



تیم مهمات دانشگاه شریف

آموزش رایگان و باکیفیت برای همه



@SHARIF_IE



۱. به سوالات زیر در مورد اعداد مختلط و توابع مقدماتی پاسخ دهید. (۲۰ نمره)

(الف) تمام جواب های معادله $z^4 = 16(1 - z)^4$ را به دست آورید.

(ب) شاخه اصلی تابع $f(z) = \text{Log}(z^2 - 1)$ را پیدا کنید.

۲. به سوالات زیر در مورد نگاشت های بنیادی پاسخ دهید. (۲۰ نمره)

(الف) نگاشت همدیسی بیابید که ناحیه $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ را به ناحیه $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : 0 < \arg(\omega) < 3\pi/2\}$ تبدیل کند.

(ب) میدان $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \text{Im } z > -1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا بر نیم صفحه بالایی بنگارید.

۳. نشان دهید اگر توابع $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ توابعی تحلیلی در میدانی مفروض مانند D باشند، آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است. (۱۰ نمره)

۴. فرم قطبی معاله لاپلاس به صورت

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

است. با استفاده از آن مزدوج همساز نگاشت $u(r, \theta) = \ln(r)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

۵. به سوالات زیر که مربوط به بخش اولیه انتگرال است پاسخ مناسب بدهید. (۲۰ نمره)

(الف) آیا نگاشت $f(z) = |z|^2$ تابع اولیه دارد؟ دلیل پاسخ خود را توضیح دهید.

(ب) انتگرال $\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ را روی دایره به مرکز i و شعاع ۲ بیابید.

۶. سری لوران نگاشت $f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ را حول نقطه صفر به دست آورید و با استفاده از این سری، انتگرال این تابع و تابع $g(z) = \frac{1+2z^2}{z+z^3}$ را روی خمی ژوردان که شامل نقاط $\pm i$ نیست، به دست آورید. (۲۰ نمره)

سوال مربوط به PDE :

۷. جواب مساله زیر را به دست آورید. (۱۵ نمره).

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = e^{x+y} \\ u(x, 0) = e^x, \quad u_y(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

۸. مساله زیر را به روش جداسازی حل کنید. (۱۵ نمره). (سوال اختیاری)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) - u(0, t) = u_x(1, t) + u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

سوال یک - قیمت اول

$$Z^4 = 16(1-Z)^4$$

$$\frac{Z^4}{(1-Z)^4} = 16 \Rightarrow \left(\frac{Z}{1-Z}\right)^4 = 16 = 16 e^{i(2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{1-Z} = 2 e^{i \frac{k\pi}{2}} \Rightarrow Z = \frac{2 e^{i \frac{k\pi}{2}}}{1 + 2 e^{i \frac{k\pi}{2}}}$$

$$Z = \frac{2 \cos \frac{k\pi}{2} + i 2 \sin \frac{k\pi}{2}}{1 + 2 \cos \frac{k\pi}{2} + i 2 \sin \frac{k\pi}{2}} \times \frac{1 + 2 \cos \frac{k\pi}{2} - i 2 \sin \frac{k\pi}{2}}{1 + 2 \cos \frac{k\pi}{2} - i 2 \sin \frac{k\pi}{2}}$$

$$= \frac{4 + 2 \cos \frac{k\pi}{2}}{5 + 4 \cos \frac{k\pi}{2}} + i \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2}}{5 + 4 \cos \frac{k\pi}{2}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(10)

$$k=0 \Rightarrow Z = \frac{6}{9} + 0i = \frac{2}{3}$$

$$k=1 \Rightarrow Z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$k=2 \Rightarrow Z = 2 + i \cdot 0 = 2$$

$$k=3 \Rightarrow Z = \frac{4}{5} - i \frac{2}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$Z^4 = 16(1-Z)^4 \xrightarrow[4]{\sqrt[4]{}} Z = \sqrt[4]{16} (1-Z)$$

ریشه ها:

$$\Rightarrow \begin{cases} Z = 2(1-Z) \Rightarrow Z = \frac{2}{3} & (2.5) \\ Z = -2(1-Z) \Rightarrow Z = 2 & (2.5) \\ Z = 2i(1-Z) \Rightarrow Z = \frac{2i}{1+2i} = \frac{4+2i}{5} & (2.5) \\ Z = -2i(1-Z) \Rightarrow Z = \frac{-2i}{1-2i} = \frac{4-2i}{5} & (2.5) \end{cases}$$

سوال یک - صفت دوم

$$\log z \rightarrow C = \{ z \mid x \leq 0, y = 0 \}$$

$z = x + iy$

$$\rightarrow \text{نقاط} \Rightarrow \begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &\leq 0 \\ \operatorname{Im}(z) &= 0 \end{aligned}$$

$$\log(z^2 - 1) = ?$$

$$z = x + iy \rightarrow z^2 - 1 = \underbrace{(x^2 - y^2 - 1)}_{\operatorname{Re}} + i \underbrace{2xy}_{\operatorname{Im}} \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}(z^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow (x^2 - y^2 - 1) \leq 0$$

$$\operatorname{Im}(z^2 - 1) = 0 \Rightarrow 2xy = 0 \quad (3)$$

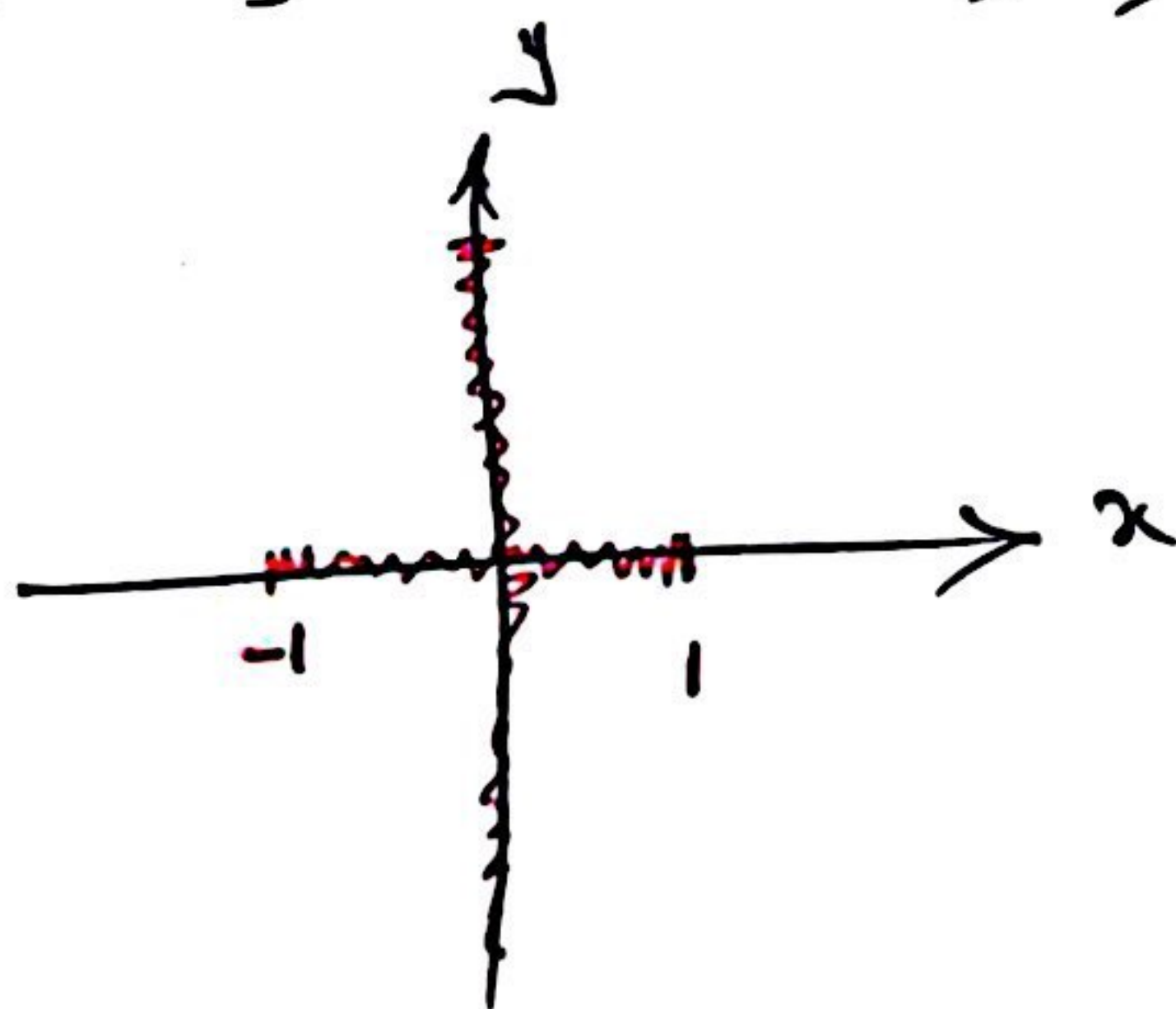
$\begin{cases} x = 0 \\ \text{or} \\ y = 0 \end{cases}$

