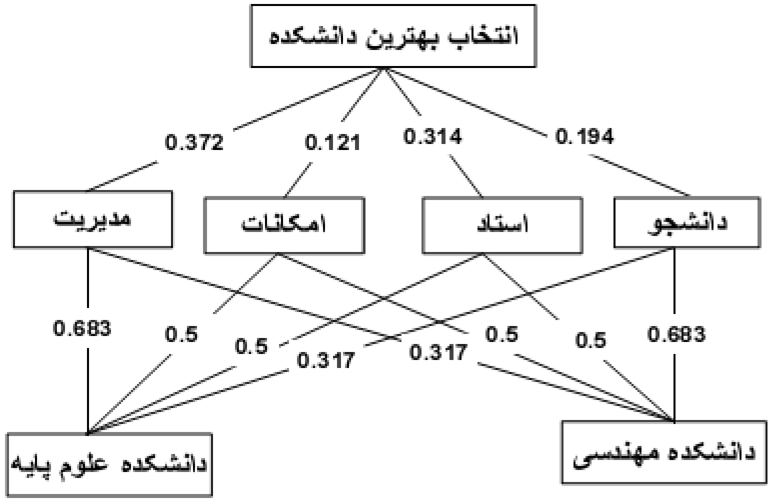


شکل ٦ . نمایش وزن های نسبی بر روی سلسله مراتبی

وزن نهایی دانشکده مهندسی= $0.682 * 0.194 + 0.5 * 0.314 + 0.5 * 0.121 + 0.317 * 0.372 = 0.468$

وزن نهایی دانشکده علوم پایه= $0.317 * 0.194 + 0.5 * 0.314 + 0.5 * 0.121 + 0.683 * 0.372 = 0.532$

بنابراین دانشکده علوم پایه، بهترین دانشکده ی دانشگاه است .

TOPSIS فازی

تفکرات انسان همراه با عدم قطعیت است و این عدم قطعیت در تصمیم گیری تاثیر گذار است . به همین دلیل از روش های تصمیم گیری فازی استفاده می گردد.که یکی از این روش ها ، TOPSIS فازی است . در این حالت، عناصر ماتریس تصمیم گیری ، یا وزن های شاخص ها نسبت به ، و یا هر دوی آنها به صورت فازی و با اعداد فازی بیان می گردند.روش های متعددی برای TOPSIS فازی ارائه شده است . جدول ۳ [1] تاریخچه ای از این روش ها را نشان می دهد .

از آنجایی که تمام روش های مذکور با تغییر کوچکی در روش TOPSIS فازیِ chen&Hwang بدست آمده اند ، در این تحقیق ، روش TOPSIS فازیِ chen&Hwang ارائه شده [1] و در ادامه به اعداد فازی مثلثی نیز ، بسط داده می شود [1]

جدول ۲ . مقایسه ی روش های TOPSIS فازی

روش ها	وزن شاخص ها	نوع اعداد فازی	روش رتبه بندی	روش نرمالیزه کردن
Chen & Hwang (1992)	Fuzzy numbers	Trapezoida	Lee & Li ' s (1988) Generalized mean method	Linear Normalize
Liang(1999)	Fuzzy numbers	Trapezoida	Chen ' s(1985) Ranking with maximizing set and minimizing set	Manhattan distance
Chen(2000)	Fuzzy numbers	Triangular	Chen(2000) Assumes the fuzzy positive and negative ideal solutions as(1,1,1)& (0,0,0)respectively	Linear Normalize
Chu(2002)	Fuzzy numbers	Triangular	Liou & Wang ' s (1992)ranhing method of total integral value with=1/2	Modified Manhattan distance
Tsaur et al (2002)	Crisp Values	Triangular	Zhao & Govind' s(1991)center of area method	Vector Normalization
Zhang & Lu (2003)	Crisp Values	Triangular	Chen ' s (2000) fuzzy position and negative ideal solution : as (1,1,1) and (0,0,0)	Manhattan distance
Chu & Lin (2003)	Fuzzy numbers	Triangular	Kaufmann & Gupta ' s (1998) mean of the removals method	Linear Normalize

مراحل کلی روش فازیِ chen&Hwang به همراه TOPSIS کلاسیک ، به صورت زیر ارائه می گردد:

