



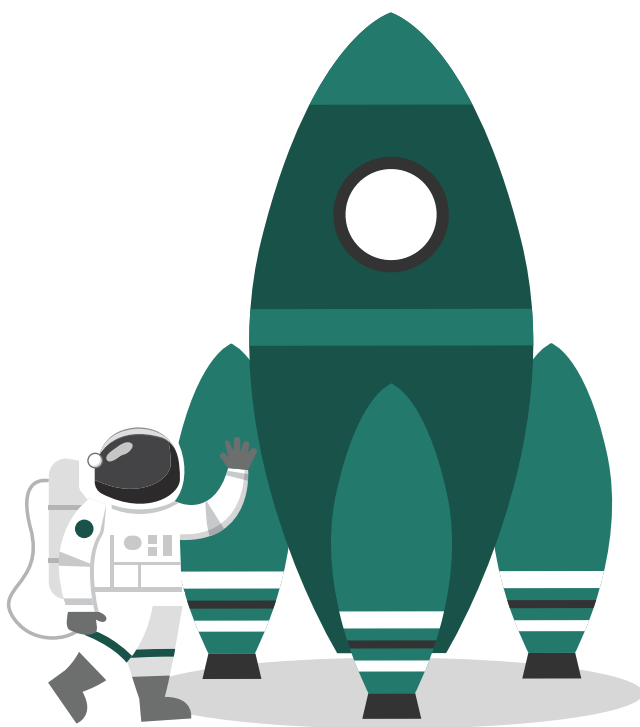
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

ریاضیات گسسته



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

گسسته : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان آمار و گسسته : امیر سلیمانی فر

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

۱) ثابت کنید اگر a برابر مجموع مربع های ۲ عدد صحیح باشد. $2a$ نیز برابر مجموع مربع های دو عدد صحیح است.

۲) ثابت کنید اگر n برابر حاصلضرب دو عدد زوج متوالی باشد آنگاه $n + 1$ مربع کامل است.

۳) ثابت کنید اگر n^2 مضرب ۸ باشد آنگاه n مضرب ۴ است.

۴) ثابت کنید مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

۵) آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2$$

۶) ثابت کنید هر عدد فرد برابر با تفاضل مربع های دو عدد صحیح است.

۷) ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد فرد متوالی به علاوه یک، مربع کامل است.

۸) گزاره های زیر را اثبات یا با ارائه مثال نقض آن ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۹) عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$.

۱۰) ثابت کنید اگر a, b دو عدد صحیح باشند و $a + b$ عددی فرد باشد آنگاه ab عددی زوج است.

۱۱) اگر n عددی صحیح و n^2 عددی فرد باشد آنگاه n نیز فرد است.



۱۲) ثابت کنید معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ در مجموعه اعداد فرد جواب ندارد.

۱۳) اگر n عددی صحیح و n^3 زوج باشد آنگاه n نیز زوج است.

۱۴) با فرض اینکه $\sqrt{6}$ عددی گنگ است ثابت کنید عدد $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.

۱۵) ثابت کنید کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

۱۶) فرض کنید xy عددی گنگ باشد، ثابت کنید حداقل یکی از اعداد x و y عددی گنگ است.

۱۷) اگر مجموع سه عدد صحیح برابر ۴۷ باشد ثابت کنید حداقل یکی از این سه عدد بزرگتر یا مساوی ۱۶ است.

۱۸) آیا مقادیر حقیقی و نامنفر a و b چنان وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۱۹) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

۲۰) فرض کنید $x \neq 0$ عددی گویا و y عددی گنگ باشد ثابت کنید xy عددی گنگ است.

۲۱) اگر n عددی صحیح باشد آنگاه $n^2 + 5n$ عددی زوج است.

۲۲) ثابت کنید $\sqrt{5} + \sqrt{7} < 2\sqrt{6}$.

۲۳) به روش بازگشتی ثابت کنید اگر $a > 0$ ، آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

۲۴) ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۲۵) فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a, b, c, d اعداد صحیح و نامنفرد) در این صورت پنج رابطه عادی از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲۶) اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید:

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$



۲۷) اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $5 \mid 4k + 1$ ، ثابت کنید: $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$

۲۸) بزرگ‌ترین مقدار x را بیابید به طوری که هر دو عدد $4 - 7n$ و $3 + 5n$ را بشمارد.

۲۹) آیا از اینکه $a \mid b$ و $c \mid d$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a + c \mid b + d$ ؟

۳۰) اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

۳۱) به ازای چند مقدار صحیح x رابطه $3x + 7 \mid 2x + 1$ برقرار است؟

۳۲) ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند. (راهنمایی: فرض کنید $d = (m, m + 1)$ و ثابت کنید $d \mid 1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

۳۳) به ازای چند عدد صحیح از n رابطه $5 + 7n \mid n + 1$ برقرار است؟

۳۴) فرض کنید $a, b, 2$ عدد صحیح باشند و $2a - 3b \mid 11$ ثابت کنید: $7a - 5b \mid 11$.

۳۵) اگر $m \mid a - b$ ، $m \mid c - d$ ثابت کنید:

$$m \mid ac - bd$$

۳۶) اگر $a > 1$ ، $a \mid 9k + 4$ ، $a \mid 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

۳۷) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ آنگاه ب. م. م دو عدد $13 + 6n + 4n^2$ و $1 + 2n$ را محاسبه کنید:

۳۸) فرض کنید $d = (2 + 8a, 4 - 6a)$ آنگاه d چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۳۹) اگر $p \neq q$ و $p \mid q$ هر دو عدد اول باشند، ثابت کنید $(p, q) = 1$.

۴۰) ثابت کنید اگر $(a, b) = 1$ ، $c \mid a$ ، $d \mid b$ آنگاه $(c, d) = 1$.

۴۱) ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد کسر $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ ساده شدنی نیست.



۴۲) حاصل هریک را به دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $([m^2, m], m^5)$

ب) $(2m, 6m^3)$

پ) $(3m + 1, 3m + 2)$

ت) $[m^4, (m^2, m^3)]$

ث) $[(72, 48), 120]$

۴۳) فرض کنید $1 = (a - 2b, 2a + 3b)$ ، $a, b \in \mathbb{N}$ ، (a, b) را بیابید.

۴۴) ثابت کنید اگر ترکیبی خطی از b و a برابر یک شود آنگاه $(a, b) = 1$ به عبارت دیگر اگر $ax + by = 1$ آنگاه $(a, b) = 1$.

۴۵) فرض کنید $c | a + b$ ثابت کنید $(a, c) = (b, c)$

۴۶) ثابت کنید اگر $1 = (a, b)$ ، $1 = (a, c)$ ، آنگاه $1 = (a, bc)$.

۴۷) فرض کنید $a, p \in \mathbb{N}$ عددی اول باشد اگر $\frac{[a, b]}{(a, b)} = p$ آنگاه حاصل $\frac{a^2 + b^2}{(a^3, b^2)}$ را بیابید:

۴۸) اگر $a, b \in \mathbb{N}$ و $1 \neq (a, 13)$ و $1 = (2a, b)$ آنگاه $[13b, 2a]$ را محاسبه کنید:

۴۹) در تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۷ باقیمانده تقسیم ۴ واحد از مربع خارج قسمت کمتر است، بیشترین مقدار ممکن a را بیابید.

۵۰) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۵۱) در یک تقسیم مقسوم ۸۴ واحد بیشتر از مقسوم علیه است اگر باقیمانده برابر ۷ باشد تمام مقادیر ممکن برای خارج قسمت را بیابید.

۵۲) اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.

۵۳) ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است.

۵۴) اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3 | n^3 - n$.
(راهنمایی: برای n سه حالت $n = 3k$ و $n = 3k + 1$ و $n = 3k + 2$ در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3 | n^3 - n$).

۵۵) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $2 | a + b$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 3)$ بر ۸ را بیابید.



۵۶ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۵۷ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + ۲$ یا $a + ۴$ بر ۳ بخش پذیر است.

۵۸ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

درس ۳: هم‌نهشتی در اعداد صحیح، کاربردها

۵۹ عکس عبارت «اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \equiv b^m$ » را بیان و اثبات کنید.

۶۰ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است.

$$k \equiv ۰^۳ \text{ یا } k \equiv ۱^۳ \text{ یا } k \equiv ۲^۳$$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_۳$ یا $k \in [۱]_۳$ یا $k \in [۲]_۳$)

۶۱ اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۶۲ با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^۳ + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n^{ab}$.

۶۳ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \equiv b^m$.

۶۴ فرض کنیم، $a \equiv b^m$ و $c \equiv b^n$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c^d$.

۶۵ اگر $a \equiv b^m$ و $n|m$ ثابت کنید $a \equiv b^n$.

۶۶ اگر $a \equiv b^m$ ثابت کنید:

$$(a, m) = (b, m)$$

۶۷ فرض کنید $a \equiv b^m$ ، آنگاه ثابت کنید: $ka \equiv kb^{km}$ ($k \in \mathbb{N}$).

۶۸ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مردادماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۶۹ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟



۷۰) باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

۷۱) باقی‌مانده تقسیم $38^{36} + 19$ را بر ۴ به دست آورید.

۷۲) جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.

۷۳) اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.

۷۴) ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۷۵) صورت کلی جواب‌های معادله هم‌نهشتی $73x \equiv 1 \pmod{23}$ را بیابید:

۷۶) همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۷۷) اگر $7x - 2 \in [6]_{13}$ صورت کلی x را بیابید:

۷۸) معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آن‌ها را به دست آورید.

الف

$$423x \equiv 79 \pmod{11}$$

ب

$$8x \equiv 20 \pmod{12}$$

پ

$$51x \equiv 11 \pmod{6}$$

۷۹) اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن همان سال چه روزی از هفته است؟

الف) معادله هم‌نهشتی $8x \equiv 20 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

۸۰) به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۸۱) باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ به دست آورید. (رقم یکان A را بیابید.)



۸۲ به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۸۳ اگر x, y جواب‌هایی از معادله سیاله $11y + 14x = 56$ باشند آنگاه باقیمانده تقسیم x بر ۱۱ را بیابید:

۸۴ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)

۸۵ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۸۶ اگر معادله $13 + 7n = 21y + 54x$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد n چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۸۷ با تبدیل معادله سیاله خطی $5x + 2y = 18$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن جواب‌های عمومی این معادله را بیابد.

فصل دوم: گراف و مدل سازی

درس ۱: معرفی گراف

۸۸ هرگاه $E = \{ac, dc, ed, da, bc, ce\}$, $V = \{a, b, c, d, e\}$, $G = (V, E)$

الف - مطلوب است: $p + q + \delta + \Delta$.

ب - مطلوب است: $|N_G(a)| + |N_G[e]|$.

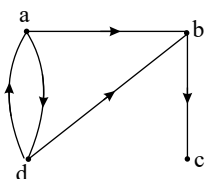
۸۹ ۵ تیم فوتبال a, b, c, d, e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو باهم بازی می‌کنند. در مورد بازی‌های انجام‌شده اطلاعات زیر را داریم:

تیم a تیم‌های e, b را برده است. تیم b به تیم‌های a, c باخته است. تیم c از تیم d شکست خورده ولی تیم b را برده است.

تیم d نیز ۲ تیم e, c را برده است. تیم e به تیم a باخته و تیم c را شکست داده است. گراف جهت‌دار اطلاعات فوق را رسم کنید و اگر برای هر برد ۳ امتیاز در نظر بگیریم مشخص کنید که:

الف) تیم a با کدام تیم‌ها بازی نکرده است؟

ب) امتیاز تیم‌ها را بنویسید.

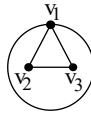


۹۰ مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف مقابل را بنویسید.

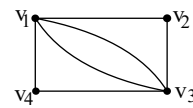
۹۱ گراف ساده و غیرتهی G مفروض است. اگر تعداد یال‌های G دو برابر تعداد رأس‌هایش باشد، آنگاه G حداقل چند رأس دارد؟



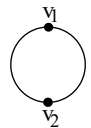
۹۲ کدامیک از گراف‌های زیر ساده است؟



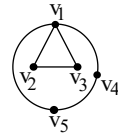
(الف)



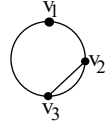
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

۹۳ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد.

ب) اگر یک یال گراف، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می‌نامیم.

پ) مرتبه گراف، نشان‌دهنده تعداد گراف است.

ت) در یک گراف k منتظم ماکزیمم درجه رأس‌ها برابر با است.

۹۴ تعداد کل گراف‌های ساده را روی مجموعه $V = \{a, b, c, d, e\}$ بیابید. همچنین مطلوب است تعداد گراف‌هایی که:

الف - دارای ۵ یال باشد.

ب - دارای ۷ یال باشد و یال‌های ab, cd, ed را شامل باشد.

۹۵ تمام گراف‌های مرتبه ۳ را در دو حالت زیر رسم کنید:

الف) رأس‌ها نام نداشته باشند.

ب) رأس‌ها نام‌گذاری شده باشند.

۹۶ با ۴ رأس $\{a, b, c, d\}$ چند گراف ساده می‌توان ساخت به‌طوری که:

الف - یال ab موجود باشد.

ب - یال‌های ab, cd موجود باشند ولی یال ac موجود نباشد.

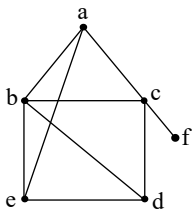
۹۷ در گراف G مجموعه $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ رأس‌ها می‌باشد. اگر مجموعه همسایگی‌های رأس‌ها به‌صورت زیر باشد:

$$N_G(a) = \{b\}, \quad N_G(b) = \{a, c\}, \quad N_G(c) = \{b, e, d\}$$

$$N_G(d) = \{e, c\}, \quad N_G(e) = \{c, d\}, \quad N_G(f) = \emptyset$$

گراف G را رسم کنید.