نقاط خاص
تحلیلی

$$\begin{aligned} \text{اگر } x = 0 &\rightarrow -y^2 - 1 \leq 0 \rightarrow \text{همیشه درست است} \quad (5) \\ \text{اگر } y = 0 &\rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{نقاط تحلیلی} \rightarrow C = \left\{ \frac{x + iy}{y} \mid \begin{array}{l} x = 0, y \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

بنابراین نقطه اصلی $\log(z^2 - 1)$ به صورت زیر تعریف می شود که نقطه $y = 0$ و $x = 0$ و $-1 \leq x \leq 1$ را نشان می دهد.

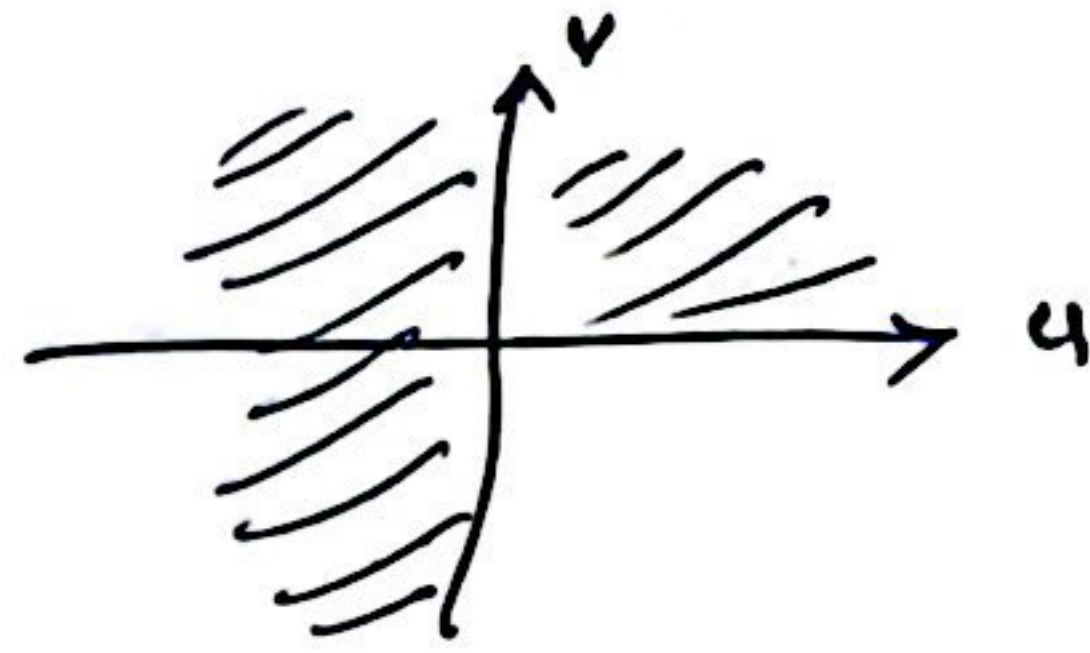
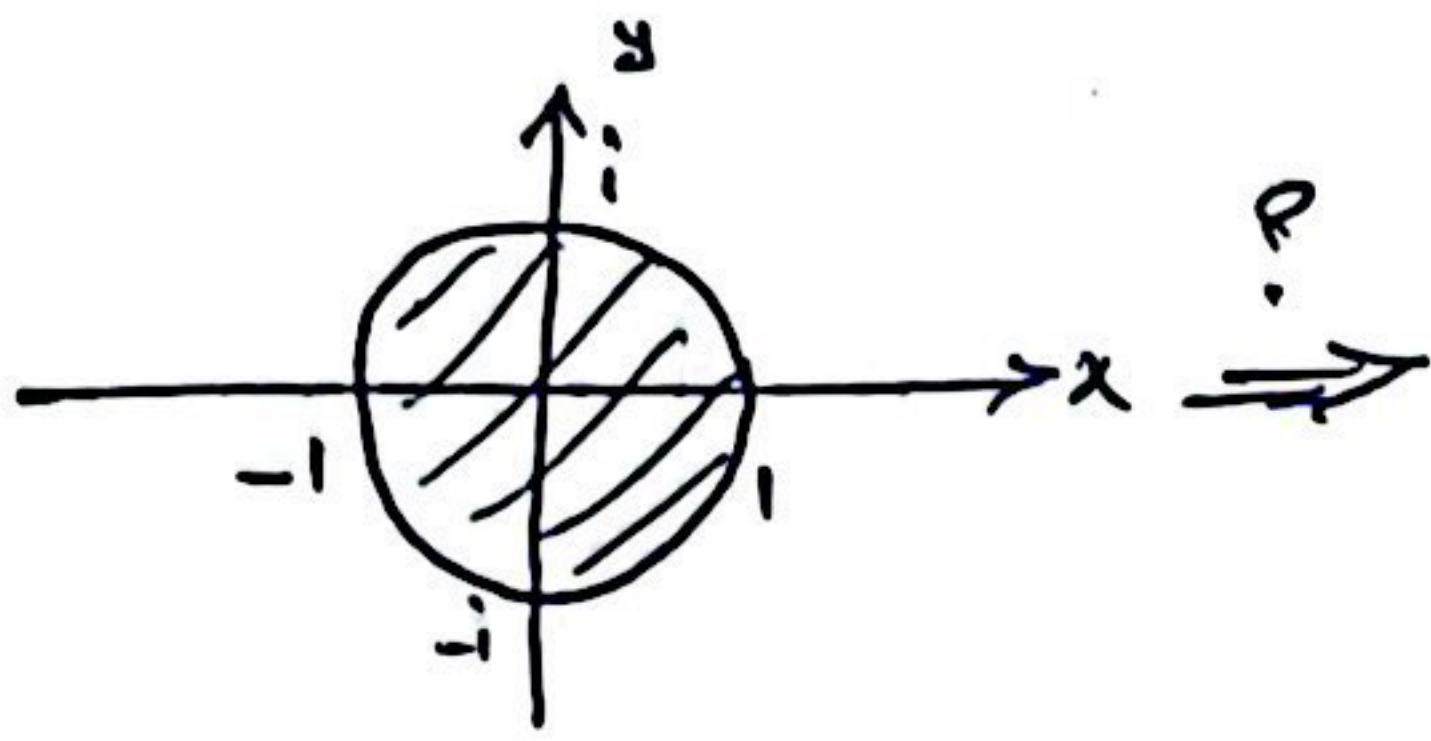


