

دوشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۱۸

دفترچه پاسخ

الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
+ جامع هندسه
(فصل ۱ و ۳ دهم + ۱ یازدهم (صفحه ۱ تا ۱۰) +
۲ یازدهم + ۶ دوازدهم)

دوبینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی
ریاضی

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان محمد خانگلدی - محمد پورسعید	فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنوند - سجاد احمدی

جامع شمارش، بدون
شمردن و آمار و احتمال
هفته ششم

الگو و دنباله + توان‌های
گویا + جامع هندسه
هفته پنجم

جامع حد و پیوستگی +
مشتق و کاربرد مشتق
هفته چهارم

جامع مثلثات
هفته سوم

جامع تابع +
توابع نمایی و لگاریتمی
هفته دوم

مباحث پایه
هفته اول

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



دانش آموزان عزیز ماز

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشید.

این آزمون رو اختصاص دادیم به مجموعه، الگو و دنباله، توان های گویا و عبارت های جبری و هندسه.

احتمالاً سوالی که ذهنتون رو مشغول کرده اینه که این فصل ها توی کنکور چقدر اهمیت داره! در جوابتون باید بگیم که حدوداً ۵ تا ۷ از سوال های کنکور رو برای این فصول رزرو کنید.

با مباحث فصل ۱ و ۳ دهم که بسیار آشنا هستید، در مورد هندسه هم باید بگیم که بخش ۱ از فصل ۱ ریاضی ۲، فصل ۲ ریاضی ۲ و فصل ۶ ریاضی ۳ در مورد هندسه صحبت کردن.

ابتدا از هندسه تحلیلی شروع می کنیم، یعنی بخش ۱ فصل ۱ ریاضی ۲! توی این بخش با یادآوری معادله خط بحث رو شروع می کنه و به یه سری فرمول مثل فاصله نقطه از خط، مختصات وسط دو نقطه، فاصله دو نقطه و .. می پردازه.

بعد از اون می ریم سراغ فصل دوم ریاضی ۲ که داره در مورد قضیه تالس و تشابه صحبت می کنه. البته ابتدای فصل رو اختصاص داده به ترسیم های هندسی و ویژگی مهم نیمساز و عمودمنصف هم اونجا بحث میشه.

فصل ۶ ریاضی دوازدهم هم آخرین بخش هندسه دبیرستانونه! توی این فصل با مفاهیم دوران و برش و مقاطع مخروطی آشنا میشید و بعدش به طور تخصصی می پردازید به دو تا از مقاطع مخروطی معروف یعنی بیضی و دایره.

و اینگونه است که هندسه شما در دبیرستان به پایان می رسه!!

از این بخش در کنکور سال های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	نوبت اول ۱۴۰۲	نوبت دوم ۱۴۰۲	نوبت اول ۱۴۰۳	نوبت دوم ۱۴۰۳
تعداد سوال	۶	۵	۷	۶	۷	۷
مباحث مطرح شده در سوال	توان های گویا و عبارت های جبری (۲ سوال) قضیه تالس هندسه تحلیلی (۲ سوال) دایره	توان های گویا و عبارت های جبری الگو و دنباله هندسه تحلیلی قضیه تالس بیضی	توان های گویا و عبارت های جبری دنباله حسابی مجموعه ها و بازه قضیه تالس و تشابه هندسه تحلیلی دایره	مجموعه ها و بازه دنباله حسابی قضیه تالس و تشابه هندسه تحلیلی دایره	توان های گویا و عبارت های جبری تعداد اعضای مجموعه ها دنباله حسابی هندسه تحلیلی تشابه قضیه تالس دایره	توان های گویا و عبارت های جبری (۲ سوال) دنباله هندسی هندسه تحلیلی روابط طولی در مثلث قضیه تالس بیضی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم تره. آرزومند آرزوهایتان... ❀

حسین شفیع زاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز



- ۱- در یک کلاس ۳۰ نفره، تعداد علاقمندان به ریاضی ۳ برابر علاقمندان به فیزیک و ریاضی و ۲ برابر کسانی است که فقط به فیزیک علاقمندند. در این کلاس حداقل چند نفر نه به ریاضی علاقمندند و نه به فیزیک؟

۴ (۴)

۳ (۳)

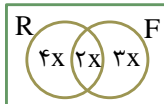
۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۳

نمودار ون به صورت مقابل است:



بنابراین تعداد افرادی که نه به ریاضی علاقمندند و نه به فیزیک برابر $30 - 9x$ است. کمترین مقدار $30 - 9x$ زمانی است که $x = 3$ باشد و در نتیجه $30 - 9x = 3$ است.