قبل از شروع الگوریتم این روش ، باید ماتریس تصمیم D که یک ماتریس m*n است و بردار وزن شاخص ها نسبت به هدف W ، به عنوان ورودی الگوریتم ، تشکیل گردد:

- در حالت کلاسیک(قطعی):

$$D = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$W = (w_1, \dots, w_j, \dots, w_n);$$

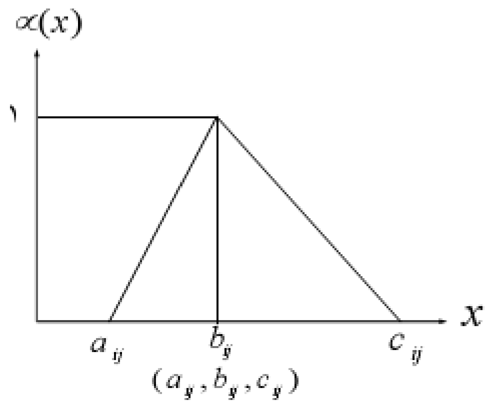
- در حالت فازی:

$$D = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \cdots & \tilde{x}_{1j} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_{i1} & \cdots & \tilde{x}_{ij} & \cdots & \tilde{x}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \cdots & \tilde{x}_{mj} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

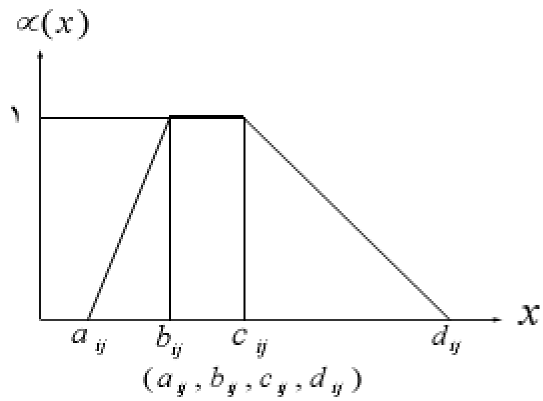
$$\begin{cases} \tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) & \text{اگر به صورت عدد فازی مثلثی باشد} \\ \tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}) & \text{اگر به صورت عدد فازی ذوزنقه ای باشد} \end{cases}$$

$$W = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_j, \dots, \tilde{w}_n) \quad ; \begin{cases} \tilde{w}_j = (\alpha_j, \beta_j, \chi_j) & \text{اگر به صورت عدد فازی مثلثی باشد} \\ \tilde{w}_j = (\alpha_j, \beta_j, \chi_j, \delta_j) & \text{اگر به صورت عدد فازی ذوزنقه ای باشد} \end{cases}$$

شکل ۷و۸ ، عدد فازی مثلثی و ذوزنقه ای را نشان می دهد.



شکل ۷ ـ عدد فازی مثلثی



شکل ۷ ـ عدد فازی ذوزنقه ای

گام ۱. نرمالیزه کردن ماتریس تصمیم . در ابتدا باید ماتریس تصمیم نرمالیزه گردد تا عناصر آن "بی مقیاس " شود . برای نرمالیزاسیون ، چندین روش وجود دارد که chen&Hwang ،روش نرمالیزه کردنِ خطی را بکار برده اند. بدین منظور باید حداکثر هر ستون x^+_j و حداقل هر ستون x^-_j را مشخص کرده و با استفاده از روابط زیر مقادیرِ r_{ij} هستند، محاسبه کرد:

- در حالت قطعی

اگر X_{ij} جنبه ی مثبت داشته باشد (مثل سود) آنگاه $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j^+}$.

اگر X_{ij} جنبه ی منفی داشته باشد (مثل هزینه) آنگاه $r_{ij} = 1 - \frac{x_{ij}}{x_j^+}$.

در صورتی که شاخص هایی با جنبه ی مثبت و جنبه ی منفی به طور مخلوط با یکدیگر در نظر گرفته شده باشند ، جنبه ی منفی را با معکوس کردن نتیجه ی آن به جنبه ی مثبت تبدیل می کنیم [2] یعنی $r_{ij}=\frac{x_j^-}{x_{ij}}$ در این صورت رابطه ی کلی r_{ij} ، به صورت زیر بیان می گردد:

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{x_{ij}}{x_j^+} & ; \quad \text{اگر } x_{ij} \text{ جنبه مثبت داشته باشد}\\ \dfrac{x_j^-}{x_{ij}} & ; \quad \text{اگر } x_{ij} \text{ جنبه منفی داشته باشد}\end{cases}$$