(1)

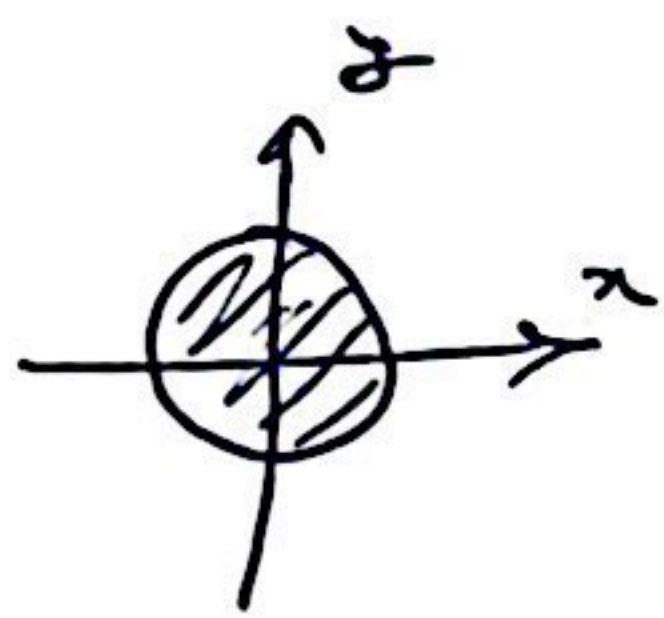
$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

سال در-صحت اولی

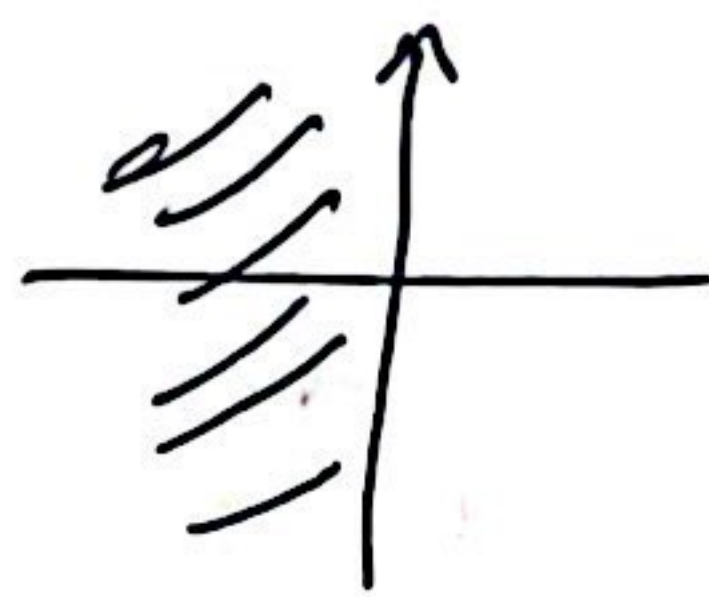
$$\rightarrow \Omega = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg}(w) < 3\pi/2\}$$



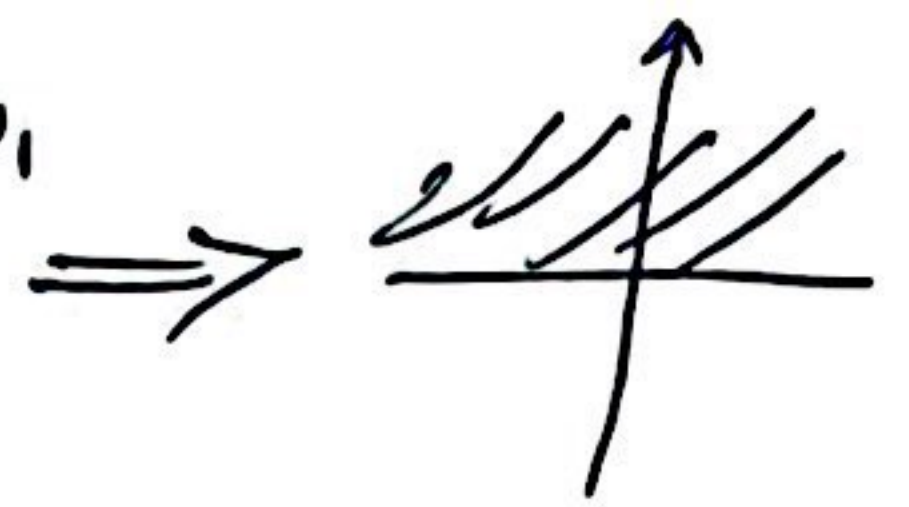
10



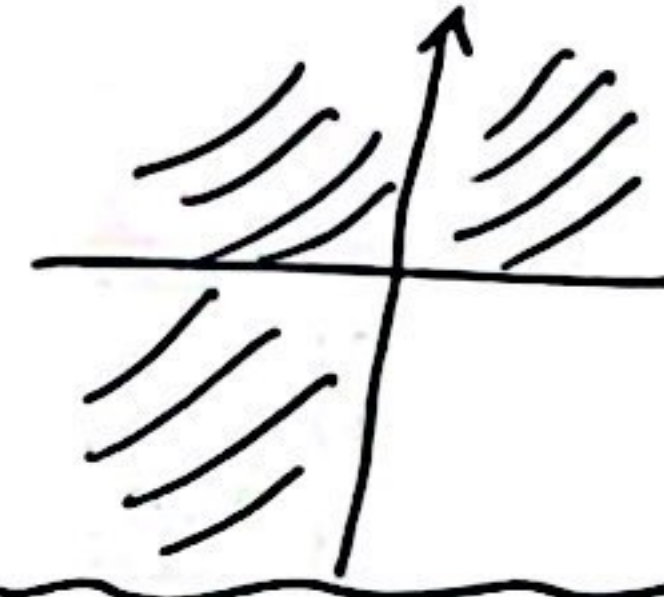
$$\omega_1 = \frac{z+i}{z-i}$$



$$\omega_2 = e^{-i\pi/2} \omega_1$$



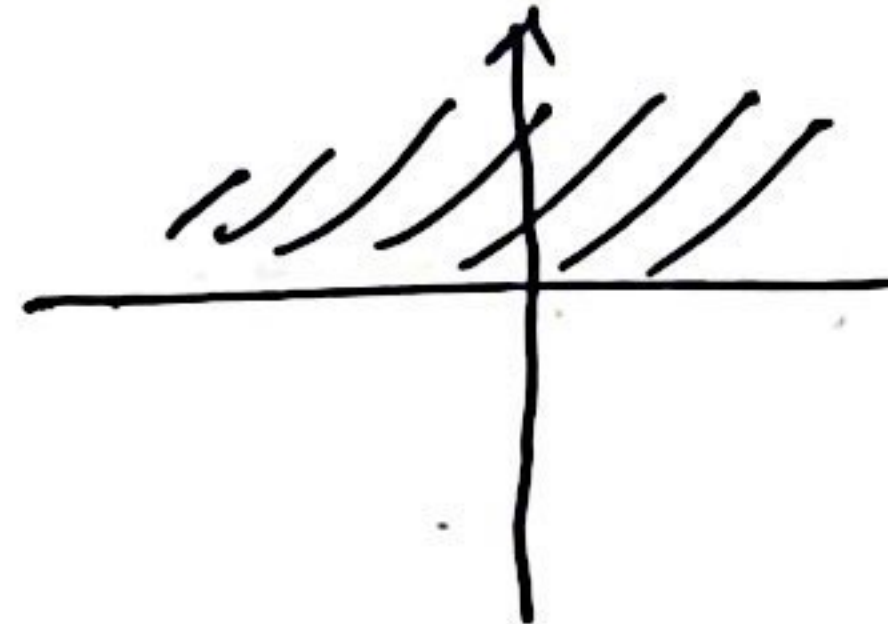
$$\omega_3 = \left(e^{-i\pi/2} \left(\frac{z+i}{z-i} \right) \right)^{3/2}$$



