



کانال مهمات شریف

✓ @SHARIF_IE

فصل اول - در ذره

فرض پویستلی

در مکان کوچک ترین ذره را ذره ای در نظر می گیریم که کنارش ذره ی دیگری هم باشد

۲- واقعیت هر ماده ای با توجه به ساختار اتمی آن از مجموعه ای از اتم ها تشکیل شده که این اتم ها کوچک ترین ذره ماده هستند با وجود این ساختار می توان نتیجه گرفت که هیچ ماده ای دارای پویستلی نیست چرا که مسواحه فضای خالی بین کوچک ترین ذرات تشکیل دهنده وجود دارد پس فرض پویستلی یک فرض آیدر آن است - اما تحلیل اجسام با در نظر گرفتن این ساختار بسیار پیچیده و زمان بر خواهد بود.

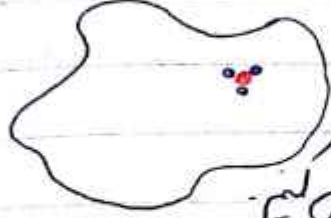
بود. برای جلوگیری از صرف ذهن هزینه ای از این واقعیت چشم پوشی شده و خاصیت پویستلی به عنوان یک فرض ساده گفته برای ماده در نظر گرفته می شود.

برای این فرض (فرض پویستلی) کوچک ترین ذره ای که در یک



ماده پیوسته می توان در نظر گرفت بخش بسیار کوچکی از ماده خواص
بوده و مسواکه را اطراف خود متقل به بخش های کوچک تر در نظر است

برای جسم پیوسته تجزیه چگالی نیز
صفر خواهیم داشت. چون اتمی به ماده نگاه نمی کنیم

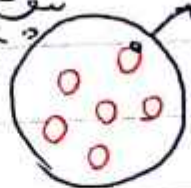


با این فرض (فرض پیوستگی) می توان خواص مختلفی را برای یک
ماده تعریف کرد که ساده ترین آنها، چگالی است طبق تعریف چگالی

(ρ) به شکل زیر تعریف می شود
ذره $\Delta V =$ حجم $\Delta m =$ جرم

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

ذره که اطرافش پیوسته است
تک یا پیوسته است



تنها زمانی که مولکول یا اتمی به ذره نگاه کنیم می توانیم که امکان دارد پیوسته
نباشد



مکانیک محیط‌های پیوسته (Continuum) به روش مسئله‌زیرین مورد
از درس فاص پرده‌ای می‌شود.

۱- علم حرکت (kinematics)

مفهوم کرنش، رابطه کرنش با جابجایی و ... پرده‌ای می‌شود.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \text{جابجایی} / \text{کرنش}$$

۲- علم اثر نیرو و بر روی حرکت (kinetics) قانون دوم نیوتن
مفاهیمی مثل تنش، معادلات تعادل و ...

۳- روابط ساختاری (Constitutive Equation)

مثل روابط تنش و کرنش

* روابط ساختاری وابسته به ماده هستند و برای هر ماده ممکن است

مقاومت باشند.



* Tensors

تانسورها

برگشت فضای برداری و اسکالر اطلاق می شود. که به معنی یزدانه هستند مثل تنش.

✓ مهم

۱-۲- تعاریف اندیس

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n$$

- برای خلاصه تر کردن عبارت بالا می توان نوشت:

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

(۱-۲)

- حال رابطه بالا به شکل زیر ساده تر می شود:

(۲-۲) این نوع تعاریف ابداع انیشتین
 قانون اول: قرار داد می کنیم که همیشه جمع را با ۲ بار انجام دهیم یعنی از لیست با توجه به فرمول بالا، در رابطه (۲-۲) با این فرض که اندیس در لیست

عبارت دو بار ظاهر شود به معنای انجام عمل جمع خواهد بود.

این موضوع قراردادی است که در درس مکانیک محیط های پیوسته

برای نشان دادن جمع از آن استفاده می شود.



داده‌هایی که بار ظاهر شده باشد اندیس Dummy (غرض) گفته می‌شود.

خصوصیات اندیس Dummy :

- ۱- اندیس داس بار ظاهر می‌شود نه بیشتر و نه کمتر.
- ۲- جای اندیس داس می‌توان از حرف دلخواه استفاده کرد. مثال :

$$S = a_i x_i \quad \text{یا} \quad a_j x_j \quad \text{یا} \quad a_n x_n \dots$$

- ۳- اندیس داس به هیچ وجه بیش از دو بار ظاهر نمی‌شود اساساً عبارت مربوط به نقاشی اندیس ظاهر شدن اندیس **بیش از دو بار مجاز نیست**.

مثال : اگر در حل مسائل به چنین حالتی برسیم $A = a_i b_i c_i$ غلط است. ولی اگر به حالت زیر باشد درست است :

$$= a_i b_i + a_i b_j$$

$$\text{یا} \quad a_i b_i + a_j b_j$$

- ۴- اندیس های داس نشان دهنده جمع روی تعداد جمله هستند. عبارت دیگر هر اندیس داس می‌تواند اعداد ۱، ۲، ۳ را بگیرد. مثلاً :

$$T_{ii} = T_{i1} + T_{i2} + T_{i3} \quad \text{یا} \quad T_{m a m} = T_{r1} a_1 + T_{r2} a_2 + T_{r3} a_3$$

$$S = a_{ij} x_i x_j$$

مثال:

برای حل چنین مسائلی که داس هم، و هم زن است یکبار به جای نداشت
اعداد یک تا ۳ را قرار داده عمل جمع را می نویسیم و یکبار هم به جای زن اعداد
یک تا ۳ را قرار داده عمل جمع را می نویسیم.

حل:

$$S = a_{ij} x_i x_j = a_{i1} x_i x_1 + a_{i2} x_i x_2 + a_{i3} x_i x_3$$

$$a_{11} x_1 x_1 + a_{21} x_1 x_1 + a_{31} x_1 x_1$$

$$a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2 x_2 + a_{32} x_2 x_2$$

$$a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3 x_3$$

حال همه این موارد را با هم جمع می کنیم.

$$a_{11} x_1^2 + a_{21} x_1 x_2 + a_{31} x_1 x_3 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + a_{32} x_2 x_3 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2$$



حال دسته‌ی روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$x'_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3$$

$$x'_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3$$

$$x'_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3$$

رابطه بالا را نیز می‌توان به شکل خلاصه‌شده زیر نوشت:

✓ استخلاصه هر یک از جملات را می‌نویسیم.

$$x'_1 = A_{1j}x_j$$

$$x'_2 = A_{2j}x_j$$

$$x'_3 = A_{3j}x_j$$

$$x'_i = A_{ij}x_j$$

به اندیس که فقط یکبار ظاهر می‌شود اندیس آزاد می‌نویسیم

$$A_{im}x_m$$

Free index آزاد می‌نویسیم

به جای ۱، ۲، ۳ هم یک متغیر می‌گذاریم.

دقت کنید: به جای اندیس را می‌زنیم یا m در بالا می‌توانیم هر حرف

دیگری گذاشت به جز ناچون ۲ را این صورت اندیس ۱، ۲، ۳ با ظاهر می‌شود که نادرست است.



دقت کنید که در یک رابطه در صورت وجود اندیس آزاد در یک سمت از رابطه

همان اندیس باید در سمت دیگر هم وجود داشته باشد. $a(m) = b(n) c(n) d(m)$

* اندیس آزاد را می توان تغییر داد و پس باید اندیس های بعدی را تغییر داد چون در این صورت اثر تغییر نهم ۳ اندیس یک شکل ظاهر می شود

که غلط است. $a(m) = b(n) c(n) d(m)$ غلط است

* همچنین عوض کردن حرف اندیس نباید مغیره تغییر ماهیت یک اندیس از حالت آزاد به داس شود.

مثل رابطه زیر: $a(m) = b(n) d(m)$

نمی توان m را به n تبدیل کرد چون در این صورت m تبدیل به اندیس داس می شود.



ما داریم به ۲ حالتینوم از آنجا زیاد استفاده می شود

Kronecker delta

دیا

δ_{ij}

Definition
تعریف

δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

for example

$$\delta_{11} = 1, \delta_{22} = 1, \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = 0, \delta_{23} = 0, \delta_{31} = 0$$

مثال ماتریس δ_{ij} مطابق زیر خواهد بود:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در آنجا اندیسهای i و j برابر

$$\delta_{11} = 1$$

$$\delta_{11} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

این رابطه به ازای $m = n$ جواب
 $\dim u_m = a_i$ دارد.

چون صق شمره به ۲ رابطه (۲-۳) داریم

به ازای مقادیر برابر برای n و m جواب خواهیم داشت

حل است صفحه ←

$$i=1: \delta_{1m} a_m = \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 = a_1$$

$$i=2: \delta_{2m} a_m = \delta_{21} a_1 + \delta_{22} a_2 + \delta_{23} a_3 = a_2$$

$$i=3: \delta_{3m} a_m = \delta_{31} a_1 + \delta_{32} a_2 + \delta_{33} a_3 = a_3$$

$$\rightarrow \begin{cases} \delta_{1m} a_m = a_1 \\ \delta_{2m} a_m = a_2 \\ \delta_{3m} a_m = a_3 \end{cases} \rightarrow \delta_{jm} a_m = a_j \Rightarrow \delta_{im} a_m = a_i \text{ or } \delta_{km} a_m = a_k$$

رابطه (۲-۱) مهم

به اندیس free کار ندارم و سریم سرانج Dummy

3. $\delta_{im} T_{mj}$

ما فقط به ازای مقادیری که m با n برابر باشد جواب خواهم داشت.

باید به شرطی که باید i را یک کنیم و باقی مانده جواب ما است.

$$\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$$



The permutation symbol, ϵ_{ijk}

2- قابلیت
رابطه (2-5)
مثلاً $i=2, j=3, k=1$
ایستاده گرد باشد.

Definition = ϵ_{ijk}

شریف

1
-1

3
2
1

3
2
1

اگر در اصل آنرا از اندیسه
با هم یکسان باشند.

$i \neq j \neq k$ or $i = k$
 $i = k$

مبتنی بر این تعریف :

یادداشتگر

$\epsilon_{123} = 1$

یادداشتگر

$\epsilon_{231} = 1$

یادداشتگر

$\epsilon_{321} = -1$

یادداشتگر

$\epsilon_{312} = 1$

یادداشتگر

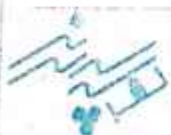
$\epsilon_{213} = -1$

$\epsilon_{113} = 0$

$\epsilon_{221} = 0$

$\epsilon_{111} = 0$

$\epsilon_{222} = 0$



رابطه (2-6) $\epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$

از طریق این رابطه می توانیم تبدیل می شود.

جایگزینی در عبارت های اندیس

فرض کنید: $a_i = U_{im} b_m$ و $b_i = V_{im} c_m$ را از رابطه

دوم در رابطه اول جایگزین می کنیم. عبارت می خواهیم a_i را بر حسب c_i بدست آوریم.

$$a_i = U_{im} b_m$$

ابتدا b_m را بدست می آوریم.

حال جای b_m در رابطه a ، $U_{im} b_m$ را جای b_m می دهیم.

$b_i = V_{im} c_m \rightarrow b_m = V_{mn} c_n$ (جای $i \leftarrow m$ و جای $m \leftarrow n$)

گذشتیم تا اینجا با تغییر m از حالت

اندیس آزاد خارج نشود $a_i = U_{im} b_m$

موقع توانستیم که برای اندیس $a_i = U_{im} V_{mn} c_n$

داسر و آزاد گفتیم.



روش ضرب دو عبارت اندیس:

$$p = a_m b_m \quad , \quad q = c_n d_n$$

$$pq = ?$$

اندیس عمارا

تغییر داریم تا معادله ای

که در آن بتوانیم از حالت دایره

$$pq = a_m b_m c_n d_n$$

خارج نشود، می توانیم اندیس های

p را تغییر دهیم و q با همان اندیس های m نوشته شود

فالتورسری:

$$T_{ij} n_j - n_i$$

در عبارت بالا می خواهیم از n_j فالتورسری کنیم

$$n_i = \delta_{ij} n_j$$

می توانیم به جای n_i نوشت:

پس در نتیجه خواهیم داشت:

$$T_{ij} n_j - n_i \Rightarrow T_{ij} n_j - \delta_{ij} n_j = (T_{ij} - \delta_{ij}) n_j$$



$$T_{ij} = \rho_m E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij}$$

از نماد قتل: اگر

نشان دهم که

$$T_{ij} E_{ij} = \rho_m E_{ij} E_{ij} + \lambda (E_{kk})^2$$

جواب:

$$T_{ij} E_{ij} = \rho_m E_{ij} E_{ij} + \lambda E_{kk} E_{ij} \delta_{ij}$$

لغیم این حالت وقتی جواب دارد که E_{ii} باشد.

$$= \rho_m E_{ij} E_{ij} + \lambda E_{kk} E_{ii}$$

نکته: توجه اگر اینجا نخواهیم نهارا تبدیل به k کنیم، k ، k بار

ظاهر شده از حالت داس بودن خارج می شود پس از آنجا

E_{kk} یعنی $(E \text{ از یک تا ۳ جمع شود})$
 E_{ii} یعنی $(E \text{ از یک تا ۳ جمع شود})$
 پس می نویسیم $(E_{kk})^2$.

$$= \rho_m E_{ij} E_{ij} + \lambda (E_{kk})^2$$



$$\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii}$$

Year: 1392 Month: V Day: 17

Subject: فیزیک

show that

مثال

$$\epsilon_{ilm} \epsilon_{jlm} = 2 \delta_{ij}$$

طبق قانونی که بالا خواندیم می نویسیم

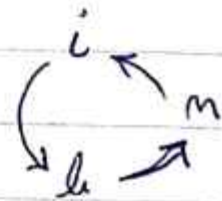
$$\delta_{ij} \delta_{ll} - \delta_{il} \delta_{jl}$$

جواب دارد $\rightarrow 1 = 1$
 پس جواب کامل این عبارت می شود
 جای i, j بگذاریم δ_{ij}
 جمعش می شه ۲

$$= 2 \delta_{ij} - 1 \delta_{ij} = \delta_{ij}$$

$$2. \epsilon_{ilm} \epsilon_{jlm} =$$

جای این عبارت
 می توانیم جمع اندازیم
 را تغییر دهیم
 یا در انتگرال بنویسیم



$$\epsilon_{ilm} \epsilon_{jlm} = 2 \delta_{ij}$$

$$3. \epsilon_{ilm} \epsilon_{mlj} = -2 \delta_{ij}$$

$$-\epsilon_{jlm}$$



- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

1. $a_{mb} s = c m (d_r - f_r)$ غ

چون اندیس آزاد در هر دو طرف وجود ندارد

اندیس آزاد داریم ولی یکدیگر را

2. $a_{mb} s = c m (d_s - f_s)$ ص

اندیس آزاد m در هر دو طرف وجود دارد.

3. $a_i = b_j c_i d_i$ غ

چون اندیس j در یک طرف هست در طرف چپ نیست همچنین اندیس i نامرئی طرف اندیس دایمی است و در طرف دیگر آزاد است که این غلط است.

4. $x_i x_i = |x|^2$ ص

$x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3$

دایمی

درسته درست است اندیس آزاد ندارم ولی چون برابر با یک عدد شده این تساوی درست است. پس اندیس آزاد از هر یک طرف هم نباشد مشکلی نیست

5. $a_i b_j c_j = 3$ ص

نیت

بردار: کمیتی که دارای اندازه و جهت است.