گروه آموزشی ماز

- ۲- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات دوم و پنجم، هشت برابر مجموع جملات پنجم و هشتم است. اگر جمله چهارم برابر ۱ باشد، جمله ششم کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{a_2 + a_5}{a_5 + a_8} = 1 \Rightarrow \frac{aq + aq^4}{aq^4 + aq^7} = 1 \Rightarrow \frac{aq(1 + q^3)}{aq^4(1 + q^3)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q^3} = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

می دانیم:

$$a_4 = 1 \Rightarrow a_6 = a_4 \times q^2 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

از طرفی:

گروه آموزشی ماز

- ۳- بین دو عدد ۲ و k و با شروع از ۲، پنج واسطه حسابی درج می کنیم. اگر جملات دوم، سوم و پنجم درج شده تشکیل دنباله هندسی غیر ثابت دهند، k چند برابر جمله دوم درج شده است؟

-۵ (۴)

-۴ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

$2, -, -, -, -, k$

دنباله حسابی به وجود آمده به صورت مقابل است:

در این صورت جملات دوم، سوم و پنجم درج شده همان جملات سوم، چهارم و ششم دنباله حسابی می باشند که تشکیل دنباله هندسی داده اند.

$$a_3, a_4, a_6 \Rightarrow a_4^2 = a_3 a_6$$

$$\Rightarrow (2 + 3d)^2 = (2 + 2d)(2 + 5d) \Rightarrow d^2 + 2d = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ غ ق ق} \\ d = -2 \checkmark \end{cases}$$

$2, 0, -2, -4, -6, -8, -10$

خواهیم داشت:

$$\frac{-10}{-2} = 5$$

k برابر ۱۰- و جمله دوم درج شده ۲- است.

گروه آموزشی ماز

$$4- \text{ حاصل عبارت } A = \frac{15}{2\sqrt[3]{4}-1} - 4\sqrt[3]{4} - 1 \text{ چقدر است؟}$$

$4\sqrt[3]{2}$ (۴)

$3\sqrt[3]{2}$ (۳)

$2\sqrt[3]{2}$ (۲)

$\sqrt[3]{2}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا کسر $\frac{15}{2\sqrt[3]{4}-1}$ را گویا می کنیم:

$$\frac{15}{2\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1}{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1} = \frac{15(4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)}{16-1} = 4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1$$

$$A = 4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1-4\sqrt[3]{4}-1 = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین:



۵- حاصل $P = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{2}\sqrt{2}} \times 4^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{\sqrt[5]{25}}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

(۲) $\frac{1}{\sqrt[5]{25}}$

(۱) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

$$\sqrt[5]{4\sqrt[3]{2}\sqrt{2}} = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{2 \times 2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[5]{4 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

می دانیم:

$$P = 2^{\frac{1}{2}} \times 4^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۶- حاصل عبارت $(x^2 + 12)(x - 6)$ به ازای $x = \sqrt[3]{65} + 2$ چقدر است؟

(۴) ۲

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

ابتدا عبارت $(x^2 + 12)(x - 6)$ را به صورت مکعب کامل می نویسیم:

$$A = (x^2 + 12)(x - 6) = x^3 - 6x^2 + 12x - 72 = (x - 2)^3 - 64$$

اگر $x = \sqrt[3]{65} + 2$ باشد، خواهیم داشت:

$$A = (\sqrt[3]{65} + 2 - 2)^3 - 64 = 65 - 64 = 1$$

گروه آموزشی ماز

۷- خطی که از نقطه تلاقی دو خط $3y - 4x = 18$ و $2y + x = 1$ می گذرد و بر خط $2y = -x + 11$ عمود است، از کدام نقطه عبور می کند؟

(۴) $(-1, -10)$

(۳) $(-1, -6)$

(۲) $(1, 10)$

(۱) $(1, 6)$

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱)

برای تعیین نقطه تلاقی دو خط $3y - 4x = 18$ و $2y + x = 1$ ، کافی است دستگاه حاصل از آن ها را حل کنیم:

$$\begin{cases} 3y - 4x = 18 \\ 2y + x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x = 18 \\ 8y + 4x = 4 \end{cases} \Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow x = -3 \Rightarrow A(-3, 2) \text{ مختصات نقطه تلاقی}$$

از طرفی شیب خط $2y = -x + 11$ برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط عمود بر آن برابر $m = 2$ خواهد بود در نتیجه معادله خط مطلوب به صورت زیر است:

$$y - 2 = 2(x + 3) \Rightarrow y = 2x + 8$$

با امتحان گزینه ها مشخص می شود که خط فوق از نقطه $(1, 10)$ می گذرد.