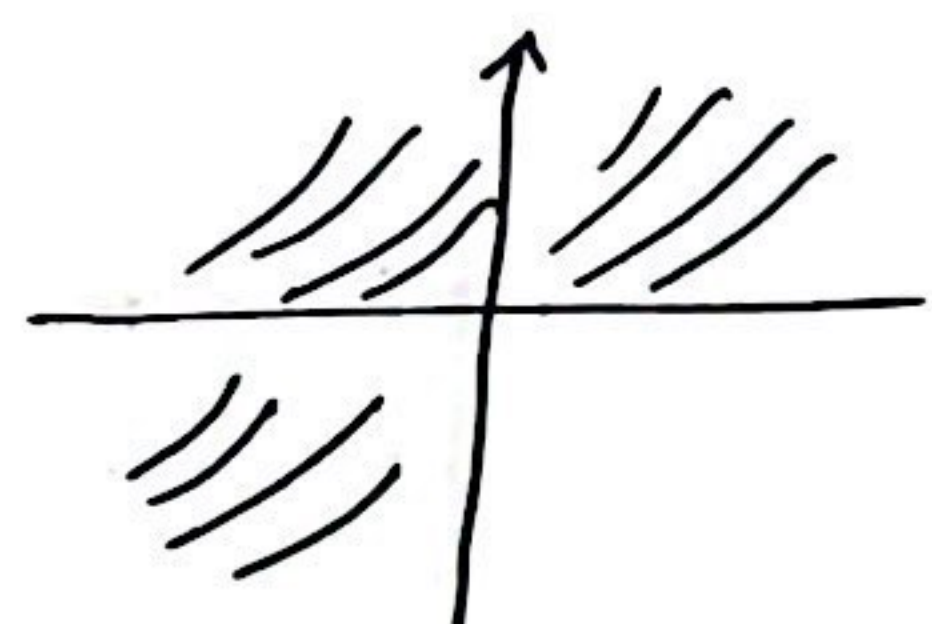
$$\omega_3 = \omega_2^{3/2}$$

موتی در

$$\omega_1 = -i \frac{z+1}{z-1}$$



$$\omega_2 = \omega_1^{3/2}$$



$$\Rightarrow \omega_2 = \left(-i \frac{z+1}{z-1} \right)^{3/2}$$

10

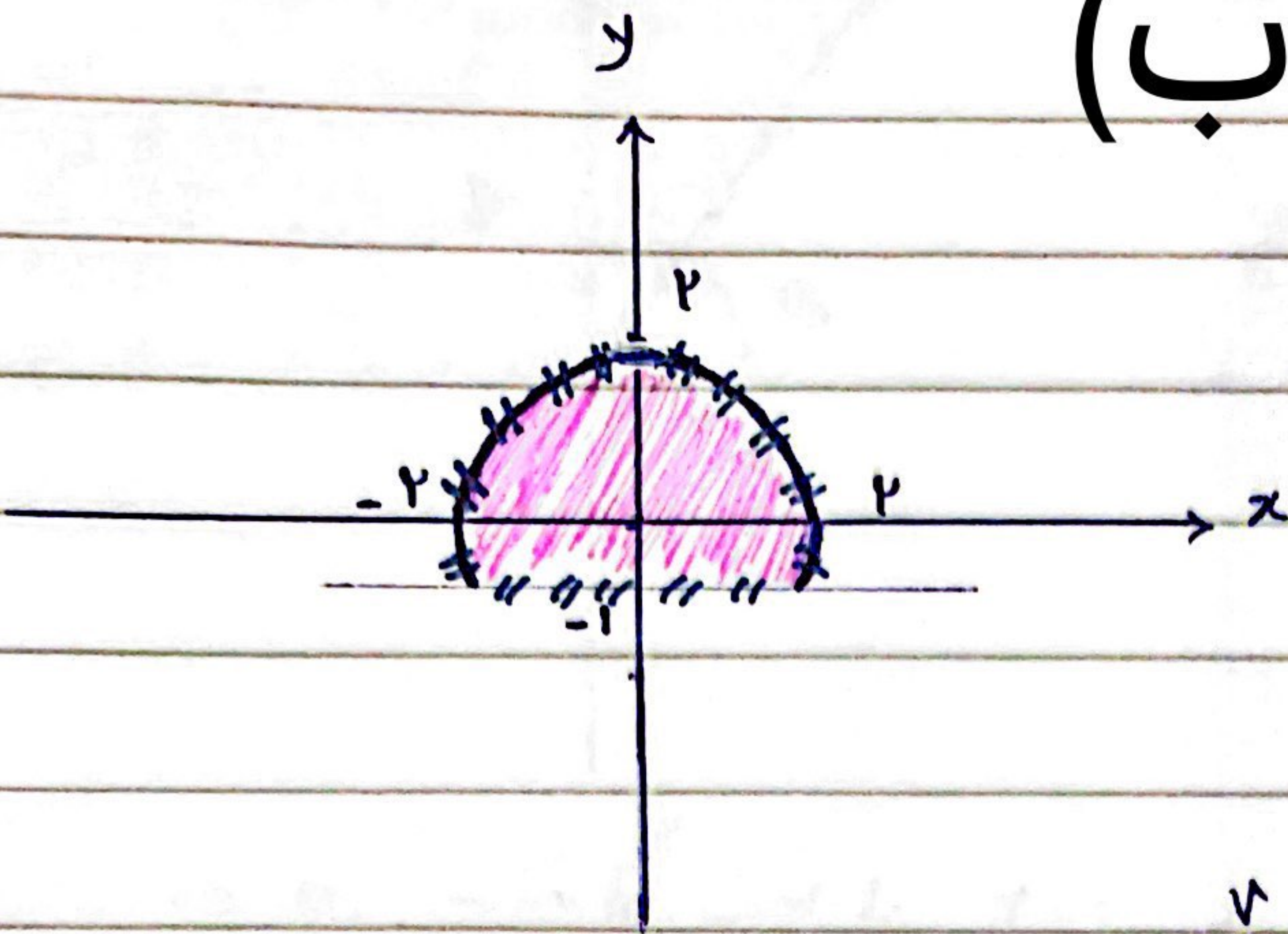
* دانشمندان عزیز وقت مفید کسانی که در بخش گفتگو اولیه دها اشتباه
نه اند بنابر درستی مایل نموده به آنرا تعلق گرفته است. (لطفان شده است).

* مایلان به کسانی که گفتگو اولیه ۱ تا ۴ در نظر گرفته نموده این لحاظ نه است
که در این دایره واحد تحسین نیست.