بردار غوه‌ای (سُطَل خاصه) از تعریف یک کمیت است که آن را

مستقل از دستگاه مختصات بیان می‌کنند و در مؤلفه‌های بردار

وابسته به دستگاه مختصات هستند. اگر

برای دستگاه نشان داده شده در سُطَل

روبرو، جابجیه مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ با a_1, a_2, a_3 نشان داده شوند

می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 = a_i \hat{e}_i$$

بردار
یکه

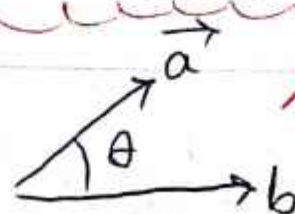
طبق تعاریف اندیس می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i$$

(۲-۷)

مرور عملیات جبری روی بردار:

۱) ضرب داخلی (dot product) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta)$



زاویه بین بردار

* از ضرب داخلی مفهومی قبل می توان به این نتیجه رسید:

* خواص ضرب داخلی :

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ جابجایی پذیری

2. if $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ b و a بر هم عمود هستند

3. $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ (۲-۸)

چون زاویه
بین آنها از ۹۰
مقادیر ۰ یا ۱۸۰
به هم می رسد

4 می توان نشان داد ضرب داخلی برابر به صورت زیر است :

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$ نمایش جبری (۲-۹)

اثبات: $a = a_i \hat{e}_i$ جای a می نویسیم

$b = b_i \hat{e}_i$ جای b می نویسیم

$a \cdot b = (a_i \hat{e}_i) (b_j \hat{e}_j) = a_i b_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)$

له چون اثرنا ندارم از حالت دایره خارج می شود

مطبق رابطه (۲-۸) δ_{ij}



$= a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_j = a_i b_i \text{ or } a_j b_j$

مؤلفه‌های بردار را می‌توان طبق رابطه زیر بدست آورد:

$$a_i = \vec{a} \cdot \hat{e}_i \quad (1-10)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \hat{e}_i &= (a_m \hat{e}_m) \cdot \hat{e}_i \\ &= a_m (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_i) \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

$$= a_m \delta_{im}$$

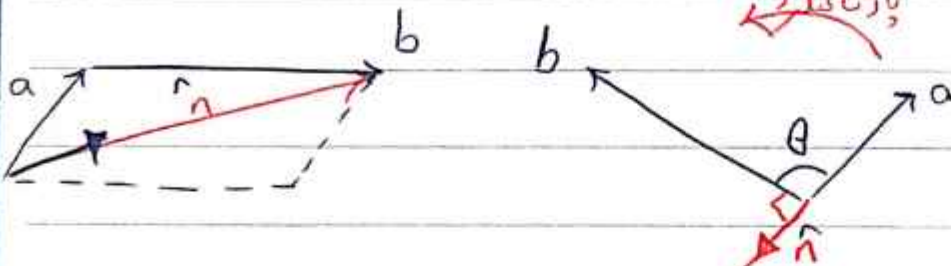
به ازای i های برابر با m جواب دارد

یعنی به کمک δ ، راس را به اندیس آخر تبدیل می‌کنیم.
(cross product) ضرب خارجی

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{n}$$

تعریف
هندس

بردار پایه‌ای که از بین آنها می‌توان
برای ساختن
هر آید.



$\vec{a} \times \vec{b}$ حاصل ضرب بردار
برون سر



*** خواص ضرب خارجی بردارها :**

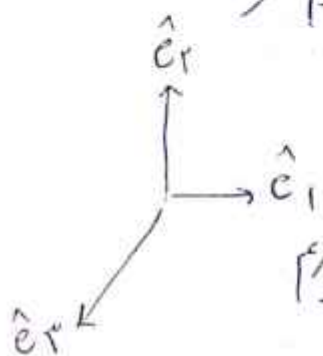
1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2. if $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow$ α و β موازی هستند.

3. $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$

(۲-۱۱)

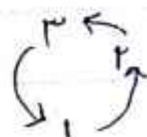
باتوجه به این رابطه عدد جایگزینی ϵ_{ijk} را می‌توانیم از این رابطه حدس زد.



$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \epsilon_{12k} \hat{e}_k$

دست انگشتی k را در یکبار اندازیم
جواب مفرس شود

$\epsilon_{123} \hat{e}_3 = \hat{e}_3$



4. $\vec{a} \times \vec{b} = a_i b_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$

(۲-۱۲)

اثبات:

$(a_i \hat{e}_i) \times (b_j \hat{e}_j) =$

$a_i b_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) = a_i b_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$

باتوجه به رابطه ۲-۱۱



$$5. \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

مثال: اثبات کنید

$$(a_m \hat{e}_m) \cdot (b_i \epsilon_{ijk} \hat{e}_k)$$

ماتریس رابطه (۱۱-۱۲) →

$$= a_m b_i \epsilon_{ijk} (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_k)$$

در شش جواب داریم که $m=k$ δ_{mk}

$$= a_k b_i \epsilon_{ijk}$$

$$= (a_k b_i \epsilon_{ijk}) \epsilon_j$$

حالی این می توانم کار اول بدارم چون
همچنان از حالت یاد با هم فرجه
قوانین است

$$= (a_k b_i \epsilon_{ijk}) \epsilon_j = (\vec{a} \times \vec{b})_j \epsilon_j = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

فقط اینکه ϵ_j داریم مؤلفه های تمام a و
را در نظر می گیریم



2.3.1

Tensor Algebra (تنسورها)

تعریف هندسی تنسورها

* تنسور تبدیلی است خطی، که یک بردار را به بردار دیگری تبدیل می‌کند.
به بیان ریاضی تنسور T بردار a را به بردار b طبق رابطه زیر تبدیل می‌کند:

$$\vec{b} = \tilde{T} \vec{a}$$

* توجه *

قرارداد برای نحوه نوشتن بردارها و تنسورها *

✓ معمولاً برای بردارها از حروف کوچک استفاده می‌کنند

۱- برای نشان دادن بردار از علامت $(\rightarrow)$ در بالای حروف استفاده می‌کنیم (در کتاب‌ها Bold می‌کنند)

$$\vec{a}$$

۲- برای نشان دادن تنسور از علامت $(\sim)$ در بالای حروف استفاده می‌کنیم (در کتاب‌ها Bold می‌کنند)

$$\tilde{B}$$

یوقت دیدن تعجب نکنی 😊

۳- برای بردارهای یکه از علامت $(\hat{})$ استفاده می‌کنیم

$$\hat{e}$$

واحد

متغیر از خطی بودن تانسور $\tilde{T}$ آن است که روابط زیر را رضاکند:

$$1. \tilde{T}(\vec{a} + \vec{b}) = \tilde{T}\vec{a} + \tilde{T}\vec{b} \quad \text{تانسور مرتبه ۲}$$

$$2. \tilde{T}(\alpha \vec{a}) = \alpha \tilde{T}\vec{a}$$

✓ این نشان دهنده گستره ~~خطی~~ ^{خطی} تانسور است از این طریق تانسور بودن آن را اثبات می‌کنیم.

ترجمه: تعریفی که در بالا از تانسور ارائه شد مربوط به تانسور مرتبه ۲ است. در واقع در این نوع نامگذاری بردار تانسور مرتبه ۱ یک وایدار اسکالر تانسور صفر نامیده می‌شوند.

مثال: اثبات کنید که این تبدیل، تبدیل تانسور است. بیاییم این تبدیل T هر بردار را به بردار ثابت $\vec{n}$ تبدیل کند نشان دهیم که T تانسور است یا نه.

پاسخ: اول باید ببینیم که خطی است یا نه.

$$\begin{aligned} \tilde{T}\vec{a} &= \vec{n} \\ \tilde{T}\vec{b} &= \vec{n} \end{aligned} \rightarrow \tilde{T}\vec{a} + \tilde{T}\vec{b} = 2\vec{n}$$

حل: طبق تعریف که در سوال گفتیم

$$\tilde{T}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{n} \neq \tilde{T}\vec{a} + \tilde{T}\vec{b}$$

پس T خطی نیست پس تانسور نیست.



فرض کنید تبدیل T تبدیلی است که بردار دیکوات را به اندازه $\frac{1}{2}$ حول محور

$\hat{e}_3$ دوران دهد چنین تبدیلی دارای خاصیت خاصی بوده از این رو

دوران تبدیل تنسور است.

۲-۳-۲: تعریف جبری تنسور

برای بردارهای $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ فرض می‌کنیم که اثر تنسور بر روی هر

یک به شکل یک بردار شود، در این صورت:

$$\tilde{T}\hat{e}_1 = T_{11}\hat{e}_1 + T_{21}\hat{e}_2 + T_{31}\hat{e}_3$$

$$\tilde{T}\hat{e}_2 = T_{12}\hat{e}_1 + T_{22}\hat{e}_2 + T_{32}\hat{e}_3$$

$$\tilde{T}\hat{e}_3 = T_{13}\hat{e}_1 + T_{23}\hat{e}_2 + T_{33}\hat{e}_3$$

Or: $\tilde{T}\hat{e}_i = T_{ji}\hat{e}_j$ (۲-۱۳)

با توجه به رابطه بالا می‌توان مؤلفه‌های تنسور را نسبت به دستگاه

مختصات $\hat{e}_i$ به شکل ماتریس صفر بعد نوشت:



$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(۲-۱۴)

(۹ مؤلفه دارد)

یعنی یک تانسور دومی به کمک ماتریس تعریف می شود.

۱۴۰۲، ۷، ۲۴

✧ جلسه هفتم ✧

مثال: Example: obtain the matrix form of the following tensor:

$$\tilde{T} \hat{e}_1 = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 \quad \text{اعداد سطری اول را در ستون ماتریس}$$

$$\tilde{T} \hat{e}_2 = 2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$$

در نوشتن

$$\tilde{T} \hat{e}_3 = \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3$$

Answer:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

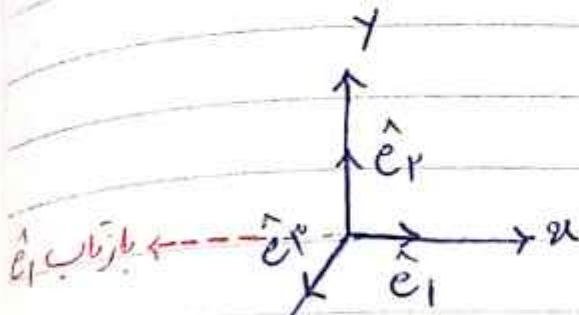
نوارده e_1 (for the first column)
نوارده e_2 (for the second column)



مثال: فرض کنید که تانسور $\tilde{T}$ عدد بردار دگواصر را به بازتاب خود نسبت به

صفحه (y, z) (یعنی ای بازتاب $\hat{e}_1$) منتقل می کند مؤلفه های این تانسور را

نسبت به همان دستگاه بدست آورید.



حل: $\hat{e}_2$ رویه ندارد.

$$\tilde{T}\hat{e}_1 = -\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

ردی سوال ما

قرار بود نسبت به $\hat{e}_1$ بازتاب داشته باشیم بقیه تغییر نمی کنند

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}\hat{e}_2 &= \hat{e}_2 \\ \tilde{T}\hat{e}_3 &= \hat{e}_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{تغییری نمی کنند} \\ \text{چون تغییر (بازتاب) نیست به } \hat{e}_1 \text{ بود} \end{array}$$

در نتیجه ماتریس ما به شکل زیر خواهد بود
در ماتریس ما به این شکل شد؟

$$[\tilde{T}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} -\hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

چون تبدیل ما از نوع تانسور است

و ماتریس تانسوری یک ماتریس 3×3

به شکل مقابل خواهد بود



مسئله: تبدیل راد در نظر بگیرد که محور دار و نحوه را به اندازه زاویه θ در جهت راست به حول محور $\hat{e}_3$ دوران می دهد. ماتریس انتقال را این تبدیل را بدست آورید.

پایه ساکن $\{e_1, e_2, e_3\}$ و پایه متحرک $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ را در نظر بگیرید. زاویه θ در جهت راست به حول محور $\hat{e}_3$ دوران می دهد. ماتریس انتقال را این تبدیل را بدست آورید.

$$\hat{e}_1 = \tilde{T} \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \cos \theta + \hat{e}_2 \sin \theta$$

$$\hat{e}_2 = \tilde{T} \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \sin \theta + \hat{e}_2 \cos \theta$$

$$\hat{e}_3 = \tilde{T} \hat{e}_3 = \hat{e}_3$$

$$[\tilde{T}] = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* تعیین مؤلفه های تنش بر پایه ی نمایش اندیسی :

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot T \hat{e}_j \quad (۲-۱۵)$$

اثبات:

$$\hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j = T_{ji} \hat{e}_j$$

موضع را در $\hat{e}_m$ ضرب می کنیم

$$\hat{e}_m \cdot (\tilde{T} \hat{e}_i) = T_{ji} (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_j)$$

$$\underbrace{T_{mi}}_{\delta_{mj}}$$

✓ اثبات شد

$$\hat{e}_m \cdot \tilde{T} \hat{e}_i = T_{mi} \xrightarrow[m \rightarrow i]{i \rightarrow j} T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j$$

۲-۴-۳ تعریف جبر بردار تبدیل یافته تحت اثر تنشور

می دانیم که $\tilde{T}$ بردار دلخواه $\vec{a}$ را تبدیل به بردار $\vec{b}$ می کند:

$$\vec{b} = \tilde{T} \vec{a} \quad * T \text{ به } a \text{ اعمال می شود نه به } b$$

$$b_i \hat{e}_i = \tilde{T} (a_i \hat{e}_i)$$

حال موضع را به $\hat{e}_m$ ضرب می کنیم:

$$\hat{e}_m \cdot (b_i \hat{e}_i) = a_i \hat{e}_m \cdot \tilde{T} \hat{e}_i$$

$$b_i (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_i) = a_i \cdot \hat{e}_m \cdot \tilde{T} \hat{e}_i = b_m = a_i \hat{e}_m (T_{ji} \cdot \hat{e}_j) \\ a_i T_{ji} (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_j) = a_i T_{mi}$$

$$\Rightarrow b_m = T_{mi} a_i \quad (۲-۱۶)$$

حال معادله (۲-۱۶) را بسط می دهیم.

$$b_1 = T_{11} a_1 + T_{12} a_2 + T_{13} a_3$$

$$b_2 = T_{21} a_1 + T_{22} a_2 + T_{23} a_3$$

$$b_3 = T_{31} a_1 + T_{32} a_2 + T_{33} a_3$$

حال این را مرتب می کنیم حوات باشد
 باشد با حالتی که ماتریس تشکیل می دهیم منطبق دارد:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$[b] \quad [T] \quad [a]$

$$[\vec{b}] = [\tilde{T}] [\vec{a}] \quad \text{فرم ماتریسی (تقریب جبری) (۲-۱۷)}$$

مثال: سنرری را در نظر بگیرید که بردارهای $\hat{e}_1$ که را طبق روابط زیر تبدیل می کند

$$\tilde{T} \hat{e}_1 = 2\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3$$

$$\tilde{T} \hat{e}_2 = 3\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + \hat{e}_3$$

$$\tilde{T} \hat{e}_3 = -2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$$

(۲-۳-۴) ضرب آنتسور (تقریب هندسی)

دو تنسور $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در نظر بگیرید. ضرب تنسور $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ نشان داده می شود و دارای خاصیت زیر است:

(۲-۱۸) در واقع ضرب آنتسور: تنسوری است که در زیر رابطه بالا را ارضا کند
در مجموع می توان گفت:

ضرب آنتسور معادل است با اعمال متوالی آنتسور به یک بردار

برای فهم بهتر مفهوم ضرب تنسور حاضر من گفتم که تنسور $\tilde{A}$ مربوط به دوران حول محور x_1 به اندازه α_1 و $\tilde{B}$ پادساکنگرد باشد همچنین فرض کنید آنتسور مربوط به دوران حول محور x_2 به اندازه α_2 درجه پادساکنگرد باشد در این حالت $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ معادل با تبدیل است که ابتدا هر بردار را حول x_1 به اندازه α_1 در دوران داده و سپس بردار تبدیل یافته را حول x_2 به اندازه α_2 درجه بگردانیم. سپس دوران دوم را به عنوان ضرب بردارها در یکدیگر است.

