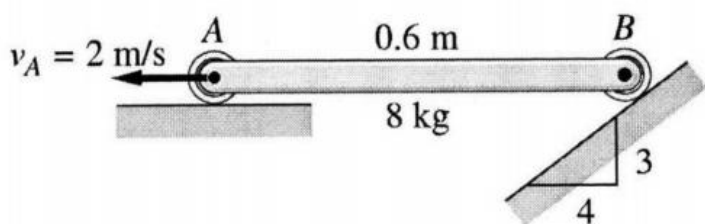


۸۶- یک میله صلب مطابق شکل زیر، در سطح افق قرار گرفته است. اگر سرعت انتهای A، ۲ متر بر ثانیه باشد، سرعت زاویه‌ای میله چقدر است؟ (غلطک B از سطح جدا نمی‌شود).



$$(1) \quad 2.5 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \text{ cw}$$

$$(2) \quad 2.5 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \text{ ccw}$$

$$(3) \quad 1.5 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \text{ cw}$$

$$(4) \quad 1.5 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \text{ ccw}$$

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.

از صلب بودن میله می‌توان نتیجه گرفت که سرعت نقاط A و B در راستای میله یکسان است. همچنین جدا نشدن نقطه B از روی سطح شیب‌دار بیانگر صفر بودن سرعت عمودی (نسبت به سطح شیب‌دار) برای این نقطه می‌باشد. در نتیجه نقطه B تنها سرعتی در راستای سطح شیب‌دار و به سمت پایین خواهد داشت. مقدار تصویر این سرعت در راستای میله مشخص و برابر با سرعت نقطه A (۲ متر بر ثانیه) می‌باشد. اگر زاویه کوچکتر بین میله و سطح شیب‌دار را با α در نظر بگیریم داریم:

$$V_B \cos(\alpha) = 2$$

$$V_{Bn} = V_B \sin(\alpha)$$

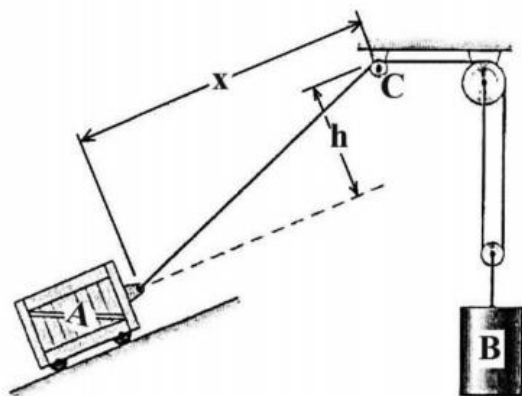
$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$$

در روابط بالا V_{Bn} سرعت نقطه B در راستای عمود بر میله بوده و برابر با $\frac{3}{4}$ بدست می‌آید. برای بدست آوردن سرعت زاویه‌ای میله داریم:

$$V_{Bn} = l\omega \rightarrow \omega = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{10}} = 2.5$$

با توجه به حرکت نقطه B به سمت پایین، حرکت آن ساعتگرد بوده و در نتیجه گزینه یک درست می‌باشد.

۸۷- سرعت A بر حسب سرعت B، کدام است؟



$$V_A = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{2h} V_B \quad (1)$$

$$V_A = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{2x} V_B \quad (2)$$

$$V_A = \frac{2\sqrt{x^2 + h^2}}{x} V_B \quad (3)$$

$$V_A = \frac{2\sqrt{x^2 + h^2}}{h} V_B \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است.

مثال‌های مشابه این تست در صفحه ۳۳ جزوه درس دینامیک بررسی شده است. برای حل این سوال باید طول طناب رو محاسبه نموده و با مشتق گرفتن از آن نسبت به زمان، رابطه بین سرعت‌ها را بدست آورد. فاصله بین دو قرقره بالای B را برابر با y فرض کرده و مجموع مقادیر ثابت طول طناب را با متغیر C نمایش می‌دهیم. در نتیجه طول طناب به صورت زیر قابل بیان است:

$$l = \sqrt{x^2 + h^2} + 2y + c$$

با مشتق‌گیری از این رابطه و جایگذاری سرعت اجسام A و B بجای مشتق x و y خواهیم داشت:

$$\frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2 + h^2}} + 2\dot{y} = 0 \rightarrow V_A = \dot{x} = -\frac{2\dot{y}\sqrt{x^2 + h^2}}{x} = -\frac{2\sqrt{x^2 + h^2}}{x} V_B$$

بعنوان راه‌حل کوتاه‌تر و تستی می‌توان سطح شیب‌دار را در راستای نقطه C در نظر گرفته و h را برابر با صفر قرار داد. با این کار رابطه طول طناب ساده‌تر شده و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$l = x + 2y + c \rightarrow V_A = -2V_B$$

در بین گزینه‌ها، تنهای گزینه ۳ با این فرض درست خواهد بود.

۸۸- در شکل زیر، دیسکی صلب به شعاع r با فرض غلتش خالص در حال حرکت است. اندازه شتاب نقطه A از دیسک،

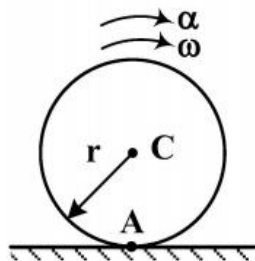
کدام است؟

(۱) $r\alpha$

(۲) $r\omega^2$

(۳) $r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

(۴) صفر



پاسخ: گزینه ۲ صحیح است.