نوشتن معادله خط در ۴ حالت

با داشتن شیب خط و مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$: در این حالت معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

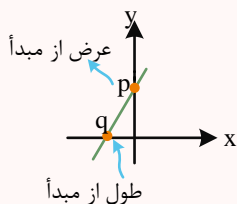
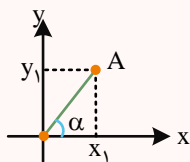
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

با داشتن مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از خط: در این حالت معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

با داشتن زاویه بین خط و جهت مثبت محور x ها و مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$: بدون شرح!

$$y - y_1 = (\tan \alpha)(x - x_1)$$



با داشتن عرض از مبدأ و طول از مبدأ: معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{y}{p} + \frac{x}{q} = 1$$

گروه آموزشی ماز

۸- دو نقطه روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارند که فاصله آن‌ها از خط $3y = 2x + 12$ برابر $\sqrt{13}$ است. حاصل جمع طول‌های این دو نقطه کدام است؟

$$\frac{24}{5} \quad (4)$$

$$-\frac{24}{5} \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است، پس مختصات نقاطی که روی این خط قرار دارند به صورت $C(\alpha, -\alpha)$ است. فاصله C را از خط $2x - 3y + 12 = 0$ به دست می‌آوریم:

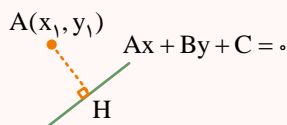
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|2\alpha + 3\alpha + 12|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|\alpha + 12|}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha + 12|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |\alpha + 12| = 13 \Rightarrow \alpha + 12 = \pm 13 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 12 = 13 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow A(1, -1) \\ \alpha + 12 = -13 \Rightarrow \alpha = -25 \Rightarrow B(-25, 25) \end{cases}$$

$$\text{مجموع طول‌های نقاط مطلوب} = -25 + 1 = -24$$

فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه از خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که نقطه را به خط وصل می‌کند، که این کوتاه‌ترین پاره‌خط، همان خط عمودی است که از نقطه به خط وارد می‌شود.



برای پیدا کردن فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط $Ax + By + C = 0$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$AH = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

گروه آموزشی ماز



۹- قاعده کوچک یک دوزنقه به طول $\sqrt{12}-2$ روی خط $y=\sqrt{3}x+2$ و قاعده بزرگ آن به طول $\sqrt{27}-3$ روی خط $my-3x+6=0$ قرار دارد. مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۴) ۵

(۳) $10\sqrt{3}$

(۲) $5\sqrt{3}$

(۱) ۱۰

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

چون در دوزنقه، قاعده‌ها با هم موازیند، پس داریم:

$$y = \sqrt{3}x + 2$$

$$my = 3x - 6 \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

بنابراین معادله دو خط موازی به صورت $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ خواهد بود که فاصله دو خط موازی برابر طول ارتفاع دوزنقه است، یعنی داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y + 2 = 0 \\ \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

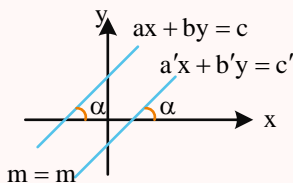
توجه شود که ضرایب x و y را در دو معادله، برابر کرده‌ایم تا از فرمول فاصله دو خط موازی استفاده کنیم:

$$d = \frac{|2 + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

پس طول ارتفاع دوزنقه $h = 1 + \sqrt{3}$ است.

$$S = \frac{(\sqrt{12}-2 + \sqrt{27}-3) \times (1+\sqrt{3})}{2} = \frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5)(1+\sqrt{3})}{2} = \frac{5(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{5 \times 2}{2} = 5$$

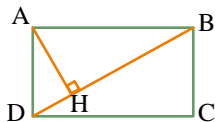
دو خط موازی



دو خط در صورتی موازی‌اند که دارای شیب‌های برابر باشند، به عبارتی: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

گروه آموزشی ماز

۱۰- در مستطیل شکل مقابل $AB = 8\sqrt{3}$ و $BC = 8$ است. فاصله نقطه H از ضلع AB کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