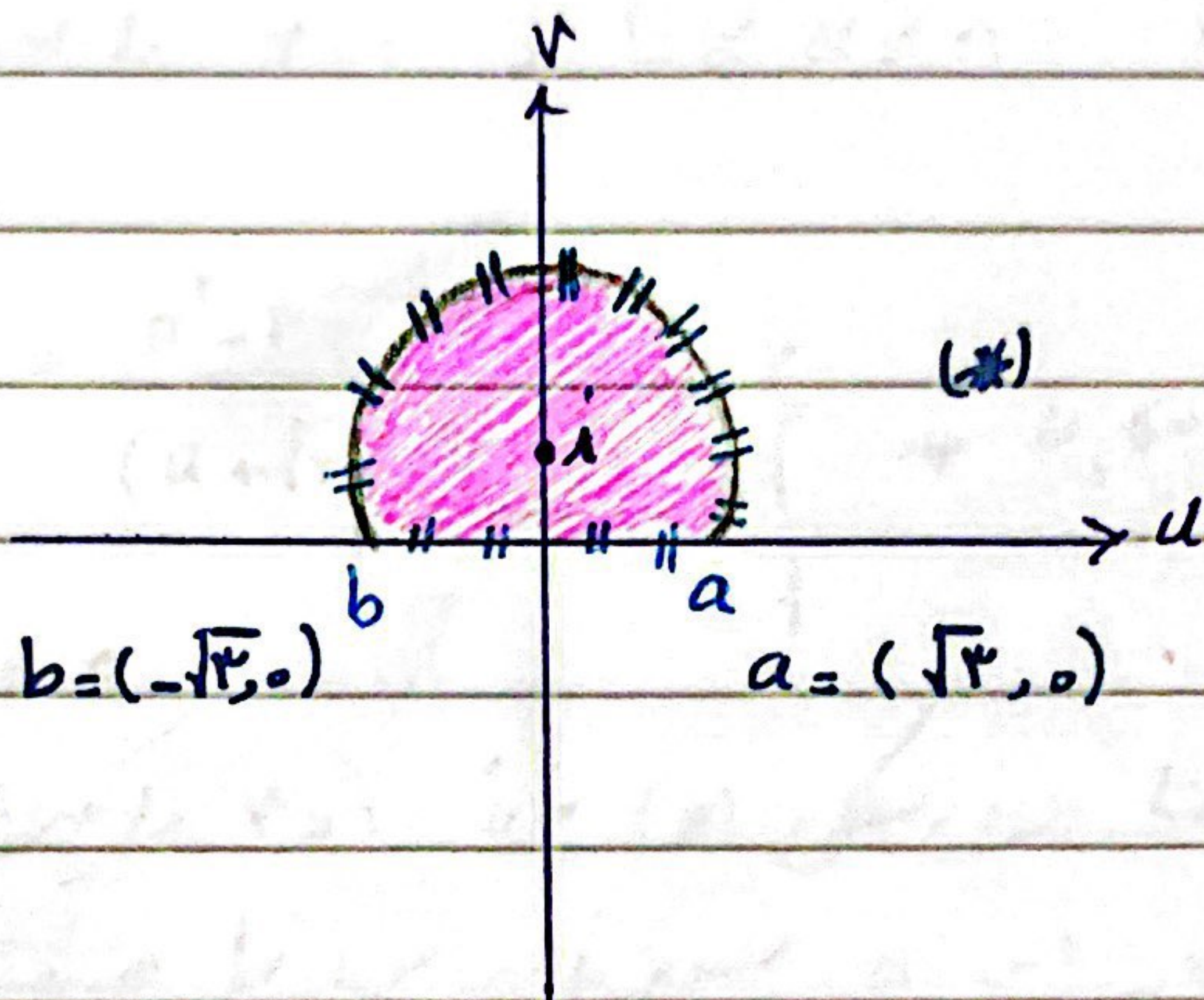
* در محل گفتگو گفتگو سیستم این ارفاق لحاظ شده است.

سوال ۲ قسمت ب

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \operatorname{Im} z > -1\}$$



$$w = z + i$$



$$u^2 + (v-1)^2 < 4$$

نکات حائز اهمیت: $w_1 = \frac{w - \sqrt{3}}{w + \sqrt{3}}$ ، تقویر دایره $u^2 + (v-1)^2 = 4$ ، خطی است که از مبدأ
محقات می گذرد. برای پیدا کردن شیب این خط به طریق زیر عمل می کنیم:

$$w_1 = u_1 + i v_1 = \frac{(u - \sqrt{3}) + i v}{(u + \sqrt{3}) + i v} \Rightarrow u_1 + i v_1 = \frac{u^2 - 3 + i 2\sqrt{3}v + v^2}{(u + \sqrt{3})^2 + v^2}$$

برای دایره $u^2 + (v-1)^2 = 4$ ، خواصم داشت:

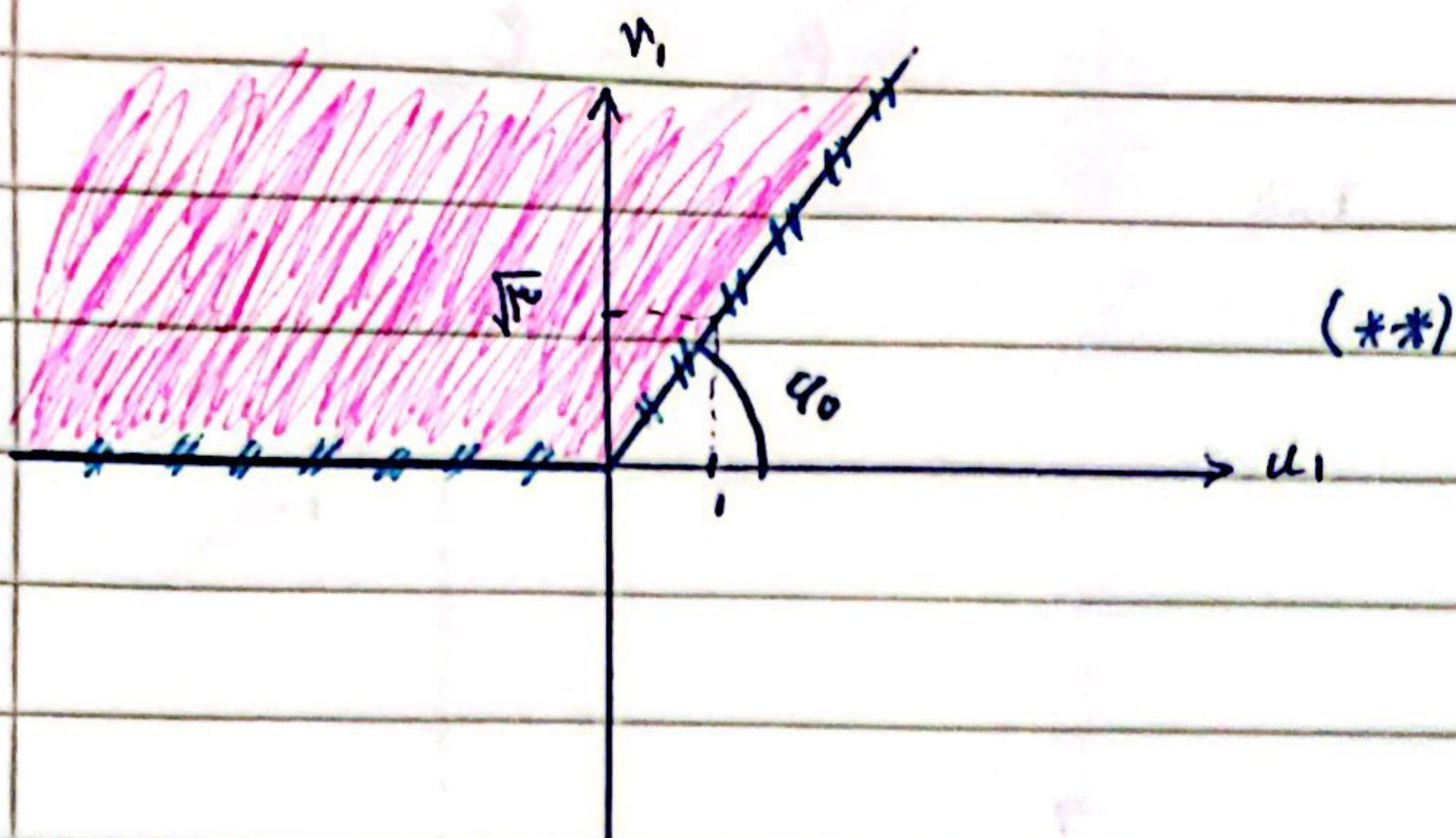
$$\Rightarrow \frac{u^2 + v^2 - 3 + i 2\sqrt{3}v}{u^2 + 2\sqrt{3}u + 3 + v^2} = \frac{3 + 2v - 3 + i 2\sqrt{3}v}{3 + 2v + 3 + 2\sqrt{3}u}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{2\sqrt{3}v}{3 + 2v} = \sqrt{3}$$

