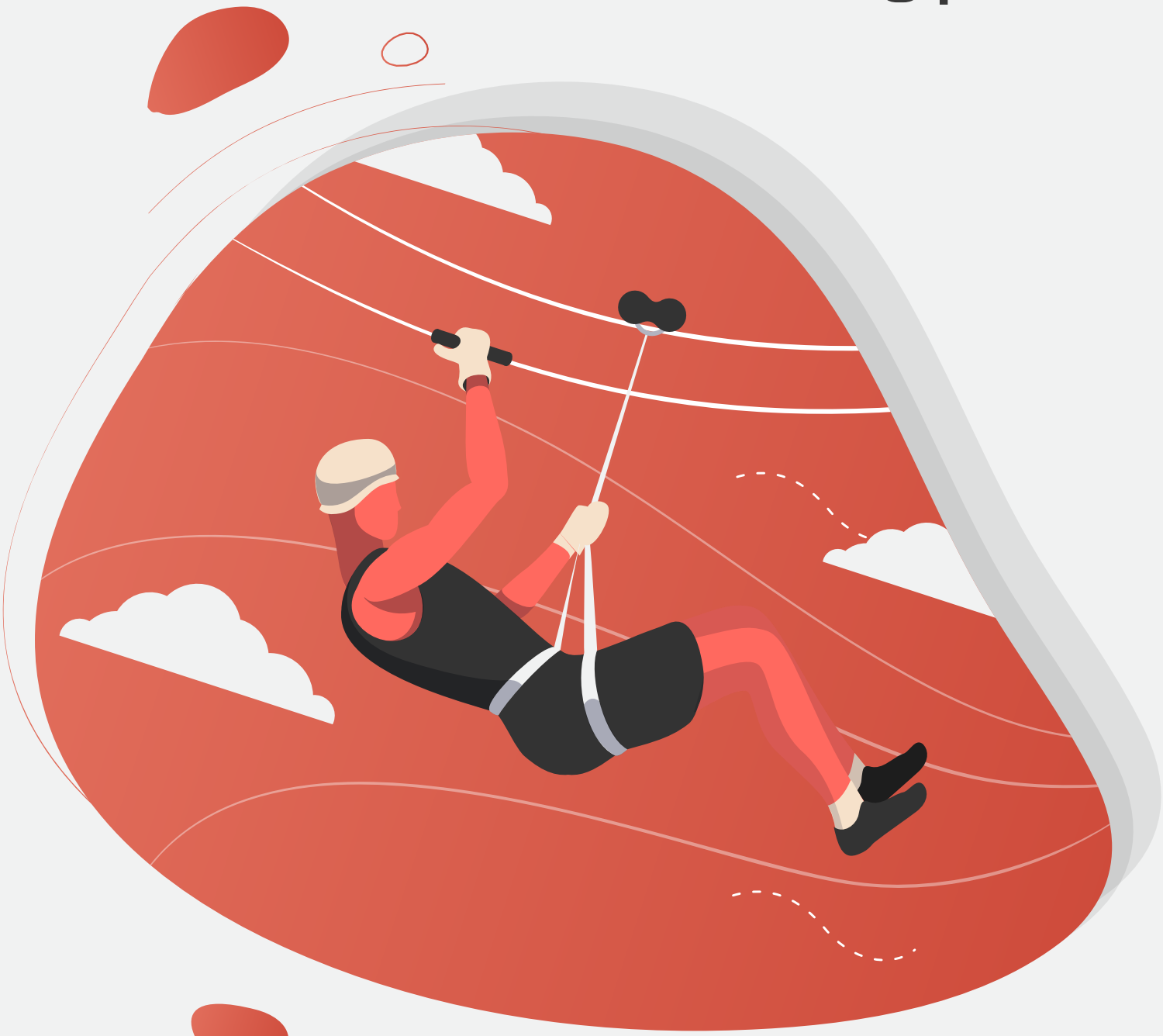
زیپ لاین

حسابان ۱



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

مباحث مقدماتی

اتحاد و تجزیه (دهم)

۱) با توجه به دنبالهٔ حسابی، مجموع $\frac{۱}{۱۷\times ۲۰}+\cdots+\frac{۱}{۸\times ۱۱}+\frac{۱}{۵\times ۸}+\frac{۱}{۲\times ۵}$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۰٫۱۵ ۲) ۰٫۱۸ ۳) ۰٫۲۴ ۴) ۰٫۲۵

۲) اگر $\frac{۱}{a^۳-۱}+\frac{۱}{a^۳+۱}=۲$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱})^{۱۴۰۱}$ چقدر است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

ریشه، توان گویا و گنگ و قوانین رادیکال‌ها (دهم)

۳) اگر $A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$، کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱) ۰٫۲۵ ۲) ۰٫۵ ۳) ۰٫۷۵ ۴) ۱

۴) اگر $A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱٫۵}$ باشد، حاصل $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵) اگر $A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱٫۵}$ باشد، حاصل عبارت $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶) فرض کنید $a=\sqrt[۴]{۶-۲\sqrt{۶}}$ و $b=\sqrt[۴]{۶+۲\sqrt{۶}}$ مقدار $(a^۲+b^۲+۲ab)^۲(a^۲+b^۲-۲ab)^۲$ کدام است؟ مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $۴(۲+\sqrt{۳})$ ۲) $۴(۲-\sqrt{۳})$ ۳) $۱۶(۲+\sqrt{۳})$ ۴) $۱۶(۲-\sqrt{۳})$

۷) فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x^2}-1)(\sqrt[3]{x^2}+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})=2\sqrt[3]{x}$ باشند مقدار x_1+x_2 کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۸) حاصل عبارت $\sqrt{1+\sqrt{7}}\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt[4]{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt[4]{2}$

مرجع: سراسری– ۱۴۰۱

مجموعه – الگو – دنباله

بازه‌ها (دهم)

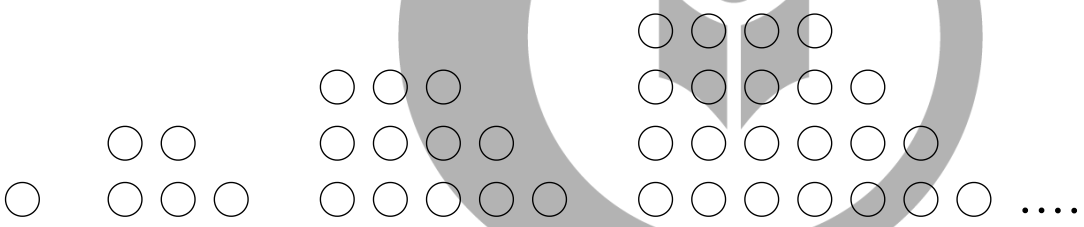
۹) اگر U مجموعهٔ مرجع و $A'\cup B=A'\cap B'$ باشد، کدام مورد درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $A=\varnothing$ ۳) $B=U$ ۴) $B=\varnothing$

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

الگو – الگوی خطی – الگوی غیرخطی (دهم)

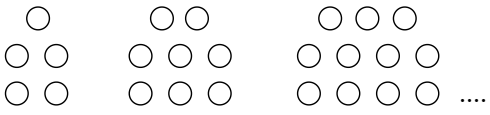
۱۰) در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



۱) ۱۱۷
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۳
۴) ۱۲۵

مرجع: سراسری– ۱۳۹۸

۱۱) در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟



۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۰

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۸

۱۲) اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی $\{1\},\{3,5\},\{7,9,11\},\cdots$. در این صورت جملهٔ آخر واقع در دستهٔ شمارهٔ چهل کدام است؟

۱) ۱۵۶۳ ۲) ۱۵۸۹ ۳) ۱۶۳۹ ۴) ۱۶۵۱

مرجع: خارج از کشور– ۱۳۹۹

مطابق آزمون قلمچی

۱۳ فرض کنید جملهٔ صدم دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1}=\frac{۱}{a_n}+۱$ با شرط $a_۱=۱$، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جملهٔ نودوهشتم دنبالهٔ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) $\frac{k-m}{۲m-k}$ ۲) $\frac{k-۲m}{k-m}$ ۳) $\frac{k-m}{k-۲m}$ ۴) $\frac{۲m-k}{k-m}$

۱۴ دنبالهٔ $a_n=\begin{cases}۲^k & n=۳k\\ -۲k+۴ & n=۳k+۱\\ [\frac{n}{k+۲}]+a & n=۳k+۲\end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_۲+a_۵+a_۸+\cdots+a_{۲۹}$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۱۵ دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1}=۲-\frac{۱}{a_n}$ با شرط $a_۱=-۱$ را درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) -۲۰۱ ۲) -۱۹۹ ۳) -۱۹۷ ۴) ۱۹۷

۱۶ دنبالهٔ $a_n=\begin{cases}۲^k & ; \ n=۳k\\ -۲k+۴ & ; \ n=۳k+۱\\ [\frac{n}{k+۲}]+a & ; \ n=۳k+۲\end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، میانگین جملات بیست و نهم و سی‌اُم دنباله، کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $\frac{-۴۳}{۶}$ ۲) -۷ ۳) ۵۰۵ ۴) ۱۰۲۴

۱۷ اگر ۸ و ۵ به‌ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جملهٔ شانزدهم کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۱۱٫۶ ۲) ۹٫۶ ۳) ۲٫۴ ۴) ۱٫۴

۱۸ اعداد ۱۴ و ۱۷٫۲ به‌ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنبالهٔ درجهٔ دوم هستند. اگر ضریب بزرگ‌ترین درجه جملهٔ عمومی، برابر $\frac{۱}{۷۰}$ قرینهٔ جمله پنجم باشد، جملهٔ پانزدهم چند برابر جملهٔ اول است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) ۲٫۴ ۳) ۴٫۶ ۴) ۵

دنباله‌ی حسابی

۱۹ در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، تساوی $۶a_۲^۲=۵a_۴a+۳a_۲a$ برقرار است. نسبت جملهٔ چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۳٫۵ ۴) ۴

۲۰ مقادیر a، $2a+1$ و $5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. اگر a جملهٔ نخست این دنباله باشد، جملهٔ نهم کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۲٫۷۵ ۲) ۴٫۲۵ ۳) ۱۲٫۲۵ ۴) ۱۴٫۷۵

۲۱ مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۷، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) ۷۲۱ ۲) ۷۲۸ ۳) ۷۳۵ ۴) ۷۴۲

۲۲ اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \cdots$. مجموع اعداد واقع در دستهٔ بیستم، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۴۱۲۰ ۲) ۴۰۲۰ ۳) ۴۰۱۰ ۴) ۳۹۸۰

دنباله‌ی هندسی

۲۳ دنباله‌های هندسی با قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را درنظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعهٔ $\{1, 2, \cdots, 100\}$ باشد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۴ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به‌جز دسته اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است، یعنی $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10,11,12\}, \cdots$، میانگین عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۲۳۰۴٫۵ ۲) ۳۰۷۲٫۵ ۳) ۴۶۰۸٫۵ ۴) ۶۱۴۴٫۵

۲۵ یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم‌شدهٔ قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۲۶ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به‌جز دستهٔ اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است؛ یعنی $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6,7,8\}, \cdots$، میانهٔ عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۶۱۴۴٫۵ ۲) ۶۱۴۵٫۵ ۳) ۱۲۲۸۹٫۵ ۴) ۱۲۲۸۸٫۵

۲۷ با ضرب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنبالهٔ حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جملهٔ هندسی برابر مجموع جملات باشد، جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{32}{7}$ ۲) $\frac{64}{7}$ ۳) $\frac{24}{5}$ ۴) $\frac{48}{5}$

۲۸ اگر جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهید داشت. مقدار $r+d$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۹ یک دنباله با جملات غیر صفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r+d$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۰ اگر $۲x+۱, x-۱, x+۱$ و x به‌ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنبالهٔ هندسی باشند، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۳۱ اگر $x+۱$، x، $x-۱$ و $۲-x$ به ترتیب جملات اول، دوم، چهارم و پنجم یک دنبالهٔ هندسی باشند، مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $-\sqrt{۵}$

۳۲ اگر $\frac{۳^x+۳^{x+۱}+۳^{x+۲}+۳^{x+۳}+۳^{x+۴}+۳^{x+۵}}{۲^{x-۲}+۲^{x-۱}+۲^x+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+۲^{x+۳}} = ۵۲$ باشد مقدار x کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین با اندازهٔ ۰٫۸ ارتفاع قبلی از زمین به‌صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین در مجموع توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۵۴ ۲) ۵۷ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

معادلات

معادله‌ی درجه دوم

۳۴ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $(۲m-۱)x^۲+۶x+m-۲=۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟ (با تغییر)

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $(-۲,۲,۵)-\{۰\}$ ۲) $(-۲,۳,۵)-\{\frac{۱}{۲}\}$ ۳) $(-۱,۳,۵)-\{\frac{۱}{۲}\}$ ۴) $(-۱,۲,۵)-\{\frac{۱}{۲}\}$

۳۵) معادله‌های $x^۲ + ۶x + m = ۰$ و $x^۲ + ۲x - ۳m = ۰$ یک ریشهٔ مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۳۶) صفرهای تابع $y = ۲x^۲ - (m+۲)x + m$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^۲ - mx + ۱$ باشد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۷) فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x = ۵ - x^۲$ باشند $\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}$ و $\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) $۱۲۵x^۲ + ۱۶x = ۱$ ۲) $۱۲۵x^۲ = ۱۶x + ۱$ ۳) $۱۲۵x^۲ = ۱۲x + ۱$ ۴) $۱۲۵x^۲ + ۱۲x = ۱$

۳۸) فرض کنید $a, b, c \in \{۱, ۲, \cdots, ۹\}$ باشد. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^۲ + bx - c = ۰$ می‌توان تشکیل داد به‌طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های همان معادله دو واحد بیشتر باشد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۳۹) فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x = x^۲ - ۴$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_۱^۳ + \frac{۱}{x_۲}$ و $x_۲^۳ + \frac{۱}{x_۱}$ است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $۴x^۲ = ۵۱x + ۲۲۱$ ۲) $۴x^۲ + ۵۱x = ۲۲۱$ ۳) $۴x^۲ = ۵۱x + ۱۹۷$ ۴) $۴x^۲ + ۵۱x = ۱۹۷$

۴۰) فرض کنید $a, b, c \in \{۱, ۲, \cdots, ۹\}$. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $ax^۲ + bx - c = ۰$ می‌توان نوشت که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله دو واحد باشد؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۴۱) به‌ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۴۲) α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۶x + a = ۰$ هستند. اگر $\alpha < \beta < ۰$ و $۳\alpha^۲ + ۲\beta^۲ = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$ باشد، مقدار a چقدر است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۱ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲۱}{۵}$ ۴) ۲

۴۳) اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a^۲ + b^۲ - ۱۲)x + a + b - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۴۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۲(a+۱)x + ۲a - ۱ = ۰$ باشند، به‌ازای کدام مقدار a، به‌ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۴۵ α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ - ۸x + ۴ = ۰$ است. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های برابر $\alpha\beta^۲$ و $\alpha^۲\beta$ باشند، مقدار $\log_{\sqrt{۲}} a$ کدام است؟ $(a > ۰)$

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶ اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^۲ - ax - b = ۰$ و $۴۰\beta^۲ + ۲۰\alpha^۲ - ۲۰\beta = ۱۷$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

۴۷ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۱۲x - a = ۰$ و $۲\alpha^۲ + \beta^۲ - ۴\alpha = ۷$ باشد، مقدار a چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

۴۸ برای چند مقدار صحیح m، هر دو ریشهٔ معادله $۲x^۲ + ۷x + m = ۰$ بزرگ‌تر از -۳ است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۹ برای چند مقدار صحیح m، هر دو ریشهٔ معادله $-x^۲ + ۵x + m = ۰$ کوچک‌تر از $\frac{۹}{۲}$ است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۰ ریشه‌های معادله $۲x^۲ - ax + b = ۰$ نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۲ax^۲ + ax - ۶ = ۰$ بیشتر است. مقدار $[\frac{ab}{۴}]$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۵۱ اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴ - ۷x^۲ - ۵ = ۰$ به‌ترتیب s و p باشند حاصل عبارت $۲p^۲ - ۳sp + ۲s$ کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $۵۹ - ۷\sqrt{۶۹}$ ۲) $۷ + \sqrt{۶۹}$ ۳) ۵۰ ۴) $۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}$

۵۲ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۳ + kx^۲ - ۹x - ۲ = ۰$، $\alpha + \beta = ۱$ و $\alpha\beta = -۲$ باشد، مقدار k چقدر است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۱

۱) $-\frac{۲۷}{۵}$ ۲) $\frac{۲۷}{۵}$ ۳) -۳ ۴) ۳

۵۳) مجموع ریشه‌های معادله $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۱٫۷۵ ۳) ۲ ۴) ۲٫۲۵

۵۴) اختلاف ریشه‌های معادله $x^۲+۲kx+۵=۰$ برابر $\frac{۴}{۳}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^۲}{۲}\right]$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۵) به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^۲+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور xها است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $۱<m<۵$ ۲) $۲<m<۵$ ۳) $۲<m<۴$ ۴) $۲<m<۶$

۵۶) به‌ازای چند مقدار a، سهمی $y=ax^۲+(۳+۲a)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) هیچ مقدار a ۲) تمام مقادیر a ۳) ۱ ۴) ۲

۵۷) کمترین مقدار تابع $y=mx^۲-۱۲x+۵m-۱$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) $x=۲$ ۲) $x=۲٫۵$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۳٫۵$

۵۸) رأس سهمی $y=-ax^۲+ax+۲$ روی سهمی $y=۲bx^۲-bx-۱$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b-a$ چقدر است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) -۱۸ ۴) ۱۸

۵۹) نمودار تابع $y=۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) $-\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $-\frac{۷}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶۰) رأس سهمی $y=kx^۲-۴x-۶$ روی خط $y=-۴x-۴$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) -۴ ۴) -۸

۶۱) محور تقارن‌های سهمی‌های $y=x^۲+ax-۲$ و $y=-x^۲-۲x+b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y=۱$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) ۸ ۴) ۴

۶۲ نقاط $A(۳,y)$ و $B(-۵,y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^۲+\beta^۲=۵$ باشد، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۶۳ نقاط $(۱,\beta)$ و $(-۵,\beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. اگر سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۳}{۲}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۶۴ نقاط $(-۴\ ,\ ۳)$ و $(-۴\ ,\ -۱٫۵)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

معادلات گویا

۶۵ معادلهٔ $\frac{۶x}{x^۲-۲x+۴}=\frac{x^۲-۹x-۲}{x^۳+۸}-\frac{۱}{x+۲}$ دارای چند جواب مثبت است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۶ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۴۰}{۹}=\frac{۱}{(۲-x)^۲}+\frac{۱}{x^۲}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) ۲ ۲) ۲٫۵ ۳) ۴ ۴) ۴٫۵

۶۷ سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۶۸ بهروز یک مجلّه را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۶۹ پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۲٫۵ ۳) ۱۳٫۵ ۴) ۱۵

۷۰) نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $۰/۳+\sqrt{۵}$
۲) $۰/۲(۱+\sqrt{۵})$
۳) $۰/۶+۰/۲\sqrt{۵}$
۴) $۰/۴(۱+\sqrt{۵})$

معادلات گنگ

۷۱) اگر $۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲$ باشد، حاصل $\frac{a+۱}{a}$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) ۱٫۵
۲) ۲٫۵
۳) ۳٫۵
۴) ۴٫۵

۷۲) تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰}}+\sqrt{x^۲+\sqrt{-x^۲+۶x-۸}}=x+۲$، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۷۳) معادله $\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}=\frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}}-\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۷۴) معادلهٔ $\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}-\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۷۵) معادلهٔ $\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{x+\sqrt{x-۲}-\sqrt{۲-x}}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۷۶) برای چند مقدار صحیح و یک‌رقمی a، جواب معادله $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$، عددی صحیح است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

تعیین علامت و نامعادله

تعیین علامت عبارات جبری (دهم)

۷۷ در بازهٔ (a,b) عبارت $۱۵x^۲+۷۳x+۱۴$ منفی و عبارت $|\frac{x-۱}{۲}-۱|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۶۷}{۱۵}$

۷۸ نمودار تابع $y=\frac{۲}{x^۲-۳x+۲}$، به‌ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=۰$ و $y=-۲$ واقع می‌شود؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۷۹ تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

حل نامعادله (دهم)

۸۰ مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳<\frac{۲x-۳}{x+۱}<۱$، به کدام صورت است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ ۲) $\mathbb{R}-[-۴,۶]$ ۳) $x>۴$ ۴) $x<-۶$

۸۱ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۲}>\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $(-۴,۱)\cup(۲,۳)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

۸۲ فرض کنید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(x-۳\sqrt{x}+۲)}{۲x-۳}>۰$ به ازای $x>\frac{۳}{۲}$ بازهٔ $[۲,۴]$ باشد مقدار m کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۸۳ فرض کنید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(۲x-۳)}{x-۳\sqrt{x}+۲}\geq۰$ فقط یک بازه باشد. مقدار m، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۸۴) اگر $\frac{۱-۳x}{x+۱} < ۰ < -۲$ باشد، مجموعهٔ مقادیر $\left[\frac{x}{۲}\right]$ چند عضو دارد؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قدر مطلق

نمودار توابع قدرمطلقی (یازدهم)

۸۵) مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۸۶) خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x)=|\sin(۲x)|+۱$ را در نقطه‌ای به طول $x=۰$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به‌ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند طول پاره‌خط AB کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) صفر ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۸۷) نمودارهای دو تابع $y=|x+۲|+|x-۱|$ و $۳y+x=۱۷$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

معادلات و نامعادلات قدرمطلقی (یازدهم)

