5. Наближені методи розв'язання задач на власні значення

Постановка задачі

Нехай A – квадратна матриця розмірності $n \times n$. Потрібно знайти ті значення λ при яких задача

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}$$

має ненульовий розв'язок, $\overline{x} \neq \overline{0}$. Позначимо λ_i, $i = \overline{1,n}$ – власні значення матриці A, а $\overline{x}^i$ – власні вектори, які відповідають власним значенням λ_i.

Розглянемо основні наближені методи знаходження власних значень. Для розв'язання **часткової проблеми** власних значень, т.т. коли необхідно знайти максимальне та/або мінімальне власне значення чи власне значення, що знаходиться в околі деякого числа λ_0, використовують:
1) степеневий метод,
2) метод скалярних добутків.

Для розв'язання **повної проблеми** власних значень, т.т. коли необхідно знайти всі власні значення та відповідні власні вектори, використовують: метод обертань (Якобі).

Метод скалярних добутків

Метод інколи називають степеневим методом із скалярними добутками. Нехай $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$. Будемо шукати максимальне власне значення λ_1.

Початкове наближення $\overline{x}^0$ обираємо довільним, але з означення власного вектору $\overline{x}^0 \neq \overline{0}$. Ітераційний процес методу має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = A\overline{x}^k; \qquad \lambda_1^{k+1} = \frac{(\overline{x}^{k+1}, \overline{x}^k)}{(\overline{x}^k, \overline{x}^k)}.$$

Умова припинення: $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| \leqslant \varepsilon$.

Зауваження. Для уникнення зростання компонент вектору $\overline{x}^k$ на кожній ітерації, використовують нормування. Після знаходження $\overline{x}^k$, він нормується:

$$\overline{e}^k = \left(\frac{x_1^k}{||\overline{x}^k||}; ...; \frac{x_n^k}{||\overline{x}^k||} \right).$$

Далі працюють вже з нормованим вектором:

$$\overline{x}^{k+1} = A\overline{e}^k.$$

Приклад. Знайти максимальне власне значення методом скалярних добутків з точністю $\varepsilon = 0,2$ для матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Оскільки $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ та $|a_{ij}| > 1$, будемо використовувати нормування для уникнення зростання компонент вектору $\overline{x}^k$. Оберемо довільне ненульове початкове наближення: $\overline{x}^0 = (1; 1; 1)^T$.

Ітерація 1.

$\overline{x}^1 = A\overline{x}^0 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix};$

$\lambda_1^1 = \dfrac{(\overline{x}^1, \overline{x}^0)}{(\overline{x}^0, \overline{x}^0)} = \dfrac{\big((8; 6; 6)^T, (1; 1; 1)^T\big)}{((1; 1; 1)^T, (1; 1; 1)^T)} \approx 6,66.$

Нормуємо:

$||\overline{x}^1||_2 = \sqrt{8^2 + 6^2 + 6^2} \approx 11,66;$

$\overline{e}^1 = \dfrac{\overline{x}^1}{||\overline{x}^1||_2} = (\dfrac{8}{11,66}; \dfrac{6}{11,66}; \dfrac{6}{11,66})^T = (0,69; 0,51; 0,51)^T.$

Ітерація 2.

$\overline{x}^2 = A\overline{e}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,69 \\ 0,51 \\ 0,51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,98 \\ 3,24 \\ 3,42 \end{pmatrix};$

$\lambda_1^2 = \dfrac{(\overline{x}^2, \overline{e}^1)}{(\overline{e}^1, \overline{e}^1)} \approx \dfrac{6,83}{0,996} \approx 6,86.$

Перевіримо умову припинення:

$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = |6,86 - 6,66| = 0,2 \leqslant \varepsilon.$

Отже, максимальне власне значення з точністю 0,2: $\lambda_{max}(A) \approx 6,86$.

Степеневий метод

Нехай $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$. Будемо також шукати максимальне власне значення λ_1. Початкове наближення $\overline{x}^0$ обираємо довільним, але $\overline{x}^0 \neq \overline{0}$.

Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = A\overline{x}^k; \qquad \lambda_1^{k+1} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k}, \quad \forall m : 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Умова припинення: $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| \leqslant \varepsilon$.

Зауваження. Якщо $A = A^T > 0$, то можна знайти мінімальне власне значення:

$$\lambda_{min}(A) = \lambda_{max}(A) - \lambda_{max}(B),$$

де $B = \lambda_{max}(A)E - A$, а E – одинична матриця.