پس تقویر دایره $u^2 + (v-1)^2 = 4$ ، خط $v_1 = \sqrt{3}u_1$ می باشد. از طرفی در شکل (*)
داریم $v > 0$ ، پس $v_1 = \frac{2\sqrt{3}v}{(u + \sqrt{3})^2 + v^2} > 0$ ، $u_1 = \frac{2v}{(u + \sqrt{3})^2 + v^2} > 0$ ، در نتیجه تقویر دایره

(۵) لکه

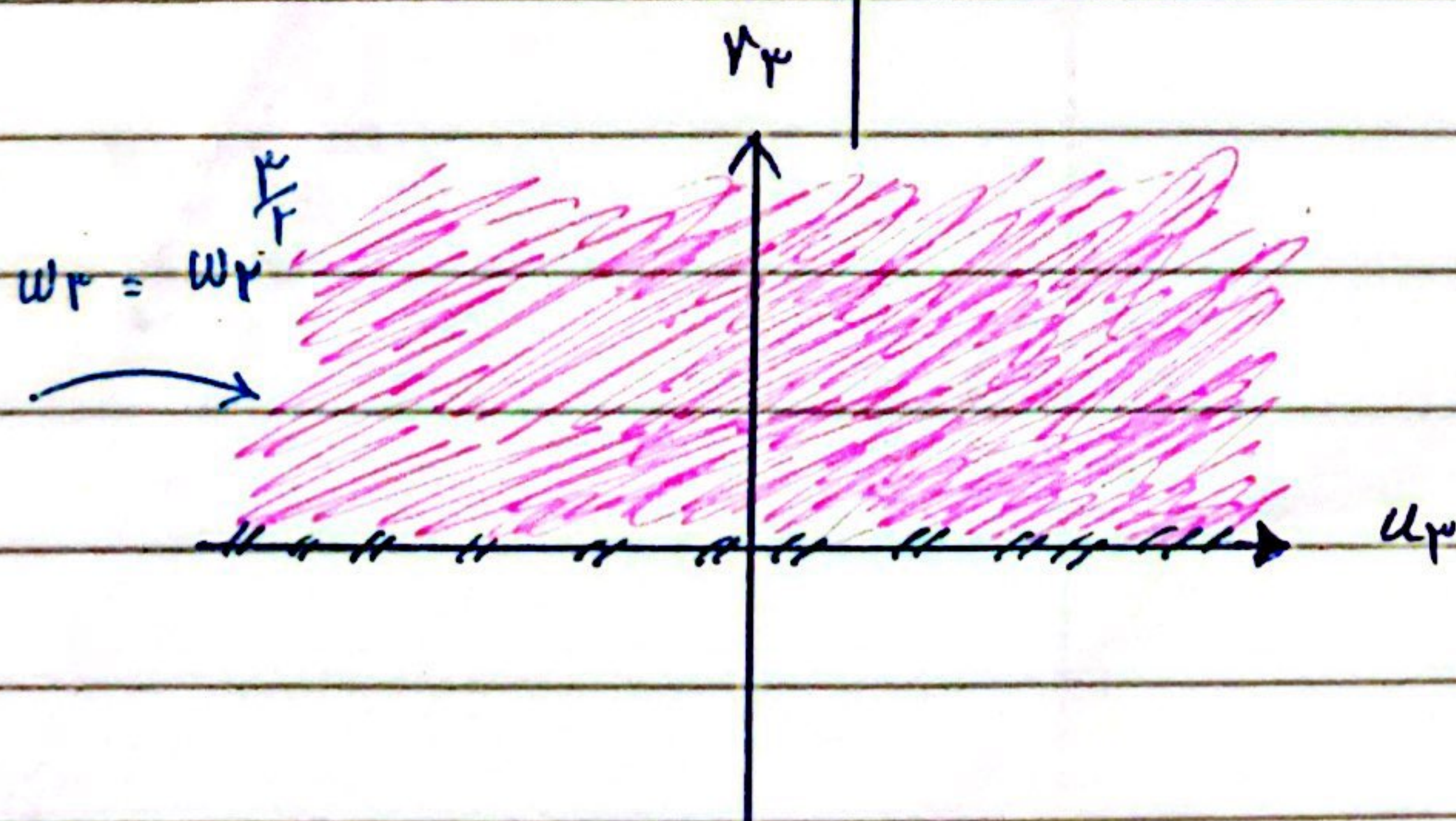
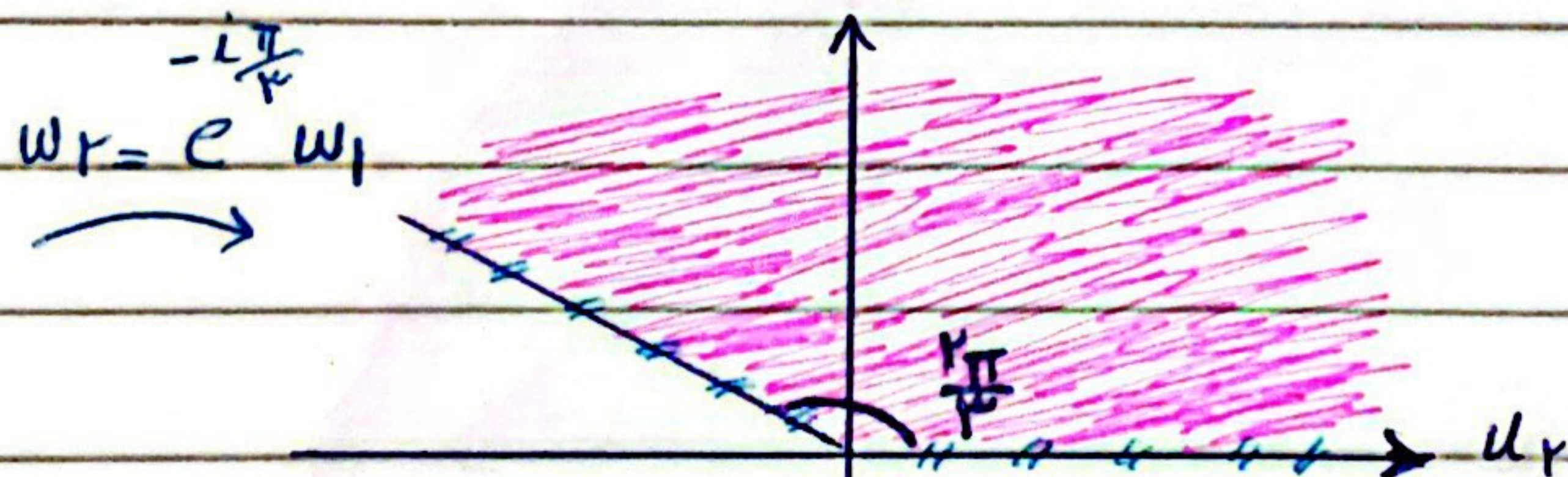
مذکور خط $v_1 = \sqrt{3}u_1$ است بطوریکه $v_1 > 0$ ، $u_1 > 0$.