۸۸) مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+۲|+|۲x-۱|=۳$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۸۹) نمودارهای دو تابع $y=|x+۱|+|x-۲|$ و $y=x+۷$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

براکت (جزءصحیح)

مفهوم و خواص (یازدهم)

۹۰ اگر $\frac{۴-۲x}{۳x+۱} \geq ۰$ باشد، مجموعه مقادیر $[۳x]$ چند عضو دارد؟

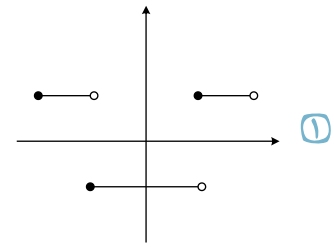
مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

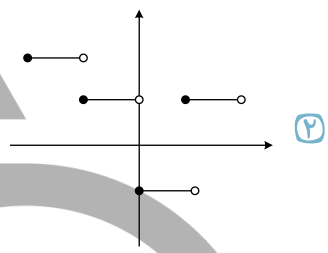
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

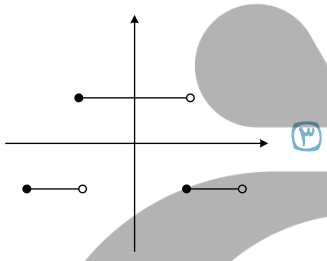
نمودار (یازدهم)

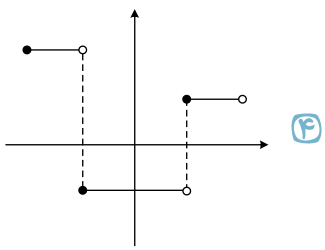
۹۱ نمودار تابع $y = ۲|[۳x]| - ۱$ به ازای $-\frac{۱}{۲} \leq x < \frac{۱}{۲}$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی

معادله‌ی خط و نکات آن (یازدهم)

۹۲ شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(۲,۴)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم که نقطهٔ B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳,-۱)$ باشد. محیط مستطیل کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

۹۳ نقطهٔ $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x - y = ۵$ در نظر بگیرید مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم به‌طوری که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) $(\frac{۷}{۲}, \frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱۱}{۶})$

۹۴ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB : y + ۲x = ۷$, $AC : ۴y - ۳x = ۱۷$ و $BC : ۲y - ۷x = -۱۹$ هستند. طول ارتفاع BH، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۴٫۴ ۲) ۳ ۳) ۲٫۵ ۴) ۱

مطابق آزمون قلمچی

۹۵ فاصلهٔ نقطهٔ A روی خط $x+y=a$ از دو نقطهٔ $B(-۳,۲)$ و $C(-۱,۴)$ به‌ترتیب برابر $\sqrt{۲۹}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۹۶ طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس‌های $A(۱,۹)$، $B(۳,۳)$ و $C(۷,۱۱)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۶

۹۷ خط $۲mx+(m^۲-۱)y=۳$، به‌ازای دو مقدار m با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. اختلاف مقادیر m کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

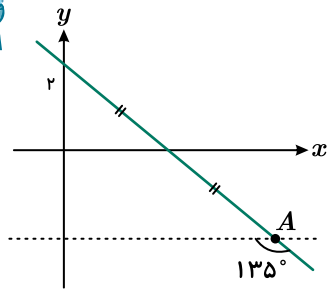
۹۸ نقطه $(۴٫۵,۲)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $۴x+y=۳$ و $x-۴y=۵$ هستند. بیشترین فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$

۹۹ در شکل زیر، فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

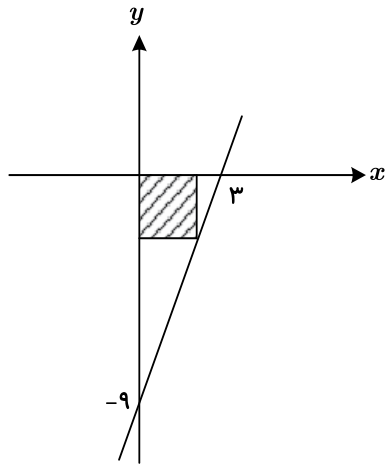
مرجع: سراسری- ۱۴۰۳



۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۶}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۱۰۰ در شکل زیر، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟

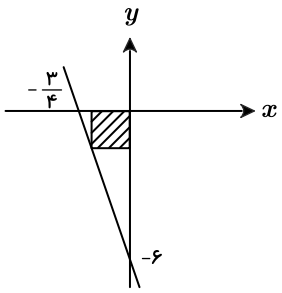
مرجع: سراسری- ۱۴۰۳



۱) $۲٫۵\sqrt{۲}$
۲) $۳٫۵\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۹}{۲\sqrt{۲}}$
۴) $\frac{۹}{\sqrt{۲}}$

۱۰۱ در شکل زیر، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳



۱) $\frac{۴}{۲\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}$

فاصله ۲ نقطه و نقطه وسط پاره‌خط (یازدهم)

۱۰۲ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $۲y = x^۲$ و $x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۰

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۱۰۳ نقطهٔ $(-۶,۳)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x - ۳y = ۴$ و $x + ۴y = -۳$ هستند. بیشترین فاصلهٔ وسط قطر با اضلاع کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$ ۲) $\frac{۱۹}{\sqrt{۱۰}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶۵}}{\sqrt{۲}}$

فاصله نقطه از خط و مسائل آن (یازدهم)

۱۰۴ نقاط $A(۰\ ,\ ۱)$ و $B(۴\ ,\ -۲)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطهٔ D در ربع سوم، کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۰۵ دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = ۱$ و $ay - x = a - ۱$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(۱,۲)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۲

۱) ۲٫۵ ۲) ۳٫۵ ۳) $\sqrt{۴۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳۴}$

۱۰۶ در یک مستطیل، نقاط $A(۵,۲)$ و $C(۴,-۱)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x - ۳y = ۳$ واقع‌اند. اختلاف طول نقاط B و D کدام است؟

مرجع: سراسری– ۱۴۰۳

۱) ۳ ۲) ۳٫۵ ۳) ۱ ۴) ۱٫۵

۱۰۷ دو رأس یک مستطیل روی خط $۲y - x = ۴$ و نقاط $(۱,۴)$ و $(-۱,۰)$ رأس‌های غیرمجاور این مستطیل هستند. طول مستطیل کدام است؟

مرجع: خارج از کشور– ۱۴۰۳

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

تابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی، معادلات و نامعادلات نمایی (یازدهم)

۱۰۸ نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$، نمودار تابع $y = x^۲ - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(۳)$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۹ نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = ۳^{Ax+B}$، نمودار تابع $y = x^۲$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۱۰ تابع $y = ۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۱۱ تابع $f(x) = a + b(\frac{۱}{۲})^x$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(-۱) = -۱$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۲ فرض کنید $۵^x = ۱۰$ است. اگر $۲^{f(x)} = ۲۰$ باشد، ضابطهٔ f کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) $\frac{۲x+۱}{x+۱}$ ۲) $\frac{x-۱}{۲x-۱}$ ۳) $\frac{۲x-۱}{x-۱}$ ۴) $\frac{x+۱}{۲x+۱}$

۱۱۳ تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۲^{ax+b}}$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(۸) = ۵$ باشد، حاصل $a - b$ چند است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۱۴ بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A = \{m^۳ + n^۲ | m, n \in \mathbb{N}, ۸^{-\frac{۲}{۳}m} \times ۴^{-n} + ۴^{-m} \times ۸^{-\frac{۲}{۳}n} > \frac{۱}{۱۲۸}\}$، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) ۲

۱۱۵ نمودار $f(x)=۲+۲^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x)=-x^{۲}-۳x+۸$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f^{-۱}(۱۰)=-۱$ باشد، مقدار $۲b-a$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) ۲

۱۱۶ مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

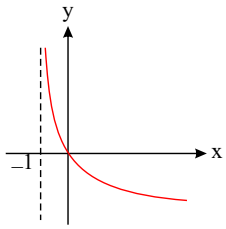
$(\log_{۲}۵=۲/۴ \text{ و } \log_{۳}۵=۱/۴)$

۱) ۳۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۴۲۰

تابع لگاریتم، تعریف و شرایط لگاریتم (یازدهم)

۱۱۷ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=\log_{۲}^{U(x)}$ است. $U(x)$ کدام است؟

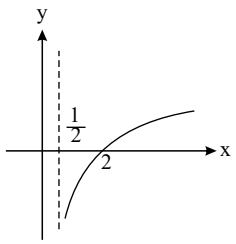
مرجع: سراسری- ۱۳۹۸



۱) $x+۱$ ۲) $(x+۱)^{-۱}$
۳) $x-۱$ ۴) $۱-x$

۱۱۸ شکل زیر، نمودار تابع $y=-۱+\log_{b}^{(۲x+a)}$ است. این منحنی خط $y=۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸



۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۹ مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{۱}{۱۰}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log ۳=۰/۴۸)$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۴۰

۱۲۰ در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به‌جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{۱}{۳}$ غلظت اولیه می‌شود؟ $(\log ۳=۰/۴۸ \ , \ \log ۲=۰/۳)$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

۱۲۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\log_{۴}(x^{۲}-x-۲)}{\sqrt{x^{۲}-۱}+۱}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$ ۴) $(-۲,۱)$

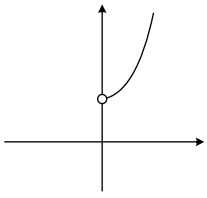
۱۲۲ حاصل عبارت $\log_{۲۱}^{(۱۳۲۳)}\log_{۲۱}^{(۱۴۷)}+(\log_{۲۱}^{(۳)})^{۲}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

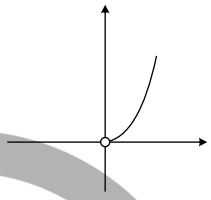
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

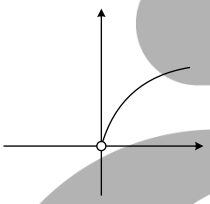
۱۲۳ دامنهٔ تغییرات تابع $f(x)=\log_{۶}\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

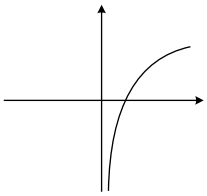
۱) $(-۹,۹)$ ۲) $(-۴,۹)$ ۳) $(۴,۹)$ ۴) $(-۴,۴)$

۱۲۴ نمودار تابع $f(x)=۹^{\log_{۳}^{x}}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲۵ اگر به ازای اعداد مثبت و مخالف یک a، b و c تساوی $\log_{a}c+\log_{b}c=۱$ برقرار باشد. آنگاه $\log_{c}a\cdot\log_{c}b$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $\log_{c}(ab)$ ۲) $۲\log_{c}(ab)$ ۳) $\log_{c}(a+b)$ ۴) $۲\log_{c}(a+b)$

۱۲۶ برد تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(۱-\frac{۱}{۱۲+\sqrt{|x|}-|x|})$، برابر $(\log_{۲}۳\ ,\ \log_{۲}۵)$ باشد، دامنهٔ تابع f، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) $[۳\ ,\ ۹)$ ۲) $[۳\ ,\ ۸]$ ۳) $[۵\ ,\ ۹)$ ۴) $[۲\ ,\ ۸]$

۱۲۷ اگر $\log_{۸}۱۸=m$ باشد، حاصل $\log_{۴}۱۲$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) $\frac{۳}{۴}(m+۱)$ ۲) $\frac{۳m+۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}(m-۱)$ ۴) $\frac{۳m-۱}{۴}$

۱۲۸ اگر $\log_{۲}۳=a$ و $\log_{۸}b=\frac{۲}{۳}(۱+a)$ باشد، مقدار $\log(۳b-۸)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲ ۴) ۲٫۵

۱۲۹ اندازهٔ زاویهٔ A در مثلث ABC ، ۴۵ درجه بیشتر از اندازهٔ زاویهٔ B است. حاصل $2\cos A\sin B-\sin C$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۳۰ اگر $a^2+9b^2=10ab$ باشد، مقدار $\log(\frac{a+3b}{4})$، واسطهٔ حسابی کدام دو جملهٔ زیر است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) $\log a, \log 3b$ ۲) $\log a, \log b$ ۳) $\log\sqrt{a}, \log\frac{}{\sqrt{b}}$ ۴) $\log\sqrt{a}, \log\frac{}{\sqrt{3b}}$

۱۳۱ مقدار $\log_n^m=a$ و مقدار $\log_{mn}^{m^2n}=b$ است. اگر $a>0$ باشد، حاصل $[b]$ چقدر است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۲ اگر $\log 2\simeq 0/3$ و $\log 3\simeq 0/4$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $x^2(\log 30)+2x(\log 6)-\log\frac{5}{6}=0$ چقدر است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵ ۳) ۱/۴ ۴) ۱

۱۳۳ اگر $A=\{\log_9 x+3\log_{x^2}3 : x>1\}$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ A کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{3}$

۱۳۴ مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته ۱۲/۵ درصد از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز، $\frac{1}{7}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ $(\log_7 3=0/6\ ,\ \log_2 3=1/6)$

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۵۶ ۴) ۱۲۶

معادلات و نامعادلات لگاریتمی (یازدهم)

۱۳۵ اگر $\left(\frac{125}{8}\right)^{x^2}=(0/4)^{2x-1}$ باشد، $\log_8^{(9x+1)}$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۶ اگر $81^x=3^{x^2-2}$ باشد، $\log_6^{(x-2)}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۳۷ فرض کنید $\log_{\frac{5}{2}}^{(3x-2)} = 1$ و $\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}$ مقدار x کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) ۹ ۲) $\frac{17}{3}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{7}{3}$

۱۳۸ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\log_2(4^x + 15) = x + 3$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) $\log_2 15$ ۴) $\log_4 15$

۱۳۹ اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(fof)(x) < f(x^5)$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $(0, 5)$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $(5, +\infty)$ ۴) $(1, +\infty)$

۱۴۰ اگر $\log_2(x-2) + \log_2(x^2+2x+4) = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۱ اگر $\log(2-x) - \log\frac{1}{(x-2)^2} = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}}(-x)$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) -6 ۲) ۶ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۴۲ اگر $\log(1-x) + 3\log(x^2-2x+1) = 5$ باشد، مقدار $\log_3(-x)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

مطابق آزمون قلمچی

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A=\frac{۱}{۲\times ۵}+\frac{۱}{۵\times ۸}+\frac{۱}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷\times ۲۰}$$

$$۳A=\frac{۳}{۲\times ۵}+\frac{۳}{۵\times ۸}+\frac{۳}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۳}{۱۷\times ۲۰}$$

$$۳A=\frac{۵-۲}{۲\times ۵}+\frac{۸-۵}{۵\times ۸}+\frac{۱۱-۸}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۲۰-۱۷}{۱۷\times ۲۰}$$

$$۳A=(\frac{۵}{۲\times ۵}-\frac{۲}{۲\times ۵})+(\frac{۸}{۵\times ۸}-\frac{۵}{۵\times ۸})+(\frac{۱۱}{۸\times ۱۱}-\frac{۸}{۸\times ۱۱})+\cdots+(\frac{۲۰}{۱۷\times ۲۰}-\frac{۱۷}{۱۷\times ۲۰})$$

$$۳A=(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵})+(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸})+(\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۱})+\cdots+(\frac{۱}{۱۷}-\frac{۱}{۲۰})$$

$$۳A=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰}=\frac{۱۰-۱}{۲۰}=\frac{۹}{۲۰}\Rightarrow A=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ در فرض سؤال در سمت چپ، مخرج مشترک گرفته و داریم:

$$\frac{۱}{a^۳+۱}+\frac{۱}{a^۳-۱}=۲\Rightarrow\frac{a^۳-۱+a^۳+۱}{(a^۳+۱)(a^۳-۱)}=۲\Rightarrow\frac{۲a^۳}{a^۶-۱}=۲\Rightarrow\frac{a^۳}{a^۶-۱}=۱\Rightarrow a^۶-۱=a^۳\Rightarrow a^۶=a^۳+۱\quad(۱)$$

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$(\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱})^{۱۴۰۱}=(\frac{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱+a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}{(a^۳+۱-\sqrt{a^۳})(a^۳+۱+\sqrt{a^۳})})^{۱۴۰۱}=(\frac{۲a^۳+۲}{(a^۳+۱)^۲-a^۳})^{۱۴۰۱}\xrightarrow{(۱)}(\frac{۲a^۳+۲}{a^۶+۲a^۳+۱-a^۳})^{۱۴۰۱}$$

$$\xrightarrow{(۱)}(\frac{۲a^۳+۲}{a^۳+۱+۲a^۳+۱-a^۳})^{۱۴۰۱}=(\frac{۲a^۳+۲}{۲a^۳+۲})^{۱۴۰۱}=۱^{۱۴۰۱}=۱$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

$$A=\sqrt[۵]{۲^۲\times\sqrt[۳]{۲^۴}}\times(۲^{-۱})^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^۲\times۲^{\frac{۴}{۳}}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}$$

$$A=۲^{\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}}=۲^۲$$

$$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=(۲\times۲^۲)^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{۳\times(-\frac{۱}{۳})}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}=\sqrt[۵]{\sqrt{۹^۲\times۳}}\times(۱۲)^{-\frac{۳}{۲}}=\sqrt[۱۰]{۳^۵}\times(۱۲)^{-\frac{۳}{۲}}=۳^{\frac{۵}{۱۰}}\times(\frac{۱}{۱۲})^{\frac{۳}{۲}}$$

$$A=۳^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{۱۲^{\frac{۳}{۲}}}=\sqrt{۳}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۲^۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲\sqrt{۱۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲\times۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲۴}\Rightarrow\frac{۱}{A}=۲۴$$

$$(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}=(۱+\frac{۱}{A})^{\frac{۱}{۲}}=(۱+۲۴)^{\frac{۱}{۲}}=۲۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

مقدار A را به ساده‌ترین حالت ممکن درمی‌آوریم:

$$A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}=\sqrt[۵]{۳^۲\times۳^{\frac{۱}{۲}}}(۲^۲\times۳)^{-\frac{۳}{۲}}=\sqrt[۵]{۳^{\frac{۵}{۲}}}(۲^{-۳}\times۳^{-\frac{۳}{۲}})$$

$$= (۳^{\frac{۵}{۲}})^{\frac{۱}{۵}} \times ۲^{-۳} \times ۳^{-\frac{۳}{۲}} = ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{-\frac{۳}{۲}} \times ۲^{-۳} = ۳^{-۱} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲۴}$$

پس: $(۱ + A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}} = (۱ + ۲۴)^{\frac{۱}{۲}} = ۲۵^{\frac{۱}{۲}} = (۵^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۵$

۶ ۱ ۲ ۳ **۴** برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته‌شده را کمی ساده می‌کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$(a^۲ + b^۲ - ۲ab)^۲(a^۲ + b^۲ + ۲ab)^۲ \xrightarrow{\text{مربع دو جمله‌ای}} ((a-b)^۲)^۲((a+b)^۲)^۲ = (a-b)^۴(a+b)^۴ = ((a-b)(a+b))^۴ = (a^۲ - b^۲)^۴$$

و امّا $a^۲ = \sqrt{\sqrt{۶} - ۲}$ و $b^۲ = \sqrt{\sqrt{۶} + ۲}$ می‌شوند پس داریم:

$$((\sqrt{\sqrt{۶} - ۲} - \sqrt{\sqrt{۶} + ۲})^۲)^۲ = (\sqrt{۶} - ۲ + \sqrt{۶} + ۲ - ۲\sqrt{۶ - ۴})^۲ = (۲\sqrt{۶} - ۲\sqrt{۲})^۲ = ۲۴ + ۸ - ۸\sqrt{۱۲} = ۳۲ - ۱۶\sqrt{۳} = ۱۶(۲ - \sqrt{۳})$$

۷ ۱ ۲ ۳ **۴** داخل پرانتز اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(\sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱) = ۲\sqrt[۳]{x} = \frac{(\sqrt[۳]{x^۴} + ۱ + \sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}} = ۲\sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{x^۲ - ۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} = ۲\sqrt[۳]{x} \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲x \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$$

می‌دانیم معادلهٔ درجهٔ ۲ به‌صورت $x^۲ - sx + p$ است. درواقع مجموع ریشه‌ها ۲ خواهد بود.

داریم:

$$x_۱ + x_۲ = s = ۲$$

۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sqrt[۴]{(۴ + \sqrt{۷})^{-۱}} \times \sqrt{۱ + \sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۴ + \sqrt{۷}}} \times \sqrt[۴]{(۱ + \sqrt{۷})^۲} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۴ + \sqrt{۷}}} \times \sqrt[۴]{۱ + ۷ + ۲\sqrt{۷}} = \frac{\sqrt[۴]{۸ + ۲\sqrt{۷}}}{\sqrt[۴]{۴ + \sqrt{۷}}} = \sqrt[۴]{\frac{۲(۴ + \sqrt{۷})}{۴ + \sqrt{۷}}} = \sqrt[۴]{۲}$$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴** طرفین تساوی $A' \cup B = A' \cap B'$ را با B اشتراک می‌گیریم.

$$\underbrace{(A' \cup B) \cap B}_{\text{قانون جذب}} = (A' \cap B') \cap B \Rightarrow B = A' \cap \underbrace{(B' \cap B)}_{\varnothing} \Rightarrow B = A' \cap \varnothing \Rightarrow B = \varnothing$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** با کمی دقت متوجه می‌شویم که تعداد نقطه‌های هر شکل برابر با $[(n+۰) + (n+۱) + \cdots + (n+n-۱)]$ می‌باشد.