در این صورت ماتریس نرمالیزه شده ی ماتریس D به صورت زیر ، حاصل می شود :

$$D'=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i1} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}$$

- در حالت فازی:

زمانیکه X_{ij} ها به صورت فازی هستند (عدد مثلثی : $\tilde{x}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij})$) و یا عدد ذوزنقه ای : ($\tilde{x}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})$) ، مسلما r_{ij} ها نیز غیر فازی هستند . اگر اعداد فازی به صورت مثلثی باشند و $\tilde{x}_j^+=(a_j^+,b_j^+,c_j^+)$ و $\tilde{x}_j^-=(a_j^-,b_j^-,c_j^-)$ به ترتیب بیشترین و کمترین امتیاز ها باشند آنگاه

$$\tilde{r}_{ij}=\begin{cases}\tilde{x}_{ij}(/)\tilde{x}_j^+=(\dfrac{a_{ij}}{c_j^+},\dfrac{b_{ij}}{b_j^+},\dfrac{c_{ij}}{a_j^+}); & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} \text{ جنبه مثبت داشته باشد}\\ \tilde{x}_j^-(/)x_{ij}=(\dfrac{a_j^-}{c_{ij}},\dfrac{b_j^-}{b_{ij}},\dfrac{c_j^-}{a_{ij}}); & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} \text{ جنبه منفی داشته باشد}\end{cases}$$

اگر اعداد فازی به صورت ذوزنقه ای باشند و $\tilde{x}_j^{+} = \left(a_j^{+}, b_j^{+}, c_j^{+}, d_j^{+}\right)$ و $\tilde{x}_j^{-} = \left(a_j^{-}, b_j^{-}, c_j^{-}, d_j^{+}\right)$ به ترتیب بیشترین و کمترین امتیاز ها باشند آنگاه :

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij}(/)\tilde{x}_j^{+} = \left(\dfrac{a_{ij}}{d_j^{+}}, \dfrac{b_{ij}}{c_j^{+}}, \dfrac{c_{ij}}{b_j^{+}}, \dfrac{d_{ij}}{a_j^{+}}\right); & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} \text{ جنبه مثبت داشته باشد} \\ \tilde{x}_j^{-}(/)x_{ij} = \left(\dfrac{a_j^{-}}{d_{ij}}, \dfrac{b_j^{-}}{c_{ij}}, \dfrac{c_j^{-}}{b_{ij}}, \dfrac{d_j^{-}}{a_{ij}}\right); & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} \text{ جنبه منفی داشته باشد} \end{cases}$$

در این صورت ماتریس نرمالیزه شده ی D به 'D تبدیل می شود :

$$D' = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \cdots & \tilde{r}_{1j} & \cdots & \tilde{r}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{i1} & \cdots & \tilde{r}_{ij} & \cdots & \tilde{r}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{m1} & \cdots & \tilde{r}_{mj} & \cdots & \tilde{r}_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

گام ۲. بدست آوردن ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار .

- در حالت قطعی :

عناصر ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار (V_{ij}) با استفاده از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$v_{ij} = r_{ij}.w_j$$

بنابر این ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار که با v نشان داده می شود به صورت زیر حاصل می شود :

$$v = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{i1} & \cdots & v_{ij} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mj} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

- در حالت فازی :

عناصر ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار ($\tilde{v}_{ij}$) با استفاده از رابطه ی زیر بدست می آید :

برای اعداد فازی مثلثی :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_{ij}}{c_j^+}, \frac{b_{ij}}{b_j^+}, \frac{c_{ij}}{a_j^+})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j) = (\frac{a_{ij}}{c_j^+}.\alpha_j, \frac{b_{ij}}{b_j^+}.\beta_j, \frac{c_{ij}}{a_j^+}.\chi_j) \\ \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_j^-}{a_{ij}}, \frac{b_j^-}{b_{ij}}, \frac{c_j^-}{c_{ij}})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j) = (\frac{a_j^-}{c_{ij}}.\alpha_j, \frac{b_j^-}{b_{ij}}.\beta_j, \frac{c_j^-}{a_{ij}}.\chi_j) \end{cases}$$