آیا رأس‌های e, b مجاورند؟ آیا یال‌های bc, cd مجاورند؟



۹۸) گراف $G = (V, E)$ به صورت مقابل رسم شده است. مجموعه‌های V و E را مشخص کنید. درجه رأس‌ها و بیشترین و کمترین درجه رأس‌ها را بنویسید. مجموعه همسایگی باز رأس‌ها را بنویسید.

۹۹) تمام گراف‌های مرتبه ۶ را رسم کنید که در همه آنها بیشترین درجه رأس‌ها یک باشد.

۱۰۰) اگر درجات رئوس گراف G به صورت ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴، ۵ باشد، اندازه گراف $\bar{G}$ چقدر است؟

۱۰۱) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $a, b \in R$ داریم:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

ب) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

پ) اگر $a|b$ و n, m دو عدد طبیعی باشند، که $m \leq n$ آنگاه $a^m|b^n$

ت) تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.

۱۰۲) در یک گراف با ۲۰ یال که درجه هر رأس آن حداقل ۴ است، بیشترین تعداد رأس کدام است؟

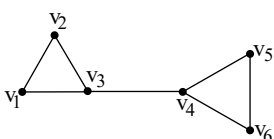
۱۰۳) در گرافی با p رأس و q یال که مجموعه رأس‌های آن $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ می‌باشد، ثابت کنید: $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$.

۱۰۴) به ازای چند مقدار r ، گراف r - منتظم مرتبه ۱۵ وجود دارد؟

۱۰۵) G گرافی ۳ - منتظم از مرتبه p است. اگر $q + 4 = 2p$ ، مقادیر p و q را بیابید و گرافی با این مشخصات رسم کنید.

۱۰۶) یک گراف کامل دارای ۵۵ یال است. درجه هر رأس را بیابید.

۱۰۷) چند یال به گراف مقابل اضافه کنیم تا یک گراف کامل به دست آید؟

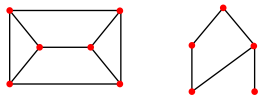




۱۰۸ تعداد یال‌های گراف کامل K_p از تعداد یال‌های گراف کامل K_{p-3} ، ۱۵ واحد بیشتر است. تعداد یال‌های K_p چقدر است؟

۱۰۹ یک گراف از مرتبه ۹ و اندازه ۳۵ دارای چند رأس از درجه $\max$ است؟

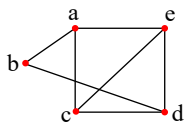
۱۱۰ در گراف G از مرتبه ۸، p ، تعداد عضوهای همسایگی باز رأس‌های گراف عبارتند از: ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴، ۵. مکمل این گراف چند یال دارد؟



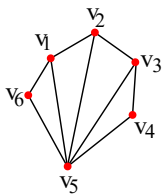
۱۱۱ مکمل گراف‌های زیر را رسم کنید.

۱۱۲ گرافی ساده از مرتبه ۶ می‌باشد که مجموع درجات رأس‌های آن ۱۴ است. مجموع درجات رأس‌های $\bar{G}$ کدام است؟

۱۱۳ در گراف K_5 ، بین ۲ رأس دلخواه و متمایز u, v چند مسیر متفاوت وجود دارد؟



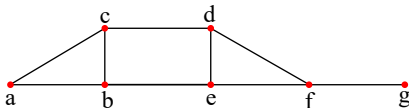
۱۱۴ در گراف مقابل، تمام مسیرهای از رأس a به رأس b را بنویسید.



۱۱۵ در گراف مقابل، دو مسیر از v_1 به v_4 یکی با کمترین طول و دیگری با بیشترین طول بنویسید.

۱۱۶ گرافی ساده و ۳-منتظم چنان رسم کنید که دوری به طول ۳ نداشته باشد.

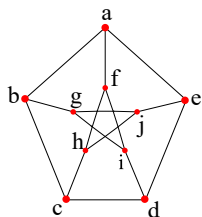
۱۱۷ گراف $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6, v_5v_6\}$ را در نظر بگیرید. تمام دورهای این گراف را بنویسید.



۱۱۸ در گراف روبه‌رو، تمام دورها را بنویسید.



۱۱۹ در گراف زیر، دورهایی به طول ۵، ۶، ۸، ۹ را بنویسید.

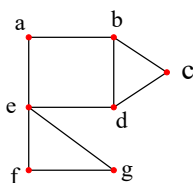


۱۲۰ گرافی با ۲۰ رأس همبند است. بیشترین و کمترین تعداد یال‌های این گراف را بنویسید.

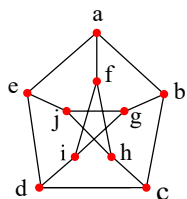
۱۲۱ آیا گراف‌های ۳-متنظم مرتبه ۸ و ۲-متنظم مرتبه ۶ همواره همبند هستند؟

درس ۲: مدل‌سازی با گراف

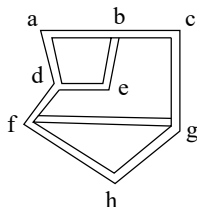
۱۲۲ برای گراف مقابل، سه مجموعه احاطه‌گر بنویسید.



۱۲۳ برای گراف مقابل، سه مجموعه احاطه‌گر بنویسید.



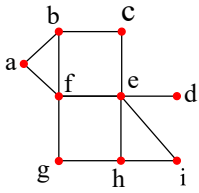
۱۲۴ شکل مقابل، منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی از تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به‌گونه‌ای نصب شود که اولاً: برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شوند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند. ثانیاً: به‌جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد. خودپردازها را در کدام تقاطع‌ها قرار دهیم؟



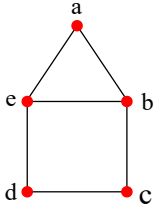
۱۲۵ اگر یک صفحه شطرنج 4×4 را در نظر بگیریم، حداقل چند وزیر مورد نیاز است تا هر مهره‌ای، در هر قسمتی از صفحه که باشد توسط وزیر تهدید شود؟



۱۲۶ برای گراف مقابل، یک مجموعه احاطه‌گر، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بنویسید.



۱۲۷ تمام مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم را برای گراف زیر بنویسید.

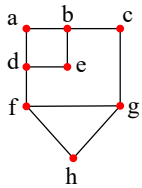


۱۲۸ گراف P_4 را رسم کنید.

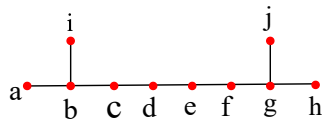
الف) یک γ -مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ϵ -عضوی از آن را مشخص نمایید.

۱۲۹ در گراف مقابل، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم بنویسید.



۱۳۰ عدد احاطه‌گری گراف مقابل را بیابید.



۱۳۱ یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۳۲ گرافی مشخص کنید که عدد احاطه‌گری آن دقیقاً $\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ باشد.

۱۳۳ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۳۴ الف) یک گراف ϵ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.

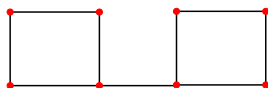
ب) یک گراف ϵ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.



۱۳۵ اگر G یک گراف k -منتظم n رأسی باشد، نشان دهید: $\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$

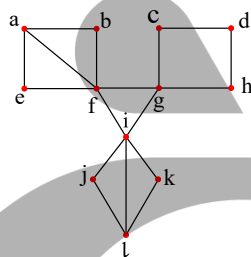
۱۳۶ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟
 $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی که گراف G می‌تواند داشته باشد را مشخص کنید



۱۳۷ نشان دهید عدد احاطه‌گری در گراف زیر با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر نیست.

۱۳۸ در گرافی با ۵ رأس عدد احاطه‌گری یک می‌باشد. حداقل و حداکثر تعداد یال‌های این گراف چقدر است؟

۱۳۹ در گراف‌های زیر، $\gamma(G)$ کدام است؟

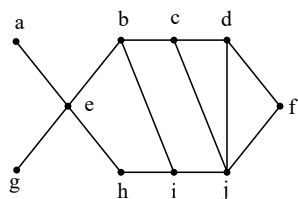
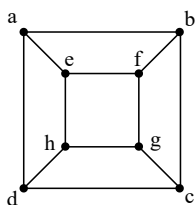


p_7

(الف)

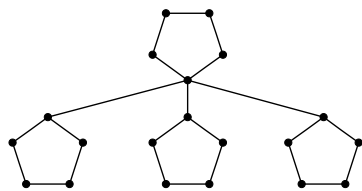
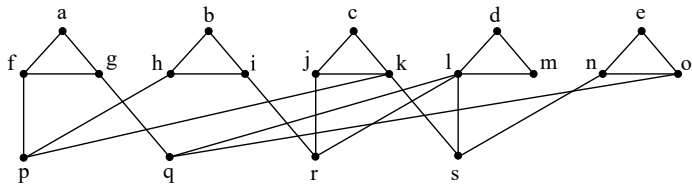
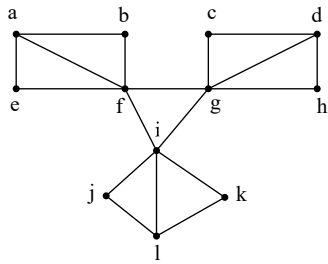
(ب)

۱۴۰ عدد احاطه‌گری را برای هریک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



الف

ب



فصل سوم: ترکیبیات

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

۱۴۱) تاسی را به طور متوالی پرتاب می‌کنیم. چند حالت مختلف وجود دارد، برای اینکه تاس در نهمین پرتاب برای اولین بار ۶ بیاید؟

۱۴۲) شخصی در یک آزمون تستی ۴ گزینه‌ای با ۲۰ سؤال، شرکت کرده است. چند حالت وجود دارد برای اینکه آن شخص به همه سؤالات پاسخ غلط دهد؟ (همه سؤالات یک پاسخ دارند.)

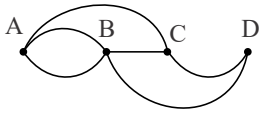
۱۴۳) شخصی در یک آزمون تستی ۴ گزینه‌ای با ۲۰ سؤال، شرکت کرده است. چند حالت وجود دارد، برای اینکه آن شخص به همه سؤالات پاسخ درست یا غلط دهد؟ (همه سؤالات یک پاسخ درست دارند.)

۱۴۴) چند رمز عددی ۵ رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟

۱۴۵) چند عدد ۵ رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟



۱۴۶ در شکل زیر چند مسیر مختلف از A به D وجود دارد؟ (از هر مسیر و هر نقطه حداکثر یکبار مجاز به عبور هستیم.)



۱۴۷ مقدار n در عبارت $\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{3}{2}$ را به دست آورید.

۱۴۸ با توجه به معادله زیر، حاصل $C(n+1, n-3)$ چند است؟

$$\frac{(2n+2)!}{(2n-1)!} = 1320$$

۱۴۹ معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{P(n, n-2)}{C(n, n-3)} = 3(7!)$$

۱۵۰ عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{3C(n, n-3)}{P(n, n-2)}$$

۱۵۱ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در یک ردیف بچینیم؟ اگر:

(الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

(ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

(پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

(ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۱۵۲ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

۱۵۳ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند، در دو طرف طول یک میز مستطیلی شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی

برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱۵۴ علی و ۶ نفر از دوستانش به چند حالت می‌توانند، در یک ردیف قرار بگیرند، به طوری که علی شخص وسط نباشد؟

۱۵۵ در چند جایگشت از حروف کلمه *right* عبارت tg دیده می‌شود؟

۱۵۶ در چند جایگشت از حروف کلمه *right* حروف g و t کنار هم آمده‌اند؟

۱۵۷ در چند عدد ۳ رقمی حاصل ضرب رقم‌ها فرد است؟



۱۵۸ علی و حسین و ۴ نفر دیگر به چند حالت می‌توانند دور یک میز دایره‌ای بشینند، به طوری که علی کنار حسین باشد؟

۱۵۹ می‌خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولیدشده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف $d, d, d, c, c, a, b, a, a$ از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۱۶۰ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

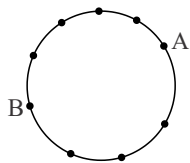
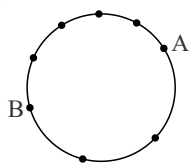
۱۶۱ هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق سه‌نفره و چهارنفره و یک‌نفره قرار بگیرند؟

۱۶۲ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند، در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه‌نفره قرار بگیرند؟

۱۶۳ اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۱۶۴ سکه ای را به طور متوالی پرتاب می‌کنیم. چند حالت مختلف وجود دارد، برای اینکه سکه در پنجمین پرتاب، برای دومین بار پشت بیاید؟

۱۶۵ به چند حالت می‌توان ۴ نقطه از بین نقاط زیر انتخاب کرد، به گونه‌ای که AB یکی از اضلاع ۴ ضلعی ایجادشده باشد؟



۱۶۶ به چند حالت می‌توان ۴ نقطه از بین نقاط زیر انتخاب کرد، به گونه‌ای که AB قطر ۴ ضلعی ایجادشده باشد؟

۱۶۷ از بین ۸ جفت کفش مختلف به چند حالت می‌توان، ۳ لنگه کفش انتخاب کرد که هر ۳ برای پای راست باشند؟

۱۶۸ از بین ۸ جفت کفش مختلف به چند حالت می‌توان ۳ لنگه کفش انتخاب کرد که بین آنها هیچ جفتی وجود نداشته باشد؟

۱۶۹ از بین ۸ جفت کفش مختلف، به چند حالت می‌توان ۵ لنگه کفش انتخاب کرد که بین آنها دو جفت وجود داشته باشد؟

۱۷۰ مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که عضو کوچک‌تر از ۴ نداشته باشد؟



۱۷۱ مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی، چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که بزرگ‌ترین عضو ۷ باشد؟

۱۷۲ مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی، چند زیرمجموعه ۵ عضوی شامل ۸ و فاقد ۹ دارد؟

۱۷۳ مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی، چند زیرمجموعه ۵ عضوی شامل ۸، ۹ دارد؟

۱۷۴ به چند طریق می‌توان، ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۱۷۵ به چند طریق می‌توان، ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۷۶ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

(الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

(ب) از هر نوع گل، حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

(پ) از گل نوع دوم، حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم، بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

(ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم، حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۱۷۷ معادله زیر چند جواب صحیح با شرایط زیر دارد؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 5, x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0, x_8 \geq -3, x_9 > 3, x_{10} > 0$$

۱۷۸ معادله زیر چند جواب صحیح با شرایط زیر دارد؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 8, x_1, x_2, x_3, \dots, x_7 \geq 0, x_8 \geq 2, x_9 \geq 3, x_{10} \geq 1$$

۱۷۹ معادله زیر چند جواب صحیح مثبت دارد؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 13$$

۱۸۰ معادله زیر چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 3$$

۱۸۱ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه، می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۱۸۲ مجموع درایه‌های قطر اصلی مربع لاتین از مرتبه ۱۰، حداقل چند است؟

۱۸۳ مجموع درایه‌های قطر اصلی مربع لاتین از مرتبه ۱۰، حداکثر چند است؟

۱۸۴ مجموع درایه‌های یک مربع لاتین از مرتبه ۱۰، چند است؟



۱۸۵ در خانه‌های خالی اعدادی بنویسید که مربع لاتین ایجاد شود.

