



تیم مهمات دانشگاه شریف

آموزش رایگان و با کیفیت برای همه



@SHARIF_IE



تاریخ: ۰۳/۹/۸
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱، ۲، ۳)

۲۲-۰۳۴

نیمسال اول ۰۴-۰۳

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 \ln t - y}{t} & (t > 0, y > 0) \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

سؤال ۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید:

$$y' = \frac{t(y+1) + (y+1)^2}{t^2} \quad (t > 0)$$

سؤال ۳. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y + t(1 + t^2 y^2) y' = 0 \quad (t > 0, y > 0)$$

(الف) عامل انتگرال‌سازی به صورت تابعی از ty برای این معادله دیفرانسیل بیابید که آن را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کند.

(ب) جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

سؤال ۴. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$(t^2 + t)y'' + (2 - t^2)y' - (2 + t)y = t(t + 1)^2 \quad (t > 0)$$

(الف) یک جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر $y_1 = \frac{1}{t}$ است. با استفاده از روش کاهش مرتبه، جواب y_2 (مستقل خطی با y_1) از معادله دیفرانسیل همگن متناظر را به دست آورید.

(ب) با استفاده از روش تغییر پارامترها، یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل داده شده بیابید.

(ج) جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بنویسید.

سؤال ۵. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + y = t^2(t^2 + 12) + 10 \sin t$$

(الف) با استفاده از روش حدسی (روش ضرایب نامعین)، یک جواب خصوصی برای این معادله دیفرانسیل بیابید.

(ب) جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را بنویسید.

سؤال ۶. فرض کنید $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند و $t_0 \in \mathbb{R}$. گیریم y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

باشند طوری که $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ و $y_1(t_0) = 0$. ثابت کنید $y_1 = 0$ یا $y_2 = \frac{y_1'(t_0)}{y_1'(t_0)} y_1$.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۵ نمره،

سؤال ۳: ۱۰+۱۰ نمره،

سؤال ۵: ۱۵+۵ نمره،

سؤال ۲: ۱۵ نمره،

سؤال ۴: ۱۵+۱۵+۵ نمره،

سؤال ۶: ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۲۰ نمره



تیم مهمات دانشگاه شریف

آموزش رایگان و با کیفیت برای همه



@SHARIF_IE

« بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ »

پاسخ نامه سؤال اول امتحان میانه مباحثات ریاضی (برده های ۱، ۲، ۳)

سؤال ۱. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 \ln t - y}{t} \\ y(1) = \frac{1}{p} \end{cases} \quad (t > 0, y > 0)$$

حل: روش اول (برنولی)

$$y' = \frac{y^2 \ln t - y}{t} \rightarrow t y' = y^2 \ln t - y$$

$$\rightarrow t y' + y = y^2 \ln t$$

(۵)

$$\rightarrow y' + \frac{1}{t} y = y^2 \frac{\ln t}{t}$$

$$\rightarrow y^{-2} y' + \frac{1}{t} y^{-1} = \frac{\ln t}{t} \quad (*)$$

حال $u = y^{-1}$ و $u' = -y^{-2} y'$ از (*) می‌توان نوشت: $-u' + \frac{1}{t} u = \frac{\ln t}{t}$

$$-u' + \frac{1}{t} u = \frac{\ln t}{t}$$

(۱)

$$\rightarrow u' - \frac{1}{t} u = -\frac{\ln t}{t} \quad (**)$$

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$$

مردم محترم * * * در سال اول انستیتو الی غیره

$$\frac{1}{t} u' - \frac{1}{t^r} u = -\frac{\ln t}{t^r}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{t} u\right)' = -\frac{\ln t}{t^r}$$

از طرف انستیتو
 $\int$ $\frac{1}{t} u = \int -\frac{\ln t}{t^r} dt \Rightarrow \frac{1}{t} u = \frac{1}{t} \ln t + \frac{1}{t} + C$

$$\Rightarrow u = \ln t + 1 + C t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln t + 1 + C t$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\ln t + 1 + C t}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\ln t + 1 + C t}$$

$y = \frac{1}{r}$
 $\xrightarrow{t=1} \frac{1}{r} = \frac{1}{\ln 1 + 1 + C(1)} \rightarrow C = 1$