برای اعداد فازی ذوزنقه ای :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_{ij}}{d_j^+}, \frac{b_{ij}}{c_j^+}, \frac{c_{ij}}{b_j^+}, \frac{d_{ij}}{a_j^+})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j, \delta_j) = (\frac{a_{ij}}{d_j^+}.\alpha_j, \frac{b_{ij}}{c_j^+}.\beta_j, \frac{c_{ij}}{b_j^+}.\chi_j, \frac{d_{ij}}{a_j^+}.\delta_j) \\ \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_j^-}{d_{ij}}, \frac{b_j^-}{c_{ij}}, \frac{c_j^-}{b_{ij}}, \frac{d_j^-}{a_{ij}})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j, \delta_j) = (\frac{a_j^-}{d_{ij}}.\alpha_j, \frac{b_j^-}{c_{ij}}.\beta_j, \frac{c_j^-}{b_{ij}}.\chi_j, \frac{d_j^-}{a_{ij}}.\delta_j) \end{cases}$$

رابطه ی اول برای حالتی است که معیار **j** ام جنبه ی مثبت دارد و دومین رابطه برای حالتی است که معیار**j** ام جنبه ی منفی دارد . که نتایج این محاسبات را در ماتریس **v** وارد کرده و این ماتریس به صورت زیر بدست می آید :

$$v = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} X_1 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \cdots & \tilde{v}_{1j} & \cdots & \tilde{v}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{v}_{i1} & \cdots & \tilde{v}_{ij} & \cdots & \tilde{v}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{v}_{m1} & \cdots & \tilde{v}_{mj} & \cdots & \tilde{v}_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

گام ۳ . بدست آوردن جواب ایده آل مثبت (PIS) که آن را با A^+ نشان داده و جواب ایده آل منفی (NIS) که با A^- نمایش داده می شود .

- در حالت قطعی :

$$A^+ = [v_1^+, \dots, v_j^+, \dots, v_n^+]; \qquad v_j^+ = \max_i \{v_{ij}\}$$

$$A^- = [v_1^-, \dots, v_j^-, \dots, v_n^-]; \qquad v_j^- = \min_i \{v_{ij}\}$$

- در حالت فازی :

در حالت فازی جهت مقایسه ی اعداد فازی و تعیین $\tilde{v}_j^-, \tilde{v}_j^+$ ، از فرآیند های رتبه بندی اعداد فازی استفاده می گردد . chen&Hwang از روش رتبه بندی ارائه شده توسط Lee & Li استفاده کرده اند . طبق این روش ، رتبه ی عدد فازی $\tilde{v}_{ij}$ که با $M\left(\tilde{v}_{ij}\right)$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می گردد :

برای اعداد فازی مثلثی :

$$M(v_{ij}) = \frac{-a_{ij}^2 + c_{ij}^2 - a_{ij}.b_{ij} + c_{ij}.b_{ij}}{3(-a_{ij} + c_{ij})}$$

برای عدد فازی ذوزنقه ای :

$$M(v_{ij}) = \frac{-a_{ij}^2 - b_{ij}^2 + c_{ij}^2 + d_{ij}^2 - a_{ij}.b_{ij} + c_{ij}.d_{ij}}{3(-a_{ij} - b_{ij} + c_{ij} + d_{ij})}$$

پس از بدست آوردن $M\left(\tilde{v}_{ij}\right)$ ها ، به ازای هر ستون j ، $\tilde{v}_{ij}$ ای را که بیشترین مقدار $M\left(\tilde{v}_{ij}\right)$ است به عنوان $\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+$ ای را که دارای کمترین مقدار $M\left(\tilde{v}_{ij}\right)$ است به عنوان $\tilde{v}_j^-$ معرفی می کنیم .

گام ۴ . بدست آوردن اندازه ی فاصله ی هر گزینه نسبت به ایده آل مثبت و منفی (S_i^+ ,S_i^-) .