فصل پنجم

تعریف جبرن ضرب دو تانسور

از رابطه (۱۵-۲) داریم:

$$(\tilde{T}\tilde{S})_{ij} = \hat{e}_i (\tilde{T}\tilde{S}) \hat{e}_j$$

و طبق رابطه (۱۸-۲) می توان نوشت:

$$= \hat{e}_i \cdot \tilde{T}(\tilde{S} \hat{e}_j)$$

چون، داریم $\hat{e}_j = \sum_k s_{kj} \hat{e}_k$ →

$$\hat{e}_i \cdot \tilde{T}(s_{kj} \hat{e}_k)$$

→ چون اسکالر می توانیم بیاد بیرون از براکت

بیاوریم:

$$s_{kj} \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_k$$

عدد اسکالر که می توانیم بیرون بیاوریم

$$= T_{mk} s_{kj} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_m$$

δ_{im} →

برای $m=i$ تبدیل می کند

$$= T_{ik} s_{kj}$$

$$(\tilde{T}\tilde{S})_{ij} = T_{ik} s_{kj}$$

(۱۶-۲)



در خواصم رابطه (۱۶-۲) را expand کنیم

$$(\tilde{T} \tilde{S})_{ii} = T_{ii} S_{ii} + T_{i2} S_{2i} + T_{i3} S_{3i}$$

پس نتیجه می گیریم ماتریس T به شکل زیر است:

$$(\tilde{T} \tilde{S}) = [\tilde{T}] [\tilde{S}]$$

در واقع T سطر اول و دوم سطر اول و دوم در نظر گرفته می شود به همین ترتیب:

مثال: ماتریس معادل با تبدیلی را پیدا کنید که ابتدا محور بردار را به اندازه

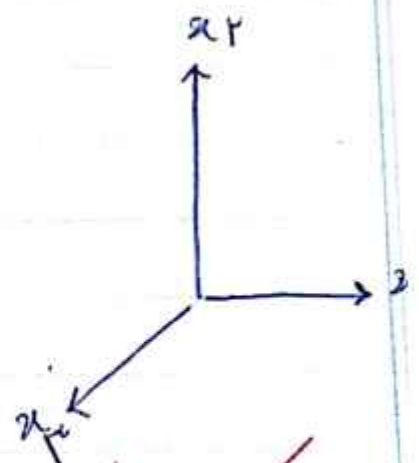
۹۰ درجه پاد ساعتگرد حول x_3 چرخانده و سپس بردار حاصل را به اندازه

۹۰ درجه حول محور x_1 دستپاچه دوران یافته می چرخانند

$$[\tilde{R}_{x1}, \tilde{R}_{x2}]$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} \hat{e}_1 &= \hat{e}_2 \\ \tilde{R} \hat{e}_2 &= -\hat{e}_1 \\ \tilde{R} \hat{e}_3 &= \hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} \hat{e}_2 & -\hat{e}_1 & \hat{e}_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



نکته: طبق گفته ی مسأله دوران دوم ما باید حول محور دوران یافته باشد



$$[\tilde{T}] = ?$$

$$\tilde{T}\hat{e}_1 = \hat{e}_1$$

$$\tilde{T}\hat{e}_2 = \hat{e}_3$$

$$\tilde{T}\hat{e}_3 = -\hat{e}_2$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{T}\tilde{R} = [\tilde{T}][\tilde{R}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴ روش حالت
تسوی چیزی را
بعداً اعمال می شود
قبل تر می نویسیم
و این همه که اول T
را می نویسیم.

راه حل، حل ماتریس:

سطر ۱ x ستون ۱ ← جواب عدد

سطر ۱ x ستون ۲ ← جواب عدد

سطر ۱ x ستون ۳ ← جواب عدد

سطر ۲ x ستون ۱ ← جواب عدد

و بقیه هم به همین ترتیب



۵-۳-۲

(Transpose)

تراانواده ها

(Dyadic product)

ضرب دایادیک

Trace

ترس

تانسورهای ترانپوز داشته باشند تراانواده ها به شکل زیرترین

می شوند .

تراانواده یک تانسور به تقییری گفته می شود که از رابطه زیر پیروی کند

$$\vec{a} \cdot \tilde{T} \vec{b} = \vec{b} \cdot \tilde{T}^T \vec{a}$$

(۲۰-۲)

که $\tilde{T}^T$ آنگاه ترانواده $\tilde{T}$ است .
یا اگر ماتریس A بود تراانواده A^T می شود

تعریف جبری تراانواده

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j \xrightarrow{\text{طبق رابطه (۲۰-۲)}} \hat{e}_j \cdot \tilde{T}^T \hat{e}_i = (\tilde{T}^T)_{ji}$$

(۲۱-۲)

باقی به این می توانیم جای سطر را بیاوریم و

$$T_{ij}^T = T_{ji}$$

که همان رابطه مربوط به تراانواده ماتریس ها است .

بیا بر این:

$$[\tilde{T}^T] = [\tilde{T}]^T$$

مثلاً اگر نرم ماتریس یک تانسور باشد:

$$[\tilde{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{T}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

نرم ماتریس $\tilde{T}^T$ خواص دارد:

۱، ۸، ۱۴۰۲

جلسه نهم

حاصل این ضرب دایادیک یک تانسور خواص دارد. Dyadic product

ضرب دایادیک بین بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{b}$ یا $\vec{a} \otimes \vec{b}$ یا $\vec{a} \otimes \vec{b}$ نشان داده شده و

حاصل آن تانسور است که از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

ضرب داخلی وکتور وکتور تانسور

(۲۲-۲)



تعریف ضرب دایادیک (تقریب مؤلفه‌های تنسور حاصل از ضرب دایادیک)

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = \hat{e}_i \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) \hat{e}_j = \vec{a} (\vec{b} \cdot \hat{e}_j)$$

طبق رابطه (۲-۲۲) می‌توان معادله بالا را به نرم زیر نوشت:

$$= \hat{e}_i \cdot \vec{a} (\vec{b} \cdot \hat{e}_j)$$

$$= b_j (\hat{e}_i \cdot \vec{a}) = b_j a_i$$

$$\rightarrow (\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j \quad (2-23)$$

$$\Rightarrow [\vec{a} \otimes \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

محض ضرب دایادیک حاصل ضرب ماتریس زیر است: حاصل ماتریس ماتریس بالا را به ماسه دهد

$$[\vec{a} \otimes \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} [b_1 \ b_2 \ b_3]_{1 \times 3}$$



- همبستگی متران نشان دارد:

$$[\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$[\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j] = \begin{cases} 1 & \text{at } (i, j) \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

یعنی در ماتریس اوزن مؤلفه (i, j) این جوابی می‌باشد
بقیه همبستگی صفر.

- با استفاده از رابطه بالایی توان نوشت:

$$\tilde{T} = T_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$$

دامی

(۲-۲۴)

این فرمول هم نموده دیگر برای توضیح تنسور است

$$\tilde{T} = T_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + T_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



✧ Trace of Tensor ✧

$$\text{trace}(\tilde{T}) = T_{ii}$$

$$\text{trace}[\tilde{T}] = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (۲۵-۲)$$

Sum of two tensors

$$(\tilde{T} + \tilde{S})_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \quad (۲۶-۲)$$

Example: $\text{tr}(\tilde{A}\tilde{B}) = ?$
 ← ترس

$$= (\tilde{A}\tilde{B})_{ii} = A_{im} B_{mi}$$

با توجه به نکته
 $(AB)_{ij} = A_{im} B_{mj}$

Example 2: prove $\text{tr}(\tilde{A}\tilde{B}) = \text{tr}(\tilde{B}\tilde{A})$

$$\text{tr}(\tilde{A}\tilde{B}) = A_{im} B_{mi}$$

$$\text{tr}(\tilde{B}\tilde{A}) = B_{im} A_{mi}$$

چون m و i هیچ محدودیتی ندارند پس می‌توان نام i را با m و نام m را با i عوض کرد.

$$\text{tr}(\tilde{B}\tilde{A}) = B_{mi} A_{im} = \text{tr}(\tilde{A}\tilde{B})$$

در نتیجه:



۲-۳-۲ تینسور همانی و تینسور معکوس (Identity Tensor)

تینسور همانی، تینسوری است که در صورت اعمال به هر بردار بخواه تغییر در آن ایجاد نکند. اگر تینسور همانی با $\tilde{I}$ نشان داده شود می توان این ویژگی را به شکل زیر نوشت:

را به شکل زیر نوشت:

$$\tilde{I} \vec{a} = \vec{a}$$

وکتور $\vec{a}$ ← تینسور همانی

میتوانیم با استفاده از مؤلفه های $\tilde{I}$ را به شکل زیر بدست آوریم:

$$\tilde{I}_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{I} \hat{e}_j = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$\hat{e}_j$

شکل ماتریسی $\tilde{I}$:

$$[\tilde{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تینسور معکوس: اگر $\tilde{I} = \tilde{A}^{-1}$ ، می توان $\tilde{A}$ را تینسور معکوس $\tilde{A}$ تعریف کرد.
به عبارتی دیگر: $\tilde{A} \tilde{I} = \tilde{I} \tilde{A} = \tilde{I}$ چنانچه حاصل ضرب تینسور برابر با ماتریس همانی باشند ←

$$\tilde{S} = \tilde{A}^{-1}$$

or

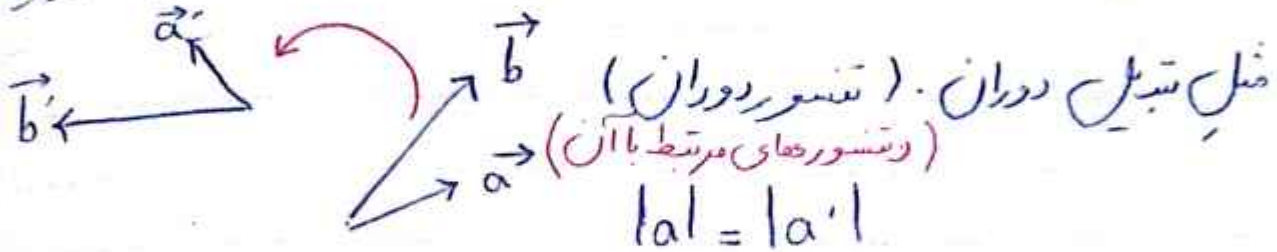
$$\tilde{T} = \tilde{S}^{-1}$$



Orthogonal tensors

۷-۳-۲ تانسورهای متعامد

یک تبدیل خطی است که دو وکتور اعمال شود طول و زاویه آنها تغییری نکند



زاویه $\rightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}', \vec{b}')$ زاویه $\leftarrow$

یا به عبارت دیگر اگر Q یک تانسور متعامد باشد و داشته باشیم $\vec{a}' = Q \vec{a}$

$\vec{b} = Q \vec{b}'$ می توان نوشت: $(\vec{a}') \cdot (\vec{b}') = (\vec{a}) \cdot (\vec{b})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{b}'$ (۲-۲۷)

جلسه دهم
خاصیت:

تانسورهای متعامد دارای خاصیت های ویژه ای هستند:

if Q is orthogonal

$Q^T Q = I$ (۱) $(\vec{a}') \cdot (\vec{b}') = \vec{a} \cdot \vec{b}$ a, b دگوا

$Q^T = Q^{-1}$ $a \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ we have, we can $(\vec{a}') \cdot \vec{b}' = \vec{b} \cdot Q^T (Q \vec{a}) = \vec{b} \cdot Q^T Q \vec{a}$ II

From (I) and (II) $\vec{b} \cdot Q^T Q \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$L(Q^T Q - I) \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{b} \cdot (Q^T Q - I) \vec{a} = 0$

شکل اندیس رابطه (۱-۱۸)

Transpose

$$Q_{im} Q_{mj} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow (Q_{mi} Q_{mj} = \delta_{ij})$$

۸-۳-۲ تبدیل دستگاه مختصات کارتزین

فرض کنیم دستگاه اولیه داریم

و سپس یک دستگاه ثانویه داریم

می‌توانیم فرض کنیم دستگاه ثانویه تحت اثر تبدیلی

دستگاه ثانویه تبدیل شده است. و این تبدیل که دستگاه اولیه را به دستگاه ثانویه تبدیل

کرده خاصیت معکوس دارد.

می‌توان فرض کرد که دستگاه بایر دارای یکین e_i تحت تبدیل متعامدان

دستگاه e_i بدست آمده است. اگر متشابه متناظر با این تبدیل با Q نشان

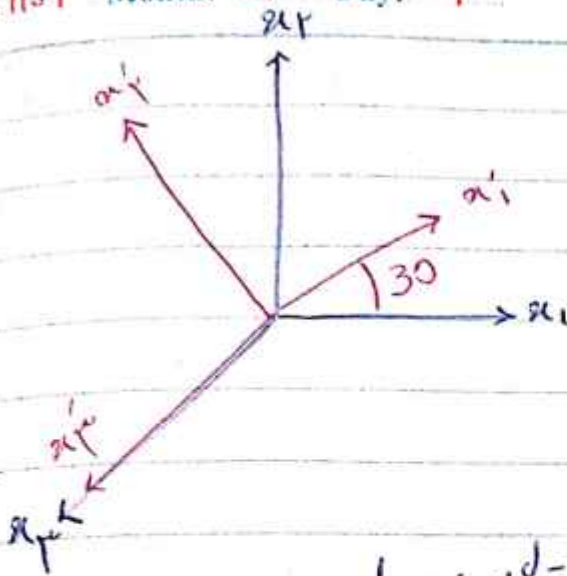
دهد. $\cos(A) = (e_i \cdot e_j) (1 \times 1) = e_i \cdot e_j$: واحد. $\cos(A) = (e_i \cdot e_j) (1 \times 1) = e_i \cdot e_j$

$$Q_{ij} = e_i \cdot e_j = \cos(e_i, e_j) \quad (۲۹-۲)$$

زاوی بین e_i و e_j

proof = ?

فصل:



ماتریس متناظر با تبدیلی را پیدا کنید دستگاه x_i را

به دستگاه x_i' تبدیل کند.

حل:

باتوجه به فرمول (۱-۲۶) داریم:

$$Q_{11} = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1' = \cos 30$$

$$Q_{12} = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2' = \cos (90 + 30) = -\sin 30$$

$$Q_{13} = \cos (90) = 0$$

$$Q_{22} = \cos 90 = 0$$

$$Q_{23} = \cos (0) = 1$$

$$Q_{21} = \cos 30$$

$$Q_{31} = \cos 40$$

$$Q_{32} = \cos 90 = 0$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \hat{e}_1' & \hat{e}_2' & \hat{e}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 & 0 \\ \sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ یا اینکه از همان ابتدا می توانیم فرم ماتریسی را

بنویسیم انتظاری داشته باشیم یا درون غیره کدام

را از دستیم

تعیین مؤلفه‌های بردار نسبت به دستگاه اِستار یافته

فرض کنیم بردار $\vec{a}$ نسبت به دستگاه $\hat{e}_i$ تعریف شده باشد:

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i$$

حال، تعیین بردار بر حسب مؤلفه‌های آن نسبت به دستگاه α_i به شکل

$$\vec{a} = a'_i \hat{e}_i$$

زیر تعیین می‌شود:

یا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a'_i = \vec{a} \cdot \hat{e}_i & (I) \\ a_i = \vec{a} \cdot \hat{e}_i & (II) \end{cases}$$

From (I): $a'_i = \vec{a} \cdot (\underbrace{Q_{mi} \hat{e}_m}_{e_i \text{ (مبنای رابطه ۱-۱۲)}})$

$$\Rightarrow a'_i = Q_{mi} \underbrace{\vec{a} \cdot \hat{e}_m}_{a_m} = Q_{mi} \cdot a_m$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a'_i = Q_{mi} a_m \end{matrix} \right\}$$

(۲-۳)

جای m را عوض کرده و علامت Transpose گذاشتیم تا بتوانیم به صورت ماتریس بنویسیم

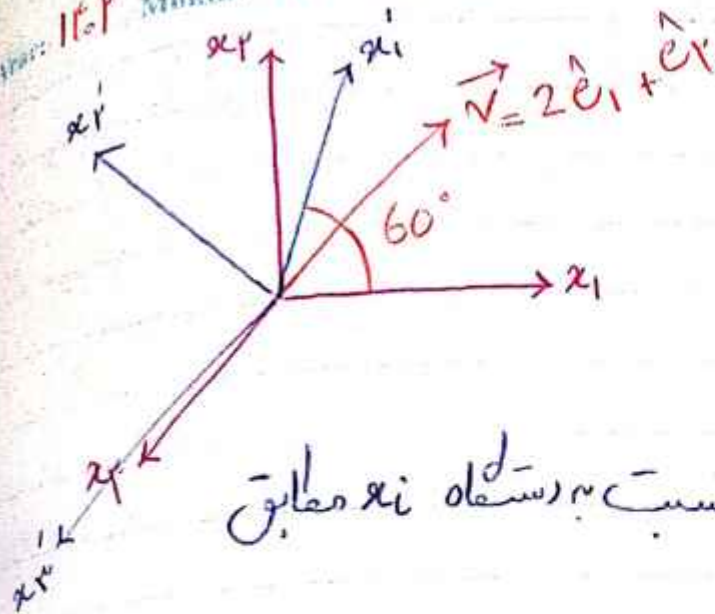
$$a'_i = Q_{im}^T a_m$$

$$[\vec{a}'] = [\tilde{Q}]^T [\vec{a}]$$

(۲-۴)

تعیین مؤلفه‌های بردار

نسبت به دستگاه
دیرم‌نویس



در شکل بالا، مؤلفه های بردار $\vec{v}$ نسبت به دستگاه x_1, x_2 مطابق

زیر است:

$$\vec{v} = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2$$

مؤلفه های این بردار را نسبت به دستگاه x_1', x_2' که به اندازه 40° حول x_2 دوران

پاد ساعتگرد کرده است بدست آورید.

$$[\vec{a}]' = [Q]^T [\vec{a}]$$

حل:

✓ برای اینکه بتوانیم از رابطه بالا استفاده کنیم باید ماتریس تبدیل $[Q]^T$ از دستگاه

x_1, x_2 به x_1', x_2' را بدست آوریم.

$$[Q] = \begin{bmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 40^\circ & -\sin 40^\circ & 0 \\ \cos 40^\circ & \cos 40^\circ & 0 \\ 0 & 0 & \cos 40^\circ \end{bmatrix}$$



✓ حال با جابجایی مقادیر Sin و Cos ماتریس Q بدست می آید:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تراهاه کجای میسر
دستور را درونی
مکمل

$$[v'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} + 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix}$$

$$\vec{v} = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \hat{e}'_1 + (1 - \sqrt{3}) \hat{e}'_2$$

حال می خواهیم مؤلفه های یک تانسور نسبت به دستگاه انتقال یافته را حساب کنیم

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j$$

باتوجه به جدول (۱-۱۵)

$$= (Q_{mi} \hat{e}_m) \cdot \tilde{T} (Q_{nj} \hat{e}_n)$$

اندازه ها را میاریم

$$Q_{mi} Q_{nj} \underbrace{\hat{e}_m \cdot \tilde{T} \hat{e}_n}_{T_{mn}}$$

$$= Q_{im}^T T_{mn} Q_{nj} \Rightarrow T'_{ij} = T_{mn} Q_{mi} Q_{nj} \quad (۲۲-۲)$$

بدین برای اینکه در هم ضرب شوند مؤلفه های
شاه باید که در هم قرار بگیرند.

$$[\tilde{T}]' = [Q]^T [\tilde{T}] [Q] \quad (۲۳-۲)$$

۹-۳-۲ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

تعریف هندسی: هر تبدیل تنسوری دارای تعدادی بردار مختص به فرد است،

که در صورت اعمال تنسور به این بردارها، بردار حاصل عوازی با بردار اولیه می شود، به این بردارها، بردار ویژه گفته می شود.