از طرف انستیتو
 $\int -\frac{\ln t}{t^r} dt = \frac{1}{t} \ln t - \int \frac{1}{t^r}$

$$= \frac{1}{t} \ln t + \frac{1}{t} + C$$

محل انستیتو * * *

در سال اول انستیتو

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

$f = \ln t$	$g' = -\frac{1}{t^r}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$f' = \frac{1}{t}$	$g = \frac{1}{t}$

$$\int -\frac{1}{t^r} dt = -\int t^{-r} = -\frac{t^{-r+1}}{-r+1} = \frac{1}{t}$$

$$\int t^r dt = -\frac{1}{t}$$

باستفاده از بارم بندی سوال دوم می‌توانیم معادلات دیرانسی

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t(y+1) + (y+1)^2}{t^2} = \left(\frac{y+1}{t}\right) + \left(\frac{y+1}{t}\right)^2$$

$$u = \frac{1+y}{t} \Rightarrow y = ut - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$$

[نمره 2]

$$u = \frac{1+y}{t} \quad \text{تغییر متغیر}$$

[نمره 5]

$$\Rightarrow t \frac{du}{dt} + u = u + u^2 \Rightarrow t \frac{du}{dt} = u^2$$

$$t \frac{du}{dt} = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dt}{t}$$

حل معادله تفکیک پذیر

$$\Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln(t) + C \Rightarrow u = \frac{-1}{\ln(t) + C}$$

[نمره 8]

$$y = ut - 1 \Rightarrow y = \frac{-t}{\ln(t) + C} - 1$$

دیگر جواب این مسئله $y = -1$ است البته برای نوشتن این جواب متوالی نشده است.

راه دیگر با استفاده از معادله برنولی

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t(y+1) + (y+1)^2}{t^2} = \frac{y+1}{t} + \frac{(y+1)^2}{t^2}$$

[نمره 2]

$$u = y+1 \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$u = y+1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{u}{t} + \frac{u^2}{t^2} \Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{u}{t} = \frac{u^2}{t^2}$$

معادله استاندارد برنولی

$$u = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt}$$

تغییر متغیر $v = u^{-1}$ برای حل معادله برنولی

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{tv} = \frac{1}{v^2 t^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{t} v = -\frac{1}{t^2}$$

[نمره 4]

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{1}{t} dt\right) = \exp(\ln(t)) = t$$

حل معادله مرتبه یک

$$v = \frac{\int \frac{1}{v^2} t dt + C}{t}$$

$$v = \frac{-\ln(t) + C}{t} \Rightarrow u = \frac{t}{-\ln(t) + C}$$

$$\Rightarrow y = \frac{t}{-\ln(t) + C} - 1$$

[نمره 4]

به علاوه جواب ثابت $y = -1$

$$(t^2+t)y'' + (r-t^2)y' - (r+t)y = 0$$

(المعادلة)

$$\Rightarrow y'' + \frac{(r-t^2)}{(t^2+t)} y' - \frac{(r+t)}{(t^2+t)} y = 0 \rightarrow \text{المعادلة}$$

$$y_1(t) = v(t)y_1(t) = v(t) \times \frac{1}{t}$$

$$v(t) = \int \frac{e^{\int p(t) dt}}{y_1^2} dt = \int \frac{e^{\int \frac{(r-t^2)}{t^2+t} dt}}{\frac{1}{t^2}} dt = \int \frac{e^{\int \frac{(t-r)}{t^2+t} dt}}{\frac{1}{t^2}} dt$$

$$\int \frac{t-r}{t^2+t} dt = \int \frac{t}{t^2+t} dt - \int \frac{r}{t^2+t} dt = \int \frac{t}{t(t+1)} dt - r \int \frac{1}{t(t+1)} dt$$

$$\int \frac{t}{t(t+1)} dt - r \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \frac{t}{t+1} dt - r \int \frac{1}{t(t+1)} dt$$

$$\frac{t}{t+1} = \frac{t+1-1}{t+1} = \frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1} \Rightarrow \int \frac{t}{t+1} dt = \int 1 - \frac{1}{t+1} dt$$

$$= \int 1 dt - \int \frac{1}{t+1} dt = t - \ln(t+1) \quad \text{جواب (6)}$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)} = \frac{At + Bt + A}{t(t+1)} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \Rightarrow \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt$$