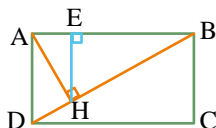
در مثلث قائم‌الزاویه ABD طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 192 + 64 \Rightarrow BD^2 = 256 \Rightarrow BD = 16$$

همچنین در مثلث ABD داریم:

$$AB^2 = BD \cdot BH \Rightarrow 192 = 16 \times BH \Rightarrow BH = 12$$

حال اگر از نقطه H عمود HE را بر ضلع AB رسم کنیم داریم:

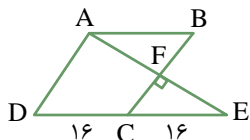


$$EH \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{HE}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{HE}{8} = \frac{12}{16} \Rightarrow HE = 6$$

گروه آموزشی ماز



۱۱- در شکل مقابل، $\hat{F} = 90^\circ$ و چهارضلعی ABCD لوزی است. مساحت مثلث ABF کدام است؟



- (۱) $16\sqrt{2}$
(۲) $32\sqrt{2}$
(۳) $16\sqrt{3}$
(۴) $32\sqrt{3}$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

$$AD = AB = BC = 16$$

چون تمام اضلاع لوزی با هم برابرند، پس:

از طرفی چون در مثلث ADE داریم: $FC \parallel AD$ ، پس با تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow \frac{FC}{16} = \frac{16}{32} \Rightarrow FC = 8$$

$$\Rightarrow BF = 16 - 8 = 8$$

حال بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث ABF داریم:

$$AB^2 = AF^2 + FB^2 \Rightarrow 256 = AF^2 + 64 \Rightarrow AF^2 = 192 \Rightarrow AF = 8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AF \times BF = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 8 \Rightarrow S_{\triangle ABF} = 32\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- در مثلث قائم الزاویه‌ای نسبت اضلاع قائم ۵ به ۸ است. اگر ارتفاع وارد بر وتر را در این مثلث رسم کنیم، مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث متوسط است؟

(۴) $\frac{64}{25}$

(۳) $\frac{19}{64}$

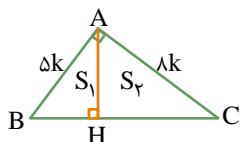
(۲) $\frac{13}{8}$

(۱) $\frac{5}{3}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم با رسم ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه، سه مثلث متشابه وجود می‌آید، بنابراین داریم:



$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{S_1}{S_3} = \left(\frac{5k}{8k}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{25 + 64}{64} = \frac{89}{64}$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- در یک دوزنقه قائم الزاویه، اندازه قاعده‌ها برابر ۱۶ و ۲۵ است و قطرهای آن بر هم عمود هستند. مساحت مثلثی که اضلاع آن، ساق قائم و قاعده بزرگ و قطر دوزنقه است، کدام است؟

(۴) ۲۵۰

(۳) ۲۷۵

(۲) ۲۰۰

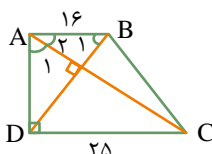
(۱) ۲۲۵

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{B}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{به حالت دو زاویه مساوی}} \triangle ABD \sim \triangle ACD$$



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow AD^2 = AB \times DC \Rightarrow AD = 2$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{AD \times DC}{2} = \frac{2 \times 25}{2} = 25$$

گروه آموزشی ماز



۱۴- به ازای چند مقدار صحیح k ، معادله $x^2 + y^2 - (k+1)x - 4y + k + 3 = 0$ معادله یک دایره خواهد بود؟

(۴) بی شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۶)

پاسخ: گزینه ۴

شرط این که معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره باشد این است که $a^2 + b^2 - 4c > 0$ باشد، پس داریم:

$$x^2 + y^2 - (k+1)x - 4y + k + 3 = 0$$

$$(k+1)^2 + 16 - 4(k+3) > 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 + 16 - 4k - 12 > 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k + 5 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{عبارت درجه دوم همواره مثبت}$$

بنابراین شرط $a^2 + b^2 - 4c > 0$ همواره (به ازای هر مقدار k) برقرار است، پس به ازای بی شمار عدد صحیح، معادله داده شده، معادله یک دایره است.