			۳
		۴	
	۴		
۳			

۱۸۶ در مربع لاتین زیر حاصل $2a + b$ چند است؟

		۱	
۱		a	۳
	b		
	۲		۱

۱۸۷ مربع لاتین 3×3 مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

(الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید. آیا A و A_1 متعامدند؟
 (ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A و A_2 متعامدند؟
 (پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

- ۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟
- ۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۱۸۸ آیا دو مربع لاتین زیر متعامدند؟

۴	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۴
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۴	۲
۲	۴	۱	۳



یک مربع لاتین مثال بزنید که با مربع لاتین زیر متعامد باشد. (۱۸۹)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

(۱۹۰) قرار است شش مدرس $T_1, T_2, \dots$ و T_6 در شش جلسه متوالی در شش کلاس $C_1, C_2, \dots$ و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

درس ۲: روش‌هایی برای شمارش

(۱۹۱) چند عدد طبیعی کمتر از ۳۰۰، حداقل بر یکی از اعداد ۶ و ۸ بخش‌پذیر است؟

(۱۹۲) چند عدد طبیعی کمتر از ۳۰۰، فقط بر یکی از اعداد ۶ و ۸ بخش‌پذیر باشد؟

(۱۹۳) در یک مهمانی با ۶۰ شرکت‌کننده ۳۰ نفر مرد و ۲۵ نفر سیاه‌پوست هستند. اگر ۳ مرد سیاه‌پوست در مهمانی باشند، چند زن غیر سیاه‌پوست وجود دارد؟

(۱۹۴) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

(۱۹۵) در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند، مشخص کنید:

(الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می‌کنند؟

(ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

(پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

(ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

(۱۹۶) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

(۱۹۷) چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می‌توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A| = 5$ و $|B| = 4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

(۱۹۸) در جعبه‌ای ۴ گوی زرد، ۶ گوی مشکی، ۸ گوی سبز و ۱۰ گوی آبی داریم. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل ۷ گوی خارج شده هم‌رنگ هستند؟

(۱۹۹) ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 8×6 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد؟

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



۲۰۰ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد؟

۲۰۱ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر، حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند؟

۲۰۲ یک تاس را چند بار پرتاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل یک‌بار نتیجه تکراری حاصل می‌شود؟

۲۰۳ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۰۴ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟

۲۰۵ مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۲۰۶ مجموعه اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است؟





پاسخنامه تشریحی

۱ به روش مستقیم ثابت می‌کنیم: (فرض می‌کنیم x و y دو عدد صحیح می‌باشند.)

$$a = x^2 + y^2 \Rightarrow 2a = 2x^2 + 2y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ = (x + y)^2 + (x - y)^2$$

۲ طبق فرض داریم $n = 2k(2k + 2)$ در نتیجه:

$$n + 1 = 2k(2k + 2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2$$

پس $n + 1$ مربع کامل است.

۳ با توجه به فرض مسئله $n^2 = 8q$ چون n^2 مربع کامل است پس توان تمامی عوامل اول آن زوج است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت q مضرب ۲ است و می‌توان n^2 را به صورت $2^4 q'^2$ نمایش داد حال داریم:

$$n^2 = 2^4 q'^2 \rightarrow n = 2^2 q' = 4q'$$

بنابراین n مضرب ۴ است.

۴ فرض کنید $a = 2k + 1$ یک عدد فرد دلخواه باشد آنگاه می‌توان نوشت:

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{q}) + 1 = 2q + 1$$

بنابراین مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

۵

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \rightarrow 2xy = 0 \rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 0$$

اگر حداقل یکی از اعداد x و y برابر صفر باشند، تساوی برقرار است. به عنوان مثال $x = 0$ و $y = 1$ را در نظر بگیرید.

۶ به روش مستقیم اثبات می‌کنیم: اگر a عددی فرد باشد آنگاه $a = 2k + 1$ که $k \in \mathbb{Z}$ در نتیجه:

$$a = 2k + 1 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = (k + 1)^2 - k^2$$

پس a برابر تفاضل مربع‌های ۲ عدد صحیح است.

۷ اثبات به روش مستقیم است:

فرض کنید $2k + 1$ و $2k + 3$ دو عدد فرد متوالی دلخواه باشند می‌توان نوشت:

$$(2k + 1)(2k + 3) + 1 = 4k^2 + 8k + 4 = 4(k^2 + 2k + 1) = 4(k + 1)^2$$

بنابراین می‌توان حکم را نتیجه گرفت.

۸ الف) اثبات این گزاره به صورت زیر است:

اگر $2n - 1$ که $n \in \mathbb{Z}$ عدد فرد دلخواهی باشد، آنگاه داریم:

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2q + 1 \rightarrow \text{فرد است.}$$

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n + 1) = 2q + 1 \rightarrow \text{فرد است.}$$

ب) فرض کنیم $1, 2, 3, 4, n, n + 5$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) عدد طبیعی متوالی باشند، داریم:

$$\text{عدد وسطی} = \frac{5n + 15}{5} = n + 3 \rightarrow \text{میانگین اعداد}$$

بنابراین حکم برقرار است.

۹ برای مثال: یا $x = -1$ را در نظر بگیرید.

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 < (-1)^2 \rightarrow -1 < 1$$

۱۰ به روش برهان خلف ثابت می‌کنیم:

فرض می‌کنیم ab عددی فرد باشد آنگاه هر دو عدد a, b فرد هستند در نتیجه $a + b$ عددی زوج می‌شود (زیرا مجموع دو عدد فرد عددی زوج است) حال که به تناقض رسیدیم می‌توان درستی حکم را نتیجه گرفت.

۱۱ اثبات از طریق برهان خلف:

اگر n فرد نباشد، آنگاه n زوج است. پس $n = 2k$ که k عددی صحیح است. بنابراین $2k^2 = 2(2k^2) = 2q$ نیز عددی زوج است که خلاف فرض اولیه است پس n عددی فرد است.

۱۲ اگر حکم درست نباشد آنگاه اعداد فرد x, y وجود دارند به طوری که $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y + x = xy$$



چون y, x اعداد فردند پس $y + x$ زوج و xy فرد است. از تناقض حاصل حکم نتیجه می‌شود.

(۱۳) فرض کنیم n فرد باشد پس به ازای عدد صحیح مانند $k, n = 2k + 1$ می‌توان نوشت:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k + 1}_q) + 1 = 2q + 1$$

بنابراین n^2 هم عددی فرد است از این تناقض نتیجه می‌گیریم n باید زوج باشد.

(۱۴) با روش برهان خلف پیش می‌رویم:

فرض می‌کنیم $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ عددی گویا مانند q باشد. داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + \sqrt{3} = q &\rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = q^2 \rightarrow 2 + 3 + 2\sqrt{6} = q^2 \\ \rightarrow 2\sqrt{6} = q^2 - 5 &\rightarrow \sqrt{6} = \frac{q^2 - 5}{2}\end{aligned}$$

گویا بودن $\frac{q^2 - 5}{2}$ با گنگ بودن $\sqrt{6}$ در تناقض است بنابراین $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ گنگ است.

(۱۵) فرض کنید a کوچکترین عدد حقیقی مثبت باشد چون $0 < \frac{a}{2} < a$ یعنی عدد حقیقی مثبتی کوچکتر از a وجود دارد پس a کوچکترین عدد حقیقی مثبت نیست از این تناقض نتیجه می‌گیریم کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

(۱۶) فرض کنیم هیچ یک از اعداد y, x گنگ نباشند در اینصورت گویا هستند. می‌دانیم حاصلضرب هر دو عدد گویا عددی گویا است پس xy گویا است که تناقض است بنابراین حداقل یکی از اعداد x و y گنگ است.

(۱۷) به برهان خلف فرض می‌کنیم هیچ یک از این سه عدد بزرگتر یا مساوی ۱۶ نباشد در اینصورت می‌توان نوشت:

$$x \leq 15, y \leq 15, z \leq 15 \rightarrow x + y + z \leq 45$$

حال از این تناقض نتیجه می‌گیریم حداقل یکی از اعداد باید بزرگتر یا مساوی ۱۶ باشد.

(۱۸) خیر: فرض کنیم چنین اعدادی وجود داشته باشند بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \rightarrow (a+b)^2 = ab \\ \rightarrow a^2 + b^2 + 2ab &= ab \rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \\ \rightarrow (a^2 + b^2 + 2ab) + a^2 + b^2 &= 0 \rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \\ \rightarrow a = 0, b = 0, a+b &= 0 \quad \cdot \cdot \cdot\end{aligned}$$

حال که به تناقض رسیدیم می‌توانیم خلاف حکم را نتیجه بگیریم: یعنی به ازای هیچ مقدار نامنفرد a و b رابطه $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار نیست.

(۱۹) فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha - \beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی $\alpha + \beta$ گویا است، پس مجموع آن‌ها یعنی $\alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha$ گویاست در نتیجه α گویا است که با فرض در تناقض است، پس $\alpha - \beta$ گنگ است.

فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha + 2\beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی چون $\alpha + \beta$ گویا است، پس تفاضل آن‌ها یعنی $\alpha + 2\beta - (\alpha + \beta) = \beta$ گویا است که با فرض در تناقض است، پس $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

(۲۰) به برهان خلف فرض می‌کنیم xy گویا باشد آنگاه چون $x \neq 0$ عدد گویای $\frac{1}{x}$ وجود دارد.

با توجه به اینکه حاصلضرب دو عدد گویا عددی گویاست حاصل $y = \frac{1}{x} \cdot xy$ عددی گویا است که تناقض است پس xy عددی گنگ است.

(۲۱) دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

(۱) زوج است در این صورت می‌توان فرض کرد $n = 2k$ که $k \in \mathbb{Z}$ در نتیجه:

$$n^2 + 5n = 4k^2 + 10k = 2(\underbrace{2k^2 + 5k}_q) = 2q$$

پس $n^2 + 5n$ عددی زوج است.

(۲) فرد است. در این صورت $n = 2k + 1$ که $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین:

$$n^2 + 5n = 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 = 4k^2 + 14k + 6 = 2(\underbrace{2k^2 + 7k + 3}_q) = 2q$$

پس در این حالت نیز $n^2 + 5n$ عددی فرد است بنابراین $n^2 + 5n$ همواره عددی زوج است.

(۲۲) به روش بازگشتی اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} + \sqrt{7} &< 2\sqrt{6} \Leftrightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 < (2\sqrt{6})^2 \\ \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{35} + 7 &< 24 \Leftrightarrow 2\sqrt{35} < 12 \Leftrightarrow \sqrt{35} < 6 \Leftrightarrow 35 < 36\end{aligned}$$

چون نابرابری آخر درست است پس هم ارز آن یعنی $\sqrt{5} + \sqrt{7} < 2\sqrt{6}$ نیز درست است.

(۲۳)

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

درستی این گزاره بدیهی است.



۲۴

$$a|b \rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} b = (-a)(-q) \rightarrow -a|b \\ -b = (-a)q = a(-q) \rightarrow -a|-b, a|-b \end{cases}$$

۲۵

بنابر تعریف بخش‌پذیری، $a|b$ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری‌که $b = aq$ ، بنابراین داریم:

$$(۱) ab = (c)d \rightarrow d|ab \quad (۲) ab = c(d) \rightarrow c|ab$$

$$(۳) ab = cd(۱) \rightarrow cd|ab \quad (۴) cd = ab(۱) \rightarrow ab|cd$$

$$(۵) cd = (a)b \rightarrow b|cd \quad (۶) cd = a(b) \rightarrow a|cd$$

۲۶

$$a|b \rightarrow a^m|b^m \xrightarrow{b \in \pi, n-m \geq 0} a^m|b^m \times b^{n-m} \rightarrow a^m|b^n$$

۲۷

می‌دانیم اگر $a|b$ ، آنگاه $a^2|b^2$ پس داریم:

$$۵|۴k+۱ \rightarrow ۵^2|(۴k+۱)^2 \rightarrow ۲۵|۱۶k^2+۸k+۱ \quad (I)$$

$$\left. \begin{matrix} ۵|۴k+۱ \\ ۵|۵ \end{matrix} \right\} \rightarrow ۲۵|۲۰k+۵ \quad (II)$$

از طرفی اگر $a|b$ و $c|d$ ، آنگاه $ac|bd$ پس داریم:

$$\xrightarrow{(I),(II)} \left\{ \begin{matrix} ۲۵|۲۰k+۵ \\ ۲۵|۱۶k^2+۸k+۱ \end{matrix} \right\} \rightarrow ۲۵|۱۶k^2+۲۸k+۶$$

۲۸

$$\left. \begin{matrix} x|7n-4 \rightarrow x|5(7n-4) \\ x|5n+3 \rightarrow x|7(5n+3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow x|7(5n+3)-5(7n-4) \rightarrow x|41$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار x ، ۴۱ است.