- در حالت قطعی :

برای بدست آوردن فاصله ی هر گزینه از ایده آل های مثبت و منفی ، دو روش وجود دارد : روش اقلیدسی و روش بلوکی [2] . در اینجا رابطه مربوط به روش بلوکی بیان می گردد :

$$S_i^+ = \sum_{j=1}^{n} \left| v_{ij} - v_j^+ \right| = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^+$$: فاصله گزینه iام از ایده آل مثبت

$$S_i^- = \sum_{j=1}^{n} \left| v_{ij} - v - \right| = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^-$$: فاصله گزینهiام از ایده آل منفی

- در حالت فازی:

برای داده های فازی ، بین دو عدد فازی بر طبق تعریف Zadeh به صورت زیر محاسبه می گردد :

$$D_{ij}^+ = 1 - \sup_x \{\min[\propto_{v_{ij}}(x), \propto_{v_j^+}(x)]\}$$

$$D_{ij}^- = 1 - \sup_x \{\min[\propto_{v_{ij}}(x), \propto_{v_j^-}(x)]\}$$

که این رابطه برای اعداد فازی مثلثی به صورت زیر قابل تعمیم است :

(چنانچه $v_j^- = (a^-, b^-, c^-)$ و $v_j^+ = (a^+, b^+, c^+)$ باشند)

$$D_{ij}^+ = \begin{cases} 1 - \dfrac{c_{ij} - a^+}{b^+ + c_{ij} - a^+ - b_{ij}} & for(b_{ij} < b^+) \\ 1 - \dfrac{c^+ - a_{ij}}{b_{ij} + c^+ - a_{ij} - b^+} & for(b^+ < b_{ij}) \end{cases}$$

$$D_{ij}^- = \begin{cases} 1 - \dfrac{c^- - a_{ij}}{b_{ij} + c^- - a_{ij} - b^-} & for(b^- < b_{ij}) \\ 1 - \dfrac{c_{ij} - a^-}{b^- + c_{ij} - a^- - b_{ij}} & for(b_{ij} < b^-) \end{cases}$$

قابل ذکر است که D_{ij}^{-} و D_{ij}^{+} ، هعداد قطعی هستند .

$$S_i^+ = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^+$$: فاصله گزینه iام از ایده آل مثبت

$$S_i^- = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^-$$: فاصله گزینهiام از ایده آل منفی

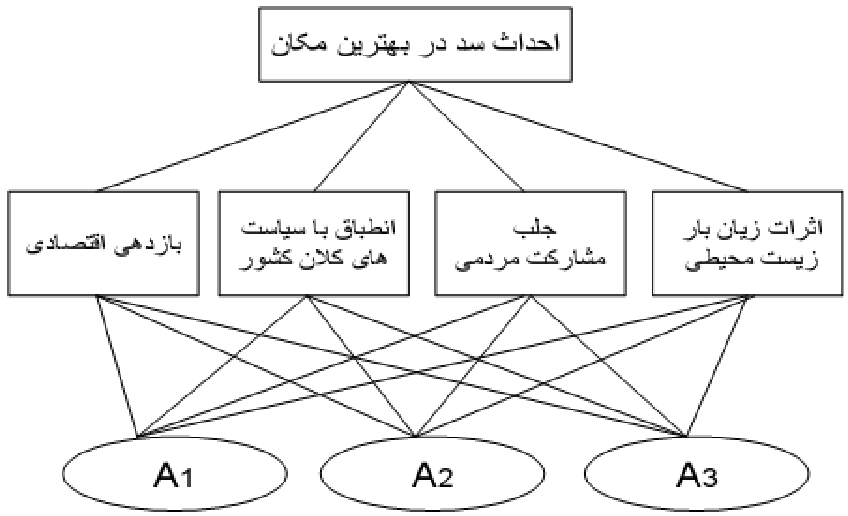
گام ۵. محاسبه ی نزدیکی نسبی هر گزینه به ایده آل ها (C_i^+) . این شاخص را جهت ترکیب کردن مقادیر S_i^- و S_i^+ و در نتیجه مقایسه ی گزینه ها نسبت به هم تعریف می کنیم . که با رابطه ی زیر قابل محاسبه است :

$$C_i^+ = \frac{S_i^+}{S_i^+ + S_i^-}$$

گام ۶. رتبه بندی گزینه ها . بر اساس ترتیب نزولی C_i^+ ها، می توان گزینه ها را رتبه بندی نمود .

بررسی یک مثال عددی

سه گزینه ی مختلف برای احداث یک سد بر روی یک رود خانه پیشنهاد شده است . شخص تصمیم گیرنده می خواهد بر اساس چهار معیار بازدهی سرمایه X_1 ، انطباق با سیاست های کلان کشور X_2 ، جلب مشارکت مردمی X_3 و اثرات زیان زیست محیطی X_4 ،یکی از سه گزینه را انتخاب نماید . ساختار سلسله مراتبی این تصمیم گیری ، در شکل ۹ نمایش داده است .