مشابه این سوال در صفحه ۸۳ جزوه دینامیک مطرح و حل شده است. با این تفاوت که در جزوه دیسک بر روی سطح منحنی قرار داشته و با قرار دادن شعاع انحنای بینهایت در آن مثال می توان به جواب درست رسید. برای رسیدن به پاسخ می توان ابتدا شتاب نقطه C و شتاب نسبی نقطه A نسبت به C را بدست آورده و از مجموع آن به شتاب نقطه A رسید.

$$a_C = r\alpha \hat{i}$$

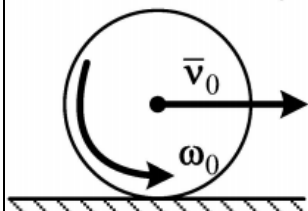
$$a_{AC} = a_{AC}^n + a_{AC}^t = r\omega^2 \hat{j} - r\alpha \hat{i}$$

$$a_A = a_C + a_{AC} = r\omega^2 \hat{j}$$

۸۹- یک توپ بولینگ به جرم 5 kg و به شعاع 0.1 m با سرعت اولیه $\bar{v}_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = 9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

مطابق شکل روی میز رها می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین توپ و میز 0.1 باشد، چند ثانیه بعد، حرکت

توپ به حرکت غلتش خالص (غلتش بدون لغزش) تبدیل می‌شود؟ $(I = \frac{2}{5}mr^2 \text{ و } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$



(۱) 0.86

(۲) 1.72

(۳) 2.54

(۴) 3.46

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است.

این سوال، دشوارترین سوال بخش دینامیک این سال بوده و مثال‌هایی با روند مشابه در صفحه ۱۱۰ جزوه حل شده است. شرط آغاز غلتش خالص، ایجاد رابطه زیر بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای می‌باشد:

$$v = r\omega$$

برای بدست آوردن مقدار سرعت زاویه‌ای برحسب زمان باید از روابط نیوتون استفاده کرد. در راستای عمودی تنها نیروی سطح و وزن جسم وجود دارد. با توجه به عدم حرکت توپ در این راستا می‌توان گفت:

$$N = mg$$

در نتیجه نیروی اصطکاک به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$f_k = \mu N = \mu mg$$

حال طبق رابطه نیوتون خواهیم داشت:

$$\sum f = ma \rightarrow f_k = ma \rightarrow a = \mu g$$

$$v = v_0 - at$$

برای بدست آوردن سرعت زاویه‌ای، به طریق مشابه از رابطه اوپلر استفاده می‌کنیم:

$$\sum T = I\alpha \rightarrow f_k \times r = I\alpha \rightarrow \mu mg \times r = \frac{2}{5}mr^2\alpha \rightarrow \alpha = \frac{5\mu g}{2r}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

با توجه به دینامیک سوال، نیروی اصطکاک باعث کاهش سرعت و افزایش سرعت زاویه‌ای می‌شود. همچنین سرعت زاویه‌ای اولیه جسم خلاف جهت سرعت نهایی آن در هنگام آغاز غلتش می‌باشد. با برقراری رابطه بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای داریم:

$$v = r\omega \rightarrow v - at = r(\omega_0 + \alpha t) \rightarrow v - \mu gt = r\left(\omega_0 + \frac{\mu g}{r}t\right)$$

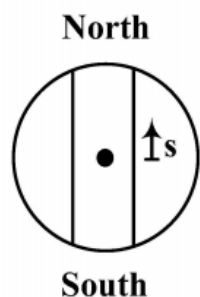
$$5 - 0.1 \times 9.81t = 0.1 \left(-9 + \frac{5 \times 0.1 \times 9.81}{2 \times 0.1}t\right) \rightarrow t = 1.72$$

۹۰- فرض کنید بین قطب شمال و قطب جنوب، تونلی در داخل زمین حفر شده است. شتاب گرانش در داخل زمین به صورت

خطی مطابق معادله $(a = -\frac{s}{R}g)$ تغییر می کند که R شعاع کره زمین و g شتاب گرانش در سطح زمین است. اگر

جسمی در ابتدای تونل در قطب شمال بدون سرعت اولیه رها شود، سرعت آن، هنگام عبور از مرکز زمین چقدر است؟

(از مقاومت هوا و اصطکاک صرف نظر شود.)



(۱) $\sqrt{gR}$

(۲) $\sqrt{2gR}$

(۳) $2\sqrt{gR}$

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است.

مثال های مشابه در صفحه ۸ جزوه دینامیک بررسی شده است. برای حل این سوال از رابطه زیر استفاده می شود:

$$v \cdot dv = a \cdot dx \rightarrow \int_0^{v_f} v \cdot dv = \int_R^0 a \cdot dx \rightarrow \frac{1}{2} v_f^2 = \int_R^0 -\frac{s}{R} g \cdot ds = -\frac{g}{R} \int_R^0 s \cdot ds = \frac{1}{2} gR \rightarrow v_f = \sqrt{gR}$$