حال تقویر باره خط $b \leq u \leq a$ ، $v=0$ ، رامت نکات w_1 بدیت آوردیم -

$$u_1 = \frac{a^2 - v^2}{(u + \sqrt{3})^2 + v^2} \pi_0 \quad \left\{ \Rightarrow u_1 < 0, v_1 = 0 \right.$$

حال کافی است یک نقطه درون شکل (*) پیدا کنیم $v=0$ را بگیریم و تقویر آزارامت نکات w_1 بدیت آوردیم $u_1 = -\frac{1}{2}$ و $v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. پس ناحیه مورد نظر بصورت شکل (**) بدیت می آید -



نکته

$$w_3 = -i \left(\frac{x - \sqrt{3} + (y+1)i}{(x + \sqrt{3}) + (y+1)i} \right)^{\pi/6}$$

⑤ غره

سوال ۳:

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$f \text{ تحلیلی است} \rightarrow u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

۲ غره

$$\bar{f}(z) = u(x, y) - i v(x, y)$$

$$\bar{f} \text{ تحلیلی است} \rightarrow u_x = -v_y \quad (۲)$$

$$u_y = v_x$$

۲ غره

$$u_x = v_y \Rightarrow 2u_x = 0 \rightarrow u_x = 0 \rightarrow \text{مبنای } u \text{ تنها تابعی از } y \text{ است} \quad (۱)$$

$$u_x = -v_y \xrightarrow{۱} v_y = 0 \rightarrow \text{مبنای } v \text{ تنها تابعی از } x \text{ است} \quad (۲)$$

۲ غره

$$u_y = -v_x \Rightarrow 2u_y = 0 \Rightarrow u_y = 0 \rightarrow \text{مبنای } u \text{ تنها تابعی از } x \text{ است} \quad (۳)$$

$$u_y = v_x \xrightarrow{۱} v_x = 0 \rightarrow \text{مبنای } v \text{ تنها تابعی از } y \text{ است} \quad (۴)$$

طبق (۱) و (۳) u تابعی ثابت و طبق (۲) و (۴) v تابعی ثابت است بنابراین $f(z) = C_1 + iC_2$ تابعی ثابت است

سوال ۴:

$$u(r, \theta) = \ln(r)$$

$$(1) \quad u_r = \frac{1}{r} v(\theta) \quad \text{بخش ۱}$$

$$(2) \quad v_r = -\frac{1}{r} u(\theta) \quad \text{بخش ۲}$$

$$(1) \rightarrow v(\theta) = r u_r, u_r = \frac{1}{r} \Rightarrow v_\theta = 1 \Rightarrow v = \theta + f(r)$$

$$(2) \rightarrow v_r = -\frac{1}{r} u_\theta, u_\theta = 0 \Rightarrow v_r = 0$$

$$v_r = f'(r) \quad \text{از طرفی}$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow f = C$$

$$v = \theta + C$$

بخش ۳

نوع ۱۲) ه الف) هر یک از اثبات کافی است حتی ساده و به سادگی که انتگرال $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ روی آن صفر نشود.

گزینه ۱) $\gamma(t) = e^{it} + 1$ پس $\gamma(t) = \cos t + 1 + i \sin t$ و C

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos t + 1)^2 + \sin^2 t) (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\cos t + 1 + \sin^2 t) (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 + 2\cos t) (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin t + 2i \cos t - 2\sin^2 t + 2i \cos^2 t) dt \\ &= 2\cos t + 2i \sin t + \frac{2\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2i(1 + \cos^2 t) dt \\ &= 2\pi i \neq 0 \end{aligned}$$

نوع ۱۸)

* توجه کنید انتگرال تابع $|z|^2$ روی دایره واحد $\gamma(t) = e^{it}$ صفر است. پس این خم به سادگی مثال مناسبی برای اثبات ادعا نیست. به دانشجویانی که از این راه حل، ادعای خود را توضیح داده اند، (۱۷) نمره داده شده است.

* دانشجویانی که تنها روابط کوشی - جان تابع $f(z) = |z|^2$ را نوشته اند و با توجه به مشتق پذیری این تابع تنها $x=y=0$ ، ادعای خود را توضیح داده اند، (۱۵) نمره داده شده است.

* دانشجویانی که خم ساده $\gamma(t) = e^{it}$ گرفته اند و مثال داده اند که انتگرال $f(z)$ روی این خم صفر است و با استفاده از این نتیجه به این نتیجه رسیده اند که این تابع، تابع اولیه دارد مگر راه داده شده است.

!

هـ ب) با توجه به نیمه گفته شده و تاج زیر انتگرال نقطه $z = -2i$ در داخل C است. پس با توجه
 به فرمول مشتق انتگرال کنی خواصم داشت:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz &= \int_C \frac{1}{\frac{(z+2i)^2}{(z-2i)^2}} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{(z+2i)^2} \right)' \Big|_{z=2i} \\ &= 2\pi i \left(\frac{-2}{(z+2i)^3} \right) \Big|_{z=2i} \\ &= \cancel{2\pi i} \cdot \frac{1}{\cancel{2i}} = \frac{\pi}{14} \end{aligned}$$

(۱۰)

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5} = \frac{1}{z^3+z^5} + \frac{2z^2}{z^3+z^5} = \frac{1}{z^3(1+z^2)} + \frac{2z^2}{z^3(1+z^2)} \quad -4$$

با توجه به سری تاج $\frac{1}{1-z}$ برای $0 < |z| < 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \text{برای } 0 < |z| < 1$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-3} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} \quad \text{نوع 1}$$

$$\int f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \quad \text{از طرفی}$$

عبارت ضمنی زردان که شامل $z=0$ نیست

نوع 2: ضرب $\frac{1}{z}$ در سری لوران $f(z)$

$$= 2\pi i (-1 + 2 \times 1) = 2\pi i$$

برای $n=0$ در سری دوم $\downarrow$
برای $n=1$ در سری اول $\downarrow$ f سطح لوران f

حال $g(z) = z^2 f(z)$ پس سری لوران $g(z)$ با استفاده از سری لوران $f(z)$ بصورت زیر است:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}$$

در نتیجه

$$\int g(z) dz = 2\pi i b_{-1}$$

عبارت ضمنی زردان که شامل $z=0$ نیست

ضرب $\frac{1}{z}$ در سری لوران $g(z)$

$$= 2\pi i (1) = 2\pi i$$

نوع 3

$\downarrow$ برای $n=0$ در سری اول $\downarrow$ g سطح لوران g

$$\Delta = 9 - 2 \times 1 \times 2 = 1 > 0$$

محاوره مختلوعی

-۷

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{dy}{dx} = -1 \\ \searrow \frac{dy}{dx} = -2 \end{matrix}$$