$$= \ln(t) - \ln(t+1) \Rightarrow -r \int \frac{1}{t(t+1)} dt = -r \ln(t) + r \ln(t+1) \quad (*)$$

qiv 6

$$\therefore \int \frac{tr-r}{t^r+t} = (*) + (**) = t - \ln(t+1) - r \ln(t) + r \ln(t+1) = t - r \ln(t) + \ln(t+1)$$

$$\therefore V(t) = \int \frac{e^{t+\ln(t+1)-r\ln(t)}}{\frac{1}{t^r}} dt = \int t^r e^{t+\ln(t+1)-r\ln(t)} dt$$

$$= \int t^r \times e^t \times e^{\ln(t+1)} \times e^{(\ln(t))^{-r}} dt = \int t^r \times e^t \times (t+1) \times t^{-r} dt$$

$$= \int e^t (t+1) dt = \int t e^t + e^t dt = \int t e^t dt + \int e^t dt$$

$$\begin{cases} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{cases} \quad = t e^t - e^t + e^t = t e^t$$

qiv 2

$$\int u dv = uv - \int v du = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t$$

$$\therefore \boxed{V(t) = t e^t} \Rightarrow y_p(t) = V(t) y_1(t) = t e^t \times \frac{1}{t} = e^t \Rightarrow \boxed{y_p(t) = e^t}$$

qiv 1

$$c) \vec{y}_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 \times \frac{1}{t} + u_2 \times e^t$$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & e^t \\ -\frac{1}{t^2} & e^t \end{vmatrix} = \frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t^2} = \frac{te^t + e^t}{t^2} = \frac{e^t(t+1)}{t^2}$$

gib 5

Wronskian

$$u_1(t) = - \int \frac{g(t) \times y_2(t)}{w(y_1, y_2)} dt = - \int \frac{(t+1) \times e^t}{\frac{e^t(t+1)}{t^2}} dt = - \int \frac{t^2(t+1)e^t}{e^t(t+1)} dt$$

$$= - \int t^2 dt = - \frac{t^3}{3} \Rightarrow u_1(t) = - \frac{t^3}{3}$$

gib 5

$$u_2(t) = \int \frac{g(t) \times y_1(t)}{w(y_1, y_2)} dt = \int \frac{(t+1) \times \frac{1}{t}}{\frac{e^t(t+1)}{t^2}} dt = \int \frac{t^2(t+1)}{t e^t(t+1)} dt$$

$$= \int \frac{t}{e^t} dt = \int t e^{-t} dt$$

$$\begin{cases} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^{-t} \rightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = -t e^{-t} + \int e^{-t} dt = -t e^{-t} - e^{-t} = -e^{-t}(t+1)$$

$$\Rightarrow u_2(t) = -e^{-t}(t+1)$$

$$\Rightarrow u_2(t) = -e^{-t}(t+1)$$

gib 5

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\frac{t^2}{3} \times \frac{1}{t} + (e^t(t+1)) \times e^t = -\frac{t}{3} - (t+1)$$

$$= -\frac{t}{3} - t - 1 \Rightarrow y_p = -\frac{t}{3} - t - 1$$

برای پاسخ به سؤالات

$$2) y(t) = y_c(t) + y_p(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p = c_1 \frac{1}{t} + c_2 e^t - \frac{t}{3} - t - 1$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \frac{1}{t} + c_2 e^t - \left(\frac{t}{3} + t + 1 \right) \quad \text{نمره (5)}$$

نکته: برای محاسبه $u_1(t)$ و $u_2(t)$ از روش بزرگترین انحراف با محاسبه دیرینه استفاده می‌کنیم. به ازاء هر کدام از این دو تابع، باید از این روش استفاده کرد. در این روش، باید از این روش استفاده کرد.

