frac{g}{l}$ است.

$$\omega^2=\omega_r^2 \rightarrow \frac{g}{l}=3\left(\frac{g}{l}\right)\left(\frac{a}{l}\right)^2 \rightarrow \frac{a}{l}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

6-37 فرض کنید که ساختمان سه‌طبقه‌ای با طبقات صلب، دارای میرایی رایلی است. اگر

میرایی مودها برای مودهای اول و دوم ٪0.05 و ٪0.13 باشد، میرایی مود سوم را بیابید.

$\rightarrow \quad \zeta_1=0.05 \quad \& \quad \zeta_2=0.13$

از معادله (6.8-9) داریم،

$$\omega_1=0.445\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2=1.247\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_3=1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\zeta_1\omega_1=\alpha+\beta\omega_1^2 \qquad 2\zeta_2\omega_2=\alpha+\beta\omega_2^2 \quad \rightarrow \quad 2(\zeta_1\omega_1-\zeta_2\omega_2)=\beta(\omega_1^2-\omega_2^2)$$

$$\beta=\frac{2(\zeta_2\omega_2-\zeta_1\omega_1)}{\omega_2^2-\omega_1^2} \qquad \& \qquad \alpha=\frac{2\,\omega_2\omega_1(\zeta_1\omega_2-\zeta_2\omega_1)}{\omega_2^2-\omega_1^2}$$

$$\beta=0.2061\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \alpha=0.0037\sqrt{\frac{k}{m}}$$

مود سوم: $2\zeta_3\omega_3=\alpha+\beta\omega_3^2$

$$\zeta_3=\frac{0+\beta\,\omega_2^2}{2\omega_3}=0.1867$$

6-40 حالت فراگیر ارتعاش آزاد یک سیستم نامیرا را می‌توان با جمع مودهای ارتعاشی نشان داد:

$$\boxed{X(t)=\sum_i A_iX_i\text{Sin}\omega_it+\sum_i B_iX_i\text{Cos}\omega_it}$$

اگر سیستم از موقعیت صفر و با توزیع سرعت دلخواه $\dot{X}(0)$ به راه افتد، ضرایب A_i و B_i را به دست آورید.

$$X(t)=\sum_i X_i[A_i\text{Sin}(\omega_it)+B_i\text{Cos}(\omega_it)]$$

$$\dot{X}(t)=\sum_i \omega_iX_i[A_i\text{Cos}(\omega_it)-B_i\text{Sin}(\omega_it)]$$

$$\dot{X}(t)=\sum_i \omega_iX_iA_i$$

$$X'_jM\dot{X}(0)=\sum_i \omega_iX'_jMX_iA_i=\omega_jX'_jMX_jA_i$$

$$A_j=\frac{X'_jM\dot{X}(0)}{\omega_jX'_jMX_i} \qquad B_j=\frac{X'_jMX(0)}{X'_jMX_i}$$