تعریف جبری: $\tilde{T} \vec{a} = \lambda \vec{a}$ که $\vec{a}$ بردار ویژه آورده و λ مقدار ویژه و متناظر با آن است.

فرم نگارش اندسی: $\tilde{T}_{ij} a_j = \lambda a_i$ ۳۴-۲

۳۵-۲ $T_{ij} a_j - \lambda a_j \delta_{ij} = 0 \rightarrow (T_{ij} - \delta_{ij} \lambda) a_j = 0$

اگر رابطه ۳۴-۲ را بسط دهیم خواهیم داشت:

$i=1 \quad T_{11} a_1 + T_{12} a_2 + T_{13} a_3 = \lambda a_1$

$i=2 \quad T_{21} a_1 + T_{22} a_2 + T_{23} a_3 = \lambda a_2$

$i=3 \quad T_{31} a_1 + T_{32} a_2 + T_{33} a_3 = \lambda a_3$

ترم همان سه تراز است چپ آورده و فاکتور می گیریم

$$(T_{11} - \lambda) a_1 + T_{12} a_2 + T_{13} a_3 = 0$$

$$T_{21} a_1 + (T_{22} + \lambda) a_2 + T_{23} a_3 = 0$$

$$T_{31} a_1 + T_{32} a_2 + (T_{33} - \lambda) a_3 = 0$$

معادله بالا دارای جواب بدیهی می باشد.
این یکی از معادلات وابسته دیگر می باشد که باید معادله ای به صورت آمادگی

وابسته باشیم این معادله به سه حالت جواب خواهد داشت

✓ برای رسیدن به جوابی غیر از صفر، باید این سه معادلات دارای تعدادی خاص

جواب باشند این حالت زمانی اتفاق می افتد که معادلات به هم وابسته بوده و

تعداد معادلات مستقل از هم کمتر از تعداد مجهولات باشد به عبارتی دیگر در صورتی

که نرم ماتریسی این معادلات نوشته شود رتبه ماتریس باید کمتر از

$$\begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$



که در این حالت ماتریس ضرایب جَمّا باید دترمینان برابر با صفر داشته باشد.

$$|\tilde{T} - \lambda \tilde{I}| = 0$$

دترمینان $\rightarrow$

(۳۶-۲)

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

از حل معادله حاصل از ۲-۳۶ مقادیر ویژه λ بدست می آید.

جلسه دوازدهم
مبتنی بر سرفه ریاضی بردارهای ویژه: برای هر تنسور بردارها و مقادیر ویژه ای

وجود دارد که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\tilde{T} \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

دستگاه معادله خطی $\leftarrow$

$$(\tilde{T} - \lambda \tilde{I}) \vec{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



مثال: در این سیستم، پاسخ دینامیکی قبل معرّفی شود. برای این کار باید مقدار
معادلات از مقدار معادلات کمتر باشد. یا عبارت دیگر: برای پاسخ ورودی باید
در میان ماتریس میرایی صفر شود.

یعنی:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

در میان این ماتریس به شکل زیر خواهد بود:

$$\lambda^3 - \textcircled{\text{I}} \lambda^2 + \textcircled{\text{II}} \lambda + \textcircled{\text{III}} = 0$$

پس با توجه به معادله بالا که ۳ جواب دارد. می توان گفت از حل این

معادله سه مقدار ویژه برای تشکیل بدست می آید. پس هر سه سورت (۳x۳) می تواند

۳ مقدار ویژه بدست آید. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ به ازای هر یک از سه مقدار

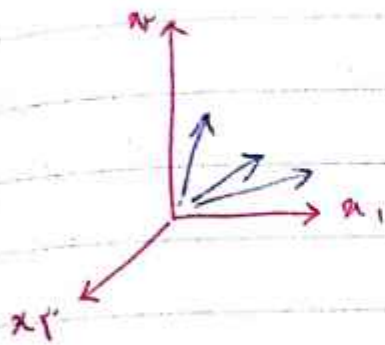
ویژه بدست آمده $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ یک بردار ویژه بدست خواهد آمد این

بردار با حل رابطه زیر بدست می شود:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_1 &\Rightarrow (\tilde{T} - \lambda_1 \tilde{I}) \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \\ \lambda = \lambda_2 &\Rightarrow (\tilde{T} - \lambda_2 \tilde{I}) \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \\ \lambda = \lambda_3 &\Rightarrow (\tilde{T} - \lambda_3 \tilde{I}) \vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \end{aligned}$$

✓ مامن توانیم حالتی داشته باشیم که یک تنسور بی نهایت بردار و بردار داشته باشد (۱۸۰°)

مثلاً حالتی که دوران حول e_3 باشد و e_1 یک بردار و بردار داریم که مقدارش



یک است و بی نهایت خط دیگر هم بردار و بردار باشند

(به شرطی که دو بردار هم در صفحه e_1 و e_2 باشد) مقدار و بردار آن دو منفی یک می شود.

این نکته برای حالت ۱۸۰° درجه است.

* ۳۶۰° مثل این است که دوران انجام نشده است.

مثال: شکل ماتریسی یک تنسور مطابق با رابطه زیر است:

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

مقادیر و بردارهای ویژه این تنسور را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

یادآوری: روش محاسبه همگونیان برای ماتریس 3×3

$$a_x \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} x_c$$



حل: ابتدا باید دترمینان آن را بدست آوریم و مقادیر اصفهانی λ کنیم.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)[(3-\lambda)(-3-\lambda) - 16] = 0$$

پس آنکه λ_1 تا λ_3 به ترتیب کوچک به بزرگ باشد.

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 9 - 16) = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 25) = 0 \begin{cases} \rightarrow \lambda_1 = -5 \\ \rightarrow \lambda_2 = 2 \\ \rightarrow \lambda_3 = 5 \end{cases}$$

حال به ازای هر یک از این λ مقادیر خواهم (v) بردارهای ویژه را می‌توانیم کنیم.

$$\lambda = \lambda_1 = -5$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{فرض } v_2 = 1 \Rightarrow 7v_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0$$

$$8(1) + 4v_3 = 0 \rightarrow v_3 = -2$$

$$4(1) + 2v_3 = 0 \rightarrow v_3 = -2$$

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ Or } \vec{v}^{(1)} = e_2 - 2e_3$$

مقادیر خواهم فرض شد برای v_1 ، تنها طول بردار ویژه را محض کرده و راستای آن را تغییر نمی‌دهد. بنابراین در حالت کلی می‌توان گفت اگر $\vec{v}$

بردار ویژه یک تانسور باشد $\vec{v} \propto \vec{v}$ هم همان بردار ویژه تانسور است.

برای اساس برای دستیابی به پاسخ واحد برای هر بردار ویژه می توان بردار
یکه متناظر با هر بردار ویژه را با نرمال سازی بردار بدست آورد

$$\hat{n}_1 = \frac{\vec{v}^{(1)}}{|\vec{v}^{(1)}|} = \frac{\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3}{\sqrt{(1)^2 + 2^2}}$$

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) \text{ or } [\hat{n}_1] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

چون ضرب v_1 در معادله صفر می شود می تواند رابطه داشته باشد

$$\begin{aligned} v_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} v_2 + 4v_3 = 0 \rightarrow v_3 = -\frac{v_2}{4} \\ 4v_2 - 5v_3 = 0 \end{cases} \\ \frac{4v_2 + 5v_2}{4} = 0 \Rightarrow v_2 = 0 \text{ و } v_3 = 0 \end{aligned}$$

این معادله به هم وابسته نیستند

$$\Rightarrow [v^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر $v_1 = 2$ می گذاریم پاسخ ها را به شکل زیر می بینیم

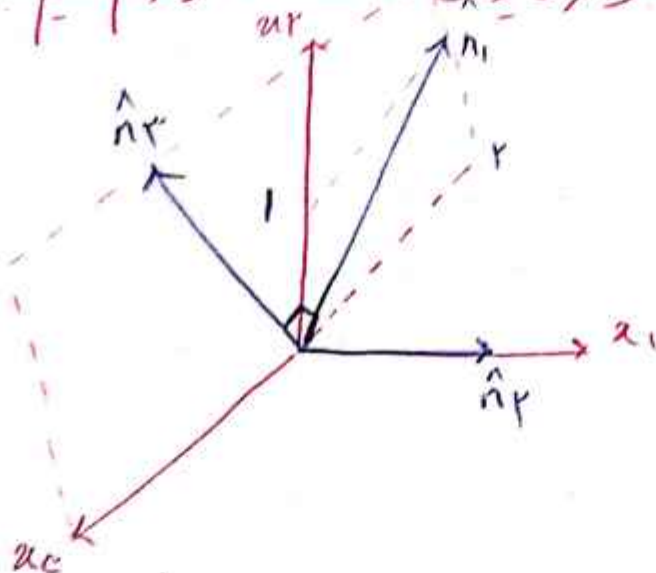
$$[\hat{n}_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ or } \vec{n}_2 = \hat{e}_1$$

حل: $\vec{v}^{(3)}$ نیز به همین روش خواهد بود و چرا که این سیستم:

$$\lambda = \lambda_2 = \omega$$

$$[\vec{v}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

حال اگر بخواهیم این سه بردار ویژه را رسم کنیم به شکل زیر خواهد بود.



* و متذکر که در بالا رسم بردارهای ویژه برهم نه خورد. و خود این بردارها می توانند پایه دستگاه جدید باشند.



توجه: طبقه اول کنیم بردارهای ویژه یک تانسور در صورت متعامد بودن تانسور

(Orthogonal) برهم متعامد هستند

برای اثبات این موضوع:

فرض v_1 و v_2 دو بردار ویژه مربوط به مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 باشند.

$$\tilde{T} \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \quad \text{در این صورت:}$$

$$\tilde{T} \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

برای آنکه بینیم برهم متعامد بودن یا نه باید ضرب داخلی آنها را انجام دهیم.

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_1} (\tilde{T} \vec{v}_1) (\tilde{T} \vec{v}_2) \xrightarrow{\text{Transpose خاصیت}} \vec{a} \cdot \tilde{T} \vec{b} = \vec{b}^T \tilde{T}^T \vec{a}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \vec{v}_2 \cdot \underbrace{\tilde{T}^T \tilde{T}}_A \vec{v}_1$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \vec{v}_1 \cdot \underbrace{\tilde{T}^T \tilde{T}}_{A^T} \vec{v}_2$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\vec{v}_1^T \cdot \tilde{T} \vec{v}_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \vec{v}_1^T \cdot \tilde{T}^T \tilde{T} \vec{v}_2 =$$



$$\vec{v}_1 \cdot \left(\tilde{I} - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \tilde{T}^T \tilde{T} \right) \vec{v}_2 = 0$$

$$\tilde{T}^T \tilde{T} \vec{v}_2 = \lambda_2 \tilde{T}^T \vec{v}_2$$

$$\tilde{T}^T = \tilde{T} \Rightarrow (\tilde{T}^T \tilde{T}) \vec{v}_2 = \lambda_2 \tilde{T}^T \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \vec{v}_1 \cdot (\underbrace{\tilde{T}^T \tilde{T}}_{\lambda_2 \tilde{T}^T} \vec{v}_2) = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - \frac{1}{\lambda_1} \vec{v}_1 \cdot \tilde{T}^T \vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - \frac{1}{\lambda_1} \vec{v}_1 \cdot (\lambda_2 \vec{v}_2) = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

این عبارت صفر می شود

چون بردارهای ویژه Orthogonal هستند می توان از آنها برای تشکیل دستگاه استفاده کرد.

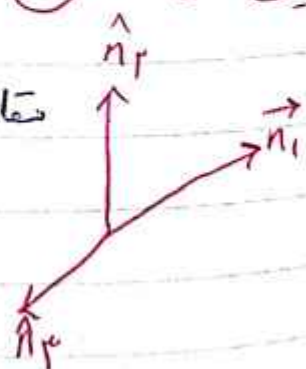
تقریب مؤلفه های تانسور نسبت به دستگاه حاصل از بردارهای ویژه

مقادیر ویژه با λ_1 و λ_2 و λ_3 تقریب شده اند

برای بردارهای ویژه $\hat{e}_i$ داریم:

$$\tilde{T}_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j$$

$$T_{11}' = \hat{n}_1 \cdot \tilde{T} \cdot \hat{n}_1 = \lambda_1 \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_1 = \lambda_1$$



مؤلفه‌های شعاعی و دایره‌ای در نسبت به دستگاه فضای مختلف بدست می‌آید

Year: ۱۴۰۲ Month: ۸ Day: ۱۵

Subject: دینامیک بردار

$$T_{11}' = \hat{n}_1 \cdot \underbrace{\tilde{T} \hat{n}_1}_{\lambda_1 \hat{n}_1} = \lambda_1 \underbrace{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_1}_{\text{چون بردار هم‌راستا}} = 0$$

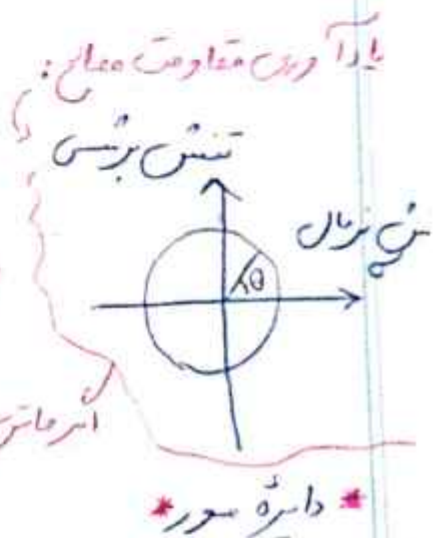
$$T_{12}' = 0 \quad T_{21}' = T_{22}' = T_{31}' = T_{32}' = 0$$

$$T_{11}' = \lambda_1 \quad T_{33}' = \lambda_3$$

$$[T]_{\hat{n}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

✓ مقادیری که در قطر بدست می‌آید بیشترین مقدار هستند مثلاً

اگر ماتریس دایره‌ای را به ماتریس max مقدار تمام در ماتریس n_i بود.



لمت مهم (از این سه مقدار ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ بیشترین آنها برابر با بیشترین

مقدار برشی ممکن برای مؤلفه‌های روی قطر شعاعی است که نسبت به دستگاه فضای مختلف بدست آمده است.

کمترین مقدار ویژه نیز برابر با کمترین مقدار ممکن عدد بدست آمده روی

قطر فواصل بود.

Principle direction

*) برای استیجایی که بردارهای ویژه روی آن قرار می‌گیرند، راستای اصلی

است.