شکل اول : ۱ ، شکل دوم : $۲ + ۳$ ، شکل سوم : $۳ + ۴ + ۵$ ، شکل چهارم : $۴ + ۵ + ۶ + ۷$ ، $\cdots$

پس تعداد نقطه‌ها در شکل نهم می‌شود:

$$۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ = ۱۱۷$$

۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴ تعداد دایره‌ها با یکدیگر تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند.

$$۵, ۸, ۱۱, \cdots \xrightarrow{a_n = a_۱ + (n-۱)d} a_{۱۲} = ۵ + ۱۱(۳) = ۵ + ۳۳ = ۳۸$$

۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴ چند دستهٔ اول را نوشته و با جملات آخر هر دسته یک دنباله تشکیل داده و جملهٔ چهلم دنباله را پیدا می‌کنیم:

دستهٔ اول: $\{۱\}$

دستهٔ دوم: $\{۳, ۵\}$

دستهٔ سوم: $\{۷, ۹, ۱۱\}$

دستهٔ چهارم: $\{۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹\}$

بنابراین دنبالهٔ جملات آخر دسته‌ها به‌صورت $۱, ۵, ۱۱, ۱۹, \cdots$ است که می‌توان به‌صورت $(۱ \times ۲) - ۱, (۲ \times ۳) - ۱, (۳ \times ۴) - ۱, \cdots$ نوشت، یعنی جملهٔ عمومی $a_n = n(n+۱) - ۱$ است، پس:

$$a_{۴۰} = ۴۰ \times (۴۱) - ۱ = ۱۶۴۰ - ۱ = ۱۶۳۹$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** با استفاده از جمله عمومی دنباله و جمله صدم که برابر با $\frac{k}{m}$ است، جمله ۹۹ و به همین ترتیب جمله ۹۸ را بر حسب m و k به دست می‌آوریم:

$$a_{۱۰۰} = \frac{۱}{a_{۹۹}} + ۱ \quad \frac{k}{m} = \frac{۱}{a_{۹۹}} + ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a_{۹۹}} = \frac{k}{m} - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a_{۹۹}} = \frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{۹۹} = \frac{m}{k-m}$$

$$a_{۹۹} = \frac{۱}{a_{۹۸}} + ۱ \Rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{۱}{a_{۹۸}} + ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a_{۹۸}} = \frac{m}{k-m} - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a_{۹۸}} = \frac{۲m-k}{k-m} \Rightarrow a_{۹۸} = \frac{k-m}{۲m-k}$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا به کمک مجموع ۱۰ جملهٔ اول، a را می‌یابیم:

$$a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۹ = ۱۹ \Rightarrow ۱ + ۴ + ۱ + a + ۲ + ۲ + ۱ + a + ۴ + ۰ + ۲ + a + ۸ = ۱۹ \Rightarrow ۳a + ۲۵ = ۱۹ \rightarrow a = -۲$$

$$a_۲ + a_۵ + a_۸ + \cdots + a_{۲۹} = ([\frac{۲}{۲}] + a) + ([\frac{۵}{۳}] + a) + ([\frac{۸}{۴}] + a) + \cdots + ([\frac{۲۹}{۱۱}] + a) = ۱ + ۱ + \underbrace{۲ + ۲ + ۲ + \cdots + ۲}_{\text{۸ تا}} + ۱۰a = ۱۸ - ۲۰ = -۲$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$\{a_n\} : \frac{۱}{-۱}, \frac{۳}{۱}, \frac{۵}{۳}, \frac{۷}{۵}, \frac{۹}{۷}$$

بنابراین جملهٔ nاُم دنباله برابر $a_n = \frac{۲n-۱}{۲n-۳}$ است. در این دنباله داریم:

$$a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times \cdots \times a_{۱۰۰} = \frac{۱}{-۱} \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۵}{۳} \times \cdots \times \frac{۱۹۹}{۱۹۷} = -۱۹۹$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ مطابق مفروضات مسئله $a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۹ = a_{۱۹}$، بنابراین:

$$a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۹ = (a_۰ + a_۳ + a_۶ + a_۹) + (a_۱ + a_۴ + a_۷) + (a_۲ + a_۵ + a_۸) = (۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳) + (۴ + ۲ + ۰) + ([\frac{۲}{۲}] + a)$$

$$+ ([\frac{۵}{۳}] + a) + ([\frac{۸}{۴}] + a) = ۱۵ + ۶ + (۴ + ۳a) = ۲۵ + ۳a$$

پس:

$$۲۵ + ۳a = ۱۹ \Rightarrow ۳a = -۶ \Rightarrow a = -۲$$

جملات ۲۹اُم و ۳۰اُم دنباله به ازای $n = ۲۸$ و $n = ۲۹$ به‌دست می‌آیند، سپس:

$$\frac{۱}{۲}(a_{۲۸} + a_{۲۹}) = \frac{۱}{۲}(-۲(۹) + ۴ + [\frac{۲۹}{۱۱}] - ۲) = \frac{۱}{۲}(-۱۸ + ۴ + ۲ - ۲) = -۷$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ با فرض $t_n = a \cdot n + b$ داریم:

$$\begin{matrix} t_۵ = ۸ \Rightarrow ۵a + b = ۸ \\ t_{۱۰} = ۵ \Rightarrow ۱۰a + b = ۵ \end{matrix} \xrightarrow{\times(-۱)} \begin{cases} -۵a - b = -۸ \\ ۱۰a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a = -۳ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۵} \Rightarrow b = ۸ - ۵a = ۸ - ۵(-\frac{۳}{۵}) \Rightarrow b = ۸ + ۳ = ۱۱ \Rightarrow t_n = -\frac{۳}{۵}n + ۱۱$$

$$t_{۱۶} = -\frac{۳}{۵} \times ۱۶ + ۱۱ = \frac{-۴۸ + ۵۵}{۵} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با فرض $t_n = a \cdot n^۲ + b \cdot n + c$ داریم:

$$t_۵ = ۱۴ \, , \, t_۷ = ۱۷/۲ \, , \quad a = \frac{۱}{۷۰}(-t_۵) = -\frac{۱۴}{۷۰} = -\frac{۱}{۵}$$

$$t_n = -\frac{۱}{۵}n^۲ + bn + c$$

$$t_۵ = -\frac{۱}{۵} \times ۲۵ + ۵b + c = ۱۴ \Rightarrow ۵b + c = ۱۹$$

$$t_۷ = -\frac{۱}{۵} \times ۴۹ + ۷b + c = ۱۷/۲ \Rightarrow -۹/۸ + ۷b + c = ۱۷/۲ \Rightarrow ۷b + c = ۲۷$$

$$\begin{cases} ۵b + c = ۱۹ \\ ۷b + c = ۲۷ \end{cases} \xrightarrow{\times(-۱)} \begin{matrix} -۵b - c = -۱۹ \\ ۷b + c = ۲۷ \end{matrix} \Rightarrow ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴$$

$$۵ \times ۴ + c = ۱۹ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow t_n = -\frac{۱}{۵}n^۲ + ۴n - ۱$$

$$\frac{t_{۱۵}}{t_۱} = \frac{-\frac{۱}{۵} \times ۱۵^۲ + ۴ \times ۱۵ - ۱}{-\frac{۱}{۵} + ۴ - ۱} = \frac{-۴۵ + ۶۰ - ۱}{-\frac{۱}{۵} + ۳} = \frac{۱۴}{\frac{۱۴}{۵}} = ۵$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۶(a+d)^۲ = ۵a(a+۲d) + ۳a(a+d) \Rightarrow ۲a^۲ + ad - ۶d^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{۴۹d^۲}}{۴} = \frac{-d \pm ۷d}{۴} = \begin{cases} a = -۲d \\ a = \frac{۳}{۲}d \end{cases} \Rightarrow \frac{a_۴}{d} = \frac{a+۳d}{d} = \begin{cases} ۱ \\ ۴/۵ \end{cases}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشد داریم:

$$a + c = ۲b$$

و اگر a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱) \cdot d$$

سه جملهٔ متوالی باید ویژگی جملات متوالی دنبالهٔ حسابی را داشته باشند.

$$\Rightarrow a+۵-a=۲(۲a+۱)\Rightarrow ۵=۴a+۲\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

در این صورت جملات دنباله $\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۲},\frac{۱۷}{۴},\cdots$ است. پس داریم:

$$d=\frac{۵}{۲}-\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

$$a_۹=a_۱+۸d=\frac{۳}{۴}+\frac{۵۶}{۴}=\frac{۵۹}{۴}=۱۴٫۷۵$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: اگر n تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول a باشد، آنگاه مجموع n جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{۲}\cdot(۲a+(n-۱)\cdot d)$$

کوچک‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ عدد ۱۴ است و بزرگ‌ترین آن عدد $۹۸=۷\times ۱۴$ می‌باشد بنابراین تعداد جملات آن:

$$n=\frac{a_n-a}{d}+۱=\frac{۹۸-۱۴}{۷}+۱=۱۳$$

$$S_n=\frac{۱۳}{۲}\cdot(۲(۱۴)+۱۲\times ۷)=۷۲۸$$

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: مجموع اعداد ۱ تا n و مجموع جملات $a_۱$ تا a_n از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+۱)}{۲}$$

$$a_۱+\cdots+a_n=\frac{n}{۲}\cdot(a_۱+a_n)$$

$$\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\cdots$$

در دستهٔ اول، «۱» جمله و در دستهٔ دوم «۲» جمله و در دستهٔ سوم «۳» جمله و... در دستهٔ نوزدهم تعداد «۱۹» جمله به‌کار رفته است. بنابراین تعداد اعداد به‌کار رفته تا قبل از دستهٔ بیستم برابر است با:

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۹=\frac{۱۹(۱۹+۱)}{۲}=۱۹۰$$

پس تا قبل از دستهٔ بیستم تعداد «۱۹۰» عدد به‌کار رفته است و دستهٔ بیستم از عدد ۱۹۱ شروع می‌شود و تا عدد «۲۱۰» ادامه دارد (تعداد بیست عدد):

$$\text{دستهٔ بیستم}=a_{۲۰}=\{۱۹۱,۱۹۲,\cdots,۲۱۰\}$$

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}\cdot(۱۹۱+۲۱۰)=۴۰۱۰$$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

چون q و $t_۱$ اعداد طبیعی هستند و دنباله دارای ۵ جمله است قطعاً جملات دنباله افزایشی هستند و جملهٔ پنجم $t_۵=t_۱q^۴$ بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله است. بنابراین q نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد زیرا:

$$q\geq ۴\Rightarrow q^۴\geq ۴^۴\Rightarrow q^۴\geq ۲۵۶\Rightarrow t_۵\geq ۲۵۶$$

$$q=۲\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۱\Rightarrow \text{دنباله}: ۱,۲,۴,۸,۱۶\\ t_۱=۲\Rightarrow \text{دنباله}: ۲,۴,۸,۱۶,۳۲\\ t_۱=۳\Rightarrow \text{دنباله}: ۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸\\ t_۱=۴\Rightarrow \text{دنباله}: ۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴\\ t_۱=۵\Rightarrow \text{دنباله}: ۵,۱۰,۲۰,۴۰,۸۰\\ t_۱=۶\Rightarrow \text{دنباله}: ۶,۱۲,۲۴,۴۸,۹۶\end{cases}$$

$$q=۳\Rightarrow t_۱=۱\Rightarrow \text{دنباله}: ۱,۳,۹,۲۷,۸۱$$

۷ دنباله با شرایط گفته شده وجود دارد.

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\},\cdots$$

اگر دقت کنید، عضوهای آخر دسته‌ها به‌جز دسته اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند.

$$\text{دنباله اعضای آخر دسته‌ها به‌جز دسته اول}: \begin{cases}t_۱=۱\\ t_n=۳\times ۲^{n-۲} \quad n\geq ۲\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\text{عضو آخر دسته دوازدهم}=t_{۱۲}=۳\times ۲^{۱۰}=۳\times ۱۰۲۴=۳۰۷۲$$

$$\text{عضو آخر دسته سیزدهم}=t_{۱۳}=۳\times ۲^{۱۱}=۳\times ۲۰۴۸=۶۱۴۴$$

$$\text{دسته سیزدهم}: \{۳۰۷۳,\cdots,۶۱۴۴\}$$

$$\text{تعداد}=۶۱۴۴-۳۰۷۲+۱=۳۰۷۲$$

چون تعداد اعضا عددی زوج است، میانگین تمام اعضا همان میانگین دو عدد وسط است و میانگین دو عدد وسط با میانگین اعداد اول و آخر دسته برابر است، پس داریم:

$$\frac{۳۰۷۳+۶۱۴۴}{۲}=۴۶۰۸٫۵$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر ضلع مربع‌ها را a_n، مساحت‌ها را s_n و محیط‌ها را p_n نشان دهیم، داریم:

$$s_n = a_n^۲ \ , \ p_n = ۴a_n \Rightarrow a_n = \frac{۱}{۴}p_n \Rightarrow s_n = (\frac{۱}{۴}p_n)^۲ = \frac{۱}{۱۶}p_n^۲$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{s_n}{s_{n-۱}} = ۹ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۱۶}p_n^۲}{\frac{۱}{۱۶}p_{n-۱}^۲} = ۹ \Rightarrow \frac{p_n^۲}{p_{n-۱}^۲} = ۹ \Rightarrow \frac{p_n}{p_{n-۱}} = ۳$$

بنابراین قدر نسبت دنبالهٔ محیط‌ها برابر ۳ است.

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴ عدد آخر دسته‌ها دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی ۲^n است. بنابراین اعداد دستهٔ سیزدهم به‌صورت زیر هستند.

دستهٔ سیزدهم : $\{۲^{۱۲}+۱, ۲^{۱۲}+۲, \dots, ۲^{۱۳}\}$

تعداد اعداد دستهٔ سیزدهم : $۲^{۱۳} - (۲^{۱۲}+۱) + ۱ = ۲^{۱۳} - ۲^{۱۲} = ۴۰۹۶$

چون تعداد اعداد زوج است. میانهٔ این اعداد، میانگین دو عدد وسط است و میانگین دو عدد وسط با میانگین اعداد اول و آخر دسته برابر، پس:

میانه : $\frac{۲^{۱۲}+۱+۲^{۱۳}}{۲} = \frac{۴۰۹۶+۱+۸۱۹۲}{۲} = \frac{۱۲۲۸۹}{۲} = ۶۱۴۴/۵$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی را به‌صورت a، aq و $aq^۲$ در نظر می‌گیریم، پس جملات دنبالهٔ حسابی $۴a$، $۸aq$ و $۱۶aq^۲$ هستند و داریم:

$$۲(۸aq) = ۴a + ۱۶aq^۲ \xrightarrow{\div ۴a} ۴q = ۱ + ۴q^۲ \Rightarrow \underbrace{۴q^۲ - ۴q + ۱}_{(۲q-۱)^۲} = ۰ \Rightarrow = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{دنبالهٔ هندسی} : a \ , \ \frac{۱}{۲}a \ , \ \frac{۱}{۴}a \\ \text{دنبالهٔ حسابی} : ۴a \ , \ ۴a \ , \ ۴a \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض سوال}} a^۲ + (\frac{۱}{۲}a)^۲ + (\frac{۱}{۴}a)^۲ = ۴a + ۴a + ۴a$$

$$\Rightarrow \frac{۲۱}{۱۶}a^۲ = ۱۲a \xrightarrow{\div a} a = \frac{۱۲ \times ۱۶}{۲۱} = \frac{۶۴}{۷} \text{ (جمله اول دنباله هندسی)}$$

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ طبق فرض داریم:

دنبالهٔ هندسی قدیم : $a, ar, ar^۲, \dots \rightarrow$ دنبالهٔ هندسی جدید : $\frac{a}{۲}, \frac{ar}{۲}, \frac{ar^۲}{۲}, \dots$

$$\xrightarrow{\text{شرط دنبالهٔ هندسی}} \frac{a}{۲} + \frac{ar^۲}{۲} = ۲(\frac{ar}{۲}) \xrightarrow{\div \frac{a}{۲}} ۱ + r^۲ = ۲r \Rightarrow \underbrace{r^۲ - ۲r + ۱}_{(r-۱)^۲} = ۰ \Rightarrow r = ۱$$

پس تمام جملات دنبالهٔ حاصل با هم برابر است و دنبالهٔ فوق، ثابت است و در نتیجه قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر $d = ۰$ است.

$$\Rightarrow r + d = ۱ + ۰ = ۱$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنبالهٔ اعداد ثابت $a \ , a \ , a \ , \cdots$ است که $d = ۰$ و $r = ۱$ بوده و $r + d = ۱$ است.

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{a_۵}{a_۴} = \frac{a_۸}{a_۷} = q \ \Rightarrow \ \frac{x-۱}{x+۱} = \frac{x}{۲x+۱} \ \Rightarrow \ ۲x^۲ - x - ۱ = x^۲ + x$$

$$x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \qquad q_۱ \cdot q_۲ = (\frac{x_۱}{۲x_۱+۱})(\frac{x_۲}{۲x_۲+۱}) = \frac{x_۱x_۲}{۴x_۱x_۲ + ۲(x_۱+x_۲) + ۱} = \frac{-۱}{-۴+۴+۱} = -۱$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$a_۱ = x+۱ \ , a_۲ = x \ , a_۴ = x-۱ \ , a_۵ = ۲ - x$$
$$a_۱ \cdot a_۵ = a_۲ \cdot a_۴ \Rightarrow (x+۱)(۲-x) = x(x-۱)$$
$$\Rightarrow -x^۲ + x + ۲ = x^۲ - x \Rightarrow ۲x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \text{ یا } x = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow q = \frac{x}{x+۱} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۱} = \dfrac{\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۵}+۳} = \dfrac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \\ q = \dfrac{\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}+۱} = \dfrac{۱-\sqrt{۵}}{+۳-\sqrt{۵}} = \dfrac{-\sqrt{۵}-۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع مقادیر}} -۱$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ از فاکتورگیری استفاده می‌کنیم.

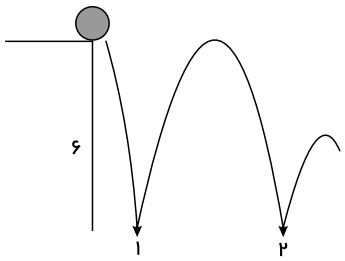
$$\frac{۳^x(۱+۳+۹+۲۷+۸۱+۲۴۳)}{۲^x(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۱+۲+۴+۸)}=۵۲$$

$$\Rightarrow (\frac{۳}{۲})^x \times \frac{۳۶۴}{\frac{۶۳}{۴}}=۵۲ \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^x=\frac{۶۳\times ۵۲}{۳۶۴\times ۴}$$

$$\xrightarrow{۳۶۴=۵۲\times ۷} (\frac{۳}{۲})^x=\frac{۹}{۴} \Rightarrow x=۲$$

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا توپ ۶ متر طی می‌کند تا به زمین برسد از این‌جا به بعد هر قدر به سمت بالا حرکت کند به همان میزان باید برگردد.



پس می‌توانیم فقط مسافت‌های طی‌شده به سمت بالا را محاسبه کنیم و در آخر در عدد ۲ ضرب کنیم، یعنی:

مسافت کل : $۶+۲$(مسافت‌های به سمت بالا)

$a_۱=\frac{۸}{۱۰}\times ۶$ بعد از برخورد اول

$a_۲=\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۸}{۱۰}\times ۶$ بعد از برخورد دوم

واضح است یک دنبالهٔ هندسی از اعداد با $q=\frac{۸}{۱۰}$ و $a_۱=\frac{۸}{۱۰}\times ۶$ داریم و باید مجموع صد جملهٔ اول آن را بیابیم. طبق نکتهٔ حدّ مجموع چون قدرنسبت کوچک‌تر از واحد است، هرچه به توان برسد کوچک‌تر می‌شود.

$$S_n=\frac{q(۱-q^n)}{۱-q} \xrightarrow{q^n\to ۰} \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_۱}{۱-q}$$

مسافت طی‌شده : و در نهایت $۶+۲(\frac{۰/۸\times ۶}{۱-۰/۸})=۵۴$

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴ برای اینکه یک معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد باید $\Delta>۰$ باشد بنابراین:

$$\Delta \Rightarrow b^۲-۴ac>۰ \Rightarrow ۳۶-۴(۲m-۱)(m-۲)>۰ \Rightarrow ۹-(۲m^۲-۴m-m+۲)>۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=(m+۱)(۲m-۷)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<m<۳/۵$$

درضمن ضریب $x^۲$ نباید صفر باشد یعنی $m\neq\frac{۱}{۲}$ است.

$$m\in(-۱,۳/۵)-\{\frac{۱}{۲}\}$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا ریشه مشترک را می‌یابیم:

$$x^۲+۶x+m=x^۲+۲x-۳m \Rightarrow ۴x=-۴m \Rightarrow x=-m$$

در یکی از معادله‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$$m^۲-۶m+m=۰ \Rightarrow m^۲=۵m \xrightarrow{m\neq ۰} m=۵$$

$$\xrightarrow{\text{معادلات}} \begin{cases} x^۲+۶x+۵=۰ \Rightarrow x=-۱\ ,\ -۵ \\ x^۲+۲x-۱۰=۰ \Rightarrow x=۳\ ,\ -۵ \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف دو ریشهٔ دیگر : } ۳-(-۱)=۴$$

۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴ مجموع ضرایب معادلهٔ روبه‌رو صفر است. $\Rightarrow \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=\frac{m}{۲} \end{cases} \Leftarrow y=۲x^۲-(m+۲)x+m$

$$x=۰ \Rightarrow y=m \qquad S=\frac{۱}{۲}|m(\frac{m}{۲}-۱)|=\frac{۳}{۴} \Rightarrow |m(\frac{m}{۲}-۱)|=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow |m(m-۲)|=۳ \Rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ m=۳ \end{cases} \qquad \text{رأس سهمی } y=x^۲-mx+۱ \begin{cases} \frac{m}{۲}=-\frac{۱}{۲} \\ \frac{m}{۲}=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴ معادله به‌صورت $x^۲ + x = ۵$ است که در آن $S = x_۱ + x_۲ = -۱$ و $P = x_۱ x_۲$ است. از طرفی $x(x+۱) = ۵$ است.

$$\Rightarrow \frac{۱}{x_۱ + ۱} = \frac{x_۱}{۵}\ ,\ \frac{۱}{x_۲ + ۱} = \frac{x_۲}{۵}$$

پس معادله‌ای پیدا می‌کنیم که ریشه‌هاش $\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}$ و $\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}$ باشد:

$$\begin{cases} S' = \frac{۱}{۱۲۵}(x_۱^۳ + x_۲^۳) = \frac{۱}{۱۲۵}(S^۳ - ۳SP) = \frac{-۱۶}{۱۲۵} \\ P' = \frac{۱}{۵^۶}(x_۱ x_۲)^۳ = \frac{۱}{۵^۶}P^۳ = -\frac{۱}{۱۲۵} \end{cases}$$

پس معادلهٔ موردنظر به‌صورت $x^۲ + \frac{۱۶}{۱۲۵}x - ۱ = ۰$ است:

$$\Rightarrow ۱۲۵x^۲ + ۱۶x = ۱$$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$S = P + ۲ \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + ۲ \xrightarrow{\times a} -b = -c + ۲a \Rightarrow c - b = ۲a$$

دقت کنید صورت سؤال $ax^۲ + bx - c = ۰$ داده شده است و با فرض مثبت بودن c معادلهٔ همواره جواب دارد $(\Delta > ۰)$ در ضمن $P = \frac{-c}{a}$ می‌شود.