سوال ۵) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + y = t^2(t^2 + 12) + 10 \sin t$$

الف) با استفاده از روش هرست (روش ضرایب نامعین) یک جواب خصوصی برای این معادله بیابید. (۱۵)

ب) جواب عمومی این معادله را بنویسید. (۵)

جواب خصوصی به صورت $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ در نظر می‌گیریم. y_{p1} جواب خصوصی معادله ۱ می‌باشد.

$$\textcircled{1} y'' + y = t^4 + 12t^2$$

y_{p2} جواب خصوصی برای معادله ۲ می‌باشد.

$$\textcircled{2} y'' + y = 10 \sin t$$

برای معادله ۱ جواب خصوصی به صورت $y_{p1} = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left. \begin{aligned} y_{p1} &= At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E \\ \textcircled{1} y'_{p1} &= 4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct + D \\ \textcircled{2} y''_{p1} &= 12At^2 + 6Bt + 2C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= t^4 + 12t^2 \\ &= t^4 + 12t^2 \end{aligned}$$

حال با مقایسه در دو طرف تساوی ضرایب می‌یابیم:

$$\boxed{A=1}, \boxed{B=0}, \quad 12A + C = 12 \quad \downarrow \quad \boxed{C=0}$$

$$\begin{aligned} 4B + D &= 0 \quad \downarrow \quad \boxed{D=0} \\ 2C + E &= 0 \quad \downarrow \quad \boxed{E=0} \end{aligned}$$

$$\boxed{y_{p1} = t^4} \quad \textcircled{1}$$

پس داریم: $y_{p1} = t^4$ (مجموعاً ۵ نمره)

برای معادله ۲ جواب خصوصی به صورت $y_{p2} = t^s (m \cos t + n \sin t)$ در نظر می‌گیریم. s تعداد تکرار ریشه معادله همگن می‌باشد. ریشه به صورت $\lambda = \alpha \pm i\beta$ می‌باشد. ما باید بدانیم:

$$y'' + y = 0 \rightarrow r^2 + 1 = 0 \rightarrow \underline{r = \pm i} \Rightarrow \begin{aligned} \textcircled{1} \alpha &= 0, \textcircled{1} \beta &= 1, \textcircled{1} s &= 1 \end{aligned} \rightarrow \text{مجموعاً (۵ نمره)}$$

پس ریشه: $y_{p2} = t(m \cos t + n \sin t)$ داریم:

$$y'_{p2} = m \cos t + n \sin t - m t \sin t + n t \cos t \quad \textcircled{1}$$

$$y_p'' = -msint + nCost - msint - mCost + nCost - ntsint$$

$$= -2msint + 2nCost - mCost - ntsint \quad (1)$$

بگذاریم (2) را هم

$$-2msint + 2nCost - mCost - ntsint + mCost + ntsint = 10sint$$

$$-2m = 10 \rightarrow m = -5 \quad (1) \quad n = 0 \quad (1)$$

$$y_p = -5tCost$$

پس جواب خصوصی به صورت

$$y_p = t^4 - 5tCost$$

می باشد.

(ب) جواب عمومی را می توان به صورت

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p \quad (1)$$

نوشت به شکل y_1, y_2

$$y'' + y = 0 \rightarrow r^2 + 1 = 0 \rightarrow r = \pm i$$

$$y_1 = sint, y_2 = Cost$$

بنابراین

$$y_c = C_1 sint + C_2 Cost + t^4 - 5tCost \quad (2)$$

نوشتن جواب عمومی به فرم مقابل (مجموعاً 5 نمره)

$$y'' + y = 1 \cdot \sin t$$

راه حل متعلق [راه دهن برای پیدا کردن y_p]

$$z = e^{it} v(t) \quad (1)$$

$$z'' + z = 1 \cdot e^{it}$$

$$z' = (v' + iv) e^{it} \quad (1)$$

$$z'' = (v'' + 2iv' - v) e^{it} \quad (1)$$

و با توجه به $\rightarrow (v'' + 2iv' - v) e^{it} + e^{it} v = 1 \cdot e^{it}$

$$v'' + 2iv' = 1$$

$$v = At^2 + Bt + C$$

$$v' = 2At + B$$

$$v'' = 2A$$

$$2A + 2i(2At + B) = 1$$

$$4Ait + 2A + 2iB = 1$$

$$A = 0$$

$$B = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \quad (1)$$

$$\rightarrow z = (-\frac{i}{2}t) e^{it} = -\frac{i}{2}t (\cos t + i \sin t)$$

$$= -\frac{i}{2}t \cos t + \frac{1}{2}t \sin t$$

(1) جزء حقیقی

$$\downarrow y_p = \boxed{-\frac{1}{2}t \cos t}$$

← y_p (مجموعه‌ای از) y_p (مجموعه‌ای از)