(Tensor Calculus)

۲-۲ فضاها و تانسورها
به حساب دینامیک و مکانیک

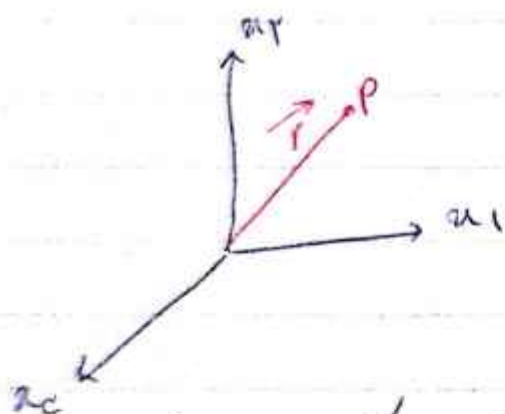
۱-۳-۲ مشتق تانسورها

می توان گفت فضای اسکالر بردار و تانسور را به شکل تابعی از یک متغیر مستقل در نظر گرفت مثلاً در موردی که متغیر مستقل مربوط به مکان باشد می توان یک کسب اسکالر را به شکل زیر نشان داد:

بردار مکان

$$\phi(x_1, x_2, x_3) \text{ or } \phi(\vec{r}) \text{ or } \phi(x_i)$$

$$\vec{r} = x_i \hat{e}_i$$



$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = x_i \hat{e}_i$$

* زمانی که یک کسب وابسته به متغیر مستقل مثل مکان، زمان

باشند میدان ناگسسته می باشد مثلاً یک میدان اسکالری است $\phi(x_i)$

همین وابستگی برای کسب های برداری و تانسوری نیز قابل تصور است:

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) \text{ or } \vec{v}(\vec{r}) \text{ or } \vec{v}(x_i) \text{ (vector field)}$$

Year: ۱۴۰۲ Month: ۸ Day: ۱۵

Subject: جلسه چهاردهم

$\tilde{T}(x_1, x_2, x_3)$ or $\tilde{T}(r), \tilde{T}(u_i)$

میدان تانسور

Tensor field

لاتنس کمترو وابته به مكان

۱۴۰۲، ۸، ۲۰

جلسه چهاردهم

برای میدانهای اسکالر، بردار و تانسور مشتق نسبت به مؤلفه‌های

مکان به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = ()_{,i}$$

مثال:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \text{ or } \phi_{,i}$$

مشتق ϕ نسبت به x_i

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \text{ or } v_{i,j}$$

مشتق v_i نسبت به x_j

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \text{ or } T_{ij,k}$$

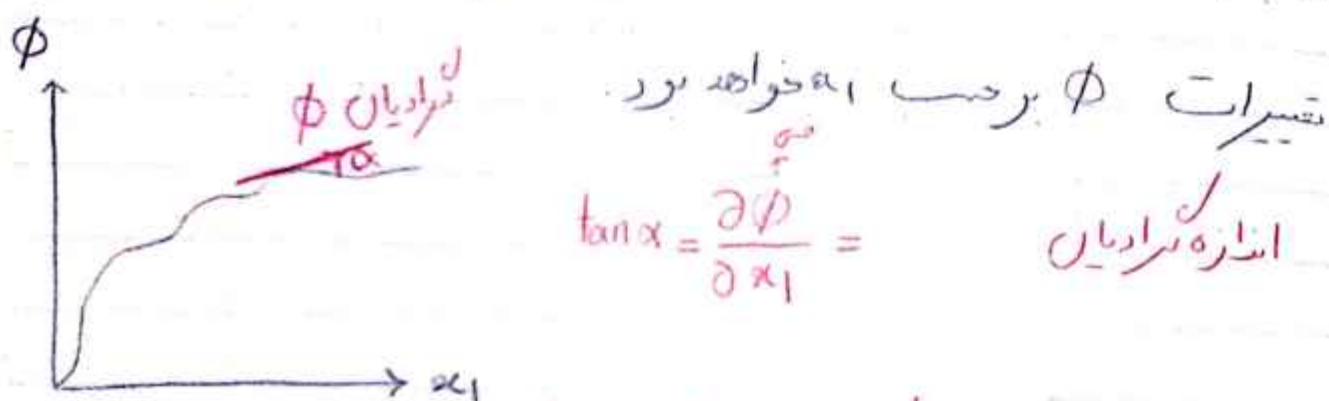
مشتق T_{ij} نسبت به x_k



(Gradient) of scalar field

۲-۴-۲ گرادینان اسکالر

گرادینان میان اسکالر: برداری است که مؤلفه‌های آن آکس‌های تغییرات میان رادرسه راستای مختلف نشان می‌دهد. مثلاً برای ϕ یک میان وابسته x_1 باشد گرادینان آن در هر نقطه برابر با خط مماس بر نمودار



بنابراین به‌کاف‌جری تعریف گرادینان اسکالر به شکل زیر است:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

به‌جای grad از نماد نابلا (∇) برای نشان دادن گرادینان استفاده می‌شود.

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{e}_i = \phi_{,i} \hat{e}_i \quad (۲-۳۷)$$

دقت کن 😊

غالباً بردار نایب یک دایره در فضای است که به شکل زیر تعریف می شود

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (۲-۳۸)$$

نکته:

از بردار در ادیان می توان برای تعیین جهت تغییرات یک

میان اسکالر در جهت دایره موازی با بردار $\hat{n}$ استفاده کرد.

برای این کار از ضرب داخلی استفاده می کنیم (یکی از خصوصیات ضرب

داخلی تصویر کردن بود):

$$\frac{d\phi}{dn} = \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n}$$

۲-۳۹

مستقیم سویی (جهت دار)

نکته: بردار دایره نایب یک بردار مستقل از دستگاه مختصات است.

به عبارت جبری: چنانچه دو دستگاه x و y داشته باشیم می توان نوشت:

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{e}'_i \frac{\partial}{\partial x'_i}$$

Coordinate Invariant

به این خاصیت، خاصیت

می گویند.

Year: ۱۴۰۲ Month: ۸ Day: ۲

Subject: دینامیک و مکانیک
اثبات رابطه:

$$\hat{e}_i = \hat{Q} \hat{e}_i = Q_{mi} \hat{e}_m$$

$$\Rightarrow e'_i \frac{\partial}{\partial x_i} = Q_{mi} \hat{e}_m \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_i}$$

مشتق زنجیره ای

$$\boxed{x_m = Q_{mk} x'_k}$$

این عبارت را در رابطه قبلی جایگذاری

$$\frac{\partial}{\partial x_m} = Q_{mk} \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x'_i} \right) \rightarrow \delta_{ki} \xrightarrow{\text{if } k=i \rightarrow 1, k \neq i \rightarrow 0}$$

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x'_1} = 1, \frac{\partial x'_2}{\partial x'_1} = 0, \frac{\partial x'_3}{\partial x'_1} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{mi} \frac{\partial}{\partial x_m}$$

$$\Rightarrow e'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} = \underbrace{Q_{mi} Q_{ni}}_{\downarrow} \hat{e}_m \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$Q_{mi} Q_{ni} = Q_{mi} Q_{in}^T = (Q Q^T)_{mn}$$



$$\Rightarrow I_{mn} = \delta_{mn} \Rightarrow e'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} = \hat{e}_m = \frac{\partial}{\partial x_m}$$

$(Q Q^T)_{mn}$

اثبات شد

6. The angles between the barred and unbarred coordinate lines are given by

$$x' \begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \bar{x}_1 & 45^\circ & 9^\circ & 45^\circ \\ \bar{x}_2 & 4^\circ & 45^\circ & 12^\circ \\ \bar{x}_3 & 12^\circ & 45^\circ & 4^\circ \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij} = e_i \cdot e_j = \cos(e'_i \cdot e'_j)$$

a) Determine the transformation matrix.

$$Q = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & \cos 45^\circ & \cos 9^\circ & \cos 45^\circ \\ e_2 & \cos 4^\circ & \cos 45^\circ & \cos 12^\circ \\ e_3 & \cos 12^\circ & \cos 45^\circ & \cos 4^\circ \end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس در این سؤال

زاویه‌ها را که در ستون مشخص

ایجاد در ستون قرار می‌دهیم

* ستون جدول در سطر ماتریس قرار می‌گیرد.

b) show that the tensor is orthogonal.

$$Q Q^T = I$$



Year: 1401 Month: 8 Day: 22

Subject: دین و ایمان

c)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1. & 1. & 0 \\ 1. & 1. & 1 \\ 0 & 1 & 1.0 \end{bmatrix} \hat{e}_i$$

$$[T'] = [Q]^T [T] [Q]$$



ارائه حسابان تفسیرها.

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

گفتیم:

اگر یک تابع را به f اعمال کنیم

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

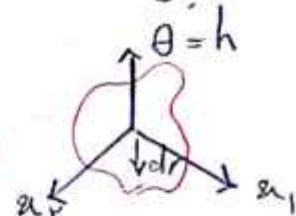
تعریف گرادیان

* توجه: میزان تغییرات یک میدان اسکالر (ϕ) در راستای بردار $\vec{dr}$ متن

رابطه زیر قابل محاسب است:

$$d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{dr}$$

اثبات: در صورتی که میدان اسکالر مورد نظر با $\phi(x_1, x_2, x_3)$ نشان داده شود، مقدار مقدار ثابت ϕ ، رابطه زیر مشخص می شود.



$$\vec{dr} = dr(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) / \sqrt{2}$$

$$d\theta = \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{dr}$$

که یک در ثابت است، توجه به رابطه $d\phi$ حاصل اختلاف $\phi(\vec{r}) = \phi(x_1, x_2, x_3) = C$ یک بردار عاقل بر صفحه است. برابر رابطه

$$d\phi = \phi(x + dr) - \phi(x) = 0$$

مستقیم از طرفی می دانیم $d\phi$ در راستای dr طبق رابطه $d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{dr}$ که در صورتی که این رابطه برابر صفر باشد یعنی $d\phi = 0$

$$\theta = h = (x_1 - a) \hat{e}_1 + (x_2 - b) \hat{e}_2$$

$$\vec{\nabla} \theta = \hat{e}_1 (x_1 - a) + \hat{e}_2 (x_2 - b)$$

در نهایت $d\theta = ?$

$$d\theta = \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{dr} = \frac{r dr}{\sqrt{2}} [(x_1 - a) + (x_2 - b)]$$

$$= \frac{r dr}{\sqrt{2}} [x_1 + x_2 - a - b]$$



Example:

$$\theta = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

برای میان اسکالر

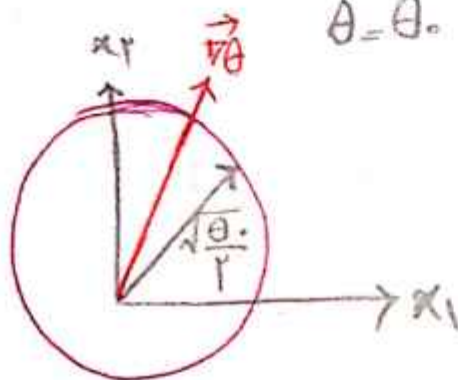
بازتاب زیر مشخص شده است:

$$\theta_0 = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

منحنی دایره
مرکز مبدأ و شعاع $\frac{\theta_0}{2}$

زاویه بین بردار گرادیان با منحنی مقدار ثابت θ_0 را پیدا کنید.

$$\theta = \theta_0$$



$$\vec{\nabla} \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \hat{e}_2 = 4x_1 \hat{e}_1 + 4x_2 \hat{e}_2$$

$$= 4(x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2)$$

$\vec{\nabla} \theta$ همواره میوه روی شعاع های دایره و به θ_0 (محاس دایره) می رود است.

این اتفاق به دلیل این است که بردار گرادیان یک مقدار اسکالر

و این ارتباط دارد با شار در راستای جهت بیشینه افزایش آن مقدار است آن جهت به عبارت دیگر

در یک نقطه دایره سطح

چرا حفظ می کند مقدار اسکالر بر روی آن ثابت است به عبارت دیگر دایره ای که یک مقدار

چرا حفظ (محاس) بر سطح حاصل از مقدار ثابت یک مقدار اسکالر هم در سطح ثابت را

بر روی آن سطح حرکت کنیم و دایره ای که

بردار گرادیان آن است $\vec{\nabla} \theta$ مقدار اسکالر به سمت آن جهت

مقدار اسکالر جهت آن است که اگر در آن نقطه حرکت کنیم مقدار اسکالر به سمت آن جهت

در آن جهت حرکت کنیم مقدار اسکالر به سمت آن جهت

Example: $\phi = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$

مشتق میان اسکالر

رادیان است $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1\hat{e}_1 - 1\hat{e}_2 - 1\hat{e}_3)$ رابطه آورید

مشتق سویی

$\frac{d\phi}{dn} = \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n}$

حل:

$\vec{\nabla}\phi = (2x_1 + 2x_2)\hat{e}_1 + 2x_1\hat{e}_2 + (-2)x_2\hat{e}_3$

$\frac{d\phi}{dn} = [2x_1 + 2x_2, 2x_1, -2x_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

تعریف: The Laplacian $\nabla^2 (\phi)$ is defined by:

$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

بردار است و ∇^2 اسکالر است *



(Divergence) یک بردار

۲-۴-۲ دیورژانس

تعریف:

$$\text{Div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (۲-۴-۲)$$

$$\text{Div } \vec{V} = \nabla_i V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

فرماندگی

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

همیشه ضرایب ∇ با بردار داریم با ∇ نیز خواص هم دارد

* دیورژانس تعریف هندسی ندارد



$k=2 \rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{v})_r = \frac{\partial v_r}{\partial u_1} \overset{+1}{\varepsilon_{123}} + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \overset{-1}{\varepsilon_{213}}$

در اینجا

$$= \frac{\partial v_r}{\partial u_1} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}$$

در مجموع می شود

$$\begin{aligned}
 \text{Curl } \vec{v} &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial u_2} - \frac{\partial v_2}{\partial u_r} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_r} - \frac{\partial v_r}{\partial u_1} \right) \hat{e}_r \\
 &+ \left(\frac{\partial v_r}{\partial u_1} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \right) \hat{e}_r
 \end{aligned}$$

• یک مفهوم هندسی نسبت و معادل هندسی برایش نداریم. •

(Gradient of a vector field) برداری

$$\text{grad } \vec{v} = \vec{v} \otimes \vec{\nabla}$$

(۲۴-۲)

دایا ← به معنی ۲ گانه (ضرب درایه به درایه)

$$\text{grad } \vec{v} = v_i \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

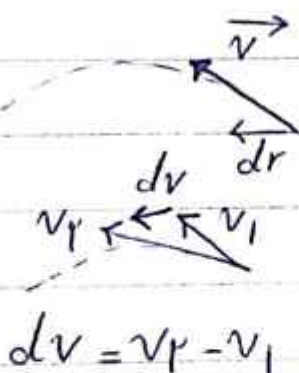
معمولاً
(۴۵-۲)

می توان از گزاردان بردار برای تعیین تغییرات یک بردار در یک راستای دلخواه

($\vec{dr}$) استفاده کرد.

$$d\vec{v} = (\text{grad } \vec{v}) \vec{dr}$$

(۴۶-۲)



توجه: گزاردان بردار را به طور معمول به شکل زیر نشان می دهند:

$$\text{grad } \vec{v} = \vec{\nabla} \vec{v}$$

نادر

نشان می دهیم

جای آنکه نویسیم $\text{grad } \vec{v}$ با غبار



نوع کمیت	نماد	
بردار	$\vec{\nabla} \phi$	$\text{grad } \phi$
تینسور	$\nabla \vec{v}$	$\text{grad } \vec{v}$
اسکالر	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = v_{ii}$	$\text{div } \vec{v}$
بردار	$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\text{Curl } \vec{v}$

تینسور مرتبه صفر	$\rightarrow 0 : 1 : 3$	اسکالر
تینسور مرتبه یک	$\rightarrow 1 : 2 : 3$	بردار
تینسور مرتبه دو	$\rightarrow 2 : 3 : 9$	تینسور



نمای

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) =$$

$$\phi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \phi$$

لایه لایه

حل: می توانیم از انتشار اندیس استفاده کنیم.