۲۹

خیر: می‌دانیم $۲|۲$ و $۳|۹$ ولی $۲+۳ \nmid ۲+۹$.

۳۰

با خواص بخش‌پذیری، k را حذف می‌کنیم.

$$\left. \begin{matrix} a|5k+3 \rightarrow a|9(5k+3) \\ a|9k+4 \rightarrow a|5(9k+4) \end{matrix} \right\} \rightarrow a|9(5k+3)-5(9k+4) \rightarrow a|7 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=7 \xrightarrow{a>1} a=7$$

بنابراین a عددی اول است.

۳۱

$$\left. \begin{matrix} 2x+1|(3x+7) \times 2 \\ 2x+1|(2x+1) \times 3 \end{matrix} \right\} \rightarrow 2x+1|(6x+14)-(6x+3) \rightarrow 2x+1|11$$

$$\begin{cases} (۱) 2x+1=11 \rightarrow x=5 \checkmark \\ (۲) 2x+1=-11 \rightarrow x=-6 \checkmark \\ (۳) 2x+1=1 \rightarrow x=0 \checkmark \\ (۴) 2x+1=-1 \rightarrow x=-1 \checkmark \end{cases}$$

۳۲

(الف) دو عدد صحیح و متوالی را m و $m+1$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(m, m+1) = d$. آنگاه می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{matrix} d|m \\ d|m+1 \end{matrix} \right\} \rightarrow d|m+1-m \rightarrow d|1$$

حال چون $d > 0$ می‌توان نتیجه گرفت $d=1$: یعنی دو عدد صحیح و متوالی m و $m+1$ نسبت به هم اول‌اند.

(ب) دو عدد صحیح و فرد متوالی را $2m+1$ و $2m+3$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(2m+1, 2m+3) = d$. آنگاه می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{matrix} d|2m+1 \\ d|2m+3 \end{matrix} \right\} \rightarrow d|2m+3-2m-1 \rightarrow d|2$$

با توجه به اینکه $d > 0$ می‌توان نتیجه گرفت $d=1$ یا $d=2$ چون هیچ عدد فردی مقسوم‌علیه زوج ندارد بنابراین $d=1$.

۳۳

$$\left. \begin{matrix} n+1|7n+5 \\ n+1|7(n+1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow n+1|(7n+7)-(7n+5) \rightarrow n+1|2$$

$$\begin{cases} (۱) n+1=2 \rightarrow n=1 \\ (۲) n+1=-2 \rightarrow n=-3 \\ (۳) n+1=1 \rightarrow n=0 \\ (۴) n+1=-1 \rightarrow n=-2 \end{cases}$$

۳۴

می‌دانیم:

$$\left. \begin{matrix} 11|11a-11b \\ 11|2(2a-3b) \rightarrow 11|4a-6b \end{matrix} \right\} \rightarrow 11|(11a-11b)-(4a-6b) \rightarrow 11|7a-5b$$



۳۵

$$\left. \begin{array}{l} m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \\ m|c-d \Rightarrow m|b(c-d) \end{array} \right\} \Rightarrow m|(ac-bc)+(bc-bd) \Rightarrow m|ac-bd$$

۳۶

$$\left. \begin{array}{l} a|9k+4 \xrightarrow{\times 5} a|45k+20 \\ 5|5k+3 \xrightarrow{\times 9} a|45k+27 \end{array} \right\} \Rightarrow a|-7 \xrightarrow{a>1} a=7 \Rightarrow a \text{ عددی اول است}$$

۳۷ فرض کنید $d = (1, 2n+1, 13, 6n+4, 4n^2)$ طبق تعریف ب. م. م داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d|4n^2+6n+13 \\ d|2n+1 \rightarrow d|4n^2+2n \end{array} \right\} \rightarrow d|4n^2+13$$

داشتیم: $\left. \begin{array}{l} d|4n^2+13 \\ d|2n+1 \rightarrow d|4n+2 \end{array} \right\} \rightarrow d|11$

بنابراین $d=1$ یا $d=11$.

۳۸

$$\left. \begin{array}{l} d|6a-4 \rightarrow d|24a-16 \\ d|8a+2 \rightarrow d|24a+6 \end{array} \right\} \rightarrow d|22$$

بنابراین $d \in \{1, 2, 11, 22\}$ با توجه به اینکه $6a-4$ و $8a+2$ زوج هستند d تنها می‌تواند ۲ یا ۲۲ باشد.۳۹ فرض کنیم $d = (p, q)$ و $d \neq 1$ بنابراین داریم:

$$d|p, d|q \xrightarrow{q,p,d \neq 1} d=p, d=q \rightarrow p=q$$

حال با توجه به اینکه $p=q$ با فرض مسئله در تناقض است نتیجه می‌گیریم $d=1$.۴۰ فرض کنید $d' = (c, d)$ در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d'|c \xrightarrow{c|a} d'|a \\ d'|d \xrightarrow{d|b} d'|b \end{array} \right\} \xrightarrow{(a,b)=1} d'=1$$

۴۱ باید ثابت کنیم $(21n+4, 14n+3) = 1$ می‌توان نوشت:

$$(21n+4, 14n+3) = (21n+4-14n-3, 14n+3) = (7n+1, 14n+3) = (1, 7n+1) = d$$

در نتیجه $d|1$ بنابراین $d=1$ ، یعنی $21n+4, 14n+3$ هیچ مقسوم علیه مشترکی جز ۱ ندارند و کسر مورد نظر ساده شدنی نیست.

۴۲

$$\text{الف) } m|m^r \rightarrow [m^r, m] = m^r, \quad m^r|m^s \rightarrow (m^r, m^s) = m^r$$

$$\Rightarrow ([m^r, m], m^s) = (m^r, m^s) = m^r$$

$$\text{ب) } 2m|6m^r \rightarrow (2m, 6m^r) = 2m$$

$$\text{پ) } (3m+1, 3m+2) = d \rightarrow \begin{cases} d|3m+1 \\ d|3m+2 \end{cases} \rightarrow d|1 \rightarrow d=1$$

$$\text{ت) } m^r|m^r \rightarrow (m^r, m^r) = m^r, \quad m^r|m^s \rightarrow [m^r, m^s] = m^r$$

$$\Rightarrow [m^s, (m^r, m^r)] = [m^s, m^r] = m^s$$

$$\text{ث) } [(72, 48), 120] = [(2^3 \times 3^2, 2^4 \times 3), 120] = [2^4, 120] = 120$$

(توجه کنید که $120 = 2^3 \times 3 \times 5$)۴۳ فرض کنید $d = (a, b)$ آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right\} \rightarrow d|a-b$$

$$d|b \rightarrow d|2a+3b$$

بنابراین d یک مقسوم علیه مشترک $a-b$ ، $2a+3b$ می‌باشد اما چون این دو عدد نسبت به هم اول هستند پس هیچ مقسوم علیه مشترکی جز یک ندارند بنابراین داریم: $d=1$.۴۴ فرض کنیم $d = (a, b)$ بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right\} \rightarrow d|ax+by \rightarrow d|1$$

بنابراین $d=1$.۴۵ تذکر: $(a, b) = (a, ka+b)$ $k \in \mathbb{Z}$ طبق فرض داریم $a+b = ck$ می‌توان نوشت:

$$(a, c) = (ck-b, c) = (ck-b-ck, c) = (-b, c) = (b, c)$$

۴۶ چون $(a, c) = 1$ و $(a, b) = (a, bc)$ و چون $(a, b) = 1$ سپس $(a, bc) = 1$.

۴۷

فرض کنید $d = (a, b)$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $a = a'd$ ، $b = b'd$ ، $(a', b') = 1$ در نتیجه $[a, b] = a'b'd$ حال می‌توان نوشت:



$$\frac{[a, b]}{(a, b)} = p \rightarrow \frac{a'b'd}{d} = p \rightarrow a'b' = p \rightarrow a' = 1, b' = p$$

$$\frac{a^r + b^r}{(a, b)} = \frac{(a^r + b^r)d^r}{d^r} = a^r + b^r = 1 + p^r$$

(۴۸) می‌دانیم ۱۳ عددی اول است چون $(a, 13) \neq 1$ پس $(a, 13) = 13$ بنابراین $a = 13k$.
همینطور از اینکه $(2a, b) = 1$ می‌توان نتیجه گرفت $13 \nmid b, 2 \nmid b$ ، حال می‌توان نوشت:

$$[13b, 2a] = [13b, 2 \times 13k] = 2 \times 13 \times k \times b = 2ab$$

(۴۹) طبق فرض داریم:

$$a = 27q + q^2 - 4, \quad q^2 - 4 < 27$$

بنابراین $q^2 < 31$ و $q \leq 5$ بنابراین بیشترین مقدار a برابر ۱۵۶ بدست می‌آید.

(۵۰) طبق فرض به‌ازای اعداد صحیح q_1 و q_2 داریم: $a = nq_1$ و $b = nq_2$.

$$a = bq + r \rightarrow nq_1 = nq_2q + r \rightarrow r = nq_1 - nq_2q = n(q_1 - q_2q)$$

بنابراین r هم بر n بخش‌پذیر است.

(۵۱) طبق فرض می‌توان نوشت:

$$b + 14 = bq + 7, \quad b > 7 \rightarrow b(q - 1) = 77 = 77 \times 11$$

$$b = 11 \rightarrow q - 1 = 7 \rightarrow q = 8$$

$$b = 11 \times 7 \rightarrow q - 1 = 1 \rightarrow q = 2$$

پس دو مقدار برای خارج قسمت وجود دارد.

(۵۲)

$$a = 4q + 3 \xrightarrow{\times 2} 2a = 8q + 6$$

$$\xrightarrow{+3} 2a + 3 = 8q + 9 = 8q' + 1$$

باقی‌مانده = ۱

(۵۳) اعداد صحیح متوالی دلخواه $n, n+1$ و $n-1$ را در نظر می‌گیریم با توجه به تمرین ۱۱ نشان دادیم که حاصل ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی نیز بر ۲ بخش‌پذیر است؛ پس حاصل ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی نیز مضرب ۲ می‌باشد؛ در نتیجه $(n-1)(n+1)n$ بر ۳! بخش‌پذیر است.

(۵۴) می‌توان نوشت:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$

حالت ۱: فرض کنیم $n = 3k$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$n^3 - n = (3k)(3k+1)(3k-1) \rightarrow 3|n^3 - n$$

حالت ۲: فرض کنیم $n = 3k + 1$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$n^3 - n = (3k+1)(3k+2)(3k) \rightarrow 3|n^3 - n$$

حالت ۳: فرض کنیم $n = 3k + 2$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$n^3 - n = (3k+2)(3k+3)(3k+1) \rightarrow 3|n^3 - n$$

پس در هر حالت ثابت کردیم $3|n^3 - n$.

(۵۵) طبق فرض $a = 2n + 1$ که $a \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$b|a+2 \rightarrow b|2n+3 \rightarrow b \rightarrow b = 2n'+1 \quad (-n' \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = (2n+1)^2 + (2n'+1)^2 + 3 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n'^2 + 4n' + 1 + 3$$

$$= \underbrace{4n(n+1)}_{2k} + \underbrace{4n'(n'+1)}_{2k'} + 5 = 4k + 4k' + 5 = 4(k+k') + 5$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ برابر ۵ است.

(۵۶) طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} a &= 7k + 5 \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 4} 4a = 28k + 20 \\ a &= 8k' + 7 \quad (k' \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 5} 5a = 40k' + 35 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow a = 56k - 56k' - 9 \Rightarrow a = 56(k - k') - 9 \Rightarrow a = 56k'' - 9$$

$$\Rightarrow a = 56(\underbrace{k'' - 1}_q) + 56 - 9 \Rightarrow a = 56q + 47$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم a بر ۵۶ برابر ۴۷ است.

(۵۷) برای عدد صحیح و دلخواه a یکی از حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $a = 3k$ آنگاه $a \equiv 3 \pmod{3}$.



(۲) اگر $a = 3k + 1$ آنگاه $3|a + 2$.

(۳) اگر $a = 3k + 2$ آنگاه $3|a + 4$.

(۵۸)

$$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = \underbrace{3n(n+1)}_{3k} + 1 = 3k + 1$$

حال n می‌تواند زوج یا فرد باشد. در هر دو صورت حاصل $(n+1)^3 - n^3$ عددی فرد می‌شود پس حکم برقرار است.

(۵۹) باید ثابت کنیم که $a \equiv b^m$ آنگاه a و b در تقسیم بر m هم‌باقی‌مانده‌اند. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a = mq + r & 0 \leq r < m \\ b = mq' + r' & 0 \leq r' < m \end{cases}$$

$$a \equiv b^m \rightarrow m|a - b \rightarrow m|mq + r - mq' - r' \rightarrow m|r - r'$$

$$\rightarrow r - r' = mk \quad (k \in \mathbb{Z}) \rightarrow r = r' + mk \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{l} 0 \leq r < m \\ 0 \leq r' < m \end{array} \rightarrow k = 0 \rightarrow r = r'$$

(۶۰) طبق قضیه تقسیم k را می‌توان به یکی از سه فرم $3q$ ، $3q + 1$ یا $3q + 2$ نمایش داد.