راه حل سؤال ۶ میان ترم معادلات دیفرانسیل

نیم سال اول ۰۴-۰۳

استاد: محمدرضا پورنکی - حمیدرضا فنایی

راه حل ۱. فرض کنید $y_1'(t_0) = 0$. معادله دیفرانسیل صورت سوال با شرایط اولیه $y(t_0) = 0$ و $y'(t_0) = 0$ را در نظر بگیرید. y_1 جوابی برای این مسئله است. تابع $y = 0$ نیز جوابی برای این مسئله است. با توجه به قضیه یگانگی داریم $y_1 = 0$. حال فرض کنید $y_1'(t_0) \neq 0$. معادله دیفرانسیل صورت سوال با شرایط اولیه $y(t_0) = 0$ و $y'(t_0) = y_2'(t_0)$ را در نظر بگیرید. چون $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ و $y_1(t_0) = 0$ پس $-y_2(t_0)y_1'(t_0) = 0$. بنابراین $y_2(t_0) = 0$ و y_2 یک جواب برای مسئله مقدار اولیه فوق است. از طرفی به راحتی دیده می شود که $y = \frac{y_2'(t_0)}{y_1'(t_0)}y_1$ نیز جوابی برای مسئله مقدار اولیه است. بنا بر قضیه یگانگی داریم $y_2 = \frac{y_2'(t_0)}{y_1'(t_0)}y_1$.

راه حل ۲. چون $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ بنا بر قضیه ی آبل و نتایج آن y_1 و y_2 وابسته ی خطی هستند. فرض کنید $y_1 \neq 0$. بنابراین مقدار ثابت c موجود است بطوریکه $y_2 = cy_1$. چون $y_1(t_0) = 0$ با در نظر گرفتن مسئله مقدار اولیه مناسب مانند راه حل ۱ می توان نشان داد $y_1'(t_0) \neq 0$. (نشان دادن این نتیجه بخشی از نمره را دارد. اینجا چون یکبار در راه حل اول آمده دیگر آن را تکرار نمی کنیم.) با مشتق گرفتن از $y_2 = cy_1$ و محاسبه ی آن در t_0 و این نکته که $y_1'(t_0) \neq 0$ نتیجه می گیریم $c = \frac{y_2'(t_0)}{y_1'(t_0)}$.
چند نکته:

۱. تعداد زیادی از دانشجویان نشان داده بودند که اگر $y_1 = 0$ یا $y_2 = \frac{y_2'(t_0)}{y_1'(t_0)}y_1$ آنگاه فرض های سوال برقرارند. چنین راه حل هایی نمره ندارند.

۲. بعضی از راه حل ها در قسمتی از حلشان چنین استدلالی داشتند: چون $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ بنابر قضیه ی آبل به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم:

$$W[y_1, y_2](t) = (y_1 y_2' - y_2 y_1')(t) = 0.$$

بنابراین $y_2(t) = \frac{y_2'(t)}{y_1'(t)}y_1(t)$. این راه حل ها استدلالی ندارند که چرا اجازه ی تقسیم بر y_1' را داریم. به طور کلی در هر راه حل باید نشان دهید که بر صفر تقسیم نمی کنید.

۳. بعضی از راه حل ها بدون اینکه استدلال کاملی بدهند، از وابسته ی خطی بودن y_1 و y_2 نتیجه می گیرند که ثابت c وجود دارد بطوریکه $y_2 = cy_1$. فقط از وابسته ی خطی بودن نمی توان چنین نتیجه ای گرفت. ممکن است $y_1 = 0$ و $y_2 \neq 0$. در این حالت باز هم نتایج سوال درست هستند اما نمی توان نوشت: $y_2 = cy_1$.

۴. نیازی به اثبات قضیه ی آبل نبود (چون بخشی از مطالب درس است) و نمره ای برای اثبات آن در نظر گرفته نشد.

۵. برای تصحیح این سوال عموماً تا جایی که ممکن بود ارفاق شد. فقط در صورتیکه اطمینان زیادی به اشتباه در تصحیح آن دارید، اعتراض کنید. ممکن است در تصحیح مجدد نمره از دست دهید.