جای $\vec{\nabla}$ می گذاریم

جای ψ می گذاریم

$$(\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \cdot (\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \hat{e}_j - \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \hat{e}_j)$$

نمی دانیم چون از حالت دایره خارج می شد

جای $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ می نویسیم پس داریم:

$$\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_j})$$

که را برای ساده کردن $\delta_{ij} = 1$ قرار داده و داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_i})$$

پس مشتق می گیریم:

$$= (\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i})$$

حال ساده تر می کنیم:

$$= \underbrace{\phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i}}_{\nabla^2 \psi} - \underbrace{\psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i}}_{\nabla^2 \phi} = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

Show that:

مثال ۲:

$$\text{Curl} (\text{curl } \vec{u}) = \text{grad} (\text{div } \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$$

حل:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla} \times (\tau_i u_j \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k)$$

به حالت اندیس می نویسیم

آنها را که اسکالرند بیرون می آوریم:

این عملیات مهم است که آن را در جایی درست خود قرار داده و جای نمی بیند

به حالت زیر می نویسیم غلط است. (این در حالت درست بود) $\tau_i u_j \varepsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \hat{e}_k)$ که $\vec{\nabla}$ عملگر نامست و معنای وکتور باقیست

نابلا را باید قبلش می نویسیم

پس می نویسیم:

$$\varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

وکتور به بیرون آوردیم

$$= \varepsilon_{ijk} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \hat{e}_k \right)$$

در ادامه هم اندیس نابلا را می نویسیم

سبب سے زیادہ

میں "رہائے" کا
شود

$$= \epsilon_{ijk} (\nabla_m \hat{e}_m) \times \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \hat{e}_k \right)$$

$$= \epsilon_{ijk} \nabla_m \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (\hat{e}_m \times \hat{e}_k)$$

\$e_m\$ راس پر مبنی طور پر \$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\$ کے ساتھ لیا گیا ہے

$$= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \epsilon_{mkl} \hat{e}_l$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \epsilon_{ijk} \epsilon_{mkl} \hat{e}_l$$

~~\$\epsilon_{mkl}\$~~

$$= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \hat{e}_l$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \hat{e}_l$$

\$U\$ کے لئے

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \hat{e}_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \hat{e}_j$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \hat{e}_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \hat{e}_j$$



$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \hat{e}_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

$\text{div } \vec{u}$

پس داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \vec{u} \hat{e}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

چون $\vec{u} = u_i \hat{e}_i$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \vec{u}) \hat{e}_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

$$= \text{grad} (\text{div } \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$$

یک بردار اسکالر

اثبات شد

مثال ۲: عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$D_{ij} = \frac{1}{r} (v_i v_j + v_j v_i)$$

برای این عبارت شکل مستقل از دستگاه

(Coordinate invariant)

عبارت را بدست آورید.

حل:

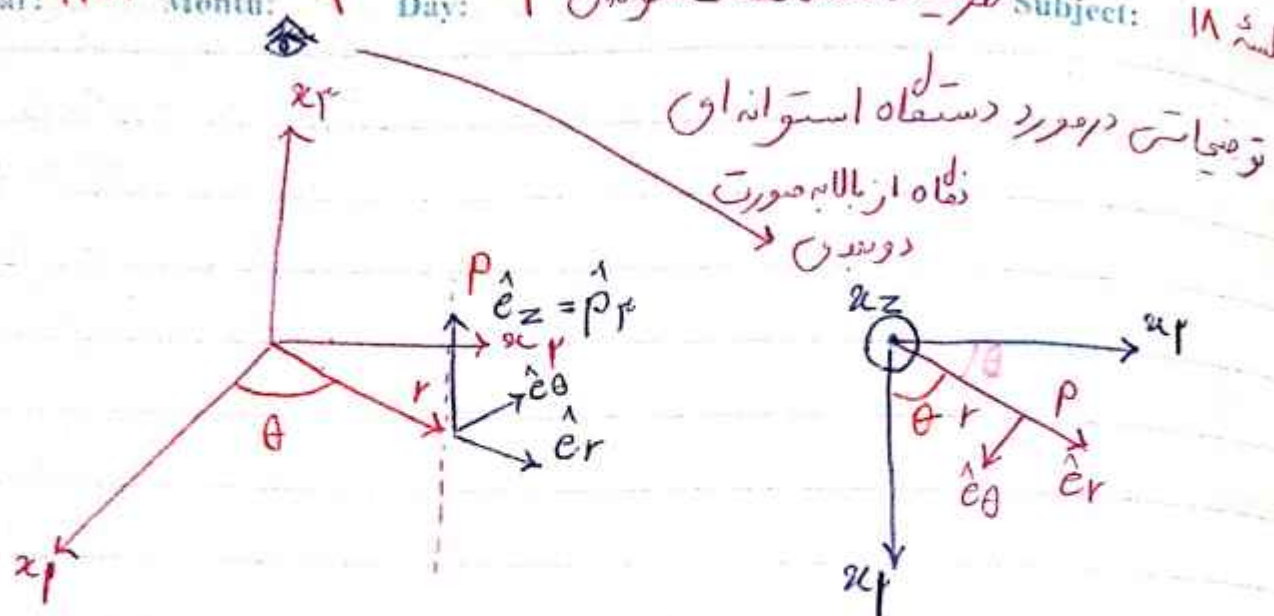
$$D_{ij} = \frac{1}{r} [\nabla(\vec{v})_{ij} + (\nabla \vec{v})_{ji}]$$

$$= \frac{1}{r} [(\nabla \vec{v})_{ij} + (\nabla \vec{v})_{ji}^T]$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{r} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)$$

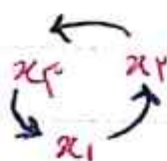
Coordinate invariant نم





$$P: (x_1, x_2, x_3)$$

$$P: (r, \theta, x_3) \leftarrow \text{دستگاه استوانه‌ای}$$



* بایستی دستگاه مختصات را راست‌دست در نظر بگیریم.

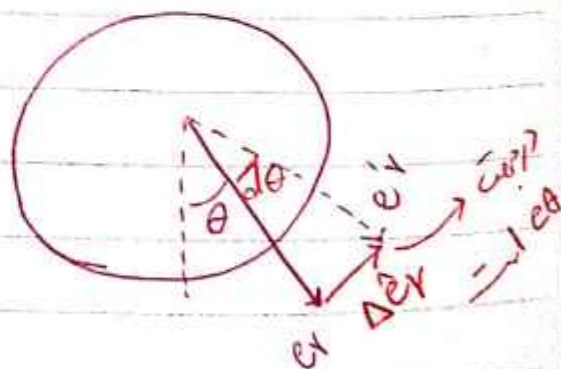
✓ اثر دستگاه مختصات هم نگاه کنیم ببینیم که با توجه به ناگذاری x_1 و x_2 و x_3 ها

حرکت مایه را ساکن نگه داریم. $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x_i} = 0$ در دستگاه مختصات و س. $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} \neq 0$ در دستگاه استوانه‌ای چون وقتی θ را عوض می‌کنیم جهت $\hat{e}_r$ عوض می‌شود.

حاصل این مشتق در راستای $\hat{e}_\theta$ است

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\hat{e}'_r - \hat{e}_r}{\Delta \theta}, \quad \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$



$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

در این حالت چون مستوی نیست
ثابت منفرجه شود.

و در بقیه حالت ها داریم:

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial z} = \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial z} = 0$$

رابطه های:

می توان نشان داد که بردار نابلا در دستگاه استوانه ای به شکل زیر تعریف می شود.

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (۲-۴۷)$$

رابطه مربوط به $\vec{\nabla}$ در دستگاه مختصات استوانه ای.

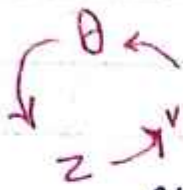
توضیح ملا در سوال اول $\text{curl } \vec{\nabla}$ در دستگاه استوانه ای چیست؟

مهم

من می گفتم در سوال اول curl را می نویسیم و در آن به جای $\vec{\nabla}$ در دستگاه مختصات استوانه ای را جایگذاری می کنیم.



مثال: $\text{Curl } \vec{v}$ را در دستگاه استوانه‌ای بنویسید.



فرض کنید: $v = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta$

$v_r = v_r(r, \theta), v_\theta = v_\theta(r, \theta)$

حل: $\text{Curl } \vec{v} = \vec{\nabla} \times v = \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$\times (v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta)$

$= \hat{e}_r \times \frac{\partial}{\partial r} (v_r \hat{e}_r) + \hat{e}_r \times \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta \hat{e}_\theta)$

$\frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{e}_r \times \hat{e}_r$

نیز خارج بردار خودش می‌شود صفر.

$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{e}_z$

$\hat{e}_r \times \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{e}_\theta = \hat{e}_z$

$+ \frac{1}{r} \hat{e}_\theta \times \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \hat{e}_r)$

$\frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \hat{e}_r) = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{e}_r + v_r \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{e}_r + v_r \hat{e}_\theta$

این منتهی می‌شود

$= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_z$

سپس θ را به ترم بالانبر می‌کنیم.

$+ \frac{1}{r} \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \hat{e}_\theta) = \frac{1}{r} v_\theta \hat{e}_z$

$\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \hat{e}_\theta) = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + v_\theta (-\hat{e}_r)$

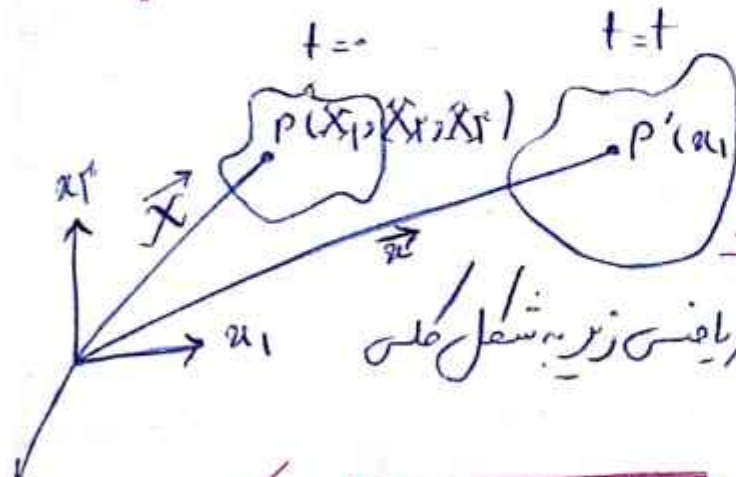
چون $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_r$ از یک جهت نیستند.

با توجه به فرض دیگر ترم سوم را منبر نمی‌کنیم.

$= \vec{\nabla} \times v = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_\theta \right) \hat{e}_z$

Chapter 3: Kinematics of a Continuum

3.1 Motion of a Continuum



برای توصیف ریاضی یک ذره در ماده را
 مشخص کرده و برای آن ذره تابع
 مختصات آن ذره را در هر بازه‌ای زمانی
 مشخصه t می‌توانیم بنویسیم.
 بیان ساده و ریاضی از حرکت:

تابعی که motion را به ما نشان می‌دهد
 $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$

(3-1)

یک ذره از ماده است. $\vec{x}$ نشان‌دهنده‌ی موقعیت ذره از ماده است.

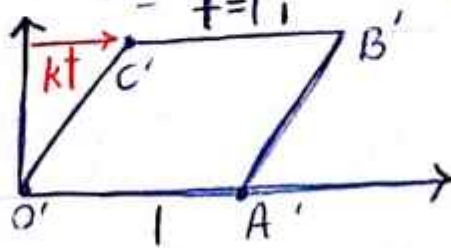
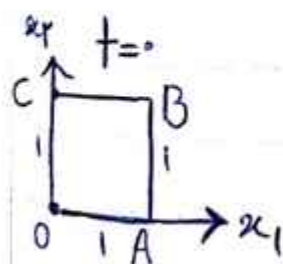
$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t=0)$ نشان‌دهنده‌ی یک ذره از ماده است.

به عنوان مثال: فرض کنید حرکت تابع زیر مشخص شده باشد

$\vec{x} = \vec{X} + kt \hat{e}_1$

این تابع غاصه‌ی حرکت است که جسم نشان داده شده در سمت چپ

شکل زیر را به شکل سمت راست تبدیل می‌کند.



برای نشان دادن این موضوع مکان ذرات مختلف در زمان حرکت داده شده

در دست آوریم

برای راحتی حل نوشته‌ها را اغلب می‌نویسیم برای ذرات مختلف بررسی می‌کنیم
 در این Motion چه اتفاقی برای آنها افتاده
 و مختصات جدید آنها کجا می‌شود و بهتر

برای ذره 0: $\vec{x} = (0, 0, 0)$

است نوشته‌ها را اغلب می‌نویسیم

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + kt \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای ذره 1: $\vec{x} = (0, 1, 0)$

برای ذره 1: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + kt \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} kt \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

همین طور برای بقیه نیز می‌توان نوشت. و در پایان نشان می‌دهد که این حرکت

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

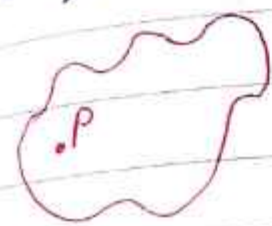
حرکت برش خالص است.
 (pure shear motion)

ما روش نگاه مسائل داریم

Lagrangian (Material)
and Eulerian (Spatial)

✓ برای مدلسازی سیستم مکانیک از این دو مدل استفاده می کنیم
Lagrangian description (نگاه لائرانژی)

در نگاه لائرانژی یک ذره خاص از ماده را در نظر گرفته و تغییر خواص



مختلف را برای آن ذره بیان می کنیم

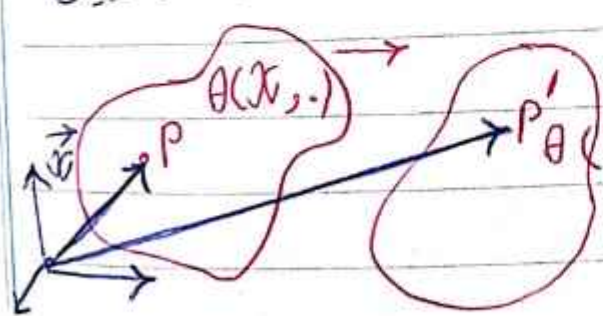
در نگاه لائرانژی با مکان لحظه ای ذره کاری نداریم

$\theta(\vec{x}, t) \rightarrow$ وابستگی دارد به $\vec{x}$ و t

مکان اولیه

پس مادر نگاه لائرانژی مکان اولیه را می دانیم
و همین مکان اولیه برای ما مهم است

در بیان لائرانژی تغییر خواص تنها با توجه به مکان اولیه ذره تعیین



می شود نه مکان لحظه ای آن

و اندازه می گیریم

بنابراین: در این بیان همه کمیت های میانبر تابعی از مکان اولیه جسم

$$\theta = \theta(\vec{x}, t)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{x}, t)$$

برای ناکیه



Eulerian description

در نگاه اولیه، به جای توجه به ذره ای خاص، تغییرات خواص برای

یک نقطه خاص از جسم در نظر گرفته می شود. در نتیجه تغییرات خواص تنها

تابعی از زمان و مکان لحظه ای مد نظر خواهد بود. و مکان اولیه هر ذره

مورد توجه قرار نمی گیرد. بر این اساس خواص میانبر تابعی از مکان لحظه ای

$$\theta = \theta(\vec{x}, t)$$

($\vec{x}$) خواهد بود:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{x}, t)$$

برای ناکیه

* در تحلیل سازه مقابله به کاربرد از نگاه لائرانتری و اولیری استفاده می کنیم

Year: ۱۴۰۲ Month: ۹ Day: ۱۱

Subject: جلسه ۱۹

نگاه لائرانتری و اولیری زمانی اهمیت دارد که جابجایی ها به قدری باشند که بین x و X تفاوت ایجاد شده باشد.