بنابراین ۳ حالت ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $q \in \mathbb{Z}, k = 3q$

$$3|k \rightarrow k \equiv 0 \rightarrow k \in [0]_3$$

حالت دوم: $q \in \mathbb{Z}, k = 3q + 1$

$$3|3q + 1 - 1 \rightarrow 3|k - 1 \rightarrow k \equiv 1 \rightarrow k \in [1]_3$$

حالت سوم: $q \in \mathbb{Z}, k = 3q + 2$

$$3|3q + 2 - 2 \rightarrow 3|k - 2 \rightarrow k \equiv 2 \rightarrow k \in [2]_3$$

(۶۱) روزهای هفته دوره گردش هفت روزه دارند بنابراین اگر $a \equiv b$ آنگاه a - امین و b - امین روز سال یکسان هستند اگر اول مهر x - امین و ۷ اسفند y - امین روز سال باشند داریم:

$$x = 6 \times 31 + 1 \equiv 5$$

$$y = 6 \times 31 + 5 \times 30 + 7 \equiv 7$$

بنابراین x - امین روز سال مانند ۵ - امین روز سال و y - امین روز سال همانند هفتمین روز سال است. چون x - امین روز سال یکشنبه است پس پنجمین روز سال نیز یکشنبه است پس هفتمین روز سال سه‌شنبه می‌باشد در نتیجه ۷ اسفند هم سه‌شنبه است.

(۶۲)

$$(a+b)^n - (a^n + b^n) = \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\rightarrow ab|(a+b)^n - (a^n + b^n) \rightarrow (a+b)^n \equiv a^n + b^n$$

(۶۳) طبق فرض می‌توان نوشت $a = mq + r$ و $b = mq' + r$ داریم:

$$a - b = mq + r - (mq' + r) = mq - mq' = m(q - q') = mk$$

بنابراین $a - b \equiv 0 \pmod{m}$ در نتیجه $a \equiv b$.

(۶۴) با توجه به فرض $(m, n) = d$ بنابراین $d|m$ و $d|n$:

$$a \equiv b \xrightarrow{d|m} a \equiv b \quad (I)$$

$$b \equiv c \xrightarrow{d|n} b \equiv c \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} \begin{cases} a \equiv b \\ b \equiv c \end{cases} \rightarrow a \equiv c$$

$$a \equiv b \rightarrow m|a - b$$

(۶۵)


$$\left. \begin{array}{l} m|a-b \\ n|m \end{array} \right\} \rightarrow n|a-b \rightarrow a \equiv_n b$$

۶۶ طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{aligned} a \stackrel{m}{\equiv} b &\rightarrow m|a-b \rightarrow a-b = mk \rightarrow a = b + mk \\ &\rightarrow (a, m) = (b + mk, m) = (b, m) \end{aligned}$$

۶۷ طبق فرض مسئله داریم:

$$a \stackrel{m}{\equiv} b \rightarrow m|a - b \rightarrow km|k(a - b) \rightarrow km|ka - kb \rightarrow ka \stackrel{km}{\equiv} kb$$

۶۸ فرض کنیم ۱۲ بهمن x -امین و ۳۱ مردادماه y -امین روز سال باشند در این صورت، داریم:

$$x = 6 \times 31 + 4 \times 30 + 12 \overset{y}{=} 3$$

$$y = \mathfrak{r} \times \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_1 \stackrel{\mathfrak{y}}{\equiv} 1$$

حال چون x - امین روز سال جمعه است پس سومین روز سال نیز جمعه می‌باشد پس اولین روز سال چهارشنبه است در نتیجه ۳۱ مردادماه نیز چهارشنبه است.

$$139\lambda \equiv 1 + 3 + 9 + \lambda \equiv 3$$

بنابراین $1398 \in [3]_9$.

می‌توان نوشت: $۲^{۱۱} = (۲^۵)^۲ \times ۲^{۲۳} \equiv ۹^۲ \times ۲^{۲۳} \equiv ۱۲ \times ۲^{۲۳} \equiv ۱$

$$\Rightarrow (r^{11} + r) \times q \equiv (1 + r) \times q \equiv 3$$

VI

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{M}^{\mathfrak{M}} \models \varphi^{\mathfrak{M}} \models \varphi.$$

$$\Rightarrow 2^{36} + 19 \equiv 19 \equiv 3 \Rightarrow \text{باقی ماندہ} = 3$$

VP

$$yx + \delta y = 11 \rightarrow yx \overset{\delta}{\equiv} 11 \overset{\delta}{\equiv} 11 + 10 \overset{\delta}{\equiv} 21 \xrightarrow{(\gamma, \delta)=1} x \overset{\delta}{\equiv} 3 \rightarrow x = \delta k + 3$$

$$v(\delta k + 3) + \delta y = 11 \rightarrow \delta y = 11 - v \times \delta k - 31 \rightarrow \delta y = -10 - v \times \delta k \rightarrow y = -2 - vk$$

بنابر این تمام جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $7x + 5y = 11$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} x = \delta k + \mathfrak{r} \\ y = -\mathfrak{r} - \mathfrak{v}k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

طبق فرض داریم: ۷۳

$$\mathfrak{r}a - \delta \stackrel{1_{\circ}}{=} \mathfrak{r}a - \gamma \rightarrow 1_{\circ} | (\mathfrak{r}a - \gamma) - (\mathfrak{r}a - \delta) \rightarrow 1_{\circ} | a - \mathfrak{r} \rightarrow a \stackrel{1_{\circ}}{=} \mathfrak{r} \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(I)} \mathfrak{g}a \stackrel{1_0}{\equiv} \mathfrak{r} \times \mathfrak{g} \stackrel{1_0}{\equiv} \mathfrak{l} \quad (II)$$

$$(II) \quad \longrightarrow 9a + 6 \equiv 1 + 6 \equiv 7$$

۷۴) می‌توان نوشت $۲۳ = ۱۱ + ۱۲$ بنابراین $۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} = (۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$ که با توجه به تمرین قبل $(۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$ بنابرین $۱۱ \times ۱۲ (۱۱ + ۱۲)^{۵۰} - (۱۱^{۵۰} + ۱۲^{۵۰})$.

۷۵ می‌توان نوشت:

$$V^{\mathcal{P}}x \equiv 1 \xrightarrow{V^{\mathcal{P}} \equiv \mathcal{F}} \mathcal{F}x \equiv 1 \equiv 1 + V^{\mathcal{P}} \equiv \mathcal{F} \xrightarrow{(\mathcal{F}, V^{\mathcal{P}}) = 1} x \equiv \mathcal{G}$$

بنابراین داریم: $x = 23k + 6$.

۷۶) باید همه اعداد صحیح a را بیابیم که در معادله هم‌نهشتی $۵a + ۹ \equiv ۱۱$ صدق کنند داریم:

$$\delta a + \mathfrak{q} \stackrel{11}{=} \circ \rightarrow \delta a \stackrel{11}{=} \mathfrak{r} \stackrel{11}{=} \mathfrak{r} + (\mathfrak{r} \times 11) \stackrel{11}{=} \mathfrak{r}\delta \xrightarrow{(\delta, 11)=1} a \stackrel{11}{=} \mathfrak{y} \rightarrow a = 11k + \mathfrak{y}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

۷۷) $x - 2 \in [6]_{13}$ معادل این است که $x - 2 \equiv 6^{13}$ یا $x \equiv 8^{13}$ می‌توان نوشت:

$$\forall x \equiv \lambda \equiv \lambda + 1 \equiv \nu \xrightarrow{(\nu, 1) = 1} x \equiv \nu \rightarrow x = 1k + \nu$$

 $\forall \lambda$

الف با توجه به اینکه $5 \equiv 423$ و $2 \equiv 79$ می‌توان نوشت:

$$123x \equiv 79 \rightarrow 5x \equiv 2 \equiv 2 + 3 \times 11 \equiv 35 \xrightarrow{(\delta, 11)=1} x \equiv 7 \rightarrow x = 11k + 7$$

بنابراین جواب عمومی معادله هم‌نهشتی $۴۲۳x \equiv ۷۹ \pmod{۱۱}$ به صورت $x = ۱۱k + ۷$ است.

$$\lambda x \equiv 2_0 \equiv 2_0 + 12 \times 3 \equiv 56 \xrightarrow{(\lambda, 12)=4} x \equiv 7 \equiv 1 \rightarrow x = 3k + 1$$



پ

$$51x \equiv 11 \pmod{51} \xrightarrow{51 \equiv 3} 3x \equiv 5 \pmod{51}$$

این معادله جواب ندارد زیرا $(3, 6) = 3$ ولی $3 \nmid 5$.

۷۹

۱۲ بهمن سانشنبه است $\Rightarrow 29 + 30 + 30 + 12 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow$ شنبه = اول مهر

الف

$$8x \equiv 20 \pmod{12} \xrightarrow{\div 4} 2x \equiv 5 \pmod{3} \Rightarrow 2x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 1$$

۸۰ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله خطی $2000x + 5000y = 29000$ را بیابیم:

$$2000x + 5000y = 29000 \rightarrow 2x + 5y = 29 \rightarrow 2x \equiv 29 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{(2,5)=1} x \equiv 17 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 2$$

$$2(5k + 2) + 5y = 29 \Rightarrow 5y = 29 - 2 \times 5k - 4 \rightarrow y = 5 - 2k$$

بنابراین تمام جواب‌های معادله سیاله $2000x + 5000y = 29000$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = 5 - 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله مفروض به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 5k + 2 \geq 0 \rightarrow k \geq 0 \\ y \geq 0 \rightarrow 5 - 2k \geq 0 \rightarrow k \leq 2 \end{cases}$$

بنابراین به ازای $0 \leq k \leq 2$ جواب صحیح برای معادله به دست می‌آید پس به ۳ طریق می‌توان این کار را انجام داد.۸۱ می‌دانیم به ازای $n! \mid 10^n$ ، $n > 4$ بنابرین داریم:

$$\forall n \geq 5, \quad n \in \mathbb{N} \quad n! \equiv 0$$

$$\Rightarrow 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 500! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \dots + 0 \equiv 3 \pmod{5}$$

 $(n \geq 5 \text{ و } n \in \mathbb{N})$ بنابرین رقم یکان A برابر ۳ می‌باشد.۸۲ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله خطی $3x + 5y = 23$ را بیابیم:

$$3x + 5y = 23 \rightarrow 3x \equiv 23 \pmod{5} \xrightarrow{(3,5)=1} x \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 1$$

$$3(5k + 1) + 5y = 23 \rightarrow 5y = 23 - 3 \times 5k - 3 \rightarrow y = 4 - 3k$$

بنابرین جواب‌های معادله سیاله $3x + 5y = 23$ به فرم زیر هستند:

$$\begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 4 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

برای یافتن جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 5k + 1 \geq 0 \rightarrow k \geq 0 \\ y = 4 - 3k \geq 0 \rightarrow k \leq 1 \end{cases}$$

بنابرین فقط به ازای $k = 0$ و $k = 1$ معادله جواب صحیح و نامنفی دارد پس به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد.

۸۳ می‌توان نوشت:

$$14x + 11y = 56 \rightarrow 14x \equiv 56 \pmod{11} \xrightarrow{14 \equiv 3} 3x \equiv 56 - 55 \pmod{11} \rightarrow 3x \equiv 1 \pmod{11} \xrightarrow{(3,11)=1} x \equiv 4 \pmod{11}$$

بنابرین هر ax که در معادله مذکور صدق کند در تقسیم بر ۱۱ باقیمانده ۴ می‌آورد.۸۴ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله خطی $7x + 9y = 73$ را به دست آوریم:

$$7x \equiv 73 \pmod{9} \xrightarrow{7 \equiv -2} -2x \equiv 73 - 72 \pmod{9} \xrightarrow{(2,9)=1} x \equiv 4 \pmod{9} \rightarrow x = 9k + 4$$

$$7(9k + 4) + 9y = 73 \rightarrow 9y = 73 - 7 \times 9k - 28 \rightarrow y = 5 - 7k$$

بنابرین صورت کلی جواب معادله سیاله $7x + 9y = 73$ به فرم زیر است:

$$\begin{cases} x = 9k + 4 \\ y = 5 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

حال برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 9k + 4 \geq 0 \rightarrow k \geq 0 \\ 5 - 7k \geq 0 \rightarrow k \leq 0 \end{cases}$$



بنابراین تنها به ازای $k = 0$ جواب صحیح و نامنفی برای معادله به دست می آید بنابراین این شخص فقط به یک طریق توانسته این امتیاز را به دست آورد.

۸۵) باید تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله سیاله خطی $x + y = 9$ را بیابیم. صورت کلی جواب این معادله در مجموعه اعداد صحیح عبارت است از:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 9 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

چون باید جوابهای صحیح و نامنفی را بیابیم بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ 9 - k \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq 9 \end{cases} \rightarrow 0 \leq k \leq 9$$

پس به ازای ۱۰ مقدار از k جوابهای صحیح و نامنفی برای معادله سیاله به دست می آید بنابراین این کار را به ۱۰ طریق میتوان انجام داد.

۸۶) لازم است $7n + 13$ یعنی $(54, 21)$ باشد:

$$7n + 13 \equiv 0 \rightarrow 7n \equiv -13 \equiv 2 \xrightarrow{7=1} n \equiv 2$$

بنابراین n باید به صورت $3k + 2$ باشد.

۸۷)

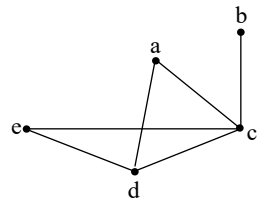
$$5x + 2y = 18 \Rightarrow 5x \equiv 18 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = 2k$$

$$\Rightarrow 5(2k) + 2y = 18 \Rightarrow 2y = 18 - 10k \Rightarrow y = -5k + 9$$

$$p = 5, q = 6, \delta = 1, \Delta = 4$$

$$p + q + \delta + \Delta = 16$$

$$\left. \begin{aligned} N_G(a) = \{d, c\} \rightarrow |N_G(a)| = 2 \\ N_G[e] = \{e, c, d\} \rightarrow |N_G[e]| = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2 + 3 = 5$$



۸۹)

تیم a با تیمهای d و c بازی نکرده است.

a : ۶ امتیاز

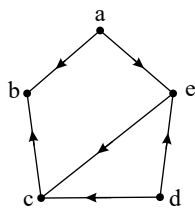
b : ۰ امتیاز

c : ۳ امتیاز

d : ۶ امتیاز

e : ۳ امتیاز

۹۰)



$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{ad, da, ab, db, bc\}$$

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2} \xrightarrow{q=2p} 2p \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 4 \leq p-1 \Rightarrow p \geq 5$$

حداقل ۵ رأس

۹۲) الف - ساده نیست، زیرا بین ۲ رأس v_1 و v_7 بیش از یک یال رسم شده است.