Зауваження. Якщо скористатися властивістю норм: $\lambda_{max}(A) \leqslant ||A||_\infty$, то можна уникнути знаходження $\lambda_{max}(A)$:

$$\lambda_{min}(A) = ||A||_\infty - \lambda_{max}(B),$$

де $B = ||A||_\infty E - A$.

Приклад. Знайти мінімальне власне значення степеневим методом з точністю $\varepsilon = 0,5$ для матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Перевіримо умову $A = A^T > 0$:

$A = A^T$ – виконується;

$Det(2) > 0$,

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

оскільки всі головні мінори додатні, то $A > 0$ – виконується.

В задачі необхідно знайти лише мінімальне власне значення, тому замість знаходження $\lambda_{max}(A)$ скористаємося його оцінкою зверху: $||A||_\infty = 4$.

Будуємо матрицю B:

$$B = ||A||_\infty E - A = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $\lambda_{max}(B)$ степеневим методом із нормуванням. Оберемо початкове наближення: $\overline{x}^0 = (1;1;1)^T$.

Ітерація 1.

$$\overline{x}^1 = B\overline{x}^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Компонента m обирається довільна, покладемо $m = 1$, тоді

$$\lambda_1^1 = \frac{x_1^1}{x_1^0} = \frac{3}{1} = 3.$$

Нормуємо:

$$||\overline{x}^1||_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} \approx 5,83;$$

$$\overline{e}^1 = \frac{\overline{x}^1}{||\overline{x^1}||_2} = (\frac{3}{5,83}; \frac{4}{5,83}; \frac{3}{5,83})^T = (0,51; 0,69; 0,51)^T.$$

Ітерація 2.

$$\overline{x}^2 = B\overline{e}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{0,51} \\ 0,69 \\ 0,51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1,71} \\ 2,4 \\ 1,71 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1^2 = \frac{x_1^2}{e_1^1} = \frac{1,71}{0,51} = 3,35.$$

Перевіримо умову припинення знаходження $\lambda_{max}(B)$:
$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = |3,35 - 3| = 0,35 \leqslant \varepsilon$.
Умова припинення виконалася, тому $\lambda_{max}(B) = 3,35$, тоді
$\lambda_{min}(A) = ||A||_\infty - \lambda_{max}(B) = 4 - 3,35 = 0,65$.

Отже, мінімальне власне значення з точністю $0,5$: $\lambda_{min}(A) = 0,65$.

Метод обертань (Якобі)

Метод Якобі використовують, якщо матриця A є симетричною, тобто $A = A^T$. Тоді за допомогою ортогональних перетворень матриця A зводиться до діагонального вигляду, елементи діагоналі якої будуть відповідати наближеним власним значенням вихідної матриці. Покладемо $A_0 = A$. Ітераційний процес має вигляд:

$$A_{k+1} = U_k A_k U_k^T,$$

де U_k – матриця обертань:

$$U_k = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & i_k & & j_k & & \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \cos\varphi_k & \dots & \sin\varphi_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\sin\varphi_k & \dots & \cos\varphi_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i_k \\ \\ j_k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

φ_k – кут обертань:

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a^k_{i_k j_k}}{a^k_{i_k i_k} - a^k_{j_k j_k}},$$

i_k та j_k – номери рядочка та стовпчика в матриці A_k:

$$a^k_{i_k j_k} = \max_{i \neq j} |a^k_{ij}|, \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{2+1,n}.$$

Умова припинення:

$$t(A_{k+1}) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \varepsilon.$$

Після виконання цієї умови діагональні елементи матриці A_{k+1} є наближеними власними значеннями з точністю ε:

$$\lambda_i \approx a_{ii}^{k+1}, \qquad i = \overline{1,n},$$

при чому швидкість збіжності:

$$t(A_{k+1}) \leqslant q t(A_k); \quad q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}.$$

Власним векторам λ_i, $i = \overline{1,n}$, відповідають власні вектори $(u_{1i}, ..., u_{ii}, ..., u_{ni})^T$, які є стовпцями матриці U:

$$U = \prod_{k=1}^{n} U_k = \begin{pmatrix} u_{11} & ... & u_{1i} & ... & u_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_{i1} & ... & u_{ii} & ... & u_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_{n1} & ... & u_{ni} & ... & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Можна використовувати ітераційний процес вигляду: $A_{k+1} = U_k^T A_k U_k$, але тоді матриця обертань буде:

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \cos\varphi_k & ... & -\sin\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \sin\varphi_k & ... & \cos\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти наближено всі власні значення та відповідні власні вектори матриці A з точністю $\varepsilon = 0,1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Для розв'язання повної проблеми власних значень використовується метод обертань (Якобі). Оскільки $A = A^T$, то метод можна застосовувати.

$$A_0 = A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

Ітерація 1.