گروه آموزشی ماز

۱۵- مجموع فواصل هر نقطه یک بیضی از کانون های $F(2,0)$ و $F'(-2,0)$ برابر ۶ است. اندازه قطر کوچک این بیضی کدام است؟

(۴) $2\sqrt{7}$

(۳) $2\sqrt{5}$

(۲) $\sqrt{7}$

(۱) $\sqrt{5}$

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

$$F(2,0), F'(-2,0) \Rightarrow FF' = 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$MF + MF' = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

$$2b = 2\sqrt{5} = \text{طول قطر کوچک بیضی}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. نسبت طول قطر بزرگ به طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

(۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۳) ۲

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۶)

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم در هر بیضی، خروج از مرکز بیضی که با e نمایش داده می شود به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{طول قطر بزرگ}}{\text{طول قطر کوچک}} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

گروه آموزشی ماز

۱۷- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به هم چگونه اند؟

(۴) متخارج

(۳) متقاطع

(۲) مماس داخل

(۱) مماس خارج

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۶)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مختصات مرکز و شعاع های دو دایره را تعیین می کنیم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow O_1(2, -2), R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 + 4} = 3$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \Rightarrow O_2(2, -4), R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 64 - 76} = 1$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$R_1 + R_2 = 4, |R_1 - R_2| = 2$$

چون $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است، پس دو دایره، مماس داخل هستند.



- ۱۸- دایره‌ای به مرکز $O(1, -4)$ از نقطه $A(5, 2)$ می‌گذرد و بر خط $2x - 3y = a$ مماس است. در این صورت جمع مقادیر ممکن برای a کدام است؟
- (۱) ۶۲ (۲) -۶۲ (۳) -۲۸ (۴) ۲۸

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۶)

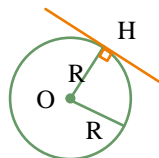
پاسخ: گزینه ۴

فاصله مرکز دایره از هر نقطه روی آن برابر با فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن است، زیرا هر دو برابر شعاع دایره هستند:

$$O(1, -4) \quad A(5, 2) \Rightarrow OA = \sqrt{(5-1)^2 + (2+4)^2} \Rightarrow OA = \sqrt{52} \Rightarrow R = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$2x - 3y - a = 0, \quad O(1, -4) \Rightarrow OH = \frac{|2(1) - 3(-4) - a|}{\sqrt{4+9}} \Rightarrow \frac{|14-a|}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13} \Rightarrow |14-a| = 26$$

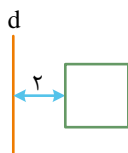
$$\Rightarrow 14-a = \pm 26 \Rightarrow \begin{cases} 14-a = 26 \Rightarrow a = -12 \\ 14-a = -26 \Rightarrow a = 40 \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 = 40 - 12 = 28$$



گروه آموزشی ماز

- ۱۹- حجم حاصل از دوران مربعی به ضلع ۳ حول خط d که با ضلع مربع موازی است، کدام است؟

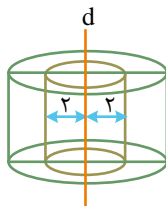
- (۱) 63π (۲) 61π (۳) 59π (۴) 54π



(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۶)

پاسخ: گزینه ۱

شکل حاصل از دوران مربع داده شده حول خط d یک استوانه به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۳ است که یک استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ از وسط آن خارج شده است، بنابراین حجم حاصل از دوران برابر است با:



$$V = \pi(5)^2 \times 3 - \pi(2)^2 \times 3 = 75\pi - 12\pi = 63\pi$$

گروه آموزشی ماز

- ۲۰- اگر کره‌ای به شعاع ۲۰ را با یک صفحه افقی برش بزنیم، به طوری که مساحت سطح مقطع حاصل برابر 100π باشد، فاصله مرکز کره از این صفحه برابر کدام است؟

- (۱) $10\sqrt{3}$ (۲) ۲۰ (۳) $10\sqrt{2}$ (۴) ۱۰

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۶)

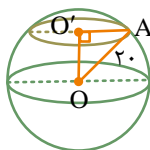
پاسخ: گزینه ۱

فرض می‌کنیم صفحه، کره‌ای به شعاع ۲۰ را در دایره‌ای به شعاع $O'A$ قطع کند (مطابق شکل) چون مساحت سطح مقطع برابر 100π است، پس داریم:

$$\pi(O'A)^2 = 100\pi \Rightarrow O'A = 10$$

$$OO'^2 = OA^2 - O'A^2 = 20^2 - 10^2 = 400 - 100 = 300$$

$$\Rightarrow OO' = 10\sqrt{3}$$



از قضیه فیثاغورس در مثلث $OO'A$ نتیجه می‌شود:

پس فاصله مرکز کره از صفحه برش برابر $10\sqrt{3}$ است.

گروه آموزشی ماز