ب - ساده نیست، زیرا بین ۲ رأس v_1 و v_7 بیش از یک یال رسم شده است.

ج - ساده نیست، زیرا در رأس v_1 طوقه وجود دارد.

د - ساده نیست، زیرا بین ۲ رأس v_7 و v_3 بیش از یک یال رسم شده است.

ه - گراف ساده است.

۹۳)

$$q = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \quad \text{الف}$$

ب طوقه

پ رأسهای

ت K

۹۴)

$$\binom{5}{2} = 10 \rightarrow \text{تعداد کل گرافها} = 2^{10} = 1024$$

$$\text{تعداد گرافها} = \binom{10}{5} = 252$$



ب -

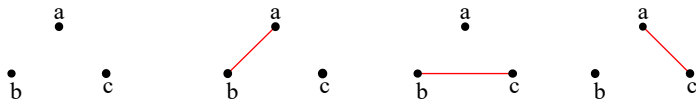
$$7 - 3 = 4, 10 - 3 = 7 \rightarrow \text{تعداد گرافها} = \binom{7}{4} = 35$$

۹۵

(الف)



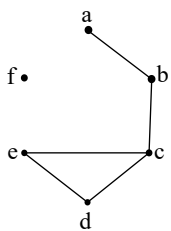
(ب)



۹۶ حداکثر تعداد یال‌ها عبارتند از: $\binom{4}{2} = 6$ پس در کل $2^6 = 64$ گراف قابل رسم است.

$$\text{الف) } ab \in E \Rightarrow \text{تعداد گرافها} = 2^{6-1} = 32$$

$$\text{ب) تعداد گرافها} = 2^{6-3} = 2^3 = 8$$



۹۷

رأس‌های e, b مجاور نیستند، زیرا بین این دو رأس یالی وجود ندارد.
دو یال bc و cd مجاورند، زیرا هر دوی آنها به رأس c متصل هستند.

۹۸

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{ab, ac, ae, bc, be, bd, cd, cf, de\}$$

$$\deg a = 3$$

$$\deg b = 4$$

$$\deg c = 4 \quad \Delta = 4, \delta = 1$$

$$\deg d = 3$$

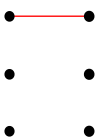
$$\deg e = 3$$

$$\deg f = 1$$

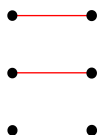
$$N_G(a) = \{b, c, e\}, \quad N_G(b) = \{a, c, d, e\}$$

$$N_G(c) = \{a, b, d, f\}, \quad N_G(d) = \{b, c, e\}$$

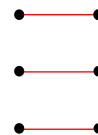
$$N_G(e) = \{a, b, d\}, \quad N_G(f) = \{c\}$$



(۱)



(۲)



(۳)

۳۰

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

۹۹

۱۰۰



$$\begin{aligned} \delta &\leq \deg v_1 \leq \Delta \\ \delta &\leq \deg v_p \leq \Delta \\ &\vdots \\ \delta &\leq \deg v_p \leq \Delta \end{aligned}$$

$$\underbrace{\delta + \dots + \delta}_{p \text{ بار}} \leq \sum_{i=1}^p \deg v_i \leq \underbrace{\Delta + \dots + \Delta}_{p \text{ بار}}$$

$$\Rightarrow p\delta \leq pq \leq p\Delta \xrightarrow{\div p} \delta \leq \frac{pq}{p} \leq \Delta$$

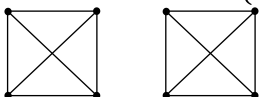
$$rp = pq \Rightarrow 15r = 2q$$

سمت راست تساوی یعنی $2q$ زوج است، پس $15r$ باید زوج باشد، پس r زوج است.
از طرفی $r < 15$ پس:

$$r = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$$

پس ۸ مقدار برای r وجود دارد.

$$rp = pq \Rightarrow 3p = 2q \quad \begin{cases} 3p = 2q \\ q + 4 = 2p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 8 \\ q = 12 \end{cases}$$



$$q = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 55 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p(p-1) = 110 = 11 \times 10 \Rightarrow p = 11$$

گراف کامل مرتبه ۱۱ است، پس $10 = (11 - 1)$ منتظم است. یعنی درجه هر رأس ۱۰ است.

تعداد یال‌های این گراف $q = 7$ می‌باشد.

در گراف K_6 داریم:

$$q = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

پس کافی است $8 = 15 - 7$ یال به این گراف اضافه کنیم.

$$K_{p-1}: q = \frac{p(p-1)}{2}, \quad K_{p-3}: q = \frac{(p-3)(p-4)}{2}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{(p-3)(p-4)}{2} + 15 \xrightarrow{\times 2} p^2 - p = p^2 - 7p + 12 + 30 \Rightarrow 6p = 42 \Rightarrow p = 7$$

$$q = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

تعداد یال‌های این گراف را با تعداد یال‌های K_4 مقایسه می‌کنیم.

$$q = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

یعنی از K_4 باید یک یال حذف کنیم، پس از درجه ۲ رأس، یک واحد کم می‌شود.

$$9 - 2 = 7$$

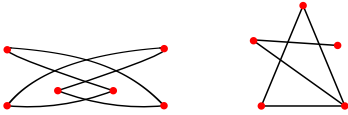
$$\deg v_1 = 5, \deg v_2 = 4, \dots, \deg v_8 = 2$$

$$\sum_{i=1}^8 \deg v_i = 2q \rightarrow 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q \Rightarrow q = 12$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 12 + q(\bar{G}) = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 16$$



۱۱۱



۱۱۲

$$\sum_{i=1}^6 \deg_G V_i + \sum_{i=1}^6 \deg_{\bar{G}} V_i = p(p-1) \Rightarrow 14 + x = 6 \times 5 \Rightarrow x = 16$$

۱۱۳

مسیر به طول ۱ $u, v \rightarrow 1$

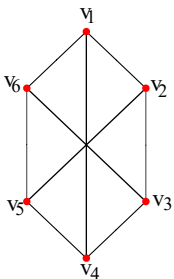
مسیر به طول ۲ $u, \boxed{3}, v \rightarrow u \text{ --- } 3 \text{ --- } v \rightarrow 3$

مسیر به طول ۳ $u, \boxed{3}, \boxed{2}, v \rightarrow u \text{ --- } 3 \text{ --- } 2 \text{ --- } v \rightarrow 6$

مسیر به طول ۴ $u, \boxed{3}, \boxed{2}, \boxed{1}, v \rightarrow u \text{ --- } 3 \text{ --- } 2 \text{ --- } 1 \text{ --- } v \rightarrow \frac{6}{16}$

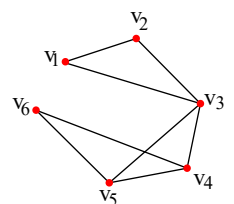
۱۱۴ مسیر به طول ۱ a, b مسیر به طول ۳ $a, c, d, b - a, e, d, b$ مسیر به طول ۴ $a, c, e, d, b - a, e, c, d, b$ ۱۱۵ مسیر به طول ۲ v_1, v_5, v_6 مسیر به طول ۵ $v_1, v_6, v_5, v_2, v_3, v_4$

۱۱۶

 v_1, v_6, v_5, v_1 v_6, v_5, v_4, v_6 v_6, v_6, v_5, v_6 v_6, v_6, v_5, v_5, v_6 a, c, b, a d, f, e, d c, d, e, b, c c, d, f, e, b, c a, c, d, f, e, b, a a, c, d, e, b, a

۱۱۷

گراف را رسم می‌کنیم:



۱۱۸

۱۱۹ دور به طول ۵ a, b, c, d, e, a دور به طول ۶ a, b, c, d, i, f, a دور به طول ۸ $a, b, c, d, i, g, j, e, a$ دور به طول ۹ $a, b, c, d, e, j, g, i, f, a$

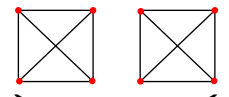
۱۲۰

$$q \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q \leq \frac{20 \times 19}{2} \Rightarrow q \leq 190 \Rightarrow \max(q) = 190$$

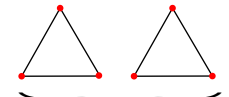


$$p - 1 \leq q \Rightarrow q \geq 19 \Rightarrow \min(q) = 19$$

۱۲۱ خیر، به عنوان مثال، می توان این گونه رسم کرد:



3 - منتظم مرتبه 8



2 - منتظم مرتبه 6

پس همواره همبند نیستند.

۱۲۲

$$A = \{e, d\}$$

$$B = \{b, f\}$$

$$C = \{c, e\}$$

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{f, g, h, i, j\}$$

$$C = \{f, g, h, e\}$$

۱۲۳

۱۲۴

گراف معادل این منطقه این گونه است:

اگر خودپدازها را در رئوس b, f نصب کنیم به هدف رسیده ایم. توجه شود که مجموعه $A = \{b, f\}$ یک مجموعه احاطه گر است.

۱۲۵

طبق شکل، حداقل ۲ وزیر لازم است.

۱۲۶

۱۲۷

مجموعه های احاطه گر مینیمم برای این گراف ۲ عضو دارند. یعنی:

$$A = \{a, c, f, h, d\}$$

احاطه گر

$$B = \{f, e\}$$

احاطه گر مینیمم

$$C = \{a, e, g\}$$

احاطه گر مینیمال

$$\gamma(G) = 2$$

اگر رأس a را ملاک قرار دهیم، این رأس با هر رأس دیگر به جز e و b یک مجموعه احاطه گر با ۲ عضو می سازد.

$$\{a, c\}, \{a, d\} \rightarrow \text{حالت ۲}$$

اگر رأس e را ملاک قرار دهیم:

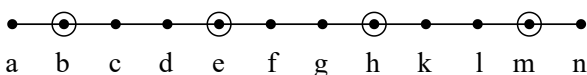
$$\{e, c\}, \{e, d\}, \{e, b\} \rightarrow \text{حالت ۳}$$

اگر رأس b را ملاک قرار دهیم:

$$\{b, d\}, \{b, c\} \rightarrow \text{حالت ۲}$$

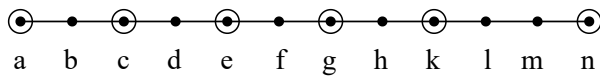
$$2 + 3 + 3 = 8$$

۱۲۸ (الف)



$\{b, e, h, m\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم است. $\gamma(G) = 4$

(ب)



$\{a, c, e, g, k, n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

۱۲۹

$$A = \{b, f\}$$

A یک مجموعه احاطه‌گر است که کمترین عضو را دارد، زیرا مجموعه تکرآسی را نمی‌توان برای این گراف به‌عنوان یک مجموعه احاطه‌گر در نظر گرفت. یعنی:

$$\gamma(G) = 2$$

۱۳۰

$$n = 10, \Delta = 3$$

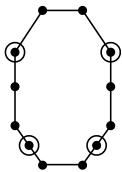
$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 3 \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

از طرفی مجموعه $A = \{b, e, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس:

$$\gamma(G) = 3$$

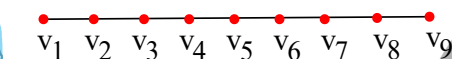
عدد احاطه‌گری حداقل برابر ۴ است، زیرا $\left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = 4$. پس کافی است گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۲ را رسم کنیم که عدد احاطه‌گری آن ۴ باشد.

۱۳۱



در گراف P_9 داریم:

۱۳۲



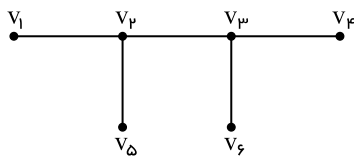
$$n = 9, \Delta = 2$$

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{3} \right\rceil = 3$$

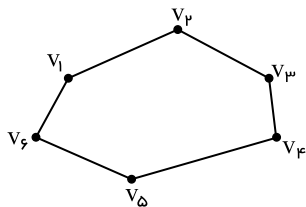
از طرفی مجموعه $\{v_1, v_3, v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

الف) مجموعه $\{v_1, v_3\}$ یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ است.

۱۳۳

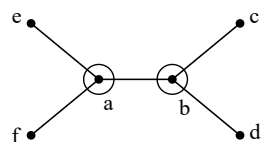
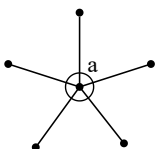


ب) مجموعه‌های $\{v_1, v_3\}$ و $\{v_1, v_δ\}$ دو مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ هستند.



الف) مجموعه $\{a\}$ مجموعه احاطه‌گر است: $\gamma(G) = 1$

۱۳۴



مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

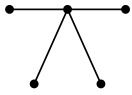
ج.



مجموعه $\{a, b\}$ احاطه‌گر است. $\gamma(G) = 2$ زیرا رأس‌های e و f درجه یک هستند و باید حتماً یکی از رأس‌های f و e و a در مجموعه احاطه‌گر باشند. رئوس c و d نیز درجه یک هستند. باید حتماً یکی از رئوس b و d و c در مجموعه احاطه‌گر باشد.

(پ) هر گرافی با n رأس رسم کنیم، عدد احاطه‌گری کوچک‌تر یا مساوی n خواهد بود. در گراف تهی عدد احاطه‌گری برابر n است. اگر بخواهیم عدد احاطه‌گری k باشد، کافی است $k - 1$ رأس را به صورت منفرد در نظر بگیریم و $n - (k - 1)$ رأس باقی‌مانده را به صورت گراف ستاره‌ای رسم کنیم. در این صورت، عدد احاطه‌گری k خواهد بود.

۱۳۵ می‌دانیم در هر گراف n رأسی $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ می‌باشد. در گراف k -متنظم داریم: $\Delta = k$ ، پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{k + 1} \right\rceil$.