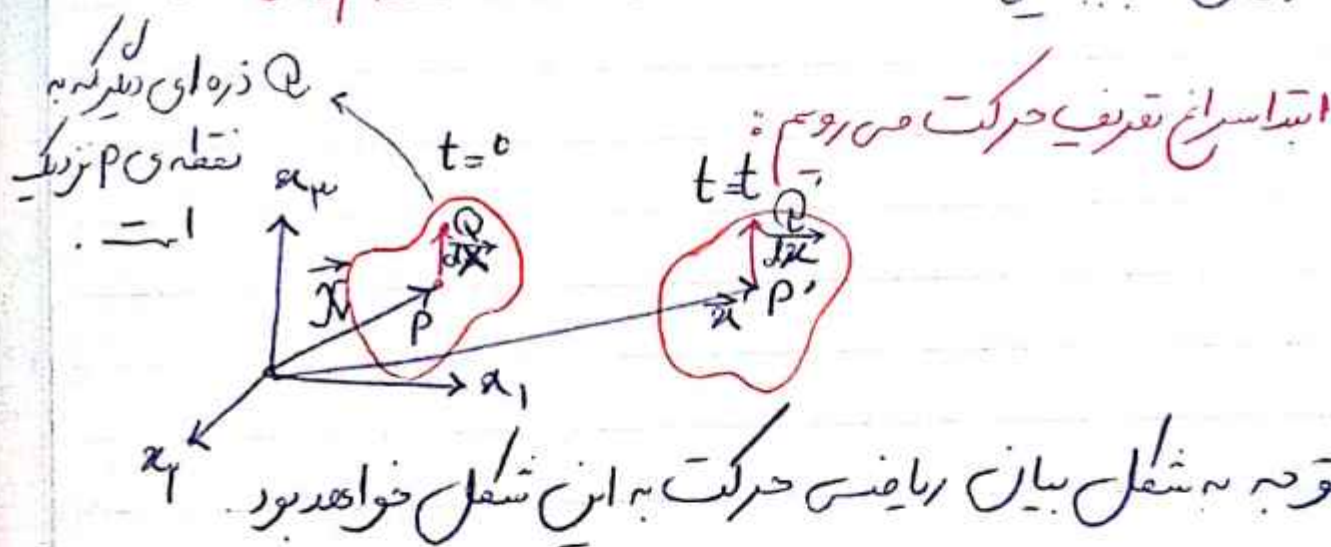
* حال با توجه به این مقدمات من خواهم کرنش را تعریف کنیم که قبل از آن لازم است یک سری کمیت ها را تعریف کنیم.

3.3. Deformation Gradient

گرادیان تغییر شکل

& Displacement Gradient

گرادیان جابجایی



$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

برای اینکه $\vec{x}$ را بدست آوریم می توانیم بنویسیم:

Gradient Deformation

به این تشریح

$$d\vec{x} = (\nabla \vec{x}) d\vec{X}$$

(3-2)

* با توجه به این رابطه می توان تغییرات المان dX را پس از مدت زمان t محاسبه کرد.

در بیان تغییر شکل نامیده می شود و با $\tilde{F}$ نشان داده می شود

$$\tilde{F} = \nabla \tilde{x}$$

$$d\tilde{x} = \tilde{F} dX$$

3-3

بنابراین:

که شکل ماتریس $\tilde{F}$ نیز مطابق با رابطه زیر است:

را جای می کنیم چون deformation داریم

$$[\tilde{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right]$$

3-4

فرم ماتریسی

در بیان تغییر شکل

Deformation Gradient

حال برای تعریف در بیان جای می توان نوشت

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x} - \vec{X}$$

جای می برای یک نقطه

$$\nabla \vec{u} = \vec{u} \otimes \vec{\nabla} = (\vec{x} - \vec{X}) \otimes \vec{\nabla}$$

$$= \vec{x} \otimes \vec{\nabla} - \vec{X} \otimes \vec{\nabla}$$

$$= \nabla \vec{x} - \nabla \vec{X}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{e}_i$$

$$\vec{\nabla} \tilde{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{I}$$

$$\vec{\nabla} u = \tilde{F} - \tilde{I}$$

3-5

(Displacement Gradient)

پس $\vec{\nabla} u$ گرادیان جابجایی خواهد بود که طبق رابطه بالا وابسته به

گرادیان تغییر شکل (Deformation Gradient) $\tilde{F}$ است.

$$[\vec{\nabla} u] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right]$$

3-6

مترماتریسی $[\vec{\nabla} u]$

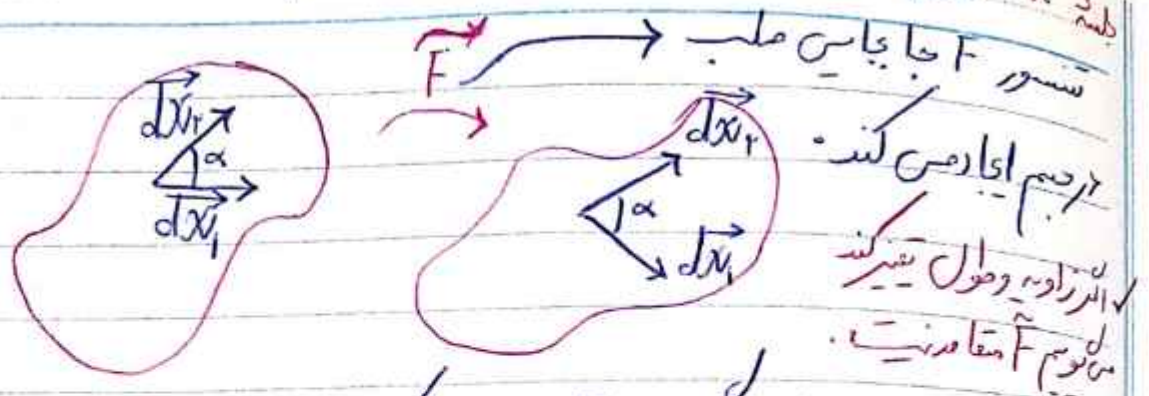
فصل: اگر $\tilde{F}$ یک تانسور متعامد باشد جابجایی متناظر با آن به چه شکل خواهد بود؟
 جواب: به توجه به رابطه زیر:

$$d\tilde{x} = \tilde{F} d\tilde{u}$$

اگر $\tilde{F}$ متعامد باشد $d\tilde{x}$ و $d\tilde{u}$ هم اندازه بوده و هم جهتین در صورتی که بردار

$d\tilde{x}$ در $d\tilde{u}$ داشته باشیم بعد از اعمال $\tilde{F}$ به آنجا بردارهای $d\tilde{x}_1$ و $d\tilde{x}_2$

حاصل راوی یلیان بار او به $d\tilde{x}_1$ و $d\tilde{x}_2$ خواهد داشت.



مثال (۲) آیا می توان گفت F همواره معکوس پذیر است؟ این امر

جواب: اگر $\vec{x} = \vec{x}(\alpha)$ باشد به معنی ماده در انتهای تغییر شکل است که تنها

زمانی ممکن است که مکان اولیه $\vec{x}_0$ نیز فرض باشد چون هیچ تغییر شکلی

نی تواند موجب حذف کامل یک المان شود. بر این اساس برای

معادله مشاخر با $[\vec{x}_0][\vec{F}] = [\vec{x}]$ می توان نوشت $\vec{x}_0 = \vec{x}(\alpha)$ بوده و در نتیجه در میان $[\vec{F}]$

همواره غیر صفر خواهد بود.

مثال (۳) برای حرکت تعیین شده بار رابطه زیر
$$x_1 = x_1 + \alpha x_1^2 t$$

$$x_2 = x_2 - k(x_2 + x_3)t$$

$$x_3 = x_3 + k(x_2 - x_3)t$$



الف) تعیین کنید $\tilde{F}$ را.

ب) تعیین کنید بردارین جابجایی را.

جواب:

الف)

$$[\tilde{F}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

بردارین تعیین شده

$$[\tilde{F}] = \begin{bmatrix} 1 + \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 1 - kt & -kt \\ 0 & kt & 1 - kt \end{bmatrix}$$

$$[\nabla \vec{u}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \text{ or } \nabla \vec{u} = \tilde{F} - \tilde{I}$$

ب)

$$= \begin{bmatrix} \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & -kt & -kt \\ 0 & kt & -kt \end{bmatrix}$$



Finite Strain Tensor

3.4

تensore کرنش بزرگ (چون کرنش مربوط به جابجایی فضای بزرگ است)

برای تعریف کرنش از آدینه ماه مختلف می توانیم استفاده کنیم.

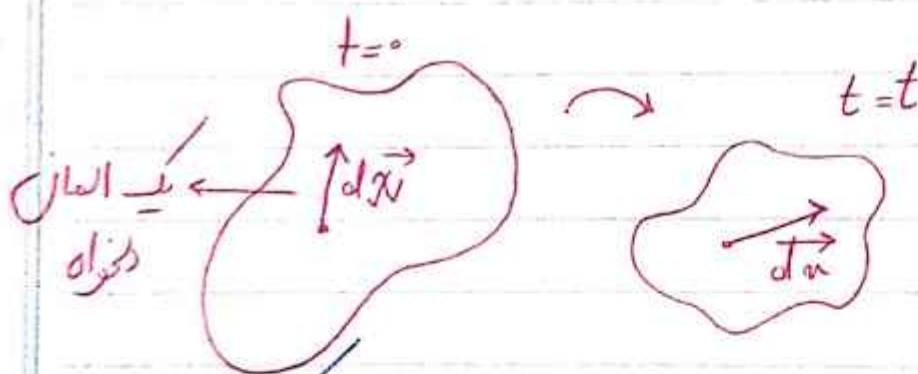
۱- نگاه لائگرانژی: Lagrangian strain Tensor

برای تعریف این تانسور، المان $d\vec{x}$ را در لحظه $t=0$ در نظر بگیریم.

در صورتی که این المان در لحظه $t=t$ با $d\vec{x}$ نشان داده شود، می توان

تفاضل مجذور اندازه این دو المان را به شکل زیر بر حسب گزاردان تغییر شکل

حساب کرد.



حال می خواهیم تفاضل مجذور اندازه فضای المان را حساب کنیم:

$$ds^2 - dS^2 = \underline{d\vec{x}} \cdot (\tilde{F}^T \tilde{F} - \tilde{I}) \underline{d\vec{x}} \quad (7.3)$$

$$|\underline{d\vec{x}}| = ds, \quad |\underline{d\vec{x}}| = dS$$

چون نگاه لائگرانژی پس $\underline{d\vec{x}}$ بزرگ
نوشتم

در این حالت حال نصف عبارت داخل پرانتز را برابر با کرنش $(\tilde{E}^*)$ تعریف می کنیم.

* $\tilde{E}$ یعنی کرنش لائرانژی

Year: ۱۴۰۲ Month: ۹ Day: ۱۳

Subject: جلسه ۲۰

$$\tilde{E}^* = \frac{1}{2} (\tilde{F}^T \tilde{F} - \tilde{I}) \quad \text{(8-3) کرنش کرنش لائرانژی}$$

$$ds^2 - dS^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \tilde{E}^* d\mathbf{X}$$

که در نتیجه: (9-3)

* کرنش با اختلاف محذور المان ها قبل و بعد تغییر شکل مرتبط است.

Right Cauchy - Green deformation

توجه: $\tilde{F}^T \tilde{F}$ تانسور تغییر شکل کوشی - کرنش دست راست نامیده

می شود و با $\tilde{C}$ نشان داده می شود

$$\tilde{C} = \tilde{F}^T \tilde{F}$$

show that

$$a) \operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{u}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$

$$\nabla_i (\nabla \times \vec{u})_i =$$

$$= \nabla_i (\nabla_m u_n \varepsilon_{mni})$$

دیده را می‌داریم چون مؤلفه نام را می‌خواهیم

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} \varepsilon_{mni} \right) = \varepsilon_{mni} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_m}$$

می‌توان نام را می‌داریم و m نام را می‌داریم و m را عوض کنیم و می‌توانیم بنویسیم

$$a_i a_j \varepsilon_{ijk} = ? = 0$$

بیشتر می‌بینیم ε_{ijk}

$$\begin{matrix} i \rightarrow j \\ j \rightarrow i \end{matrix} \Rightarrow a_i a_j \varepsilon_{ijk} = a_j a_i \varepsilon_{jik}$$

$$= -a_i a_j \varepsilon_{ijk}$$

این را به دست چپ رابطه می‌خواهیم داشت:

$$2 a_i a_j \varepsilon_{ijk} = 0 \Rightarrow a_i a_j \varepsilon_{ijk} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) =$$

در صفر

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \hat{e}_j \times u_k \hat{e}_k \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \hat{e}_j \times \hat{e}_k \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \epsilon_{jkm} \hat{e}_m \right) \\ &= \frac{\partial u_k}{\partial x_j \partial x_j} \epsilon_{jkm} \delta_{im} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_{jki} \end{aligned}$$

$$2) \text{curl}(\psi \vec{u}) = \psi \text{curl} \vec{u} - \vec{u} \times \text{grad} \psi$$

↓

$$\nabla \times (\psi \vec{u})$$

این یک کفیت اسکالار است و دیگری برداری
نیت آن را اندیس نوشت

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \right) (\psi u_j \hat{e}_j)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\psi u_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j)$$

$\epsilon_{ijk} \hat{e}_k$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\psi u_j) \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \xrightarrow[\text{حالت } \psi \text{ است}]{\text{حالت } \psi \text{ است}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} u_j + \psi \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} u_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k + \psi \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$(\nabla \psi)_i u_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$



Year:

Month:

Day:

Subject:

$$(\vec{\nabla} \psi) \times \vec{u}$$

حال پانی ترم درم هم می توان نوشت:

$$\psi \nabla_i u_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

چون $\hat{e}_k$ را حذف کردیم پس بیرون $(\vec{\nabla} \times \vec{u})_k$ می گذاریم یعنی درایه k ام است.

c)



Year:

Month:

Day:

Subject:

3. $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

show that

النتيجة $||\vec{r}|| = r = \sqrt{x_i x_i}$

$\alpha = \text{Constant vector}$

$$\vec{r} = x_i \hat{e}_i \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} r_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k =$$

δ_{ij} أثر j في i يكونه باثبات جواب اميه واثري j في i

حاصل مفر من شود و همين دليله من توان

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

اثر بلوچم j في i باهم برابرند پس $\epsilon_{ijk} \hat{e}_k = 0$ پس $\epsilon_{ijk} = 0$

در کتاب پس سببه اين در امتحان ياد

For the function $\lambda = A_{ij} x_i x_j$ where A_{ij} is constant, show that $\partial \lambda / \partial x_i = (A_{ij} + A_{ji}) x_j$ and $\partial^2 \lambda / \partial x_i \partial x_j = A_{ij} + A_{ji}$. Simplify these derivatives for the case $A_{ij} = A_{ji}$.

consider $\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = A_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + A_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} x_i$. since $\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$ it is seen that $\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = A_{kj} x_j + A_{ik} x_i = (A_{kj} + A_{ik}) x_j$ continuing the differentiation $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_p \partial x_k} = (A_{kp} + A_{pk}) \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = A_{kp} + A_{pk}$. If $A_{ij} = A_{ji}$ $\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 2A_{kj} x_j$ and $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_p \partial x_k} = 2A_{pk}$.



دلبسته قبل داسستم تقریب ریاضی کرنش لاندراثر

$$E^* = \frac{1}{2} (\tilde{F}^T \tilde{F} - I)$$

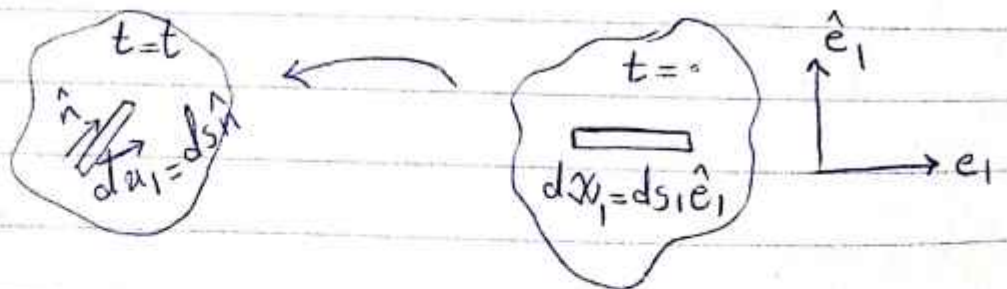
از مقاومت مصالح برای تقریب کرنش داسستم:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\text{میزان تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$$

این کرنش، کرنش کوچک infinitesimal strain

۳-۴-۲ تفسیر هندسی تقریب کرنش لاندراثر

برای این کار یک المان $d\vec{x}$ را در نظر می‌گیریم $d\vec{x}_1 = ds_1 \hat{e}_1$



حال با استفاده از رابطه (۹-۳) برای این المان می‌توان نوشت:

$$ds_t^2 - ds_1^2 = 2 d\vec{x}_1 \cdot (\tilde{E}^*) \cdot d\vec{x}_1$$

جای $d\vec{x}_1 \leftarrow ds_1 \hat{e}_1$ می‌گذاریم:



ماتریس این رابطه $T_{ij} = e_i \cdot \tilde{T} e_j$

دلیله ۲۱

Month ۹ Day ۱۸

$$ds_1^r - dS_1^r = r(ds_1)^r \hat{e}_1 \cdot \tilde{E} \hat{e}_1 = r ds_1^r E_{11}$$

$$E_{11}^* = \frac{ds_1^r - dS_1^r}{ds_1^r}$$

طول اولیه $\rightarrow$ ds_1^r $\leftarrow$ طول ثانویه

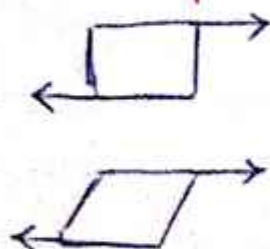
برای المان از این رابطه استفاده می کنیم که محل تولد (مکان اولیه) برای ما مهم بود.