$if\ a = ۱ \Rightarrow$ باید c ۲ واحد بزرگتر از b باشد $\Rightarrow \begin{cases} c = ۳, ۴, \cdots, ۹ \\ b = ۱, ۲, \cdots, ۷ \end{cases}$ ۷ حالت

$if\ a = ۲ \Rightarrow$ باید c ۴ واحد بزرگتر از b باشد. $\Rightarrow \begin{cases} c = ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \\ b = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \end{cases}$ ۵ حالت

$if\ a = ۳ \Rightarrow$ باید c ۶ واحد بزرگتر از b باشد. $\Rightarrow \begin{cases} c = ۷, ۸, ۹ \\ b = ۱, ۲, ۳ \end{cases}$ ۳ حالت

$if\ a = ۴ \Rightarrow\Rightarrow$ باید c ۸ واحد بزرگتر از b باشد. $\Rightarrow \begin{cases} c = ۹ \\ b = ۱ \end{cases}$ ۱ حالت

در مجموع ۱۶ حالت یا ۱۶ معادله خواهیم داشت.

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴ در معادلهٔ اولیه $x^۲ - x - ۴ = ۰$ داریم: $S = ۱$ و $P = -۴$

$$S' = x_۱^۳ + \frac{۱}{x_۲} + x_۲^۳ + \frac{۱}{x_۱} = (x_۱^۳ + x_۲^۳) + \frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = (S^۳ - ۳pS) + \frac{S}{P} \xrightarrow[P=-۴]{S=۱} S' = ۱ + ۱۲ - \frac{۱}{۴} = \frac{۵۱}{۴}$$

نکته: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲ باشند داریم:

$$\begin{cases} x_۱^۲ + x_۲^۲ = S^۲ - ۲P \\ x_۱^۳ + x_۲^۳ = S - ۳PS \end{cases}$$

از طرفی : $P' = (x_۱^۳ + \frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳ + \frac{۱}{x_۱}) = (x_۱ x_۲)^۳ + x_۱^۲ + x_۲^۲ = P^۳ + S^۲ - ۲P + \frac{۱}{P} = -۶۴ + ۱ + ۸ - \frac{۱}{۴} = -\frac{۲۲۱}{۴}$

در نهایت داریم : $x^۲ - \frac{۵۱}{۴} - \frac{۲۲۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲ - ۵۱x - ۲۲۱ = ۰$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$|S - P| = ۲ \Rightarrow |-\frac{b}{a} - (-\frac{c}{a})| = ۲ \xrightarrow{a>۰} |c - b| = ۲a$$

دقت کنید در صورت سؤال $ax^۲ + bx - c = ۰$ داده شده است و با فرض مثبت بودن c معادله همواره جواب دارد $(\Delta > ۰)$ در ضمن $p = -\frac{c}{a}$ می‌شود تعداد حالاتی که $c - b = ۲a$ قابل قبول می‌شود را محاسبه می‌کنیم به همین تعداد نیز برای $b - c = ۲a$ جواب خواهیم داشت.

$ifa = ۱ \Rightarrow$ باید c ۲ واحد بزرگتر از b باشد $\Rightarrow \begin{cases} c = ۳, ۴, \cdots, ۹ \\ b = ۱, ۲, \cdots, ۷ \end{cases} \Rightarrow$ ۷ حالت

$ifa = ۲ \Rightarrow$ باید c ۴ واحد بزرگتر از b باشد $\Rightarrow \begin{cases} c = ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \\ b = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \end{cases} \Rightarrow$ ۵ حالت

$ifa = ۳ \Rightarrow$ باید c ۶ واحد بزرگتر از b باشد $\Rightarrow \begin{cases} c = ۷, ۸, ۹ \\ b = ۱, ۲, ۳ \end{cases} \Rightarrow$ ۳ حالت

$ifa = ۴ \Rightarrow$ باید c ۸ واحد بزرگتر از b باشد $\Rightarrow \begin{cases} c = ۹ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow$ ۱ حالت

پس در مجموع $۲ \times ۱۶ = ۳۲$ حالت خواهیم داشت.

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$ باشند، داریم:

$$\alpha = ۳\beta, \alpha\beta = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳\beta^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \beta^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \beta = \pm\frac{۲}{۳}$$

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\beta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x^۲ - ax + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳ \times \frac{۴}{۹} - \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳} - \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \xrightarrow{\times ۳} ۴ - ۲a + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۱۶ = ۲a \Rightarrow a = ۸$$

$$\beta = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x^۲ - ax + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳ \times \frac{۴}{۹} + \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳} + \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \xrightarrow{\times ۳} ۴ + ۲a + ۱۲ = ۰ \Rightarrow a = -۸$$

$$\text{اختلاف مقادیر} = ۸ - (-۸) = ۱۶$$

روش دوم:

نکته: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر یکی از ریشه‌ها k برابر ریشهٔ دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^۲}{ac} = \frac{(k+۱)^۲}{k}$$

طبق نکتهٔ فوق $k = ۳$ است و داریم:

$$۳x^۲ - ax + ۴ = ۰, k = ۳ \Rightarrow \frac{(-a)^۲}{۳ \times ۴} = \frac{(۳+۱)^۲}{۳} \Rightarrow \frac{a^۲}{۱۲} = \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow a^۲ = \frac{۱۲ \times ۱۶}{۳} = ۶۴ \Rightarrow a = \pm ۸$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^۲ + ۶x + a = ۰ \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{۶}{۱} = -۶, p = \alpha \cdot \beta = a$$

چون $\alpha < \beta < ۰$، تفاضل ریشه‌ها یعنی $\alpha - \beta$ منفی است و داریم:

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{\frac{\Delta}{|a|}} \Rightarrow \alpha - \beta = -\sqrt{\frac{\Delta}{۱}} = -\sqrt{۳۶ - ۴a}$$

حال فرض سؤال را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳\alpha^۲ + ۲\beta^۲ = ۲٫۵\alpha^۲ + ۲٫۵\beta^۲ + ۰٫۵\alpha^۲ - ۰٫۵\beta^۲ = ۲٫۵(\alpha^۲ + \beta^۲) + ۰٫۵(\alpha^۲ - \beta^۲)$$
$$= ۲٫۵(S^۲ - ۲P) + ۰٫۵(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$
$$= ۲٫۵(۳۶ + ۲a) + ۰٫۵(-\sqrt{۳۶ - ۴a}) \times (-۶)$$
$$= ۲٫۵(۳۶ - ۲a) + ۳\sqrt{۳۶ - ۴a} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$
$$\Rightarrow ۹۰ - ۵a + ۳\sqrt{۴(۹ - a)} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$
$$\Rightarrow ۹۰ - ۵a + ۶\sqrt{۹ - a} = ۶ \times ۲\sqrt{۲} + ۸۵$$
$$\Rightarrow ۹۰ - ۵a + ۶\sqrt{۹ - a} = ۶\sqrt{۸} + ۸۵ \Rightarrow \begin{cases} ۹۰ - ۵a = ۸۵ \Rightarrow a = ۱ \\ ۹ - a = ۸ \\ \Rightarrow a = ۱ \end{cases}$$

۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴ چون a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a^۲ + b^۲ - ۱۲)x + a + b - ۱ = ۰$ هستند، داریم:

$$\text{ضرب ریشه‌ها}: a - b = \frac{a + b - ۱}{۱} \Rightarrow ab = a + b - ۱ \quad (۱)$$

$$\text{جمع ریشه‌ها}: a + b = \frac{-(a^۲ + b^۲ - ۱۲)}{۱} = a^۲ + b^۲ - ۱۲$$

از اتحاد $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$ استفاده می‌کنیم:

$$a + b = (a+b)^۲ - ۲ab - ۱۲ \xrightarrow{(۱)} a + b = (a+b)^۲ - ۲(a + b - ۱) - ۱۲$$

با فرض $a + b = t$ داریم:

$$t = t^۲ - ۲(t - ۱) - ۱۲ = t^۲ - ۲t + ۲ - ۱۲ \Rightarrow t^۲ - ۳t - ۱۰ = ۰$$
$$(t - ۵)(t + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۵ \\ t = -۲ \end{cases}$$

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴ با نوشتن شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی داریم:

$$x^۲ + ۲(a+۱)x + ۲a - ۱ = ۰$$
$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} a^۲ = \alpha \cdot \beta = p \Rightarrow a^۲ = \frac{۲a - ۱}{۱} = ۲a - ۱ \Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow (a-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

توجه کنید که به‌ازای $a = ۱$ معادلهٔ حاصل دارای دو ریشهٔ متمایز است.

$$x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۴ = ۱۲ > ۰$$

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴ طبق فرض داریم:

$$\alpha^۲\beta + \alpha\beta^۲ = \alpha^۲\beta \cdot \alpha\beta^۲ \xrightarrow{\div \alpha\beta} \alpha + \beta = \alpha^۲\beta^۲$$
$$\Rightarrow S = P^۲ \Rightarrow \frac{-b}{a} = (\frac{c}{a})^۲$$

$$\frac{-(-8)}{a}=(\frac{4}{a})^2\Rightarrow\frac{8}{a}=\frac{16}{a^2}\Rightarrow a=2$$

مقدار مورد نظر : $\log^2_{\sqrt{2}}=2$

۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴** طبق فرض داریم:

$$ax^2-ax-b=0(*)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{-(-a)}{a}=1\\ \alpha\beta=\frac{-b}{a}\end{cases}$$

$$40\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17\xrightarrow{\alpha=1-\beta}40\beta^2+20+20\beta^2-40\beta-20\beta=17\Rightarrow 60\beta^2-60\beta+3=0\quad(1)$$

معادلهٔ $(*)$ را ساده کرده و از رابطه استفاده می‌کنیم:

$$a(x^2-x)-b=0\xrightarrow{\beta:\text{ریشه}}a(\beta^2-\beta)-b=0\xrightarrow{(1)}a(-\frac{3}{60})=b\Rightarrow\frac{-b}{a}=\frac{1}{20}=\alpha\beta$$

مقدار $|\alpha-\beta|$ برابر است با:

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1^2-4(\frac{1}{20})}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

۴۷ ۱ **۲** ۳ ۴

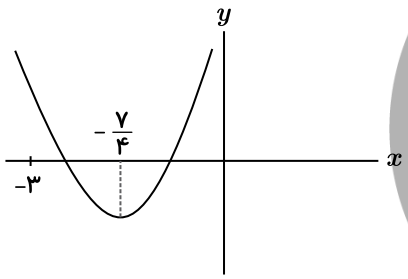
$$\alpha+\beta=\frac{-(-12)}{3}=4\Rightarrow\beta=4-\alpha\quad(1)$$

$$2\alpha^2+\beta^2-4a=7\xrightarrow{(1)}2\alpha^2+(4-\alpha)^2-4\alpha=7\Rightarrow 3\alpha^2-12\alpha+9=0\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=3\end{cases}\rightarrow a=-9$$

$$\frac{a}{\alpha_{max}}=\frac{-9}{3}=-3$$

۴۸ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به آنکه $x=-\frac{7}{4}$ طول رأس است پس:



$$\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow 49-8m>0\Rightarrow m<\frac{49}{8}\\ f(-3)>0\Rightarrow m-21+18>0\Rightarrow m>3\end{cases}$$

$$m=4,5,6$$

۴۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\frac{-5\pm\sqrt{25+4m}}{-2}<\frac{9}{2}\Rightarrow\begin{cases}5-\sqrt{25+4m}<9\Rightarrow\text{همواره درست}\\ 5+\sqrt{25+4m}<9\Rightarrow 0<25+4m<16\\ \qquad\Rightarrow\frac{-25}{4}<m<\frac{-9}{4}\\ \qquad m\in\{-6,-5,-4,-3\}\end{cases}$$

۵۰ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به اینکه ریشه‌های معادلهٔ اولی، نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ دومی بیشتر است بنابراین مجموع ریشه‌های معادلهٔ اولی، یک واحد از مجموع ریشه‌های معادلهٔ دومی بیشتر است.

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2}\ ,\ \alpha'+\beta'=\frac{-a}{2a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=1$$

$$\alpha\beta=\frac{b}{2}\ ,\ \alpha'\beta'=(\alpha-0/5)(\beta-0/5)=\alpha\beta-0/5(\underbrace{\alpha+\beta}_{0/5})+0/25=-\frac{6}{2\alpha}=-3$$

$$\Rightarrow\alpha\beta=\frac{b}{2}=-3\Rightarrow b=-6\Rightarrow[\frac{ab}{4}]=[-\frac{6}{4}]=-2$$

۵۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

برای حل معادلهٔ دو مجذوری از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$x^{۲}=t\Rightarrow t^{۲}-۷t-۵=۰\Rightarrow\Delta=b^{۲}-۴ac\Rightarrow\Delta=\sqrt{۶۹}\Rightarrow t=\frac{۷\pm\sqrt{۶۹}}{۲}\xrightarrow{t=x^{۲}>۰}x^{۲}=\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}\\ x_۲=\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}\end{cases}$$

چون دو ریشه قرینهٔ یکدیگرند پس جمع آنها صفر است و برای حاصلضرب داریم:

$$P=x_۱\cdot x_۲=-\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}s=۰\\ p=-\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}\Rightarrow p^{۲}=\frac{۴۹+۶۹+۱۴\sqrt{۶۹}}{۴}=\frac{۵۹+۷\sqrt{۶۹}}{۲}\end{cases}\quad ۲p^{۲}=۵۹+۷\sqrt{۶۹}$$

توجه: چون $S=۰$ است بنابراین $۲P^{۲}-۳(۰)P+۲(۰)=۲P^{۲}$

۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴ از روی $\alpha+\beta=۱$ و $\alpha\beta=-۲$ دو تا از ریشه‌ها یعنی α و β به دست می‌آیند.

$$x^{۲}-sx+p=۰\Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=-۱\end{cases}$$

$x=-۱$ را در معادلهٔ $۴x^{۳}+kx^{۲}-۹x-۲=۰$ قرار می‌دهیم.

$$۴(-۱)^{۳}+k-۹(-۱)-۲=۰\Rightarrow-۴+k+۹-۲=۰\Rightarrow k=-۳$$

۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴ طرف سمت چپ را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}=\frac{۱۶۰}{۹}\Rightarrow\frac{x^{۲}+(x^{۲}-۲x+۱)}{[x(۱-x)]^{۲}}=\frac{۱۶۰}{۹}\Rightarrow\frac{۲(x^{۲}-x)+۱}{(x-x^{۲})^{۲}}=\frac{۱۶۰}{۹}$$

$$\xrightarrow{x^{۲}-x=t}\frac{۲t+۱}{t^{۲}}=\frac{۱۶۰}{۹}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{t^{۲}+۲t+۱}{t^{۲}}=\frac{۱۶۰+۹}{۹}\Rightarrow(\frac{t+۱}{t})^{۲}=\frac{۱۶۹}{۹}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱+\frac{۱}{t}=\frac{۱۳}{۳}\\ ۱+\frac{۱}{t}=\frac{-۱۳}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{t}=\frac{۱۰}{۳},\frac{-۱۶}{۳}\Rightarrow t=\frac{۳}{۱۰},\frac{-۳}{۱۶}\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}-x=\frac{۳}{۱۰}\\ x^{۲}-x=-\frac{۳}{۱۶}\end{cases}$$

هر دو معادله $x^{۲}-x-\frac{۳}{۱۰}=۰$ و $x^{۲}-x+\frac{۳}{۱۶}=۰$ دارای جواب هستند و مجموع ریشه‌های هر کدام برابر ۱ است، پس مجموع جواب‌های معادله برابر $۱+۱=۲$ است.

۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴ در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ اختلاف ریشه‌های معادله برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\Rightarrow|x_۲-x_۱|=\frac{\sqrt{۴k^{۲}-۲۰}}{۱}=۲\sqrt{k^{۲}-۵}$$

که باید برابر $\frac{۴}{۳}K$ قرار دهیم:

$$۲\sqrt{k^{۲}-۵}=\frac{۴}{۳}k\Rightarrow\sqrt{k^{۲}-۵}=\frac{۲k}{۳}\Rightarrow k^{۲}-۵=\frac{۴k^{۲}}{۹}\Rightarrow k^{۲}=۹$$

$$\Rightarrow[\frac{k^{۲}}{۲}]=[۴/۵]=۴$$

۵۵ ۱ ۲ ۳ ۴

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور xها باشد، آن است که $a<۰$ و $\Delta<۰$ باشد:

$$a<۰\Rightarrow۱-m<۰\Rightarrow m>۱\quad(I)$$

$$\Delta<۰\xrightarrow{b^{۲}-۴ac<۰}۴(m-۳)^{۲}-۴(۱-m)(-۱)<۰\xrightarrow{\div۴}(m-۳)^{۲}+(۱-m)<۰$$

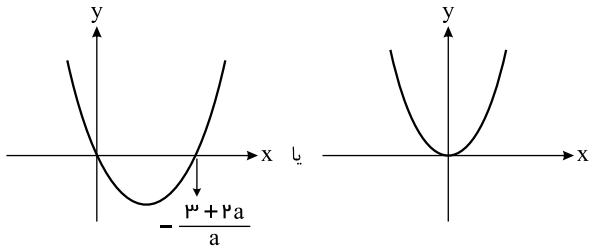
$$\Rightarrow m^{۲}-۶m+۹+۱-m<۰\Rightarrow m^{۲}-۷m+۱۰<۰\Rightarrow(m-۲)(m-۵)<۰\Rightarrow۲<m<۵\quad(II)$$

از اشتراک I و II به جواب $۲<m<۵$ می‌رسیم.