۱۳۶ اگر در گراف G با n رأس، $\gamma(G) = 1$ باشد، یعنی گراف رأسی دارد که با تمام رئوس گراف با یک یال متصل است، پس $\Delta(G) = n - 1$.

کمترین تعداد یال را در گراف مقابل داریم، یعنی $q = n - 1$ و بیشترین تعداد یال مربوط به گراف کامل است $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

۱۳۷

$n = 8$ ، $\Delta = 3$

$\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$

واضح است که این گراف با هیچ مجموعه ۲ عضوی احاطه نمی‌شود.

۱۳۸ اگر $\gamma(G) = 1$ ، یعنی حداقل یک رأس این گراف به تمام رأس‌های دیگر متصل است، پس این گراف حداقل $p - 1$ یال دارد. از طرفی می‌تواند کامل باشد، یعنی

حداکثر $\frac{p(p-1)}{2}$ یال دارد.

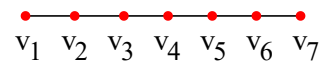
$q_{min} = 5 - 1 = 4$

$q_{max} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

۱۳۹ الف) مجموعه $A = \{f, d, l\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف است، پس:

$\gamma(G) = 3$

ب)



مجموعه $A = \{v_2, v_5, v_7\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است، پس:

$\gamma(G) = 3$

۱۴۰

الف

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$

از طرفی مجموعه $\{e, c\}$ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) \leq 2$ ، در نتیجه $\gamma(G) = 2$ است.

ب

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{5} \right\rceil = 2$ از طرفی $\gamma(G) \leq 2$ پس $\gamma(G) = 2$ مجموعه احاطه‌گر است پس $\gamma(G) = 2$

پ

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{6} \right\rceil = 2$

در گراف هیچ دو عضوی وجود ندارد که گراف را پوشش دهد، یعنی هیچ مجموعه احاطه‌گر دو عضوی وجود ندارد.

از طرفی مجموعه $\{f, g, i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = 3$.

ت

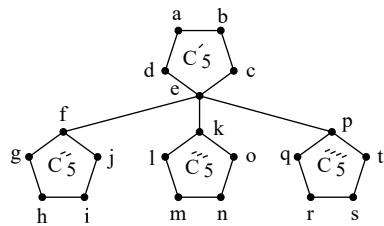
$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{19}{6} \right\rceil = 4$

در گراف هیچ مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی وجود ندارد، از طرفی مجموعه $\{f, h, j, l, n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = 5$.

ث

گراف مورد نظر مطابق شکل از ۴ گراف C_8 تشکیل شده است که در هر کدام از آنها به حداقل دو رأس برای مجموعه احاطه‌گر نیاز داریم.

بنابراین، مجموعه‌ای با هشت عضو مانند مجموعه $\{a, c, g, i, l, o, q, t\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف بوده و $\gamma(G) = 8$ است.



۱۴۱ برای اینکه تاس در نهمین پرتاب برای اولین بار ۶ بیاید، باید در ۸ پرتاب اول، ۶ نیاید. یعنی در هر کدام از ۸ پرتاب اول، ۵ حالت قابل قبول وجود دارد (همه اعداد غیر از ۶). بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{\text{بار ۸}} = 5^8$$

۱۴۲ این شخص برای پاسخ غلط به هر سؤال، ۳ انتخاب دارد. پس برای پاسخ به همه سؤالات، تعداد انتخابها برابر است با:

$$\underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{\text{تا } 20} = 3^{20}$$

۱۴۳ این شخص برای پاسخ به هر سؤال ۴ انتخاب دارد. پس برای پاسخ به همه سؤالات، تعداد انتخابها برابر است با:

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{\text{تا } 20} = 4^{20}$$

۱۴۴ در رمز محدودیتی برای رقم سمت چپ وجود ندارد و میتواند صفر باشد. مثلاً رمز ۰۳۱۲۵ قابل قبول است و ۵ رقمی است. پس با توجه به غیرمجاز بودن رقم تکراری، تعداد حالتها برابر است با:

$$\boxed{\text{حالت ۱۰}} \boxed{\text{حالت ۹}} \boxed{\text{حالت ۸}} \boxed{\text{حالت ۷}} \boxed{\text{حالت ۶}} \rightarrow \text{حالت مطلوب} \rightarrow 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{10!}{5!}$$

۱۴۵ ابتدا رقم سمت چپ را انتخاب میکنیم. برای این کار ۹ حالت وجود دارد (همه ارقام بهجز صفر). سپس برای رقمهای بعدی بهترتیب: ۹ حالت، ۸ حالت، ۷ حالت و ۶ حالت وجود دارد. پس در نهایت تعداد حالتها برابر است با:

$$\boxed{\text{حالت ۹}} \boxed{\text{حالت ۹}} \boxed{\text{حالت ۸}} \boxed{\text{حالت ۷}} \boxed{\text{حالت ۶}} \rightarrow \text{حالت مطلوب} \rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27216$$

۱۴۶ تعداد مسیرها بهصورت ACD برابر است با:

تعداد مسیرها بهصورت ABD برابر است با:

تعداد مسیرها بهصورت $ABCD$ برابر است با:

تعداد مسیرها بهصورت $ACBD$ برابر است با:

پس تعداد کل مسیرها برابر است با:

۱۴۷

$$\frac{n!(n-3)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{3}{2} = \frac{n(n-1)! \times (n-3)!}{(n-2)(n-3)! \times (n-1)!} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{n}{n-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2n - 6 = 2n \Rightarrow 2n - 2n = 6 \Rightarrow n = 6$$

۱۴۸ ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{(2n+2)!}{(2n-1)!} = 1320 \Rightarrow \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!} = 1320$$

$$\Rightarrow (2n+2)(2n+1)(2n) = 1320 = 12 \times 11 \times 10 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

نکته: می‌دانیم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

پس به‌ازای $n = 5$ داریم:

$$C(n+1, n-3) \stackrel{n=5}{=} C(6, 2) = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

۱۴۹ می‌دانیم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{و} \quad P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بنابراین:

$$\frac{P(n, n-2)}{C(n, n-3)} = \frac{\frac{n!}{2!}}{\frac{n!}{3!}} = \frac{(n-3)!3!}{2!} = 3((n-3)!)$$



پس معادله داده شده به صورت مقابل حل می شود:

$$3((n-3)!) = 3(7!) \Rightarrow n-3=7 \Rightarrow n=10$$

۱۵۰

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{3C(n, n-3)}{P(n, n-2)} = \frac{\frac{3n!}{(n-3)!3!}}{\frac{n!}{2!}} = \frac{3 \times 2!}{(n-3)!3!} = \frac{1}{(n-3)!}$$

۱۵۱ الف) جایگشت ۹ کتاب برابر ۹! است.

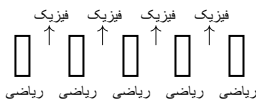
ب) جایگشت ۶ شیء مقابل برابر با ۶! است. جایگشت کتابهای فیزیک کنار هم ۴! است.

پس جواب نهایی برابر است با: ۶!۴!



پ) کتابها باید یک در میان قرار بگیرند که با توجه به شکل مقابل، کتابهای ریاضی ۵! جایگشت و کتابهای فیزیک ۴! جایگشت دارند.

پس جواب نهایی برابر است با: ۵!۴!



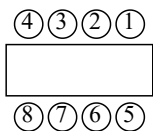
ت) جایگشت ۷ شیء مقابل ۷! است و جایگشت ۲ کتاب فیزیک و یک کتاب ریاضی خاص کنار هم، ۳! است.

پس جواب نهایی برابر است با: ۷!۳!



۱۵۲ ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم، به چند طریق می توانند در یک صف بایستند، به گونه ای که دانش آموزان پایه دوازدهم، کنار هم باشند؟

۱۵۳ برای جایگاه شماره ۱، هشت انتخاب وجود دارد. سپس برای جایگاه شماره ۵، یک انتخاب وجود دارد. (چون باید ۱ و ۵ برادر باشند). به همین ترتیب برای شماره ۲، شش انتخاب، برای شماره ۶، یک انتخاب، برای شماره ۳، چهار انتخاب، برای شماره ۷، یک انتخاب، برای شماره ۴، دو انتخاب و برای شماره ۸، یک انتخاب وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:



$$8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$$

۱۵۴ شمارش تعداد حالات نامطلوب یعنی حالتی که علی وسط نشسته باشد، ساده تر است. می دانیم که:

تعداد کل حالات = تعداد حالتی که علی وسط نباشد + تعداد حالتی که علی وسط باشد

فرض کنیم علی شخص وسط باشد، برای ۶ نفر دیگر به تعداد ۶! جایگشت وجود دارد. از طرفی تعداد کل حالات برابر با جایگشت همه ۷ نفر یعنی ۷! است.

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$7! - 6! = 6!(7-1) = 6 \times 6! = 6 \times 720 = 4320$$

۱۵۵ حروف t و g را به صورت tg در قالب یک شیء، در نظر می گیریم و جایگشت ۴ شیء، مقابل را به دست می آوریم که برابر با ۴! است.



دقت شود که g و t نمی توانند در کنار هم جایگشت های مختلف داشته باشند و حتماً باید به صورت tg ظاهر شوند.

۱۵۶ حروف t و g را به صورت یک شیء، در نظر می گیریم و جایگشت ۴ شیء، مقابل را به دست می آوریم که برابر با ۴! است.



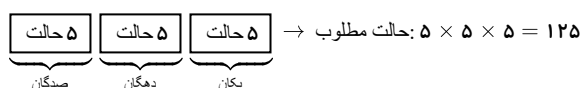
از طرفی t و g در کنار هم به ۲! حالت می توانند جایگشت داشته باشند. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

۱۵۷ حاصل ضرب رقم ها در صورتی فرد است که همه رقم ها فرد باشد. چون عدد سه رقمی است، پس برای هر سه رقم، ۵ انتخاب وجود دارد

(۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹).

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:



$$5 \times 5 \times 5 = 125 \rightarrow \text{حالت مطلوب}$$

۱۵۸ ابتدا فرض می کنیم علی نشسته است. برای این کار فرقی ندارد که کجا بنشیند و همه حالت ها مشابه اند. حالا برای جایگاه حسین، فقط ۲ حالت وجود دارد (سمت راست یا سمت چپ علی). سپس ۴ نفر دیگر به ۴! حالت، می توانند در جایگاه های باقی مانده جایگشت داشته باشند. بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$2 \times 4! = 48$$



۱۵۹ جایگشت ۹ شیء برابر با ۹! است. اما چون ۳ شیء تکراری (a) و ۲ شیء تکراری (c) و ۳ شیء تکراری (d) وجود دارد، طبق قضیه جایگشت با تکرار، جواب برابر است با:

$$\frac{9!}{3!2!3!}$$

۱۶۰ جایگشت ۶ شیء برابر با ۶! است. اما چون سه عدد تکراری ۷ و دو عدد تکراری ۵ وجود دارد، جواب برابر است با:

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

۱۶۱

$$\frac{8!}{3! \times 2!} = 280 \text{ یا } \binom{8}{3} \binom{5}{4} \binom{1}{1} = 280$$

۱۶۲ ابتدا ۲ نفر را برای اتاق ۲ نفری انتخاب می‌کنیم. تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{7}{2} = 21$$

سپس ۲ نفر دیگر را از بین ۵ نفر باقی‌مانده، برای اتاق ۲ نفری دیگر انتخاب می‌کنیم. تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{5}{2} = 10$$

حالا ۳ نفر باقی می‌مانند که به یک حالت می‌توانند در اتاق ۳ نفره قرار بگیرند.
پس جواب برابر است با:

$$\binom{7}{2} \binom{5}{2} = 21 \times 10 = 210$$

۱۶۳ تعداد انتخاب دو رقم از A:

$$\binom{4}{2} = 6$$

تعداد انتخاب سه رقم از B:

$$\binom{5}{3} = 10$$

جایگشت ۵ رقم:

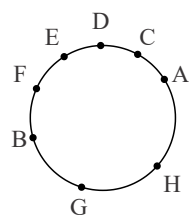
$$5! = 120$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$6 \times 10 \times 120 = 7200$$

۱۶۴ برای اینکه سکه در پنجمین پرتاب برای دومین بار پشت بیاید، باید در ۴ پرتاب اول یک بار پشت و ۳ بار رو بیاید.
تعداد حالات اینکه در ۴ پرتاب، یک بار پشت بیاید برابر است با:

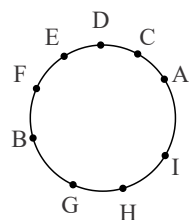
$$\binom{4}{1} = 4$$



۱۶۵ طبق شکل زیر، باید ۲ نقطه از بین نقاط F, E, D, C انتخاب کنیم که برای این کار، $\binom{4}{2}$ انتخاب داریم. یا باید ۲ نقطه از بین نقاط H, G انتخاب کنیم که برای این کار $\binom{2}{2}$ انتخاب داریم.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 6 + 1 = 7$$



۱۶۶ طبق شکل زیر باید یک نقطه از بین نقاط F, E, D, C انتخاب کنیم که برای این کار، ۴ انتخاب داریم و یک نقطه از بین نقاط I, H, G انتخاب کنیم که برای این کار، ۳ انتخاب داریم.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 3 = 12$$

۱۶۷ این ۸ جفت کفش شامل ۸ لنگه راست است. ما باید ۳ لنگه از این ۸ لنگه راست انتخاب کنیم. تعداد حالات برابر است با:



$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6} = 56$$

۱۶۸ می‌خواهیم ۳ لنگه کفش انتخاب کنیم که هر کدام برای یک جفت کفش متفاوتی باشد. پس ابتدا ۳ جفت کفش انتخاب می‌کنیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر با $\binom{8}{3}$ است. سپس از هر کدام از این ۳ جفت، یک لنگه انتخاب می‌کنیم که برای هر کدام ۲ حالت وجود دارد.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{8}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = 56 \times 8 = 448$$