شکل ۹ . ساختار سلسله مراتبی انتخاب بهترین مکان برای احداث سد

ماتریس تصمیم گیری به صورت زیر ارائه شده است :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ D = A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \text{تاحدودی کم} & \text{زیاد} & \text{تاحدودی زیاد} & \text{مناسب} \\ \text{بسیار زیاد} & \text{مناسب} & \text{زیاد} & \text{تاحدودی زیاد} \\ \text{مناسب} & \text{کم} & \text{بسیار زیاد} & \text{تاحدودی کم} \end{pmatrix} \end{array}$$

و همچنین شخص تصمیم گیرنده ، بردار وزن شاخص ها را به صورت زیر در نظر گرفته است :

$$W = \begin{array}{cccc} \tilde{w}_1 & \tilde{w}_2 & \tilde{w}_3 & \tilde{w}_4 \\ (\text{بسیار با اهمیت} & \text{تا حدودی با اهمیت} & \text{تا حدودی کم اهمیت} & \text{بی تفاوت}) \end{array}$$

برای تشکیل ماتریس تصمیم گیری فازی و بردار وزن فازی جداول مختلفی وجود دارد که یک نمونه از آن ها ، جدول های ۴و۵ هستند .

جدول 4. امتیازدهی به گزینه ها

بسیار کم	(۱و۰و۰)
کم	(۳و۱و۰)
تا حدودی کم	(۵و۳و۱)
مناسب	(۷و۵و۳)
تا حدودی زیاد	(۹و۷و۵)
زیاد	(۱۰و۹و۷)
بسیار زیاد	(۱۰و۱۰و۹)

جدول ۵ . درجه اهمیت شاخص ها

بسیار کم اهمیت	(۱.۰و۰و۰)
کم اهمیت	(۳.۰و۱.۰و۰)
تا حدودی کم اهمیت	(۵.۰و۳.۰و۱.۰)
بی تفاوت	(۷.۰و۵.۰و۳.۰)
تا حدودی با اهمیت	(۹.۰و۷.۰و۵.۰)
با اهمیت	(۱و۹.۰و۷.۰)
بسیار با اهمیت	(۱و۱و۹.۰)

بنابراین با استفاده از این دو جدول ، اعداد فازی را در ماتریس تصمیم گیری و بردار وزن قرار داده و مراحل الگوریتم TOPSIS فازی را انجام می دهیم :

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,3,5) & (7,9,10) & (5,7,9) & (3,5,7) \\ (9,10,10) & (3,5,7) & (7,9,10) & (5,7,9) \\ (3,5,7) & (0,1,3) & (9,10,10) & (1,3,5) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$W = (\overset{\tilde{w}_1}{(0.9,1,1)} \quad \overset{\tilde{w}_2}{(0.5,0.7,0.9)} \quad \overset{\tilde{w}_3}{(0.1,0.3,0.5)} \quad \overset{\tilde{w}_4}{(0.3,0.5,0.7)})$$

گام ۱ . نرمالیزه کردن ماتریس تصمیم .

	J=1	J=2	J=3	J=4
$\tilde{x}_j^+$	(۱۰و۱۰و۹)	(۱۰و۹و۷)	(۱۰و۱۰و۹)	(۹و۷و۵)
$\tilde{x}_j^-$	(۵و۳و۱)	(۳و۱و۰)	(۹و۷و۵)	(۵و۳و۱)

X_1,X_2,X_3 معیارهایی هستند که جنبه ی مثبت دارند ، بنابر این r_{i1},r_{i2},r_{i3} را از رابطه ی $\tilde{x}_{ij}(/)\tilde{x}_j^+$ محاسبه می کنیم ($\tilde{x}_1^+,\tilde{x}_2^+,\tilde{x}_3^+$ در جدول بالا در خانه های توسی رنگ نشان داده شده اند). X_4 معیاری است که دارای جنبه ی منفی است ، بنابر این r_{i4} را از رابطه ی $\tilde{x}_j^-(/)\tilde{x}_{ij}$ محاسبه می کنیم ($\tilde{x}_4^-$ در جدول بالا در خانه زرد رنگ نشان داده شده است). محاسبه چند نمونه از این درایه ها در زیر آمده است :