۵۶ ۱ ۲ ۳ ۴ سهمی $y=ax^{۲}+(۳+۲a)x$ مبدأ گذر است، زیرا:

$$y=۰\Rightarrow ax^{۲}+(۳+۲a)x=۰\Rightarrow x(ax+۳+۲a)=۰\Rightarrow x=۰,ax+۳+۲a=۰\Rightarrow x=-\frac{۳+۲a}{a}$$

برای آن که سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشهٔ معادله $y=0$ یعنی $x=-\frac{3+2a}{a}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$$\text{سهمی رو به بالا} \Rightarrow a>0 \Rightarrow -\frac{3+2a}{a}\geq 0 \Rightarrow \frac{3+2a}{a}\leq 0 \xrightarrow{a>0} 3+2a\leq 0 \Rightarrow 2a\leq -3 \Rightarrow a\leq -\frac{3}{2}$$

چون اشتراک $a>0$ و $a\leq -\frac{3}{2}$ سهمی است، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۵۷ ۱ ۲ ۳ ۴ عرض رأس سهمی $y=\frac{-\Delta}{4a}$ است پس:

$$y=mx^2-12x+5m-1$$
$$\frac{-\Delta}{4a}=2 \Rightarrow \Delta=-8a \Rightarrow 144-4m(5m-1)=-8m \Rightarrow 144-20m^2+4m=-8m$$
$$\Rightarrow 20m^2-12m-144=0 \xrightarrow{\div 4} 5m^2-3m-36=0$$
$$\Rightarrow \Delta=9-4\times 5\times(-36)=729 \Rightarrow m=\frac{3\pm 27}{10} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-\frac{24}{10} \end{cases}$$

چون سهمی دارای کمترین مقدار است پس $m>0$ و $m=3$ قابل قبول است.

$$y=3x^2-12x+14 \Rightarrow \text{محور تقارن}: x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\times 3}=2$$

۵۸ ۱ ۲ ۳ ۴ رأس سهمی $y=-ax^2+ax+2$ را می‌یابیم:

$$\text{رأس } x=-\frac{a}{2(-a)}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{a}{4}+\frac{a}{2}+2=\frac{a}{4}+2$$
$$\text{رأس } (\frac{1}{2},\frac{a}{4}+2)$$

نقطهٔ فوق بر روی سهمی $y=2bx^2-bx-1$ قرار دارد.

$$\frac{a}{4}+2=2b\times\frac{1}{4}-\frac{b}{2}-1 \Rightarrow \frac{a}{4}+2=-1 \Rightarrow \frac{a}{4}=-3 \Rightarrow a=-12$$

حال رأس سهمی $y=2bx^2-bx-1$ را می‌یابیم:

$$\text{رأس } x=-\frac{-b}{2\times 2b}=\frac{1}{4} \Rightarrow y=2b\times\frac{1}{16}-\frac{b}{4}-1=\frac{b}{8}-\frac{b}{4}-1 \Rightarrow y=-\frac{b}{8}-1 \Rightarrow \text{رأس } (\frac{1}{4},-\frac{b}{8}-1)$$

نقطهٔ فوق بر روی سهمی $y=-ax^2+ax+2$ قرار دارد.

$$-\frac{b}{8}-1=-\frac{9}{16}+\frac{9}{4}+2=\frac{39}{16}+2 \xrightarrow{a=-12} -\frac{b}{8}-1=\frac{-36}{16}+2 \Rightarrow -\frac{b}{8}-1=-\frac{9}{4}+2 \Rightarrow -\frac{b}{8}=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow b=-6 \Rightarrow b-a$$
$$=-6-(-12)=6$$

۵۹ ۱ ۲ ۳ ۴ معادلهٔ تلاقی سهمی داده‌شده و خط $y=-x$ باید ریشهٔ مضاعف بدهد.

$$\begin{cases} y=3x^2+(2m-1)x+m+\frac{4}{3} \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow 3x^2+(2m-1)x+m+\frac{4}{3}=-x \Rightarrow 3x^2+2mx-x+m+\frac{4}{3}=-x \Rightarrow 3x^2+2mx+m+\frac{4}{3}=0 \quad (1)$$
$$\Delta=0 \Rightarrow 4m^2-4\times 3(m+\frac{4}{3})=0 \xrightarrow{\div 4} m^2-3(m+\frac{4}{3})=0 \Rightarrow m^2-3m-4=0 \Rightarrow (m-4)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=-1 \end{cases}$$

ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) باید در ناحیهٔ دوم باشد، پس داریم:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2m}{2\times 3}=-\frac{m}{3}<0 \Rightarrow m>0$$

بنابراین $m=4$ قابل قبول است و داریم:

$$y=3x^2+(2\times 4-1)x+4+\frac{4}{3}=3x^2+7x+\frac{16}{3}$$
$$\text{رأس } x=-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2\times 3}=-\frac{7}{6}$$

۶۰ ۱ ۲ ۳ ۴ از روی معادلهٔ سهمی، رأس آن را می‌یابیم:

$$\text{رأس}: S(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})=(\frac{-(-4)}{2k},\frac{-(16+24k)}{4k})=(\frac{2}{k},\frac{-4}{k}-6)$$

این نقطهٔ روی خط $y=-۴x-۴$ قرار دارد، پس:

$$\frac{-۴}{k}-۶=\frac{-۸}{k}-۴\Rightarrow\frac{۴}{k}=۲\Rightarrow k=۲$$

در نتیجه عرض رأس سهمی برابر است با:

$$y_S=\frac{-۴}{۲}-۶=-۸$$

۶۱ ۱ ۲ **۳** ۴ محور تقارن دو سهمی یکسان است، پس:

$$\begin{cases} y=x^۲+ax-۲\rightarrow \text{محور تقارن}: x=\dfrac{-a}{۲(۱)} \\ y=-x^۲-۲x+b\rightarrow \text{محور تقارن}: x=\dfrac{-(-۲)}{۲(-۱)} \end{cases}\Rightarrow\frac{-a}{۲}=-۱\Rightarrow a=۲$$

طبق فرض، دو سهمی در دو نقطه به عرض ۱ مشترک‌اند، پس:

$$\text{سهمی اول}: y=x^۲+۲x-۲=۱\Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰\Rightarrow(x+۳)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\x=۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } x=۱ \text{ در سهمی دوم}} ۱=-۱^۲-۲(۱)+b\Rightarrow b=۴$$

توجه: می‌توانستیم به‌جای $x=۱$، ریشه $x=-۳$ را در معادلهٔ سهمی دوم جایگذاری کنیم.

۶۲ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم که نمودار سهمی، نسبت به محور تقارن سهمی (که از رأس می‌گذرد)، متقارن است. دو نقطه $A(۳,y)$ و $B(-۵,y)$ که عرض برابری دارند نسبت به محور تقارن سهمی باید متقارن باشند، پس:

$$x_s=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow x_s=\frac{-۵+۳}{۲}=-۱$$

همچنین عرض رأس برابر ۱ است، پس معادلهٔ سهمی به‌صورت روبه‌رو است:

$$y=a(x-(-۱))^۲+۱=a(x+۱)^۲+۱$$

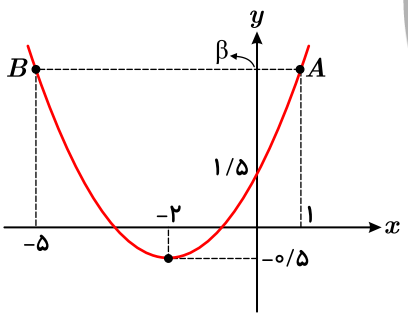
معادلهٔ سهمی را با محور xها تلاقی می‌دهیم:

$$a(x+۱)^۲+۱=۰\Rightarrow ax^۲+۲ax+(a+۱)=۰\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{-۲a}{a}=-۲\\ \alpha\beta=\frac{a+۱}{a}\end{cases}$$

$$\text{طبق فرض}: \alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta\Rightarrow ۵=۴-۲(\frac{a+۱}{a})\Rightarrow\frac{a+۱}{a}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow ۲a+۲=-a\Rightarrow a=\frac{-۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y=\frac{-۲}{۳}(x+۱)^۲+۱\xrightarrow[\text{محور } y\text{ها}]{\text{تلاقی با}} y=\frac{-۲}{۳}(۰+۱)^۲+۱=\frac{-۲}{۳}+۱=\frac{۱}{۳}$$

۶۳ **۱** ۲ ۳ ۴



$$\text{طول رأس } x=\frac{-۵+۱}{۲}=-۲\rightarrow f(x)=a(x+۲)^۲-\frac{۱}{۲}$$

$$(۰,\frac{۳}{۲})\in f(x)\frac{۳}{۲}=a(۰+۲)^۲-\frac{۱}{۲}\rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

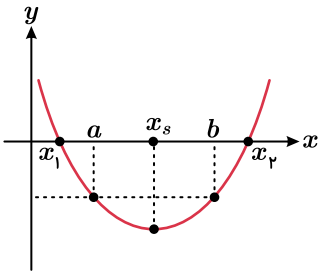
$$(۱,\beta)\in f(x)\rightarrow\beta=\frac{۱}{۲}(۱+۲)^۲-\frac{۱}{۲}\rightarrow\beta=۴$$

۶۴ **۱** ۲ ۳ ۴ توجه: با توجه به شکل زیر در هر سهمی، اگر b,a دو نقطهٔ هم‌عرض باشند آنگاه:

$$x_s=\frac{a+b}{۲}$$

و اگر $x_۱,x_۲$ ریشه‌ها (صفرها) سهمی باشند آنگاه:

$$x_۱+x_۲=۲x_s$$



در یک سهمی، اگر دو نقطهٔ هم‌عرض داشته باشیم، طول رأس سهمی میانگین طول این دو نقطه است. در این سؤال طول رأس سهمی $x_s=\frac{۳}{۴}$ است و در نتیجه مجموع صفرهای

سهمی برابر $۲x_s = \frac{۳}{۲}$ است.

۶۵ ۱ ۲ ۳ **۴** $x^۳ + ۸$ را به عنوان مخرج مشترک سه عبارت می‌گیریم:

$$\frac{x^۲ - ۲x + ۴ - (x^۲ - ۹x - ۲)}{x^۳ + ۸} = \frac{۶x(x+۲)}{x^۳ + ۸} \Rightarrow ۷x + ۶ = ۶x^۲ + ۱۲x$$

$$\Rightarrow ۶x^۲ + ۵x - ۶ = ۰ \Rightarrow (۲x + ۳)(۳x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}, \frac{۲}{۳}$$

هر دو جواب قابل‌قبول‌اند که فقط $x = \frac{۲}{۳}$ مثبت است.

۶۶ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{(۲-x)^۲} = \frac{۴۰}{۹} \Rightarrow \frac{۲x^۲ - ۴x + ۴}{x^۲(۲-x)^۲} = \frac{۴۰}{۹} \Rightarrow ۴۰x^۲(x-۲)^۲ - ۱۸x(x-۲) - ۳۶ = ۰ \xrightarrow{x(x-۲)=t}$$

$$۴۰t^۲ - ۱۸t - ۳۶ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۸ \pm \sqrt{۱۸^۲ + ۳۶ \times ۱۶۰}}{۸۰} \Rightarrow \begin{cases} t = x(x-۱) = \frac{۶}{۵} \Rightarrow x^۲ - x - \frac{۶}{۵} = ۰ \Rightarrow S_۱ = ۱ \\ t = x(x-۱) = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow x^۲ - x + \frac{۳}{۴} = ۰ \Rightarrow S_۲ = ۱ \end{cases}$$

بنابراین مجموع ۴ ریشه برابر ۲ است.

۶۷ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v درنظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $۱۰۰ + v$ و در خلاف جهت حرکت آب $۱۰۰ - v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_۱ = \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_۲ = \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v} \end{cases} \Rightarrow t_۲ - t_۱ = ۵ \Rightarrow \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v} = ۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲۰۰(۱۰۰+v) - ۱۲۰۰(۱۰۰-v)}{(۱۰۰-v)(۱۰۰+v)} = \frac{۱۲۰۰۰۰ + ۱۲۰۰v - ۱۲۰۰۰۰ + ۱۲۰۰v}{۱۰۰۰۰ - v^۲} = ۵$$

$$\Rightarrow ۲۴۰۰v = ۵(۱۰۰۰۰ - v^۲) \Rightarrow ۴۸۰v = ۱۰۰۰۰ - v^۲$$

$$\Rightarrow v^۲ + ۴۸۰v - ۱۰۰۰۰ = (v-۲۰)(v+۵۰۰) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = ۲۰ & \text{ق ق} \\ v = -۵۰۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به‌راحتی به جواب $v = ۲۰$ برسید.

۶۸ ۱ ۲ ۳ **۴** اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به‌تنهایی در $k + ۹$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{۱}{k} + \frac{۱}{k+۹} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲k+۹}{k \cdot (k+۹)} = \frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow k^۲ + ۹k = ۴۰k + ۱۸۰ \Rightarrow k^۲ - ۳۱k - ۱۸۰ = (k-۳۶)(k+۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۳۶ \\ k = -۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۶۹ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت پرواز پرنده را v درنظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت $v + ۵$ و سرعت برگشت $v - ۵$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_۱ = \frac{۱}{v+۵} \\ \text{مسیر برگشت } t_۲ = \frac{۱}{v-۵} \end{cases} \Rightarrow t_۱ + t_۲ = \underbrace{۹}_{\text{دقیقه}} \rightarrow \frac{۱}{v+۵} + \frac{۱}{v-۵} = \underbrace{\frac{۹}{۶۰}}_{\text{ساعت}}$$

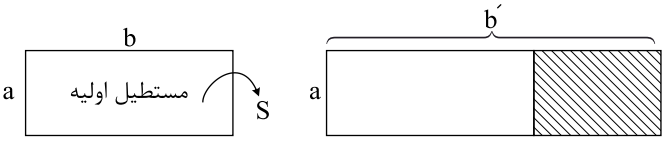
$$\Rightarrow \frac{v-۵+v+۵}{(v+۵)(v-۵)} = \frac{۲v}{v^۲ - ۲۵} = \frac{۳}{۲۰} \Rightarrow ۳v^۲ - ۷۵ = ۴۰v$$

$$\Rightarrow ۳v^۲ - ۴۰v - ۷۵ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶۰۰ + ۹۰۰ = ۲۵۰۰} \begin{cases} v_۱ = \frac{۴۰ + ۵۰}{۶} = ۱۵ & \text{ق} \\ v_۲ = \frac{۴۰ - ۵۰}{۶} = \frac{-۵}{۳} & \text{غ ق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به‌راحتی به جواب $v = ۱۵$ برسید.

۷۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$\frac{b}{a} = \frac{۵}{۴}$ ، مستطیل طلایی $\frac{b'}{a} = \frac{b'+a}{b'} \Rightarrow b'^۲ - ab' - a^۲ = ۰$



$\Rightarrow \Delta = a^۲ + ۴a^۲ = ۵a^۲ \Rightarrow b' = \frac{a \pm \sqrt{۵a^۲}}{۲} = \frac{a \pm a\sqrt{۵}}{۲} = a(\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲})$

$\Rightarrow b' = a(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$ ق ق $\qquad \frac{s'}{s} = \frac{ab'}{ab} = \frac{a(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})}{\frac{۵}{۴}a} = \frac{۲}{۵}(۱+\sqrt{۵}) = ۰/۴(۱+\sqrt{۵})$

۷۱ ۱ ۲ ۳ **۴** برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها از بین بروند.

$۳a + \sqrt{۲a^۲ + ۴a} = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲a^۲ + ۴a} = ۲ - ۳a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲a^۲ + ۴a = ۴ + ۹a^۲ - ۱۲a \to ۷a^۲ - ۱۶a + ۴ = ۰$

$\xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۲۵۶ - ۱۱۲ = ۱۴۴}$ $\begin{cases} a = \frac{۱۶+۱۲}{۱۴} = ۲ & \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند.)} \\ a = \frac{۱۶-۱۲}{۱۴} = \frac{۲}{۷} & \text{ق ق} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{a+۱}{a} = \frac{\frac{۲}{۷}+۱}{\frac{۲}{۷}} = \frac{\frac{۹}{۷}}{\frac{۲}{۷}} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$

۷۲ ۱ ۲ **۳** ۴ لازم است زیر رادیکال‌ها نامنفی باشد، بنابراین داریم:

۱) $-x^۳ + ۴x^۲ + ۲۵x - ۱۰۰ \geq ۰ \Rightarrow -x^۲(x-۴) + ۲۵(x-۴) \geq ۰ \Rightarrow (x-۴)(-x^۲+۲۵) \geq ۰ \Rightarrow (x-۴)(۵+x)(۵-x) \geq ۰$

x	-۵		۴		۵	
	+	−	−	+	+	−

$\Rightarrow x \leq -۵ \quad ۴ \leq x \leq ۵ \quad (I)$

۲) $-x^۲ + ۶x - ۸ \geq ۰ \Rightarrow (x-۲)(-x+۴) \geq ۰$

x		۲		۴	
	−	+	+	−	

$\Rightarrow ۲ \leq x \leq ۴ \quad (II)$

لازم است ریشه متعلق به اشتراک جواب‌های به‌دست آمده باشد. اشتراک این دو جواب $\{۴\}$ است؛ پس معادله نمی‌تواند ریشه‌ای غیر از $x = ۴$ داشته باشد. به ازای $x = ۴$ معادله به تساوی درست $۶ = ۴ + ۲$ تبدیل می‌شود، پس $x = ۴$ تنها ریشهٔ معادله است.

۷۳ ۱ ۲ **۳** ۴ شرط معادله: $x > ۱$

$\frac{\sqrt{x+۱}}{۳+\sqrt{x-۱}} - \frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}} = \frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}} \Rightarrow \sqrt{x+۱}(\frac{۱}{۳+\sqrt{x-۱}} - \frac{۱}{۳-\sqrt{x-۱}}) = \frac{x-۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow \sqrt{x+۱}(\frac{۳-\sqrt{x-۱}-۳-\sqrt{x-۱}}{(۳+\sqrt{x-۱})(۳-\sqrt{x-۱})})$

$= (x-۱)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \sqrt{x+۱} \times \frac{-۲\sqrt{x-۱}}{۹-(x-۱)} = \sqrt{x-۱} \Rightarrow \frac{-۲\sqrt{x-۱} \times \sqrt{x+۱}}{۹-x+۱} = \sqrt{x-۱}$

با توجه به معادلهٔ اصلی $x \neq ۱$ است و می‌توان $\sqrt{x-۱}$ را در معادله فوق از طرفین ساده کرد.

$\frac{-۲\sqrt{x+۱}}{۱۰-x} = ۱ \Rightarrow ۲\sqrt{x+۱} = x - ۱۰ \quad (۱) \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴(x+۱) = (x-۱۰)^۲ \Rightarrow x^۲ - ۲۰x + ۱۰۰ = ۴x + ۴$

$\Rightarrow x^۲ - ۲۴x + ۹۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۲۴)^۲ - ۴ \times ۱ \times ۹۶ = ۱۹۲$

$x = \frac{۲۴ \pm \sqrt{۱۹۲}}{۲} = \frac{۲۴ \pm ۸\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ \pm ۴\sqrt{۳}$

در معادله (۱) باید $x \geq ۱۰$ باشد که در این صورت فقط $x = ۱۲ + ۴\sqrt{۳}$ قابل قبول است. پس معادله فوق فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

۷۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲} - \frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}} = \frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$

با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{۲-x} = t$ داریم:

$\frac{۱}{۲+t} - \frac{۱}{۲-t} = \frac{t^۲}{۵t} = \frac{t}{۵} \Rightarrow \frac{۲-t-(۲+t)}{(۲+t)(۲-t)} = \frac{t}{۵} \Rightarrow \frac{-۲t}{۴-t^۲} = \frac{t}{۵}$

یکی از ریشه‌های معادلهٔ فوق $t = ۰$ است، داریم:

$$\frac{-۲}{۴-t^۲} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۴ - t^۲ = -۱۰ \Rightarrow t^۲ = ۱۴ \Rightarrow t = \pm\sqrt{۱۴}$$

چون $t = \sqrt{۲-x} \geq ۰$، پس $t = -\sqrt{۱۴}$ غیرقابل قبول است، داریم:

$$t = ۰ \Rightarrow \sqrt{۲-x} = ۰ \Rightarrow x = ۲$$
$$t = \sqrt{۱۴} \Rightarrow \sqrt{۲-x} = \sqrt{۱۴} \Rightarrow ۲ - x = ۱۴ \Rightarrow x = -۱۲$$

توجه کنید که $x = ۲$ غیرقابل قبول است، زیرا در سمت راست معادله مخرج را صفر می‌کند، بنابراین معادله جواب مثبت ندارد.

۷۵ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مقداری نامنفی است، پس:

$$\begin{cases} \sqrt{x-۲} \to x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \\ \sqrt{۲-x} \to ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \end{cases} \Rightarrow x = ۲$$

یعنی فقط $x = ۲$ می‌تواند قابل قبول باشد که آن را امتحان می‌کنیم.

$$\underbrace{\sqrt{۲ \times ۲ - ۳}}_{۱} = \underbrace{\sqrt{۲ + \sqrt{۲-۲}}}_{\sqrt{۲}} - \underbrace{\sqrt{۲-۲}}_{۰} \quad \text{غ ق ق} \quad \times$$

در نتیجه معادلهٔ داده‌شده، فاقد ریشهٔ حقیقی است.

۷۶ ۱ ۲ **۳** ۴ در ابتدا باید بگوئیم $a = ۰$ قابل قبول است؛ زیرا در این صورت $x = ۰$ جواب صحیح معادله است.

حال اگر $a \neq ۰$ باشد، داریم:

$$\sqrt{x} = a - \sqrt{x-a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x = a^۲ + x - a - ۲a\sqrt{x-a} \Rightarrow \sqrt{x-a} = \frac{a-۱}{۲}$$

$$\to x = (\frac{a+۱}{۲})^۲$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد، لازم است a عددی فرد باشد که در بین اعداد طبیعی تک‌رقمی مقادیر ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ قابل قبول‌اند.

پس در مجموع ۶ مقادیر صحیح و تک‌رقمی برای a قابل قبول است.

۷۷ **۱** ۲ ۳ ۴ طبق فرض داریم:

$$۱۵x^۲ + ۷۳x + ۱۴ < ۰ \Rightarrow \underbrace{(۵x+۱)}_{x=-\frac{۱}{۵}} \underbrace{(۳x+۱۴)}_{x=-\frac{۱۴}{۳}} < ۰ \Rightarrow \frac{-۱۴}{۳} < x < \frac{-۱}{۵} \quad (I)$$

$$|\frac{x-۱}{۲} - ۱| > ۳ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} - ۱ > ۳ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} > ۴ \Rightarrow x > ۹ \\ \frac{x-۱}{۲} - ۱ < -۳ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} < -۲ \Rightarrow x < -۳ \end{cases} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } (II),(I)} -\frac{۱۴}{۳} < x < -۳ \Rightarrow max(b-a) = -۳ - (-\frac{۱۴}{۳}) = \frac{۵}{۳}$$

۷۸ ۱ ۲ ۳ **۴** طبق فرض داریم:

$$-۲ < \frac{۲}{x^۲ - ۳x + ۲} < ۰ \Rightarrow \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{۲} < \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < -۱ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۳ < ۰ \quad (*)$$

در عبارت درجه دوم $x^۲ - ۳x + ۳$ داریم $\Delta = ۹ - ۱۲ < ۰$ ، $a = ۱ > ۰$، پس این عبارت همواره مثبت بوده و نامعادله $(*)$ هیچ جواب حقیقی ندارد.

۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** طبق فرض، دامنهٔ f مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، پس:

$$\begin{cases} m^۲ - m - ۵ < ۰ \to \frac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲} < m < \frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲} \quad (I) \\ -m^۲ + ۲m - ۳ < ۰ \to \Delta = ۴ - ۱۲ < ۰ \Rightarrow (\text{همواره برقرار}) \end{cases}$$

از طرفی: $f(m^۲ - m - ۵) < f(-۳ + ۲m - m^۲) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} m^۲ - m - ۵ > -۳ + ۲m - m^۲$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ > ۰ \Rightarrow (۲m+۱)(m-۲) > ۰ \Rightarrow (m < -\frac{۱}{۲}) \cup (m > ۲) \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } (II),(I)} (\frac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}, -\frac{۱}{۲}) \cup (۲, \frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲}) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -۱$$

$\simeq -۱,۷۵$ $\quad$ $\simeq ۲,۷۵$

m فقط یک مقدار صحیح را می‌تواند بپذیرد.

۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰ \Rightarrow \frac{x-۴}{x+۱}>۰ \rightarrow$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
	$+$	ن	ت	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۴$$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰ \Rightarrow \frac{-x-۶}{x+۱}<۰ \rightarrow$$

x	$-\infty$		-۶		-۱		$+\infty$
	$-$	۰	$+$	ن	ت	$-$	

$$\Rightarrow x<-۶ \text{ یا } x>-۱ \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x>۴$ یا $x<-۶$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.

۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴ **روش اول:**

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}>\frac{x}{x-۲} \rightarrow \frac{۷x-۸}{(x-۲)(x+۱)}-\frac{x}{x-۲}>۰$$

$$\rightarrow \frac{۷x-۸-x^۲-x}{(x-۲)(x+۱)}>۰ \rightarrow \frac{-x^۲+۶x-۸}{(x-۲)(x+۱)}>۰$$

$$\rightarrow \frac{x^۲-۶x+۸}{(x-۲)(x+۱)}<۰ \rightarrow \frac{(x-۴)(x-۲)}{(x-۲)(x+۱)}<۰$$

$$\rightarrow \frac{x-۴}{x+۱}<۰ \xrightarrow[\text{توجه کنید } x=۲ \text{ مخرج را صفر می‌کند.}]{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
	$+$	ن	$-$	ن	$-$	۰	$+$		

$$\rightarrow -۱<x<۲ \text{ یا } ۲<x<۴ \rightarrow x \in (-۱,۲) \cup (۲,۴)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x=۰ \longrightarrow \frac{-۸}{-۲}>۰$: درست $\longrightarrow$ گزینهٔ دوم حذف می‌شود

$x=۳ \longrightarrow \frac{۱۳}{۴}>۳$: درست $\longrightarrow$ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند

۸۲ ۱ ۲ ۳ ۴ البته مجموعهٔ نامعادله باید بازهٔ $(۲,۴)$ باشد نه $[۲,۴]$ از طرفی مخرج کسر به ازای $x>\frac{۳}{۲}$ همواره مثبت است.

$$x-۳\sqrt{x}+۲=۰ \Rightarrow (\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۴ \end{cases}$$

در بازهٔ $(۱,۴)$ عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادلهٔ $(۲,۴)$ باشد در این بازه پرانتز اول نیز باید منفی باشد. در ضمن $x=۲$ ریشهٔ این عبارت است.

$$x=۲ \Rightarrow ۴m^۲-۴-۸m+۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ m=۲ \end{cases}$$

$$if \quad m=۰ \Rightarrow (-x^۲+۴)$$

این عبارت در بازهٔ $(۲,۴)$ همواره منفی است و قابل قبول است.

$$if \quad m=۲ \Rightarrow (۳x^۲-۸x+۴)$$

این عبارت در بازهٔ $(۲,۴)$ مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط $m=۰$ مورد قبول است.

۸۳ ۱ ۲ ۳ ۴ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. توجه کنید که به دلیل وجود $\sqrt{x}$، باید $x \geq ۰$ باشد.

$$m=-۱ \Rightarrow P\frac{\overbrace{(۴x+۴)}^{\text{مثبت}}(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰$$

x		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴	
P		$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	ت ن	$+$	

$\Rightarrow$ جواب : $(۱ , \frac{۳}{۲}] \cup (۴ , +\infty)$

$$m=\frac{۱}{۳} \Rightarrow P=\frac{(-\frac{۸}{۹}x^۲-\frac{۴}{۳}x+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰ \xrightarrow{\times(-\frac{۹}{۴})} P=\frac{(۲x^۲+۳x-۹)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \leq ۰ \Rightarrow \frac{(x+۳)(۲x-۳)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \leq ۰$$

عبارت $(۲x-۳)^۲$ همواره نامنفی است، پس $x=\frac{۳}{۲}$ یکی از جواب‌های نامعادله است. از طرفی به دلیل $x\geq ۰$، عبارت $x+۳$ مثبت است، پس:

$$(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)<۰ \Rightarrow ۱<x<۴$$

$x=\frac{۳}{۲}$ در بازهٔ $(۱\ ,\ ۴)$ قرار دارد، پس این بازه جواب نامعادله است.

$$m=۱ \Rightarrow P=\frac{(-۴x+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}\geq ۰$$

x		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴	
P		−	ت ن	−	۰	+	ت ن	−	

$\Rightarrow$ جواب : $[\frac{۳}{۲}\ ,\ ۴)$

$$m=\frac{۷}{۳} \Rightarrow P=\frac{(\frac{۴۰}{۹}x^۲-\frac{۲۸}{۳}x+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}\geq ۰ \xrightarrow{\times(\frac{۹}{۴})} P=\frac{(۱۰x^۲-۲۱x+۹)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}\geq ۰ \Rightarrow \frac{(۵x-۳)(۲x-۳)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}\geq ۰$$

عبارت $(۲x-۳)^۲$ همواره نامنفی است، پس:

$$\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} \frac{۵x-۳}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}\geq ۰ \Rightarrow$$

x		۰		$\frac{۳}{۵}$		۱		۴	
P		−	ت ن	+	۰	−	ت ن	+	

$\Rightarrow$ جواب : $[\frac{۳}{۵}\ ,\ ۱)\cup(۴\ ,\ +\infty)\cup\{\frac{۳}{۲}\}$

۸۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا نامعادلهٔ دوطرفهٔ $۰<\frac{۱-۳x}{x+۱}<-۲$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰ \Rightarrow$$

x		-۱		$\frac{۱}{۳}$	
$\frac{۱-۳x}{x+۱}$	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow x<-۱$ یا $x>\frac{۱}{۳}$ (۱)

$$\frac{۱-۳x}{x+۱}>-۲ \Rightarrow \frac{۱-۳x}{x+۱}+۲>۰ \Rightarrow \frac{۱-۳x+۲x+۲}{x+۱}>۰ \Rightarrow \frac{۳-x}{x+۱}>۰ \Rightarrow$$

x		-۱		۳	
$\frac{۳-x}{x+۱}$	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow -۱<x<۳$ (۲)

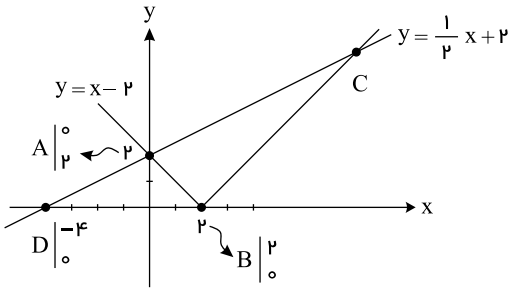
اشتراک (۱) و (۲) جواب نامعادله است.

$$(۱)\cap(۲): \frac{۱}{۳}<x<۳$$

حال حدود $\frac{x}{۲}$ و سپس $[\frac{x}{۲}]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲} \Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۰,۱$$

۸۵ ۱ ۲ ۳ ۴ دو تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^۲}=|x-۲|$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ را رسم می‌کنیم.



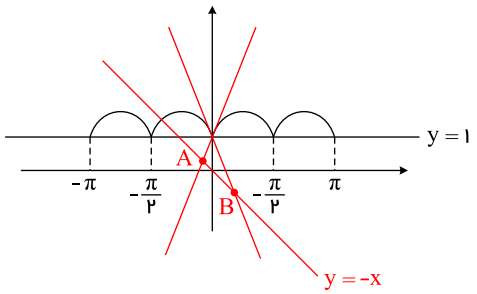
نقطهٔ C محل برخورد شاخهٔ $y=x-۲$ با خط $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ است:

$$\frac{۱}{۲}x+۲=x-۲ \Rightarrow x=۸\ ,\ y=۶ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۸\\۶\end{matrix}\right.$$

پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BDC}} - S_{\overset{\Delta}{ABD}}$$
$$= (\frac{۱}{۲}BD \times y_c) - (\frac{۱}{۲}BD \times y_A) = \frac{۱}{۲}BD(y_C - y_A)$$
$$= \frac{۱}{۲}(۲ - ۴)(۶ - ۲) = ۱۲$$

۸۶ ۱ ۲ **۳** ۴



$$\begin{cases} x \to ۰^+ \Rightarrow y = \sin ۲x + ۱ \Rightarrow y' = ۲\cos ۲x \Rightarrow m_۱ = ۲ \\ x \to ۰^- \Rightarrow y = -۲\sin ۲x + ۱ \Rightarrow y' = -۲\cos ۲x \Rightarrow m_۲ = -۲ \end{cases}$$

تابع از نقطهٔ $(۰, ۱)$ عبور می‌کند پس خطوط مماس در این نقطه را به‌دست می‌آوریم و محل تقاطع آن‌ها با را محاسبه می‌کنیم:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$
$$\begin{cases} d_۱ : y - ۱ = ۲x \xrightarrow{y=-x} x = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow A(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}) \\ d_۱ : y - ۱ = -۲x \xrightarrow{y=-x} x = ۱ \Rightarrow B(۱, -۱) \end{cases}$$

$$|AB| = \sqrt{(-\frac{۱}{۳} - ۱)^۲ + (\frac{۱}{۳} + ۱)^۲} = \sqrt{\frac{۱۶}{۹} + \frac{۱۶}{۹}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

۸۷ **۱** ۲ ۳ ۴ نمودارهای دو تابع به‌صورت زیر هستند.

$$y = |x + ۲| + |x - ۱| = \begin{cases} x + ۲ + x - ۱ = ۲x + ۱ & , x \geq ۱ \\ x + ۲ - (x - ۱) = ۳ & -۲ \leq x < ۱ \\ -x - ۲ - x + ۱ = -۲x - ۱ & x < -۲ \end{cases}$$

$$۳y + x = ۱۷ \Rightarrow \begin{vmatrix} x = ۰ \\ y = \frac{۱۷}{۳} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} y = ۲x + ۱ \\ ۳y + x = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow ۳(۲x + ۱) + x = ۱۷$$
$$۷x = ۱۴ \to x = ۲$$
$$y = ۲ \times ۲ + ۱ = ۵$$
$$\Rightarrow B \begin{vmatrix} x = ۲ \\ y = ۵ \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} y = -۲x - ۱ \\ ۳y + x = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow ۳(-۲x - ۱) + x = ۱۷ \Rightarrow -۵x = ۲۰ \Rightarrow x = -۴$$

$$y = -۲(-۴) - ۱ = ۷ \Rightarrow A \begin{vmatrix} x = -۴ \\ y = ۷ \end{vmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(۲ + ۴)^۲ + (۵ - ۷)^۲} = \sqrt{۳۶ + ۴} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

۸۸ ۱ **۲** ۳ ۴

ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها $x = -۲$ و $x = \frac{۱}{۲}$ هستند.

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۲x - ۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x + ۲$		$-$	۰	$+$		$+$	

$x < -۲ \Rightarrow -۲x + ۱ - x - ۲ = ۳ \Rightarrow -۳x = ۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$ غ ق ق

$-۲ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲x + ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow -x = ۰ \Rightarrow x = ۰$ ق ق

$x > \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x - ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow ۳x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$ ق ق

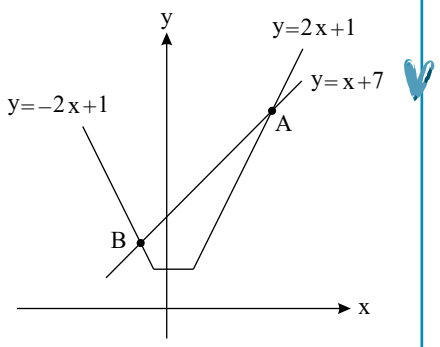
مجموع جواب‌ها $= ۰ + \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$

۸۹ ۱ ۲ ۳ **۴** تابع $y = |x - ۲| + |x + ۱|$ یک تابع گلدانی است که به‌ازای $x < -۱$ اکیداً نزولی و به‌ازای $x > ۲$ اکیداً صعودی و در فاصلهٔ $-۱ \le x \le ۲$ ثابت است.

$x < -۱ : y = -x + ۲ - x - ۱ \to y = -۲x + ۱$

$-۱ \le x \le ۲ : y = -x + ۲ + x + ۱ \to y = ۳$

$x > ۲ : y = x - ۲ + x + ۱ \to y = ۲x - ۱$



$\begin{cases} y = ۲x - ۱ \\ y = x + ۷ \end{cases} \to x = ۸ , y = ۱۵ \to A \begin{vmatrix} ۸ \\ ۱۵ \end{vmatrix}$, $\begin{cases} y = -۲x + ۱ \\ y = x + ۷ \end{cases} \to x = -۲ , y = ۵ \to B \begin{vmatrix} -۲ \\ ۵ \end{vmatrix}$

پس: $AB = \sqrt{(۸ + ۲)^۲ + (۱۵ - ۵)^۲} = \sqrt{۱۰۰ + ۱۰۰} = \sqrt{۲۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$

۹۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \ge ۰$$

با تعیین علامت عبارت $\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱}$، نامعادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۲$

$۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۲		$+\infty$
$\frac{۴-۲x}{۳x+۱}$		−	ت ن	+	۰	−	

بنابراین $-\frac{۱}{۳} < x \le ۲$ و داریم:

$$-\frac{۱}{۳} < x \le ۲ \xrightarrow{\times ۳} -۱ < ۳x \le ۶ \Rightarrow [۳x] = -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots, ۶$$

مجموعه مقادیر $[۳x]$ شامل ۸ عضو است.

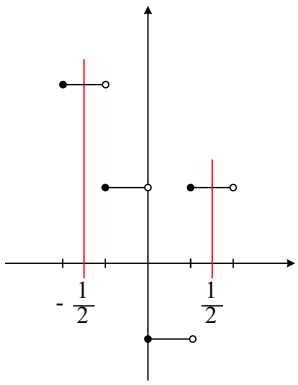
۹۱ ۱ **۲** ۳ ۴ روش اول: چون داخل براکت $۳x$ داریم طول پله‌ها $\frac{۱}{۳}$ است تابع را در بازهٔ $-\frac{۲}{۳} \le x < \frac{۲}{۳}$ رسم می‌کنیم که بازهٔ سؤال را شامل می‌شود.

اگر $-\frac{۲}{۳} \le x < \frac{۱}{۳} \Rightarrow [۳x] = -۲ \Rightarrow y = ۳$

اگر $-\frac{۱}{۳} \le x < ۰ \Rightarrow [۳x] = -۱ \Rightarrow y = ۱$

اگر $۰ \le x < \frac{۱}{۳} \Rightarrow [۳x] = ۰ \Rightarrow y = -۱$

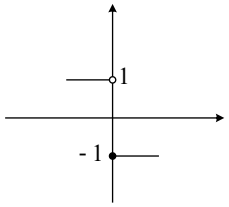
اگر $\frac{۱}{۳} \le x < \frac{۲}{۳} \Rightarrow [۳x] = ۱ \Rightarrow y = ۱$



روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:

$if: x \to ۰^+ \Rightarrow [۳x] = ۰ \Rightarrow y = -۱$

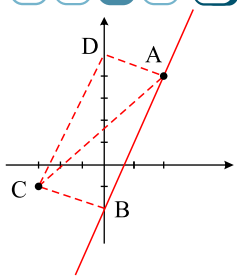
$if: x \to ۰^- \Rightarrow [۳x] = -۱ \Rightarrow y = ۱$



فقط در گزینهٔ ۲ تابع در نقطهٔ $x = ۰$ ناپیوسته است.

۹۲ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از A را می‌یابیم: $A(۲,۴)$ و $m = ۳$.

$y - ۴ = ۳(x - ۲) \Rightarrow y = ۳x - ۲$



حال فاصلهٔ نقطهٔ C از خط فوق که A و B روی آن قرار دارند محاسبه می‌کنیم.

این مقدار طول یا عرض مستطیل است.

$$|CH| \text{یا} |CB| = \frac{|y - ۳x + ۲|}{\sqrt{۱ + ۹}} \xrightarrow{(-۳,-۱)} \frac{|-۱ - ۳(-۳) + ۲|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}} = \sqrt{۱۰}$$

قطر مستطیل AC است آن را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$|AC| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} = \sqrt{(۲ - (-۳))^۲ + (۴ - (-۱))^۲} = \sqrt{۵۰}$$

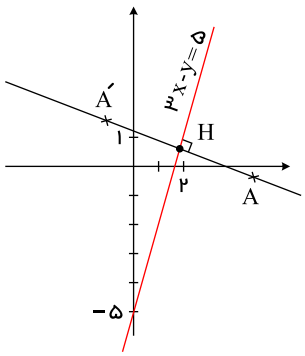
$$\overset{\Delta}{ABC}: AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۵۰ = AB^۲ + ۱۰ \Rightarrow |AB| = \sqrt{۴۰}$$

و در آخر محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط}: ۲\sqrt{۱۰} + ۲\sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰} + ۴\sqrt{۱۰} = ۶\sqrt{۱۰}$$

۹۳ ۱ **۲** ۳ ۴

محیط مثلث مدنظر $۳\sqrt{۳۰} = \sqrt{۲۷۰}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{۳۰}$ خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ضلع است یعنی: $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۳۰} = \frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$.



پس باید فاصلهٔ A تا H برابر با $\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$ باشد. دقت کنید A روی خط عمود بر $۳x - y = ۵$ است.

$$\Rightarrow y = ۳x - ۵ \Rightarrow m = ۳ \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m' = -\frac{۱}{۳}$$

معادلهٔ خط گذرنده از A و H را می‌یابیم مختصات $H(۲,۱)$ و $m' = -\frac{۱}{۳}$ را داریم.

$$y - ۱ = -\frac{۱}{۳}(x - ۲) \Rightarrow ۳y + x = ۵$$

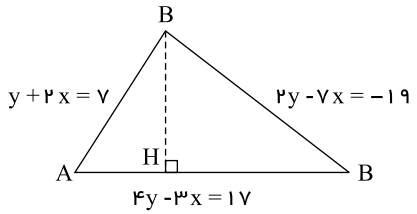
پس A روی خط $۳y + x = ۵$ است که می‌توان مختصات A را به‌صورت پارامتری $(\alpha, \frac{۵ - \alpha}{۳})$ در نظر گرفت AH را برابر با $\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow |AH| \Rightarrow (\alpha-2)^2+(\underbrace{\frac{5-\alpha}{3}}_{(\frac{2-\alpha}{3})}-1)^2=\frac{90}{4} \Rightarrow (\alpha-2)^2(1+\frac{1}{9})=\frac{90}{4}$$

$$\Rightarrow (\alpha-2)^2=\frac{81}{4} \Rightarrow \alpha-2=\pm\frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{13}{2} \Rightarrow A(\frac{13}{2},-\frac{1}{2}) \\ \alpha=-\frac{5}{2} \Rightarrow \text{در گزینهٔ ها نیست.} \end{cases}$$

۹۴ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل فرضی مقابل ابتدا مختصات نقطهٔ B یعنی نقطه برخورد دو خط $y+2x=7, 2y-7x=-19$ را می‌یابیم.



$$\begin{cases} y+2x=7 \xrightarrow{\times(-2)} \\ 2y-7x=-19 \end{cases} \begin{cases} -2y-4x=-14 \\ 2y-7x=-19 \end{cases} \Rightarrow -11x=-33 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{y+2x=7} y+6=7 \Rightarrow y=1 \Rightarrow B(3,1)$$

فاصله نقطهٔ $B(3,1)$ از خط $4y-3x=17$ برابر با ارتفاع BH است.

$$3x-4y+17=0 \Rightarrow BH=\frac{|3\times3-4\times1+17|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|9-4+17|}{\sqrt{25}}=\frac{22}{5}=4/4$$

۹۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x+y=a \Rightarrow y=a-x$$

نقطهٔ A روی خط $y=a-x$ به‌صورت $A(k,a-k)$ است. حال طبق فرض سؤال داریم:

$$B(-3,2) \Rightarrow AB=\sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{(k+3)^2+(a-k-2)^2}=\sqrt{29} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k+3)^2+(a-k-2)^2=29 \quad (1)$$

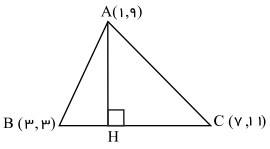
$$C(-1,4) \Rightarrow AC=5 \Rightarrow \sqrt{(k+1)^2+(a-k-4)^2}=5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k+1)^2+(a-k-4)^2=25 \quad (2)$$

طرفین روابط ۱ و ۲ را از هم کم می‌کنیم.

$$k^2+6k+9+(a-k-2)^2-(k^2+2k+1+(a-k-4)^2)=29-25$$
$$\Rightarrow k^2+6k+9+(a-k-2)^2-k^2-2k-1-(a-k-4)^2=4$$
$$\Rightarrow 4k+8+(a-k-2)^2-(a-k-4)^2=4 \Rightarrow 4k+8+(a-k-2-a+k+4)(a-k-2+a-k-4)=4$$
$$\Rightarrow 4k+8+2(2a-2k-6)=4 \Rightarrow 4k+8+4a-4k-12=4 \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2$$

۹۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به‌شکل فرضی مقابل، ابتدا معادلهٔ ضلع BC را می‌یابیم.