۱۶۹ می‌خواهیم دو جفت کفش و یک لنگه کفش دیگر انتخاب کنیم. ابتدا دو جفت کفش را انتخاب می‌کنیم. برای این کار، تعداد انتخاب‌ها برابر با $\binom{8}{2}$ است. سپس از بین

۶ جفت باقی‌مانده، باید یک لنگه انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر با $\binom{12}{1}$ است. پس نهایتاً تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{8}{2} \binom{12}{1} = 28 \times 12 = 336$$

۱۷۰ کافی است جای علامت سؤال‌ها را در مجموعه $\{?, ?, ?\}$ با استفاده از عضوهای مجموعه $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ پر کنیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

۱۷۱ کافی است جای علامت سؤال‌ها را در مجموعه $\{7, ?, ?\}$ با استفاده از عضوهای مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ پر کنیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

۱۷۲ کافی است ۴ عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ انتخاب کنیم و به‌جای علامت سؤال در مجموعه $\{8, ?, ?, ?\}$ قرار دهیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

۱۷۳ کافی است ۳ عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ انتخاب کنیم و به‌جای علامت سؤال در مجموعه $\{8, 9, ?, ?\}$ قرار دهیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

۱۷۴ جواب برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ است که برابر است با:

$$\binom{3+5-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

۱۷۵ تعداد جواب‌های مسئله برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ است که برابر است با:

$$\binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

۱۷۶ باید تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ را بیابیم. در هر قسمت شرط خاصی بیان شده است.

$$\binom{5+11-1}{5-1} = \binom{15}{4}$$

الف) این قسمت شرط جدیدی ندارد. پس جواب برابر است با:

ب) اینجا شرط $x_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, 5$ برقرار است. با تغییر متغیر $x_i = y_i + 1$ کافی است تعداد جواب صحیح و نامنفی معادله زیر را بیابیم:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 11 - 5 = 6$$

$$\binom{5+6-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

جواب برابر است با:

$$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 11 - 6 = 5$$

پ) با تغییر متغیر $x_2 = y_2 + 2$ و $x_4 = y_4 + 4$ داریم:

$$\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

پس جواب برابر است با:

$$x_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 11 - 5 = 6$$

ت) با تغییر متغیر $x_4 = y_4 + 5$ و با فرض $x_3 = 0$ داریم:

$$\binom{4+6-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

پس جواب برابر است با:

۱۷۷ نکته: به‌ازای عبارات تعریف‌شده تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

اما در این سؤال به جای شرط نامنفی بودن ($x_i \geq 0$)، برای x_1, x_4, x_8 شرط $x_1 \geq -3$, $x_4 \geq 4$, $x_8 \geq 1$ داده شده است.

با تغییر متغیر معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 + \underbrace{(x_8 + 3)}_{y_8 \geq 0} + \underbrace{(x_4 - 4)}_{y_4 \geq 0} + \underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1 \geq 0} = 5 + 3 - 4 - 1 = 3$$



حالا کافی است، ببینیم معادلهٔ $x_1 + x_2 + \dots + x_7 + y_8 + y_9 + y_{10} = 3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد که طبق نکتهٔ گفته شده برابر است با:

$$\binom{3+10-1}{10-1} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = 220.$$

نکته: به ازای عبارات تعریف شده، جواب های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$. (۱۷۸)

اما در این سؤال به جای شرط نامنفی بودن ($x_i \geq 0$)، برای x_8, x_9, x_{10} شرط دیگری بیان شده است. با تغییر متغیر معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 + \underbrace{(x_8 - 2)}_{y_8 \geq 0} + \underbrace{(x_9 - 3)}_{y_9 \geq 0} + \underbrace{(x_{10} - 1)}_{y_{10} \geq 0} = 8 - 2 - 3 - 1 = 2$$

حالا کافی است ببینیم معادلهٔ $x_1 + x_2 + \dots + x_7 + y_8 + y_9 + y_{10} = 2$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد که طبق نکتهٔ گفته شده برابر است با:

$$\binom{2+10-1}{10-1} = \binom{11}{9} = \binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

(۱۷۹)

هدف مسئله یافتن تعداد جواب های طبیعی معادله است که برابر است با:

$$\binom{13-1}{10-1} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = 220.$$

نکته: به ازای عبارت تعریف شده، تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$. (۱۸۰)

پس به ازای $k = 10, n = 3$ جواب برابر است با:

$$\binom{3+10-1}{10-1} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = 220.$$

(۱۸۱) خیر، به عنوان مثال:

$A =$	۱	۲	۳
	۳	۱	۲
	۲	۳	۱

$\begin{matrix} 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1 \\ \hline 3 \rightarrow 2 \end{matrix}$

$A_1 =$	۳	۱	۲
	۲	۳	۱
	۱	۲	۳

با توجه به اینکه اعداد دورقمی تکراری دارد، پس A و A_1 متعامد نیستند.

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

(۱۸۲)

$$10 \times 1 = 10.$$

حداقل مقدار، زمانی است که همه درایه های قطر اصلی برابر ۱ باشند. یعنی داریم:

(۱۸۳)

$$10 \times 10 = 100.$$

حداکثر حالت، زمانی است که همه درایه های قطر اصلی برابر ۱۰ باشند. یعنی داریم:

(۱۸۴)

$$1 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

مجموع درایه های یک ردیف برابر است با:

$$10 \times 55 = 550.$$

مجموع همه ردیف ها برابر است با:

(۱۸۵)

برای مثال می توان به صورت مقابل تکمیل کرد:

۴	۲	۱	۳
۲	۳	۴	۱
۱	۴	۳	۲
۳	۱	۲	۴

(۱۸۶)



درایه سطر دوم و ستون دوم قطعاً برابر ۴ است، پس با توجه به شکل مقابل، a فقط می‌تواند ۲ باشد و در نتیجه b قطعاً برابر با ۱ است.
بنابراین داریم: $2a + b = 2(2) + 1 = 5$

	۳	۱	
۱	۴	۲	۳
	b		
	۲		۱

۱۸۷

$$A_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

درایه تکراری ندارد، A و A_1 متعامدند.

۳۳	۱۱	۲۲
۲۱	۳۲	۱۳
۱۲	۲۳	۳۱

(الف) با توجه به اینکه

$$A_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

درایه تکراری دارد، A و A_2 متعامد نیستند.

۲۳	۳۱	۱۲
۳۱	۱۲	۲۳
۱۲	۲۳	۳۱

(ب) با توجه به اینکه

(پ) ۱- خیر ۲- خیر

۱۸۸

دو مربع لاتین را مطابق شکل با یکدیگر ترکیب می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این مربع اعداد دورقمی تکراری وجود دارد. مثلاً عدد ۴۴، چهار بار تکرار شده است، پس دو مربع لاتین متعامد نیستند.

۴۴	۳۳	۲۲	۱۱
۳۱	۲۲	۱۳	۴۴
۲۳	۱۱	۴۴	۳۲
۱۲	۴۴	۳۱	۲۳

۱۸۹

کافی است مربع لاتینی مثال بزنیم که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن یکسان باشد. مانند مربع لاتین شکل مقابل:

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

در صورت ترکیب دو مربع لاتین، مربع مقابل به دست می‌آید که در آن، هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد.

۱۳	۲۲	۳۱
۲۱	۳۳	۱۲
۳۲	۱۱	۲۳

کافی است یک مربع لاتین 6×6 طراحی کنیم که سطرهای آن متناظر با جلسات و ستون‌های آن متناظر با کلاس‌ها است.

۱۹۰



C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	جلسه ۱
T_2	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	جلسه ۲
T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	جلسه ۳
T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	جلسه ۴
T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	جلسه ۵
T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	جلسه ۶

۱۹۱

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶:

$$|A| = \left\lfloor \frac{299}{6} \right\rfloor = 49$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۸:

$$|B| = \left\lfloor \frac{299}{8} \right\rfloor = 37$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ و ۸:

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{299}{24} \right\rfloor = 12$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 49 + 37 - 12 = 74$$

۱۹۲

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶:

$$|A| = \left\lfloor \frac{299}{6} \right\rfloor = 49$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۸:

$$|B| = \left\lfloor \frac{299}{8} \right\rfloor = 37$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ و ۸:

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{299}{24} \right\rfloor = 12$$

پس داریم:

$$|A| - |A \cap B| = 49 - 12 = 37$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر فقط ۶:

$$|B| - |A \cap B| = 37 - 12 = 25$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر فقط ۸:

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$37 + 25 = 62$$

۱۹۳

اگر مجموعه مردان را با A و مجموعه افراد سیاه‌پوست را با B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 30 + 25 - 3 = 52$$

خوابسته مسئله، تعداد اعضای مجموعه $\bar{A} \cap \bar{B}$ است که طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = 60 - 52 = 8$$

۱۹۴

$$A = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 4k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, \quad B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 7k\}$$



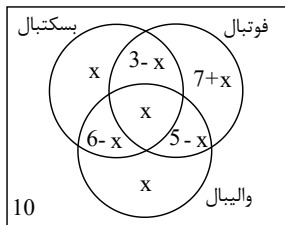
$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 28k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{200}{28} \right] = 7$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

۱۹۵ با توجه به اطلاعات سؤال نمودار مقابل را رسم می‌کنیم:

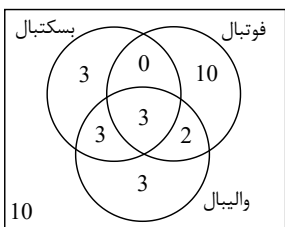
باید مجموع تعداد اعضای همه نواحی برابر با ۳۴ باشد.

$$\text{پس: } 31 + x = 34 \Rightarrow x = 3$$



پس مجدداً نمودار را رسم می‌کنیم و به سؤالات جواب می‌دهیم:

الف) ۳ ب) ۱۰ پ) ۵ ت) ۱۶



۱۹۶ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۲:

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۳:

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۳:

$$|A| = \left[\frac{90}{2} \right] = 45$$

$$|B| = \left[\frac{90}{3} \right] = 30$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{90}{6} \right] = 15$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$$

۱۹۷ برای هر عضو از A یکی از ۴ عضو B را می‌توان نسبت داد. پس تعداد کل توابع برابر است با:

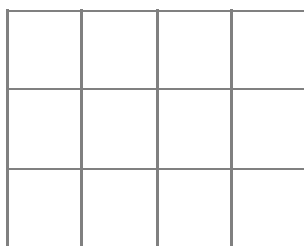
$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6 = 1024$$

طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یکی از اعضای B با بیش از یک عضو از A نسبت دارد. پس این تابع در هیچ حالتی نمی‌تواند یک‌به‌یک باشد.

۱۹۸ در بدترین حالت، همه گوی‌های زرد و مشکی و ۶ گوی سبز و ۶ گوی آبی خارج کرده‌ایم و حالا با خارج کردن یک گوی دیگر به مقصودمان می‌رسیم. پس حداقل باید ۲۳ گوی خارج کنیم.

۱۹۹

در شکل مقابل مستطیل 8×6 به مربع‌های 2×2 تقسیم شده است. قطر هر کدام از مربع‌ها برابر با $\sqrt{8}$ خواهد بود. پس برای اینکه فاصله هیچ دو نقطه‌ای بیش از $\sqrt{8}$ نشود، حداکثر ۱۲ نقطه می‌توان انتخاب کرد (یک نقطه داخل هر مربع). بنابراین با انتخاب ۱۳ نقطه، مطمئن خواهیم بود، حداقل یک جفت نقطه با فاصله کمتر از $\sqrt{8}$ داریم.



۲۰۰ وضعیت‌های مختلف برای سه عدد طبیعی به صورت زیر است:

- ۱- هر سه زوج
- ۲- هر سه فرد
- ۳- یک فرد و یک زوج
- ۴- یک زوج و دو فرد

در حالت ۱ و ۲ هر کدام از دو عدد را انتخاب کنیم، مجموع زوج است.



در حالت ۳ اگر دو زوج را انتخاب کنیم، مجموع زوج است.

در حالت ۴ اگر دو فرد را انتخاب کنیم، مجموع زوج است.

۲۰۱

۳۶۸ از تعداد روزهای یک سال بیشتر است. طبق اصل لانه کبوتری امکان ندارد هرکسی در یک روز متفاوت به دنیا آمده باشد. پس حداقل دو نفر در یک روز سال متولد شده‌اند.

۲۰۲

در بدترین حالت، ۶ پرتاب مختلف ظاهر می‌شود و در پرتاب هفتم عدد تکراری حتماً نمایان می‌شود. پس حداقل باید ۷ بار پرتاب کنیم.

۲۰۳

تعداد کیوترها = ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته $\times$ تعداد ماه‌های سال. $n = 7 \times 12 = 84$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$$

$$n=84 \quad \text{تعداد کیوترها} = kn + 1$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که ۷ کیوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۰۴

$$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19, \quad kn + 1 = 19 \times 7 + 1 = 134$$

۲۰۵ هر عضو از مجموعه ۱۰ عضوی $\{5, 9, \dots, 41\}$ با یک عضو از مجموعه ۱۰ عضوی $\{49, 53, \dots, 85\}$ مجموعی برابر با ۹۰ می‌سازد. حالا ما حداکثر می‌توانیم ۱۲ عضو

از A را انتخاب کنیم تا مجموع هیچ دو عضوی ۹۰ نشود. (۱۰ عضو از این مجموعه‌ها و دو عضو از مجموعه $\{1, 45\}$)

بنابراین با حداقل ۱۳ عضو، مطمئن خواهیم بود، حداقل یک جفت عدد با مجموع ۹۰ خواهیم داشت.

۲۰۶

تعداد کیوترها = ۴۳ و تعداد لانه‌ها = ۴۲ و به‌صورت زیر هستند.

$$\underbrace{1, 84}, \underbrace{2, 83}, \underbrace{3, 82}, \dots, \underbrace{42, 43}$$

چنانچه قرار باشد کیوترها، لانه‌ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