Знайдемо рядок та стовпчик з максимальним по модулю недіагональним елементом:

$a^0_{i_0 j_0} = |a_{12}| = |-1| \quad \Rightarrow \quad i_0 = 1,\, j_0 = 2.$

Знайдемо кут: $\varphi_0 = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2a^0_{12}}{a^0_{11} - a^0_{22}} = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{4}.$

Побудуємо матрицю обертань:

$$U_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 = U_0^T A_0 U_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо умову припинення:

$$t(A_1) = 2(0^2 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0^2 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0^2 + (-1)^2) = 4 \geqslant \varepsilon.$$

Оскільки умова припинення не виконалася, то знаходимо максимальне значення в матриці A_1.

Ітерація 2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad i_1 = 3,\ j_1 = 4;$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{34}^1}{a_{33}^1 - a_{44}^1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{4};$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_2 = U_1^T A_1 U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 3 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t(A_2) = 2(0^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2 + 0^2) = 2 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 3.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \boxed{0,5} & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 3 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad i_2 = 1,\ j_2 = 3,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = U_2^T A_2 U_2 = \begin{pmatrix} 3,5 & -0,35 & 0 & 0,35 \\ -0,35 & 1 & -0,35 & -0,5 \\ 0 & -0,35 & 2,5 & -0,35 \\ 0,35 & -0,5 & -0,35 & 1 \end{pmatrix};$$

$$t(A_3) = 2(0^2 + 0,5^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2 + 0^2) = 1,48 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 4.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3,5 & -0,35 & 0 & 0,35 \\ -0,35 & 1 & -0,35 & \boxed{-0,5} \\ 0 & -0,35 & 2,5 & -0,35 \\ 0,35 & -0,5 & -0,35 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$i_3 = 2, \quad j_3 = 4, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{4};$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_4 = U_3^T A_3 U_3 = \begin{pmatrix} 3,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix};$$

$$t(A_4) = 2((-0,5)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-0,5)^2) = 1 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 5.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3,5 & \boxed{-0,5} & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$i_4 = 1,\ j_4 = 2,\ \varphi_4 = -0,23;$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,23 & 0 & 0 \\ -0,23 & 0,97 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = U_4^T A_4 U_4 = \begin{pmatrix} 3,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & \boxed{-0,5} \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix};$$

$$t(A_5) = 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-0,5)^2) = 0,25 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 6.

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & \boxed{-0,5} \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$i_5 = 3,\ j_5 = 4,\ \varphi_5 = -0,23;$

$$U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,97 & 0,23 \\ 0 & 0 & -0,23 & 0,97 \end{pmatrix};$$

$$A_6 = U_5^T A_5 U_5 = \begin{pmatrix} 3,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,38 \end{pmatrix};$$

$t(A_6) = 0 \leqslant \varepsilon.$

Отже, власні значення матриці A: 3,6; 1,37; 2,6; 0,38. Знайдемо власні вектори:

$$U = U_0U_1U_2U_3U_4U_5 = \begin{pmatrix} 0,37 & 0,6 & -0,6 & 0,37 \\ -0,6 & 0,37 & 0,37 & 0,6 \\ 0,6 & -0,37 & 0,37 & 0,6 \\ -0,37 & -0,6 & -0,6 & 0,37 \end{pmatrix}$$

Отже, власному значенню 3,6 відповідає власний вектор $(0,37; -0,6; 0,6; -0,37)^T$; 1,37 – $(0,6; 0,37; -0,37; -0,6)^T$; 2,6 – $(-0,6; 0,37; 0,37; -0,6)^T$; 0,38 – $(0,37; 0,6; 0,6; 0,37)^T$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Проробити три ітерації степеневого методу із формулою скалярних добутків для знаходження максимального власного значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$