$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{11-3}{7-3}=\frac{8}{4}=2$$
$$B(3,3) \Rightarrow y-3=2(x-3)=2x-6 \Rightarrow 2x-y-3=0$$

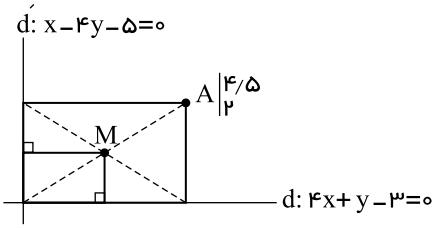
فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,9)$ از خط فوق همان ارتفاع AH است.

$$AH=\frac{|2\times1-9-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$$

۹۷ ۱ ۲ ۳ ۴ شیب خط داده‌شده به‌صورت $\frac{-2m}{m^2-1}$ می‌شود که باید برابر $\tan 60^\circ$ باشد، پس:

$$\frac{-2m}{m^2-1}=\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}m^2+2m-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow |m_1-m_2|=\frac{2\sqrt{16}}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

۹۸ ۱ ۲ ۳ ۴ مختصات نقطه $(۴٫۵, ۲)$ در هیچ‌یک از معادلات داده‌شده، صدق نمی‌کند و شکل به‌صورت روبه‌روست:



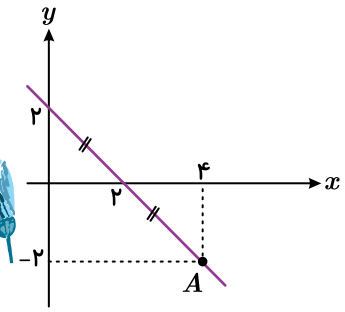
مطابق شکل فاصلهٔ M (وسط قطر) از اضلاع برابر نصف طول و عرض مستطیل است. لذا طول و عرض مستطیل را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \frac{|۴٫۵-۸-۵|}{\sqrt{۱+(-۴)^۲}}=\frac{۸٫۵}{\sqrt{۱۷}}=\frac{\frac{۱۷}{۲}}{\sqrt{۱۷}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲} \\ \frac{|۱۸+۲-۳|}{\sqrt{۴^۲+۱^۲}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۱۷}}=\sqrt{۱۷} \end{cases} \Rightarrow \text{فاصلهٔ } M \text{ از اضلاع} \begin{cases} \frac{\sqrt{۱۷}}{۴}: \min \\ \frac{\sqrt{۱۷}}{۲}: \max \end{cases}$$

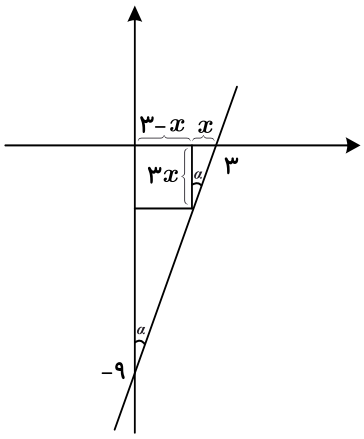
۹۹ ۱ ۲ ۳ ۴

توجه: اگر مختصات یک نقطه روی محور مختصات (a, b) باشد آنگاه فاصلهٔ آن نقطه تا مبدا برابر است با: $d=\sqrt{a^۲+b^۲}$

معادلهٔ خط داده‌شده $y=۲-x$ است؛ زیرا شیب آن برابر $\tan ۱۳۵^\circ=-۱$ است. حال طبق شکل مقابل مختصات نقطهٔ A به صورت $A(۴,-۲)$ است و فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$ است.



۱۰۰ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\tan\alpha=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

$$۳x=۳-x \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

$$\text{ضلع مربع}=\frac{۹}{۴} \quad \text{قطر}=\frac{۹}{۴}\times\sqrt{۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۰۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A=(-\frac{۳}{۴},۰), B=(۰,-۶) \Rightarrow m_{AB}=-۸$$

$$\Rightarrow y=-۸x-۶$$

آن قطر مربع که از مبدأ مختصات می‌گذرد روی خط $y=x$ قرار داد.

$$-۸x-۶=x\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow \text{طول قطر}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}=\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$$

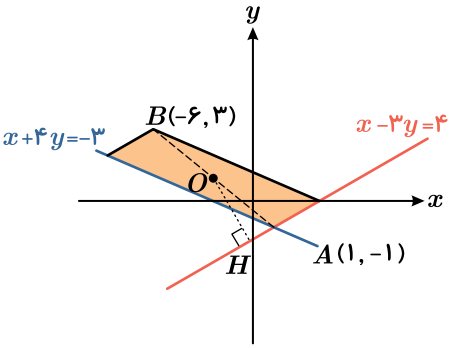
۱۰۲ ۱ ۲ ۳ **۴** کافی است دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم تا محل تلاقی به‌دست آید. دقت کنید $y\geq ۳$ است.

$$\begin{cases}۲y=x^۲\\ x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\end{cases}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲=y+۳+y-۳-۲\sqrt{y^۲-۹}\xrightarrow{x^۲=۲y}\sqrt{y^۲-۹}=۰\Rightarrow y=\pm ۳\xrightarrow{y\geq ۳}y=۳\Rightarrow x=\sqrt{۶}\Rightarrow A(\sqrt{۶},۳)$$: محل تلاقی

نکته: فاصلهٔ هر نقطه با فرم $A(x,y)$ تا مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x^۲+y^۲}$.

$$\xrightarrow{\text{فاصله}}d=\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۵}$$

۱۰۳ **۱** ۲ ۳ ۴

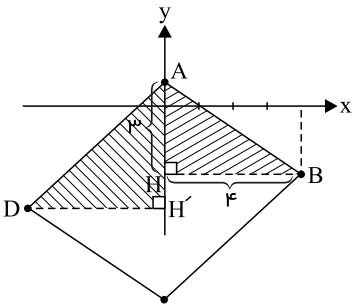


$$\begin{cases}x-۳y=۴\\ x+۴y=-۳\end{cases}\Rightarrow A=(۱,-۱)$$

$$O=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow O(-\frac{۵}{۲},۱)$$

$$OH=\frac{\left|-\frac{۵}{۲}-۳-۴\right|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$$

۱۰۴ ۱ ۲ **۳** ۴ مطابق شکل، عمودهای BH و DH' را بر محور yها وارد می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و $AH'D$ با هم هم‌نهشت‌اند و داریم:



$$DH'=AH=۳\Rightarrow x_D=-۳$$

۱۰۵ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به فرض، باید دو خط داده‌شده با هم موازی باشند:

$$\begin{cases}d_۱: y-ax=۱\Rightarrow m_۱=a\\ d_۲: ay-x=a-۱\Rightarrow m_۲=\frac{۱}{a}\end{cases}\xrightarrow{d_۱\parallel d_۲}m_۱=m_۲\Rightarrow a=\frac{۱}{a}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ a=-۱\end{cases}$$

نقطه $(۱,۲)$ یک رأس مستطیل است، پس روی یکی از خطوط $d_۱$ و $d_۲$ قرار دارد:

$$a=۱:\begin{cases}y=x\\ y=x+۱\end{cases}\xrightarrow{\text{شامل }(۱,۲)}۲=۱+۱$$

$$a=-۱:\begin{cases}y=-x+۱\\ y=-x+۲\end{cases}\rightarrow (\text{غ ق ق})$$

اندازهٔ یک ضلع مستطیل، برابر با فاصلهٔ دو خط $y=x$ و $y=x+۱$ است:

$$h=\frac{۱}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

قطر مستطیل برابر ۵ است، لذا اندازهٔ ضلع دیگر مستطیل را از قضیهٔ فیثاغورس به دست می‌آوریم:

$$k^۲+h^۲=۵^۲\Rightarrow k=\sqrt{۲۵-\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\frac{۴۹}{۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۲}}\Rightarrow \text{مساحت مستطیل}=k\cdot h=\frac{۷}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

۱۰۶ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** نقطهٔ فرضی B را روی خط $x-۳y=۳$ در نظر می‌گیریم.

$$B\begin{vmatrix}۳+۳a\\ a\end{vmatrix}\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{BC}=-۱$$

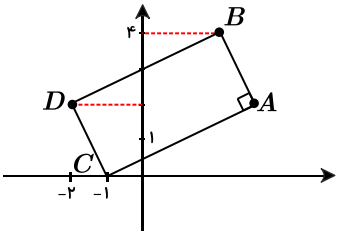
$$A\begin{vmatrix}۵\\ ۲\end{vmatrix},\ C\begin{vmatrix}۴\\ -۱\end{vmatrix}\Rightarrow\frac{a-۲}{۳a-۲}\cdot\frac{a+۱}{۳a-۱}=-۱\Rightarrow ۱۰a^۲-۱۰a=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\ a=۱\end{cases}$$

$$\begin{matrix}a=۰\Rightarrow y_B=۰\Rightarrow x_B=۳\\ a=۱\Rightarrow y_D=۱\Rightarrow x_D=۶\end{matrix}\Rightarrow\ |x_B-x_D|=۳$$

۱۰۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$A=(x\,,\frac{x}{۲}+۲)\ ,\ B=(۱\,,۴)\ ,\ C=(-۱\,,۰)$

C و B غیرمجاورند، بنابراین اضلاع AB و AC برهم عمودند.



$$m_{AB}\cdot m_{AC}=-۱\Rightarrow\frac{\frac{x}{۲}-۲}{x-۱}\times\frac{\frac{x}{۲}+۲}{x+۱}=-۱$$

$$\Rightarrow(\frac{x}{۲}-۲)(\frac{x}{۲}+۲)+(x+۱)(x-۱)=۰\Rightarrow\frac{x^۲}{۴}-۴+x^۲-۱=۰$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۴}x^۲=۵\Rightarrow x=\pm۲\Rightarrow A=(۲\,,۳)\,,D=(-۲\,,۱)$$

$$\Rightarrow\text{طول مستطیل}=\overline{AC}=\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(۳-۰)^۲}=۳\sqrt{۲}$$

۱۰۸ ۱ ۲ ۳ **۴** چون دو نقطه به طول‌های $x=۱$ و $x=۲$ محل برخورد این دو تابع است پس در هر دو تابع صدق می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$y=x^۲-x\to\begin{cases}y(۱)=۰\\y(۲)=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=۰\\f(۲)=۲\end{cases}$$

$$f(۱)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۰\Rightarrow۲^{-A-B}=۲^۱\Rightarrow\boxed{A+B=-۱}\quad(۱)$$

$$f(۲)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲\Rightarrow۲^{-۲A-B}=۲^۲\Rightarrow\boxed{۲A+B=-۲}\quad(۲)$$

$$\begin{cases}A+B=-۱\\۲A+B=-۲\end{cases}\Rightarrow A=-۱\ ,\ B=۰\Rightarrow f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}\Rightarrow f(۳)=-۲+۲^۳=۶$$

۱۰۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$y=x^۲\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow y=۱\Rightarrow M(۱,۱)\\x=۳\Rightarrow y=۹\Rightarrow N(۳,۹)\end{cases}$$

نقاط M و N در تابع $f(x)=۳^{Ax+B}$ صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(۱)=۱\Rightarrow۳^{A+B}=۱\Rightarrow A+B=۰\quad,\quad f(۳)=۹\Rightarrow۳^{۳A+B}=۹\Rightarrow۳A+B=۲$$

$$-\begin{cases}A+B=۰\\۳A+B=۲\end{cases}$$
$$۲A=۲\Rightarrow A=۱\Rightarrow B=-۱$$

$$\Rightarrow f(x)=۳^{x-۱}\Rightarrow f(۰)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$$

۱۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

$$y=۲^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد چپ}}y_۱=۲^{x+۳+|x+۳|}\xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}}y_۲=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲\xrightarrow{y=۰}۲^{x+۳+|x+۳|}=۲^۱\to x+۳+|x+۳|=۱$$

$$\to x+|x+۳|=-۲\xrightarrow{\text{چک کردن گزینه‌ها}}x=-\frac{۵}{۲}$$

۱۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x)=a+b(\frac{۱}{۲})^x$$

تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b=۰\Rightarrow a=-b\quad(۱)$$

$$f^{-۱}(-۱)=-۱\Rightarrow f(-۱)=-۱\Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^{-۱}=-۱\xrightarrow{(۱)}-b+۲b=-۱\Rightarrow b=-۱\xrightarrow{(۱)}a=۱$$

$$a-b=۱-(-۱)=۲$$

۱۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم داریم:

$$۵^x = ۱۰ \Rightarrow x = \log_۵ ۱۰ = \log_۵ (۵ \times ۲) = \log_۵ ۵ + \log_۵ ۲ = ۱ + \log_۵ ۲ \Rightarrow \log_۵ ۲ = x - ۱$$

$$۲^{f(x)} = ۲۰ \Rightarrow f(x) = \log_۲ ۲۰ = \log_۲ (۴ \times ۵) = \log_۲ ۲^۲ + \log_۲ ۵$$

$$f(x) = ۲ + \log_۲ ۵ = ۲ + \frac{۱}{\log_۵ ۲} = ۲ + \frac{۱}{x-۱} = \frac{۲(x-۱)+۱}{x-۱}$$

$$f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۱}$$

۱۱۳ **۱** ۲ ۳ ۴ تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۲^{ax+b}}$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ عبور می‌کند، یعنی $f(\frac{۱}{۲}) = ۱$. پس:

$$f(\frac{۱}{۲}) = \sqrt[۳]{۲^{\frac{۱}{۲}a+b}} = ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۳} ۲^{\frac{۱}{۲}a+b} = ۱ = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a + b = ۰ \Rightarrow a = -۲b \quad (۱)$$

طبق خاصیت تابع وارون داریم:

$$f^{-۱}(۸) = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۸ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲^{۵a+b}} = ۸ = ۲^۳ \xrightarrow{\text{توان } ۳} ۲^{۵a+b} = (۲^۳)^۳ = ۲^۹ \Rightarrow ۵a + b = ۹ \xrightarrow{(۱)} ۵(-۲b) + b = ۹ \Rightarrow -۹b = ۹ \Rightarrow b = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$a - b = ۲ - (-۱) = ۳$$

۱۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴ برای شرط داده‌شده در مجموعهٔ A داریم:

$$۸^{-\frac{۲}{۳}m} \times ۴^{-n} + ۴^{-m} \times ۸^{-\frac{۲}{۳}n} > \frac{۱}{۱۲۸} \Rightarrow ۲^{-۲m-۲n} + ۲^{-۲m-۲n} > ۲^{-۷}$$

$$\Rightarrow ۲^{-۲m-۲n+۱} > ۲^{-۷} \xrightarrow{\text{پایه بزرگتر از } ۱} -۲m - ۲n + ۱ > -۷ \Rightarrow m + n < ۴$$

$$\xrightarrow{m,n \in \mathbb{N}} (m,n) = (۱,۱)(۱,۲)(۲,۱)$$

$$A = \{۱^۳ + ۱^۲, ۱^۳ + ۲^۲, ۲^۳ + ۱^۲\} = \{۲, ۵, \underset{\downarrow max}{۹}\}$$

۱۱۵ **۱** ۲ ۳ ۴ با توجه به فرض داریم:

$$\begin{cases} x = ۱ \to g(۱) = ۴ \\ f(۱) = g(۱) \end{cases} \Rightarrow ۲ + ۲^{b-a} = ۴ \Rightarrow ۲^{b-a} = ۲ \Rightarrow b - a = ۱$$

از طرفی : $f^{-۱}(۱۰) = -۱ \Rightarrow f(-۱) = ۱۰ \Rightarrow ۲ + ۲^{b+a} = ۱۰$

$$\Rightarrow ۲^{b+a} = ۸ \Rightarrow b + a = ۳$$

$$\begin{cases} b - a = ۱ \\ b + a = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱ \ , \ b = ۲ \Rightarrow ۲b - a = ۴ - ۱ = ۳$$

۱۱۶ **۱** ۲ ۳ ۴ طبق فرض نتیجه می‌گیریم که در هر ساعت $\frac{۸}{۹}$ جرم اولیه باقی می‌ماند. جرم اولیه را A گرفته و زمان T ساعت را به $\frac{t}{۶۰}$ (برحسب دقیقه) تبدیل می‌کنیم، پس:

$$A \times (\frac{۸}{۹})^{\frac{t}{۶۰}} = \frac{A}{۶} \Rightarrow (\frac{۸}{۹})^{\frac{t}{۶۰}} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۶۰} = \frac{\log \frac{۱}{۶}}{\log \frac{۸}{۹}} = \frac{-(\log ۲ + \log ۳)}{۳\log ۲ - ۲\log ۳} \xrightarrow[\text{تقسیم بر } \log ۲]{\text{صورت و مخرج}} \frac{t}{۶۰} = \frac{-(۱ + \frac{\log ۳}{\log ۲})}{۳ - ۲(\frac{\log ۳}{\log ۲})} \quad (*)$$

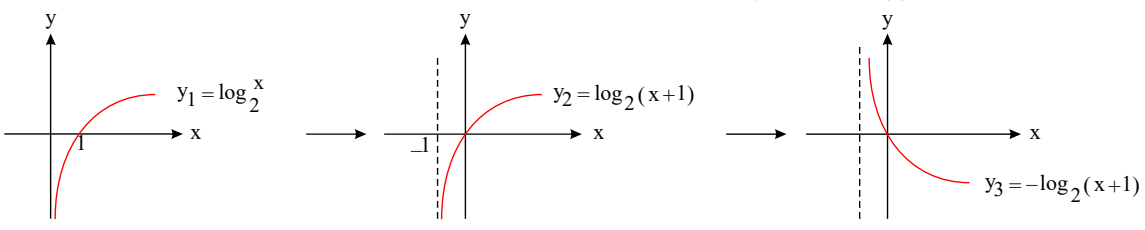
باید حاصل $\frac{\log ۳}{\log ۲}$ را به دست آوریم:

$$\log_۲ ۵ = ۲/۴, \log_۳ ۵ = ۱/۴ \Rightarrow \frac{\log_۲ ۵}{\log_۳ ۵} = \frac{۲/۴}{۱/۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\log ۵}{\log ۲}}{\frac{\log ۵}{\log ۳}} = \log_۲ ۳ = \frac{۲۴}{۱۴} = \frac{۱۲}{۷} \xrightarrow{(*)} \frac{t}{۶۰} = \frac{-(۱ + \frac{۱۲}{۷})}{۳ - \frac{۲۴}{۷}} = \frac{-\frac{۱۹}{۷}}{\frac{-۳}{۷}} = \frac{۱۹}{۳} \Rightarrow t = ۲۰ \times ۱۹ = ۳۸۰$$

۱۱۷ ۱ **۲** ۳ ۴ **روش اول:**

نمودار تابع داده‌شده $y = \log_۲^x$ است که یک واحد به‌سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور xها قرینه شده است.



پس: $y=-\log_{۲}^{(x+۱)} \to y=\log_{۲}^{(x+۱)^{-۱}} \to U(x)=(x+۱)^{-۱}$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنهٔ تابع داده‌شده $x>-۱$ است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی $x \to (-۱)^{+}$ نمودار تابع به‌سمت $+\infty$ می‌رود.

گزینهٔ اول: $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}} \log_{۲}(x+۱)=\log_{۲}{}^{۰^{+}}=-\infty$: نادرست

گزینهٔ دوم: $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}} \log_{۲}\frac{۱}{x+۱}=\log_{۲}\frac{۱}{۰^{+}}=\log_{۲}(+\infty)=+\infty$: درست

توجه کنید اگر $a>۱$ باشد $\log_a^{۰^{+}}=-\infty$ و $\log_a^{+\infty}=+\infty$ است.

۱۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

دامنهٔ تعریف لگاریتم: $۲x+a>۰ \to ۲x>-a \to x>-\frac{a}{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل } x>\frac{۱}{۲}} a=-۱$

بنابراین تابع به‌صورت $y=-۱+\log_b^{(۲x-۱)}$ است، از طرفی مقدار تابع در $x=۲$ برابر صفر است.

$۰=-۱+\log_b^{۳} \to \log_b^{۳}=۱ \to b=۳ \to y=-۱+\log_{۳}^{(۲x-۱)}$

اکنون کافی است که به‌جای y مقدار ۱ را قرار دهیم.

$۱=-۱+\log_{۳}^{(۲x-۱)} \to \log_{۳}^{(۲x-۱)}=۲ \xrightarrow{\log_b^a=c\to a=b^c} ۲x-۱=۳^{۲} \to ۲x-۱=۹ \to ۲x=۱۰ \to x=۵$

۱۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ در هر مدت یک ماه (۳۰ روز) $\frac{۱}{۱۰}$ جرم را از دست می‌دهد. بنابراین $\frac{۹}{۱۰}$ جرم باقی می‌ماند. پس بعد از ۲ ماه مقدار $۲۴\times\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۹}{۱۰}$ باقی می‌ماند و پس از n ماه مقدار $\underbrace{\cdots\times\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۹}{۱۰}}_{n\text{ تا}}\times۲۴$ جرم باقی می‌ماند، پس:

$۲۴\times(\frac{۹}{۱۰})^{n}=۸ \Rightarrow (\frac{۹}{۱۰})^{n}=\frac{۱}{۳}$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$\log(\frac{۹}{۱۰})^{n}=\log\frac{۱}{۳} \Rightarrow n\cdot\log\frac{۹}{۱۰}=\log۱-\log۳$

$n(\log۳^{۲}-\log۱۰)=۰-\log۳ \Rightarrow n(۲\log۳-۱)=-\log۳$

$n(۰/۹۶-۱)=-۰/۴۸ \Rightarrow n=\frac{۰/۴۸}{۰/۰۴}=۱۲$ ماه

$۱۲\times۳۰=۳۶۰$ روز

۱۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ چون در هر روز ۴ لیتر از محلول ۱۰۰ لیتری کم می‌شود، پس غلظت آن هر روز به $\frac{۹۶}{۱۰۰}$ غلظت قبل می‌رسد. پس:

$a_n=a\cdot(\frac{۹۶}{۱۰۰})^{n}$

که a_n غلظت در روز nام و a غلظت اولیه و n تعداد روزها می‌باشد.