$$\tilde{r}_{11}=\tilde{x}_{11}(/)\tilde{x}_1^+=(\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{5}{9})=(0.1,0.3,0.56)$$
$$\tilde{r}_{31}=\tilde{x}_{31}(/)\tilde{x}_1^+=(\frac{3}{10},\frac{5}{10},\frac{7}{9})=(0.3,0.5,0.78)$$
$$\tilde{r}_{23}=\tilde{x}_{23}(/)\tilde{x}_3^+=(\frac{7}{10},\frac{9}{10},\frac{10}{9})=(0.7,0.9,1.11)$$
$$\tilde{r}_{24}=\tilde{x}_4^-(/)\tilde{x}24=(\frac{1}{9},\frac{3}{7},\frac{5}{5})=(0.11,0.43,1)$$
$$\vdots$$

بنابر این ماتریس نرمالیزه شده تصمیم عبارت است از :

$$D'=\begin{array}{c}\\ A_1\\ A_2\\ A_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}(0.1,0.3,0.56) & (0.7,1,1.43) & (0.5,0.7,1) & (0.15,0.6,0.71)\\ (0.9,1,1.11) & (0.3,0.56,1) & (0.7,0.9,1.11) & (0.11,0.43,1)\\ (0.3,0.5,0.78) & (0,0.11,0.43) & (0.9,1,1.11) & (0.2,1,5)\end{bmatrix}\end{array}$$

گام ۲ . بدست آوردن ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار .

محاسبه چند نمونه از درایه های این ماتریس ، در زیر نمایش داده شده است :

$$\tilde{v}_{11}=\tilde{r}_{11}(.)\tilde{w}_1=(0.1,0.3,0.56)(.)(0.9,1,1)=(0.09,0.3,0.56)$$
$$\tilde{v}_{32}=\tilde{r}_{32}(.)\tilde{w}_2=(0,0.11,0.43)(.)(0.5,0.7,0.9)=(0,0.077,0.387)$$
$$\tilde{v}_{14}=\tilde{r}_{14}(.)\tilde{w}_4=(0.15,0.6,0.71)(.)(0.3,0.5,0.7)=(0.045,0.3,0.497)$$
$$\vdots$$

بنابر این ماتریس تصمیمِ نرمالیزه شده ی وزن دار عبارت است از :

$$v=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline \end{array}$$

$$v=\begin{bmatrix} (0.09,0.3,0.56) & (0.35,0.7,1.287) & (0.05,0.21,0.5) & (0.045,0.3,0.497) \\ (0.81,1,1.11) & (0.15,0.392,0.9) & (0.07,0.27,0.56) & (0.033,0.215,0.7) \\ (0.27,0.5,0.78) & (0,0.077,0.387) & (0.09,0.3,0.56) & (0.06,0.5,3.5) \end{bmatrix}$$

گام ۳. بدست آوردن جواب ایده آل مثبت که آن را با A^+ نشان داده و جواب ایده آل منفی که با A^- نمایش داده می شود .

در ابتدا باید $M\left(\tilde{v}_{ij}\right)$ ها را محاسبه کرد . محاسبه چند نمونه از این مقادیر در زیر نشان داده شده است :

$$M(\widetilde{v}_{21})=\frac{-0.81*1-0.81^2+1.11^2+1*1.11}{3(1.11-0.81)}=0.973$$

$$M(\widetilde{v}_{34})=\frac{-0.06*0.5-0.06^2+3.5^2+3.5*0.5}{3(3.5-0.06)}=1.353$$

$$\vdots$$

M=

۰.۳۱۷	۰.۷۷۹	۰.۲۵۳	۰.۲۸۱
۰.۹۷۳	۰.٤۸۱	۰.۳	۰.۳۱٦
۰.٥۱۷	۰.۱٥٥	۰.۳۱۷	۱.۳٥۳

(خانه های طوسی رنگ نشان دهنده ی بزرگترین رتبه ی هر ستون و خانه های زرد رنگ نشان دهنده ی کوچکترین رتبه ی هر ستون است .)بنابراین ایده آل مثبت ومنفی به صورت زیر هستند :

$$A^+=[\overset{v_1^+}{(0.81,1,1.11)},\overset{v_2^+}{(0.35,0.7,1.287)},\overset{v_3^+}{(0.09,0.3,0.56)},\overset{v_4^+}{(0.06,0.5,3.5)}]$$

$$A^-=[\overset{v_1^-}{(0.09,0.3,0.56)},\overset{v_2^-}{(0,0.077,0.387)},\overset{v_3^-}{(0.05,0.21,0.5)},\overset{v_4^-}{(0.045,0.3,0.497)}]$$