محاوره مشخصه

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = y + x \\ \eta = y + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \eta - \xi \\ y = 2\xi - \eta \end{cases} \quad \text{نیز (۳)}$$

حال به ناسبی تنقعات جزئی بر حسب تغییراتی جدید می پردازیم:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \times 1 + u_\eta \times 2 = u_\xi + 2u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_\xi + 2u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\xi + 2u_\eta)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = (u_\xi + 2u_\eta)_\xi \eta_y + (u_\xi + 2u_\eta)_\eta \xi_y = u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{yy} = (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

با استفاده از محادله

$$\Rightarrow u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} - 3(u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}) + 2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = e^\xi$$

$$\Rightarrow -u_{\xi\eta} = e^\xi \Rightarrow u_{\xi\eta} = -e^\xi \quad \text{نیز (۳)}$$

$$\text{بگیریم } u_\eta = r \text{ پس خواهیم داشت } r_\xi = -e^\xi$$

$$r = -e^\xi + C(\eta)$$

$$u = -\eta e^\xi + \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

نیز (۲)

$$\Rightarrow u(x, y) = -(y + 2x)e^{x+y} + \phi(x+y) + \psi(y+2x)$$

$$u(x,0) = -\cancel{1}x e^x + \varphi(x) + \cancel{1}z(x) = e^x \quad (1)$$

$$u_y(x,y) = -e^{x+y} - (y+\cancel{1}x)e^{x+y} + \varphi'(x+y) + \cancel{1}z'(y+\cancel{1}x)$$

$$\Rightarrow u_y(x,0) = -e^x - \cancel{1}x e^x + \varphi'(x) + \cancel{1}z'(x) = x^2 \quad (2)$$

از رابطه (1) نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$-\cancel{1}e^x - \cancel{1}x e^x + \varphi'(x) + \cancel{1}z'(x) = e^x \quad (3)$$

حال از رابطه (1) - (3) خواص را اشت:

$$(1) - (3) = -e^x - \cancel{1}x e^x + \varphi'(x) + \cancel{1}z'(x) + \cancel{1}e^x + \cancel{1}x e^x - \varphi'(x) - \cancel{1}z'(x) = x^2 - e^x$$

$$\Rightarrow e^x - z'(x) = x^2 - e^x \Rightarrow z'(x) = \cancel{1}e^x - x^2$$

$$z'(x) = \cancel{1}e^{\frac{x}{\cancel{1}}} - \frac{x^2}{\cancel{1}} \quad \text{قرار دهیم } \cancel{1}x = x$$

$$\Rightarrow z(x) = \cancel{1}e^{\frac{x}{\cancel{1}}} - \frac{x^2}{\cancel{1}} + D$$

$$\Rightarrow z(x) = \cancel{1}e^x - \frac{x^2}{\cancel{1}} + D$$

با جایگذاری $z(x)$ در رابطه (1) به دست می‌آوریم:

$$\varphi(x) = -\cancel{1}e^x + \cancel{1}x e^x + \frac{\cancel{1}}{\cancel{1}} x^2 - D$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -\cancel{1}(y+\cancel{1}x)e^{x+y} - \cancel{1}e^{x+y} + \cancel{1}(x+y)e^{x+y} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{1}}(x+y)^2 - D$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -\cancel{1}(y+\cancel{1}x)e^{x+y} - \cancel{1}e^{x+y} + \cancel{1}(x+y)e^{x+y} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{1}}(x+y)^2 + \cancel{1}e^{\frac{y+\cancel{1}x}{\cancel{1}}} - \frac{(y+\cancel{1}x)^2}{\cancel{1}} \quad \text{از (7)}$$

سوال هشت

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) + u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = x$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

$$u(x, t) = XT \Rightarrow X\ddot{T} = X''T \xrightarrow{\div XT} \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \quad \frac{X''}{X} = -\lambda \\ \textcircled{2} \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) - X(0) = 0 \\ X'(1) + X(1) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda > 0 \rightarrow \lambda = \alpha^2 \Rightarrow X'' - \alpha^2 X = 0 \rightarrow r^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \alpha$$

$$X(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$

$$X'(x) = A\alpha \sinh \alpha x + B\alpha \cosh \alpha x$$

$$x=0 \Rightarrow -(A + 0) + (B\alpha) = 0 \Rightarrow \underline{A = B\alpha}$$

$$x=1 \Rightarrow A\alpha \sinh \alpha + B\alpha \cosh \alpha + A \cosh \alpha + B \sinh \alpha = 0$$

$$\underline{A = B\alpha} \rightarrow B\alpha^2 \sinh \alpha + B\alpha \cosh \alpha + B\alpha \cosh \alpha + B \sinh \alpha = 0$$

$$\rightarrow B(\alpha^2 \sinh \alpha + \alpha \cosh \alpha + \alpha \cosh \alpha + \sinh \alpha) = 0$$

$$\neq 0$$

$$\Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow \text{trivial solution}$$

$$\lambda = 0 \rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x(x) = Ax + B$$

$$x'(x) = A$$

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B \\ x=1 &\rightarrow A + (A+B) = 0 \Rightarrow 2A + B = 0 \end{aligned} \left\} \Rightarrow A=0, B=0$$

$$\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\alpha^2 \Rightarrow x' + \alpha^2 x = 0 \Rightarrow r^2 + \alpha^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm i\alpha$$

$$\Rightarrow x(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$x'(x) = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x$$

$$x=0 \Rightarrow B\alpha - A = 0 \Rightarrow A = B\alpha$$

$$x=1 \Rightarrow -A\alpha \sin \alpha + B\alpha \cos \alpha + A \cos \alpha + B \sin \alpha = 0$$

$$\xrightarrow{A=B\alpha} B\alpha^2 \sin \alpha + B\alpha \cos \alpha + B\alpha \cos \alpha + B \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow B (\sin \alpha - \alpha^2 \sin \alpha + 2\alpha \cos \alpha) = 0 \begin{cases} B=0 & \times \\ B \neq 0 & \checkmark \end{cases}$$

$$\sin \alpha - \alpha^2 \sin \alpha + 2\alpha \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \Rightarrow \tan \alpha_n = \frac{2\alpha_n}{\alpha_n^2 - 1}, \alpha_n = -\alpha_n^2$$

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \xrightarrow[A=B]{A=B\alpha}$$

5

$$\Rightarrow X_n(x) = \alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x$$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -1 \Rightarrow \ddot{T} + 1T = 0 \Rightarrow \ddot{T} + \alpha_n^2 T = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i\alpha_n$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A \cos \alpha_n t + B \sin \alpha_n t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A \cos \alpha_n t + B \sin \alpha_n t) (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x)$$

$$u_t(x,0) = 0 \rightarrow u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-A \alpha_n \sin \alpha_n t + B \alpha_n \cos \alpha_n t)$$

$$x (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x)$$

$$\xrightarrow{t=0} \sum_{n=0}^{\infty} (B \alpha_n) (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{B=0}$$

5

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cos \alpha_n t (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x)$$

$$u(x,0) = x \Rightarrow u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x) = x$$

$$\|X_n\| = \sqrt{\langle X_n | X_n \rangle} = \sqrt{\int_0^1 X_n^2(x) dx}$$

5

$$\|X_n\| = \sqrt{\int_0^1 (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x)^2 dx} = \dots$$

$$A = \frac{\langle f(x) | X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{\int_0^1 f(x) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2}$$

$$= \frac{\int_0^1 x (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x) dx}{\int_0^1 (\alpha_n \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n x)^2 dx} = \dots$$