$a\cdot(\frac{۹۶}{۱۰۰})^{n}=\frac{۱}{۳}a \to (\frac{۹۶}{۱۰۰})^{n}=\frac{۱}{۳}$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$\log(\frac{۹۶}{۱۰۰})^{n}=\log\frac{۱}{۳} \to n(\log۹۶-\log۱۰۰)=\log۱-\log۳ \to n(\log۲^{۵}\times۳-۲)=-\log۳ \to n(۵\log۲+\log۳-۲)=-۰/۴۸ \to n=\frac{\frac{۴۸}{۱۰۰}}{\frac{۲}{۱۰۰}}=۲۴$

۱۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

شرط اول (شرط رادیکالی): $\Rightarrow x^{۲}-۱\geq۰ \Rightarrow |x|\geq۱ \Rightarrow x\in(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$ (۱)

شرط دوم (شرط لگاریتمی): $\Rightarrow x^{۲}-x-۲>۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=۲ \end{cases}$

x		-۱		۲	
$x^{۲}-x-۲$		$+$	$-$		$+$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ (۲)

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} x\in(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

روش دوم: عددگذاری

اگر $x=۲ \Rightarrow \log^{(۲^۲-۲-۲)}=\log^{۰} \Rightarrow$ غیرقابل‌قبول

پس عدد ۲ در دامنهٔ عبارت نیست فقط گزینهٔ ۳ حذف می‌شود.

اگر $x=۰ \Rightarrow \sqrt{x^۲-۱}=\sqrt{-۱} \Rightarrow$ غیرقابل‌قبول $\Rightarrow$ گزینهٔ ۲ و ۴ نیز حذف می‌شوند.

۱۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

چون پایهٔ لگاریتم عدد ۲۱ می‌باشد بنابراین اعداد ۱۴۷ و ۱۳۲۳ را به ۲۱ تقسیم می‌کنیم.

$$۱۳۲۳=۲۱^۲\times ۳ \quad , \quad ۱۴۷=۲۱\times ۷ \Rightarrow A=(\log_{۲۱}^{۳})^۲+\log_{۲۱}^{(۲۱\times ۷)}\ \log_{۲۱}^{(۲۱^۲\times ۳)}$$

$$A=(\log_{۲۱}^{۳})^۲+\underbrace{(\log_{۲۱}^{۲۱})}_{۱}+\log_{۲۱}^{۷})\underbrace{(\log_{۲۱}^{۲۱^۲})}_{۱}+\log_{۲۱}^{۳}) \quad A=(\log_{۲۱}^{۳})^۲+(۱+\log_{۲۱}^{۷})\cdot(۲\log_{۲۱}^{۲۱}+\log_{۲۱}^{۳})$$

می‌دانیم:

$$۳\times ۷=۲۱ \Rightarrow \log_{۲۱}^{۳}+\log_{۲۱}^{۷}=\log_{۲۱}^{۲۱} \Rightarrow \log ۷=۱-\log ۳$$

$$A=(\log_{۲۱}^{۳})^۲+(۱+۱-\log_{۲۱}^{۳})\cdot(۲+\log_{۲۱}^{۳})=(\log_{۲۱}^{۳})^۲+(۴-(\log_{۲۱}^{۳})^۲)$$

$$A=(\log_{۲۱}^{۳})^۲+۴-(\log_{۲۱}^{۳})^۲=۴$$

۱۲۳ **۱** ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\log(f(x))$ باید $f(x)>۰$ قرار داده و حدود x را پیدا کنیم.

$$\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}>۰ \Rightarrow ۶+\sqrt{|x|}-|x|>۰ \xrightarrow{\sqrt{|x|}=t} ۶+t-t^۲>۰ \Rightarrow t^۲-t-۶<۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۳ \\ t=-۲ \end{cases}$$

t	-۲		۳
$t^۲-t-۶$	$+$	۰ $-$	۰ $+$

$$\Rightarrow -۲<t<۳ \Rightarrow -۲<\sqrt{|x|}<۳$$

پس داریم:

$$\underbrace{-۲<\sqrt{|x|}}_{\text{بدیهی}} \Rightarrow \sqrt{|x|}<۳ \Rightarrow |x|<۹ \Rightarrow -۹<x<۹$$

روش دوم: عددگذاری

فقط گزینهٔ $x=-۵ \Rightarrow$ قابل‌قبول را قبول کرده است و جواب مسئله است.

۱۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم:

$$a^{\log_a^b}=b$$

ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم:

$$y=۹^{\log_۳^a} \Rightarrow \begin{matrix} x>۰ \\ D_f=(۰\ ,\ +\infty) \end{matrix}$$

$$f(x)=۹^{\log_۳^x}=۳^{۲\log_۳^x}=۳^{\log_۳^{x^۲}}=x^۲$$

$$D_f: (۰,+\infty)$$

البته دقت کنید که دامنهٔ تابع $x>۰$ است.

۱۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا دقت کنید که:

$$\log_a c+\log_b c=\frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=\frac{\log_c b+\log_c a}{\log_c a\ \log_c b}=\frac{\log_c ab}{\log_c a\log_c b}$$

پس:

$$\frac{\log_c ab}{\log_c a\ \log_c b}=۱ \Rightarrow \log_c a\ \log_c b=\log_c ab$$

۱۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ (در صورت سؤال هردو عبارت را $[x]$ درنظر گرفتیم) برد تابع بازهٔ $(\log_۲ ۳۰\ \log_۲ ۵)$ است، پس:

$$\log_۲ ۲<\log_{۲^{-۱}}(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]})-۱<\log_۲ ۵$$

$$۱+\log_۲ ۳<-\log_۲(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]})<۱+\log_۲ ۵$$

باتوجه به رابطهٔ $\log_۲ ۲=۱$ داریم:

$$\log_۲ ۶<\log_۲(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]})^{-۱}<\log_۲ ۱۰ \Rightarrow ۶<۱۲+\sqrt{[x]}-[x]<۱۰$$

در نامعادلهٔ فوق، شرط معنی‌دار بودن لگاریتم لحاظ شده است، با فرض $\sqrt{[x]} = t$ داریم:

$$۶ < ۱۲ + t - t^۲ < ۱۰$$

$$۶ < ۱۲ + t - t^۲ \Rightarrow t^۲ - t - ۶ < ۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲) < ۰ \Rightarrow -۲ < t < ۳ \quad (۱)$$

$$۱۲ + t - t^۲ < ۱۰ \Rightarrow t^۲ - t - ۲ > ۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۱) > ۰ \Rightarrow t < -۱ \text{ یا } t > ۲ \quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) را می‌یابیم:

$$-۲ < t < -۱ \text{ یا } ۲ < t < ۳$$

چون $t \geq ۰$، پس:

$$۲ < t < ۳ \Rightarrow ۲ < \sqrt{[x]} < ۳ \Rightarrow ۴ < [x] < ۹ \Rightarrow ۵ \leq x < ۹$$

بنابراین دامنهٔ تابع بازهٔ $[۵\ ,\ ۹)$ است.

۱۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴ با استفاده از خواص لگاریتم داریم:

$$\log_{۸} ۱۸ = m \Rightarrow \log_{۲^۳}(۲ \times ۳^۲) = \frac{۱}{۳}\log_۲(۲ \times ۳^۲) = m \Rightarrow \log_۲ ۲ + \log_۲ ۳^۲ = ۳m \Rightarrow ۱ + ۲\log_۲ ۳ = ۳m \Rightarrow \log_۲ ۳ = \frac{۳m-۱}{۲}$$

خواستهٔ سؤال به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\log_{۴} ۱۲ = \log_{۲^۲}(۲^۲ \times ۳) = \frac{۱}{۲}\log_۲(۲^۲ \times ۳) = \frac{۱}{۲}(\log_۲^{۲^۲} + \log_۲ ۳) = \frac{۱}{۲}(۲ + \log_۲ ۳) = \frac{۱}{۲}(۲ + \frac{۳m-۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۴+۳m-۱}{۲}) = \frac{۳m+۳}{۴} = \frac{۳}{۴}(m+۱)$$

۱۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم داریم.

$$\log_۲^۳ = a \Rightarrow ۲^a = ۳ \quad (۱)$$

$$\log_۸^b = \frac{۲}{۳}(۱+a) \Rightarrow b = ۸^{\frac{۲}{۳}(۱+a)} = (۲^۳)^{\frac{۲}{۳}(۱+a)} \Rightarrow b = ۲^{۲(۱+a)} = ۲^{۲+۲a} = ۲^۲ \times ۲^{۲a} = ۴ \times (۲^a)^۲ \xrightarrow{(۱)} b = ۴ \times ۳^۲ = ۳۶$$

خواستهٔ سؤال را می‌یابیم:

$$\log(۳b - ۸) = \log(۳ \times ۳۶ - ۸) = \log(۱۰۸ - ۸) = \log ۱۰۰ = ۲$$

۱۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A = B + ۴۵^\circ, A + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B + ۴۵^\circ + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow C = ۱۸۰^\circ - (۴۵^\circ + ۲B)$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$۲\cos A \sin B - \sin C = ۲\cos(B + ۴۵^\circ)\sin B - \sin(۱۸۰^\circ - (۴۵^\circ + ۲B)) =$$

$$۲(\cos B \cos ۴۵^\circ - \sin B \sin ۴۵^\circ)\sin B - \sin(۴۵^\circ + ۲B) =$$

$$۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos B - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin B)\sin B - \sin ۴۵^\circ \cos ۲B - \cos ۴۵^\circ \sin ۲B =$$

$$\sqrt{۲}\sin B \cos B - \sqrt{۲}\sin^۲ B - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲B - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲B =$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲B - \sqrt{۲}(\frac{۱-\cos ۲B}{۲}) - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲B - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲B =$$

$$-\sqrt{۲}(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲B) - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲B = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲B - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲B = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ با اضافه کردن $۶ab$ در طرفین تساوی داده‌شده داریم:

$$a^۲ + ۹b^۲ = ۱۰ab \Rightarrow a^۲ + ۹b^۲ + ۶ab = ۱۰ab + ۶ab \Rightarrow (a+۳b)^۲ = ۱۶ab \Rightarrow \frac{(a+۳b)^۲}{۱۶} = ab \Rightarrow (\frac{a+۳b}{۴})^۲ = ab$$

از طرفین تساوی فوق در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log(\frac{a+۳b}{۴})^۲ = \log(ab) \Rightarrow ۲\log(\frac{a+۳b}{۴}) = \log a + \log b \Rightarrow \log(\frac{a+۳b}{۴}) = \frac{۱}{۲}(\log a + \log b)$$

بنابراین $\log(\frac{a+۳b}{۴})$ واسطهٔ حسابی بین $\log a$ و $\log b$ است.

۱۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ داریم:

$$\log_n^m = a \xrightarrow{\text{تغییر مبنا}} \frac{\log^m}{\log^n} = a \Rightarrow \log m = a \cdot \log n$$

$$b = \log_{mn}^{m^۲ n} \xrightarrow{\text{تغییر مبنا}} \frac{\log^{m^۲ n}}{\log^{mn}} = \frac{۲\log m + \log n}{\log m + \log n} = \frac{۲a\log n + \log n}{a\log n + \log n}$$

$$\Rightarrow b = \frac{۲a+۱}{a+۱} = \frac{a+۱+a}{a+۱} = ۱ + \frac{a}{a+۱}$$

چون $۰ < a < a + ۱$، پس داریم:

$$۰ < \frac{a}{a+۱} < ۱ \Rightarrow ۱ < b < ۲ \Rightarrow [b] = ۱$$

۱۳۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\log ۳۰ = \log^{۳} + \log^{۱۰} = ۱/۴ \ , \ \log^{۶} = \log^{۲} + \log^{۳} = ۰/۷$$

$$\log^{\frac{۵}{۶}} = \log^{۵} - \log^{۶} = (\log^{۱۰} - \log^{۲}) - (\log^{۲} + \log^{۳}) = ۰/۷ - ۰/۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱/۴x^{۲} + ۱/۴x = ۰ \Rightarrow ۱/۴x(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۱ \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف ریشه‌ها} = ۱$$

۱۳۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\log_{۹} x + ۳\log_{x^{۲}} ۳ = \underbrace{\frac{\log x}{۲\log ۳}}_{a} + \underbrace{\frac{۳\log ۳}{۲\log x}}_{b}$$

$$ab = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{a,b>۰} a = b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\min\{a+b\} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

۱۳۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\log_{۳}^{۸} = \frac{۱}{\log_{۸}^{۳}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۳} \times \log_{۲}^{۳}} = \frac{۱۵}{۸} \rightarrow \log_{۳}^{۸} = \frac{۱۵}{۸}$$

۱۲٫۵ درصد برابر $\frac{۱۲/۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۸}$ است. اگر جرم اولیه را M فرض کنیم، داریم:

$$\text{جرم باقی‌مانده} = (۱ - \frac{۱}{۸})^{\frac{t}{۷}} \times M = (\frac{۷}{۸})^{\frac{t}{۷}} \times M$$

$$(\frac{۷}{۸})^{\frac{t}{۷}} \times M = \frac{۱}{۷}M \Rightarrow (\frac{۷}{۸})^{\frac{t}{۷}} = \frac{۱}{۷} \xrightarrow{log_{۳}} \frac{t}{۷}\log_{۳}^{\frac{۷}{۸}} = \log_{۳}^{۷^{-۱}} \rightarrow \frac{t}{۷} = (\log_{۳}^{۷} - \log_{۳}^{۸}) = -\log_{۳}^{۷} \rightarrow$$

$$\frac{t}{۷}(\frac{۱۰}{۶} - \frac{۱۵}{۸}) = -\frac{۱۰}{۶} \rightarrow \frac{t}{۷}(-\frac{۱۰}{۴۸}) = -\frac{۱۰}{۶} \rightarrow t = ۵۶$$

۱۳۵ **۱** ۲ ۳ ۴

$$(۰/۴)^{۲x-۱} = (\frac{۱۲۵}{۸})^{x^{۲}} \rightarrow (\frac{۴}{۱۰})^{۲x-۱} = (\frac{۵}{۲})^{۳x^{۲}} \rightarrow (\frac{۲}{۵})^{۲x-۱} = (\frac{۲}{۵})^{-۳x^{۲}}$$

$$\rightarrow ۲x - ۱ = -۳x^{۲} \rightarrow ۳x^{۲} + ۲x - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

در عبارت خواسته‌شده نمی‌توانیم به‌جای x عدد -۱ را قرار دهیم چون جلوی لگاریتم منفی می‌شود و می‌دانیم که $\log_{k^{m}}^{a^{n}} = \frac{n}{m}\log_{k}^{a}$ است.

$$\log_{۸}^{۹x+۱} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} \log_{۸}^{۴} = \log_{۲^{۳}}^{۲^{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

۱۳۶ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم:

$$y = \log_{۶}^{x-۲} \xrightarrow{\text{دامنه}} x - ۲ > ۰ \rightarrow \boxed{x > ۲}$$

$$۳^{x^{۲}-۲} = ۸۱^{x} \rightarrow ۳^{x^{۲}-۲} = ۳^{۴x} \rightarrow x^{۲} - ۲ = ۴x \rightarrow x^{۲} - ۴x = ۲$$

$$\rightarrow (x-۲)^{۲} - ۴ = ۲ \rightarrow (x-۲)^{۲} = ۶ \rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{۶} \rightarrow \begin{cases} x = ۲ + \sqrt{۶} \\ x = ۲ - \sqrt{۶} < ۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

می‌دانیم $\log_{k^{m}}^{a^{n}} = \frac{n}{m}\log_{k}^{a}$ است.

$$\log_{۶}^{x-۲} \xrightarrow{x=۲+\sqrt{۶}} \log_{۶}^{۲+\sqrt{۶}-۲} = \log_{۶}^{\sqrt{۶}} = \log_{۶}^{۶^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۷ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \ , \ \log a + \log b = \log a \cdot b \ , \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$\log_b^a \times \log_a^c = \log_b^c$

$$\begin{vmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{vmatrix} = (\log ۵)^۲ - (\log ۲)^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\log ۵ + \log ۲)(\log ۵ - \log ۲) = \log_{۱۰}^{۱۰} \log^{\frac{۵}{۲}} = \log^{\frac{۵}{۲}}$$

پس داریم:

$$\log^{\frac{۵}{۲}} \times \log_{\frac{۵}{۲}}^{۳x-۲} = ۱ \Rightarrow \log^{۳x-۲} = ۱ \Rightarrow ۳x - ۲ = ۱۰ \Rightarrow x = ۴$$

۱۳۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\log_۲(۴^x + ۱۵) = x + ۳ \Rightarrow ۴^x + ۱۵ = ۲^{x+۳} \Rightarrow ۴^x + ۱۵ = ۲^x \times ۲^۳ \Rightarrow ۴^x + ۱۵ = ۸ \times ۲^x \Rightarrow (۲^x)^۲ - ۸ \times ۲^x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (۲^x - ۳)(۲^x - ۵) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲^x = ۳ \Rightarrow x_۱ = \log_۲ ۳ \\ ۲^x = ۵ \Rightarrow x_۲ = \log_۲ ۵ \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = \log_۲ ۳ + \log_۲ ۵ = \log_۲ ۱۵$$

۱۳۹ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به اینکه تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است خواهیم داشت:

$$f(f(x)) < f(x^۵) \Rightarrow f(x) < x^۵ \Rightarrow (x + \log x)^۵ < x^۵ \Rightarrow x + \log x < x$$

$$\Rightarrow \log x < ۰ \Rightarrow x \in (۰, ۱)$$

۱۴۰ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم: $\log_b^a = c \Rightarrow b^c = a$ و $\log_n^A + \log_n^B = \log_n^{A \cdot B}$

ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\log_۲((x-۲)(x^۲ + ۲x + ۴)) = \log_۲(x^۳ - ۸) = ۳ \Rightarrow x^۳ - ۸ = ۸ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۱۶} = ۲^{\frac{۴}{۳}}$$

پس داریم:

$$\log_{\sqrt[۳]{۲}} x = \log_{۲^{\frac{۱}{۳}}} ۲^{\frac{۴}{۳}} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۱}{۳}} = ۴$$

۱۴۱ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به آنکه $۲ - x > ۰$ یعنی $x < ۲$ پس:

$$\log(۲ - x) + ۲\log(۲ - x) = ۳ \Rightarrow \log(۲ - x) = ۱$$
$$۲ - x = ۱۰ \Rightarrow x = -۸ \Rightarrow \log_{\sqrt{۲}} ۸ = ۶$$

۱۴۲ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\log(x^۲ - ۲x + ۱) + ۳\log(۱ - x) = ۵$$

با توجه به دامنهٔ تابع $\log$ $x \leq ۱$؛ بنابراین:

$$\log(x-۱)^۲ + ۳\log(۱ - x) = ۲\log(۱ - x) + ۳\log(۱ - x) = ۵$$
$$\Rightarrow \log(۱ - x) = ۱ \Rightarrow ۱ - x = ۱۰ \Rightarrow x = -۹$$
$$\Rightarrow \log_۳^{-x} = \log_۳^۹ = ۲$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۳۷	۱	۷۳	۲	۱۰۹	۳
۲	۳	۳۸	۳	۷۴	۱	۱۱۰	۱
۳	۲	۳۹	۱	۷۵	۴	۱۱۱	۳
۴	۳	۴۰	۳	۷۶	۳	۱۱۲	۳
۵	۳	۴۱	۳	۷۷	۱	۱۱۳	۱
۶	۴	۴۲	۱	۷۸	۴	۱۱۴	۲
۷	۴	۴۳	۲	۷۹	۱	۱۱۵	۱
۸	۲	۴۴	۴	۸۰	۱	۱۱۶	۱
۹	۴	۴۵	۲	۸۱	۳	۱۱۷	۲
۱۰	۱	۴۶	۴	۸۲	۲	۱۱۸	۲
۱۱	۳	۴۷	۲	۸۳	۲	۱۱۹	۱
۱۲	۳	۴۸	۲	۸۴	۲	۱۲۰	۲
۱۳	۱	۴۹	۳	۸۵	۴	۱۲۱	۱
۱۴	۱	۵۰	۳	۸۶	۳	۱۲۲	۴
۱۵	۲	۵۱	۴	۸۷	۱	۱۲۳	۱
۱۶	۲	۵۲	۳	۸۸	۲	۱۲۴	۲
۱۷	۴	۵۳	۳	۸۹	۴	۱۲۵	۱
۱۸	۴	۵۴	۴	۹۰	۴	۱۲۶	۳
۱۹	۱	۵۵	۲	۹۱	۲	۱۲۷	۱
۲۰	۴	۵۶	۱	۹۲	۳	۱۲۸	۳
۲۱	۲	۵۷	۱	۹۳	۲	۱۲۹	۲
۲۲	۳	۵۸	۲	۹۴	۱	۱۳۰	۲
۲۳	۴	۵۹	۳	۹۵	۱	۱۳۱	۱
۲۴	۳	۶۰	۴	۹۶	۳	۱۳۲	۴
۲۵	۱	۶۱	۳	۹۷	۴	۱۳۳	۴
۲۶	۱	۶۲	۳	۹۸	۱	۱۳۴	۳
۲۷	۲	۶۳	۱	۹۹	۱	۱۳۵	۱
۲۸	۲	۶۴	۱	۱۰۰	۳	۱۳۶	۳
۲۹	۳	۶۵	۴	۱۰۱	۲	۱۳۷	۳
۳۰	۲	۶۶	۱	۱۰۲	۴	۱۳۸	۳
۳۱	۱	۶۷	۳	۱۰۳	۱	۱۳۹	۲
۳۲	۲	۶۸	۴	۱۰۴	۳	۱۴۰	۴
۳۳	۱	۶۹	۴	۱۰۵	۲	۱۴۱	۲
۳۴	۳	۷۰	۴	۱۰۶	۱	۱۴۲	۱
۳۵	۳	۷۱	۴	۱۰۷	۳		
۳۶	۴	۷۲	۳	۱۰۸	۴		