گام ۴. بدست آوردن اندازه ی فاصله ی هر گزینه نسبت به ایده ال مثبت و منفی (S_i^+, S_i^-) .

$$\left.\begin{array}{r}\tilde{v}_1^+ = (0.81,1,1.11)\\ \tilde{v}_{11} = (0.09,0.3,0.56)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{11}^+ = 1 - \frac{0.56-0.81}{1+0.56-0.81-0.3} = 1.56$$

$$\left.\begin{array}{r}\tilde{v}_4^+ = (0.06,0.5,3.5)\\ \tilde{v}_{24} = (0.033,0.215,0.7)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{24}^+ = 1 - \frac{0.7-0.06}{0.5+0.7-0.06-0.215} = 0.308$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1.56 & 0 & 0.18 & 0.314 \\ 0 & 0.35 & 0.06 & 0.308 \\ 1.063 & 0.944 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}\tilde{v}_1^- = (0.09,0.3,0.56)\\ \tilde{v}_{21} = (0.81,1,1.11)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{21}^- = 1 - \frac{0.56-0.81}{1+0.56-0.81-0.3} = 1.56$$

$$\left.\begin{array}{r}\tilde{v}_3^- = (0.05,0.2,0.5)\\ \tilde{v}_{33} = (0.09,0.3,0.56)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{33}^- = 1 - \frac{0.5-0.09}{0.3+0.5-0.09-0.21} = 0.18$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$D^- = \begin{bmatrix} 0 & 0.945 & 0 & 0 \\ 1.56 & 0.571 & 0.122 & 0.115 \\ 0.408 & 0 & 0.18 & 0.314 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} S_1^+ = 1.56 + 0.00 + 0.18 + 0.314 = 2.054 \\ S_2^+ = 0.00 + 0.359 + 0.06 + 0.308 = 0.727 \\ S_3^+ = 1.063 + 0.944 + 0.00 + 0.00 = 2.007 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1^- = 0.00 + 0.945 + 0.00 + 0.00 = 0.945 \\ S_2^- = 1.56 + 0.571 + 0.122 + 0.115 = 2.368 \\ S_3^- = 0.408 + 0.00 + 0.18 + 0.314 = 0.902 \end{cases}$$

گام ۵ . محاسبه ی نزدیکی نسبی هر گزینه به ایده آل ها (C_i^+) .

$$C_1^+ = \frac{S_1^-}{S_1^- + S_1^+} = \frac{0.945}{0.945 + 2.054} = 0.315$$

$$C_2^+ = \frac{S_2^-}{S_2^- + S_2^+} = \frac{2.368}{2.368 + 0.727} = 0.765$$

$$C_3^+ = \frac{S_3^-}{S_3^- + S_3^+} = \frac{0.902}{0.902 + 2.007} = 0.310$$

گام ۶. رتبه بندی گزینه ها .

$$A_2 > A_1 > A_3$$

روش های maximin

روش کلاسیک maximin برای انتخاب یک جایگزین A^*به شکلی که :

$A^*=\{A_i | \max_i \min_j x_{ij}\}$, $j=1,\ldots n; i=1,\ldots m$

که در آن x_{ij} ها دارای ابعاد مشترک هستند ، استفاده می گردد .

اصطلاح "maximin" بیانگر انتخاب بیشینه ی (در میان جایگزین ها) کمینه ی (در میان خصوصیات) مقادیر است . در این وضعیت که در آن کارایی کلی یک جایگزین بوسیله ضعیف ترین یا بد ترین خصوصیت تعیین می گردد ، یک تصمیم گیرنده مقادیر خصوصیات را برای هر جایگزین بررسی می کند و به پایین ترین مقدار برای هر جایگزین توجه نموده و سپس جایگزینی را با قابل قبول ترین مقدار در کمترین خصوصیت اش انتخاب می کند . در حالت کلی این روش تنها در صورتی که فرض شود تصمیم گیرنده دارای ماهیتی بد بینانه در شرایط تصمیم گیری است ، مقبول خواهد بود (هوانگ ویون [H13]) .

منابع

Rita Almeida Ribeiro. Fuzzy Multiple Attribute Decision Making. Fuzzy sets & Systems. 1996