این فرمول E_{11} برای المان است که در حالت اول در نقطه اولیه $\hat{e}_1$ بوده است.

اگر E_{22} بود یعنی در حالت اول در نقطه $\hat{e}_2$ بوده است و به همین ترتیب برای بقیه نیز به همین شکل است.

$$E_{11}^* = \frac{ds_1^r - dS_1^r}{ds_1^r}, E_{22}^* = \dots$$

حال می خواهیم کرنش تعادری حالت غیر قطری حساب کنیم



یادآوری
در اینجا نکته ی مهم تغییر زاویه است لا
کرنش برش کوچک لا



تفسیر کفینسی E_{11}^* و E_{22}^*

در المان در نظر بگیرید که در راستای $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ در حالت اولیه باشد.

برای المان در حالت اولیه هستند و هیچ باری روی آنها نیست.

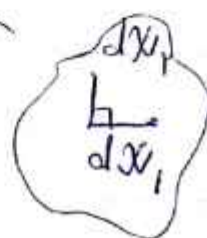
$$d\vec{x}_1 = d\vec{x}_1 \hat{e}_1$$

$$d\vec{x}_2 = d\vec{x}_2 \hat{e}_2$$

که می‌توان نوشت



پیش از تغییر شکل



پس از تغییر شکل



برای این دو المان برای اینکه این دو را با هم ارتباط دهیم می‌توانیم بنویسیم:

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2$$

$$(\tilde{F} d\vec{x}_1) (\tilde{F} d\vec{x}_2)$$



حال جای این دو بردار را با هم عوض می‌کنیم.

$$= d\vec{x}_2 \cdot \tilde{F}^T \tilde{F} d\vec{x}_1$$

$$= d\vec{x}_2 \cdot 2(E^* + \tilde{I}) d\vec{x}_1$$

$$= 2 d\vec{x}_2 \cdot E^* d\vec{x}_1 + 2 d\vec{x}_2 \cdot d\vec{x}_1$$

حال من نویسم: (من خواهم اندازه عواراجدا کرده و بردارها با هم بماند)

$$2 dX_1 dX_2 E_{12}^* \hat{e}_1 \hat{e}_2 + 2 dX_2 dX_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1$$

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j$$

$$E_{12}^* = \frac{ds_1 ds_2 \cos \alpha_{12}}{2 dX_1 dX_2}$$

$$dX_1 = ds_1$$

$$dX_2 = ds_2$$

$$= 2 dX_1 dX_2 E_{12}^*$$

$$\vec{dx}_1 \cdot \vec{dx}_2 = ds_1 ds_2 \cos \alpha_{12} = 2 dX_1 dX_2 E_{12}^*$$

$$E_{12}^* = \frac{ds_1 ds_2 \cos \alpha_{12}}{2 dX_1 dX_2}$$

(۱۱-۳)

نکته ✓ اگر خواهم برای E_{12}^* این رابطه را بنویسم کافی است این بار یکبار از

ایمان عواراجدا حالت $\hat{e}_1$ و یکبار در حالت $\hat{e}_2$ در نظر بگیریم و بقیه مراحل را

همچون روش قبل انجام دهیم.

نتیجه گرفتیم که کرنش به راستای بستر دارد.



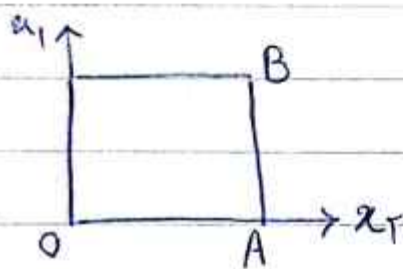
مثال: مؤلفه‌های جابجایی یک حرکت مطابق با رابطه زیر داده شده:

$$u_1 = kx_1, \quad u_2 = u_3 = 0$$

مطلوب است:

الف) کرنش کرن - لایرانژ

ب) در صورتی که جسم نشان داده شده در شکل، تحت این حرکت قرار گیرد



تغییر طول در ضلع OA را محاسبه کنید.

ج) برای المان $\Delta \vec{x} = \Delta s (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) / \sqrt{2}$ نسبت طول المان بعد تغییر شکل

به قبل را محاسبه کنید.

$$\tilde{E}^* = \frac{1}{2} (\tilde{F}^T \tilde{F} - I)$$

حل: الف)

$$\Delta \vec{u} = \tilde{F} - \tilde{I} \Rightarrow \tilde{F} = \nabla \vec{u} + \tilde{I}$$

$$[\Delta \vec{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این ماتریس هکلی نسبت به Δ نوشته می شود.

ماتریس بردارهای تغییر شکل $[\tilde{F}] = \begin{bmatrix} k_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ پس

تفسیر کرنش کرنش - لایترانژ $[\tilde{E}^*] = \begin{bmatrix} k + \frac{k^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

*) به کرنش‌های که روی قطر اصلی، تفسیر کرنش قرار گرفته، کرنش
 در حال نامیده می‌شوند. مؤلفه‌های غیرقطری نیز کرنش‌های برشی
 نامیده می‌شوند.

ب) چون امان در حالت $E_{11}^* = \frac{\Delta s_1^2 - \Delta S_1^2}{2 \Delta S_1^2}$

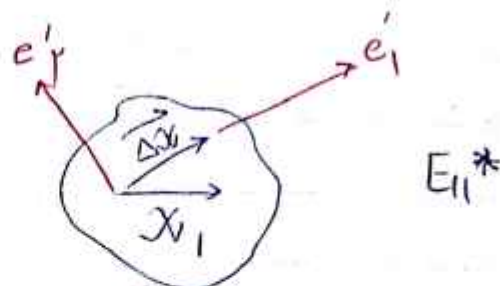
اولیه در راستای ۱ بردار $\rightarrow \Delta s_1^2 = \Delta S_1^2 (1 + 2E_{11}^*)$

امان E_{11} استفاده کردم اگر در راستای ۲ بردار E_{22} استفاده می‌کردم.

$\frac{\Delta s_1}{\Delta S_1} = \sqrt{1 + 2E_{11}^*}$
 $\Delta L = \Delta s_1 - \Delta S_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}^*} \Delta S_1 - \Delta S_1$

$= (\sqrt{1 + 2E_{11}^*} - 1) \Delta S_1 \rightarrow 10A1$

$\rightarrow \Delta L = (\sqrt{1 + 2E_{11}^*} - 1) 10A1$



$$(E^*)'_{11} = \hat{e}'_1 E^* \hat{e}_1 \quad \text{ماتریس} \\ \Delta X = \Delta S (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) / \sqrt{2} \quad \text{مردم ماتریس با توجه به}$$

$$[E^* e'_1] = [E^*] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$e'_1 \cdot E^* e'_1 = \frac{1}{r} \left(k + \frac{k}{r} \right)$$

$$(E^*)'_{11} = \frac{dS_1^2 - dS_1^2}{2 dS_1^2}$$

$$dS_1 = \Delta S$$

$$\Rightarrow dS_1 = \sqrt{1 + r(E^*)'_{11}} \Delta S$$

$$\frac{dS}{\Delta S} = \sqrt{1 + r(E^*)'_{11}} = \sqrt{1 + k + \frac{kr}{r}}$$

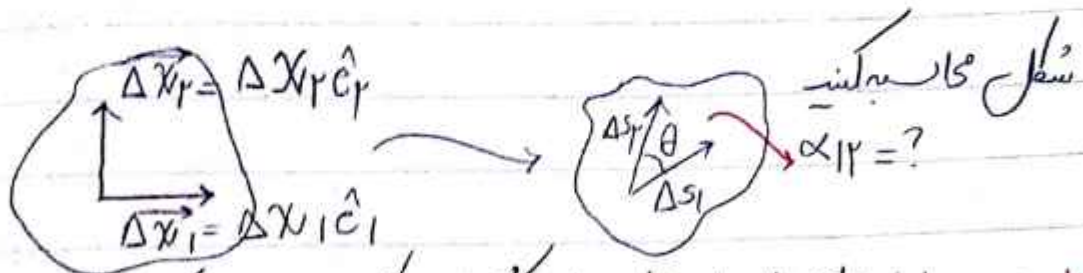
فیس می توان نوشت:



مثال: برای پرتش ساده بیان سه بار رابطه زیر:

$$x_1 = X_1 + k X_2, x_2 = -X_2, x_3 = X_3$$

زاویه بین دو امان ΔX_1 و ΔX_2 را که در شکل نشان داده شده پس از تغییر



حل: می توان برای حل از مؤلفه های کُرنش لائرنر استفاده کرد:

$$\tilde{E}^* = \tilde{F}^T \tilde{F} - \tilde{I}$$

$$\tilde{F} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{E}^* = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & k^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{12}^* = \frac{\int s_1 ds_2 \cos \alpha_{12}}{r \int dX_1 dX_2} = \frac{\Delta s_1 \Delta s_2 \cos(\alpha_{12})}{r \Delta s_1 \Delta s_2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{r E_{12}^* \Delta X_1 \Delta X_2}{\Delta s_1 \Delta s_2}$$

$$E_{12}^* = \frac{ds_2^2 - ds_1^2}{r ds_1^2} \rightarrow E_{12}^* = \frac{\Delta s_2^2 - \Delta X_1^2}{r \Delta X_1^2}$$



Year: ۱۴۰۱ Month: ۹ Day: ۲۰

Subject: ۲۲ دین

$$\Rightarrow \Delta S_1 = \Delta X_1 \sqrt{1 + 2E_{11}^*} \Rightarrow \frac{\Delta S_1}{\Delta X_1} = \sqrt{1 + 2E_{11}^*}$$

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta X_2} = \sqrt{1 + 2E_{22}^*}$$

$$\cos \alpha_{12} = \frac{2E_{12}^*}{\sqrt{(1 + 2E_{11}^*)(1 + 2E_{22}^*)}}$$

دقت این α_{12} به



$$\sqrt{(1 + 2E_{11}^*)(1 + 2E_{22}^*)}$$

نیست بلکه رادیکال

$$90^\circ - \alpha_{12}$$

تغییر زاویه بین دو ابراز می‌شود

$$0 < \alpha < \pi$$



Eulerian Strain Tensor

۲-۲-۳ کرنش اولیری

برای تعریف کرنش اولیری از تقسین مقدار زیر بریب $d\vec{u}$ شروع می کنیم

$$dS^2 - dS^2 =$$

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= dS \hat{n} \\ d\vec{x} &= dS \hat{m} \end{aligned}$$

$$dS^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}$$

$$= (\tilde{F}^{-1} d\vec{u}) \cdot (\tilde{F}^{-1} d\vec{u})$$

$$d\vec{u} = \tilde{F} d\vec{x}$$

اگر فرض کنیم $d\vec{x} = d\vec{u}$

باید حتماً مصر شود چون ما می توانیم بلویم
همس را بدید شد است پس با توجه به این
نکته $\tilde{F}$ هم می مگوش پذیر است. و ما می
توانیم رابطه بالا را بنویسیم

$$= d\vec{u} (\tilde{F}^{-1})^T \tilde{F}^{-1} d\vec{u}$$

$$= d\vec{u} \cdot (\tilde{F}^{-T} \tilde{F}^{-1}) d\vec{u}$$

$$dS^2 = d\vec{u} \cdot d\vec{u}$$

همچین

$$dS^2 - dS^2 = d\vec{u} \cdot d\vec{u} - d\vec{u} \cdot (\tilde{F}^T \tilde{F}^{-1}) d\vec{u}$$

پس:

$$= d\vec{u} (\tilde{I} - \tilde{F}^T \tilde{F}^{-1}) d\vec{u}$$

Transpose, inverse

$$\left[\tilde{e}^* = \frac{1}{2} (\tilde{I} - \tilde{F}^T \tilde{F}^{-1}) \right] \quad (3.12)$$

کرنش اولیری

با تعریف تانسور تغییر شکل کوشر کرن چپ به شکل زیر:

$$\tilde{B} = \tilde{F} \tilde{F}^T \quad (3.13)$$

B: left Cauchy - Green deformation tensor

رابطه مربوط به کرنش کوشر کرن به شکل زیر در می آید:

$$\tilde{e}^* = \frac{1}{2} (\tilde{I} - \tilde{B}^{-1}) \quad (3.14)$$

inverse
این شکل من شود

برای F^{-1} می توان نوشت:

برای تعریف F داریم:

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

مکان حال حاضر
مکان اولیه

با توجه به این تعریف برای F^{-1} داریم:

$$\tilde{F}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

inverse
↑

چون برعکس است یعنی نگاه ما از نوع اولیه است.

در این رابطه مشتقات نسبت به مکان ثانویه (مکان حال حاضر) می شود که می توان نشان داد:

$$\tilde{F}^{-1} = \tilde{I} - \nabla_x \vec{u}$$

فرم تانسوری

این دو فرم معادل یکدیگرند.

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

فرم اندیس

با استفاده از روابط بالا، کرنش کوشر را می توان برعکس جایابی $\vec{u}$ نوشت: $\leftarrow$ این روابطی که در اینجا بدست آوردیم در رابطه (3.12) جایابی می کنیم.

Displacement رابطه کرنش اولر بر مبنی

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T}{2} - \frac{(\nabla \vec{u})^T (\nabla \vec{u})}{2} \quad (3.16)$$

رابطه کرنش جایگزین - اولر

✓ مشابه این رابطه را می توان برای کرنش لایرانتر نیز تعریف کرد که به شکل زیر خواهد بود:

Displacement رابطه کرنش لایرانتر بر مبنی

تفاوت در رابطه در چیست؟

* تفاوت این رابطه در رابطه بالا در این است که در رابطه بالا لایرانتر را در این جا برای

مکان حاضر محاسبه شده اند و در رابطه کرنش لایرانتر لایرانتر را در این جا برای

مکان اولیه (X) محاسبه می شوند: یعنی:

$$[\nabla \vec{u}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad \text{نوع}$$

$$[\nabla \vec{u}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad \text{رابطه کرنش جایگزین لایرانتر}$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T}{2} + \frac{1}{2} (\nabla \vec{u})^T (\nabla \vec{u}) \quad (3.17)$$

در این رابطه لایرانتر را نسبت به X گرفته شده اند. (معنای مشتق کرنش ها)

مکان اولیه است.

Year: ۱۴۰۲ Month: ۱۰ Day: ۲

Subject: ۲۳ فلسفه

روابط صفحه قبل به نام روابط کرنش جایای مورد توجه قرار می گیرند

استفاده از این فرم رابطه کرنش لائرانشر و اولیر در تحلیل تیر عقاربچه دعا

بسیار قشنگ است

شکل اندیس رابطه کرنش جایای اولیر به شکل زیر است:

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right)$$

که x کوچک چون اولیر است

این ترم summation دارد

که چون این رابطه را می بینیم:

فرض می کنیم $A = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ و $B = \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$ باشد

$A^T B$

$A_{im}^T B_{mj}$

$A_{mi} B_{mj}$

اگر اندیس نویسیم همیشه:

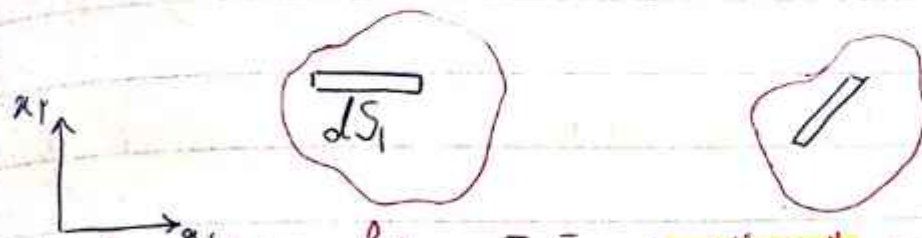
اگر Transpose را بر داریم همیشه:

$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$



* و در نهایت تفسیر هندسی منظورمان این است که اگر فرض کنیم ما داریم یک سیم
 طول ۱۰ متر داریم که فقط ۲۳ مترش را اندازه بگیریم و اگر ما خواستیم در یک نقطه خاص کرنش
 تفسیر هندسی نگاه کنیم اولی
 برای این کار یک ایمان در نظر میگیریم که در حالت اولیه $t = t_0$ در راستای

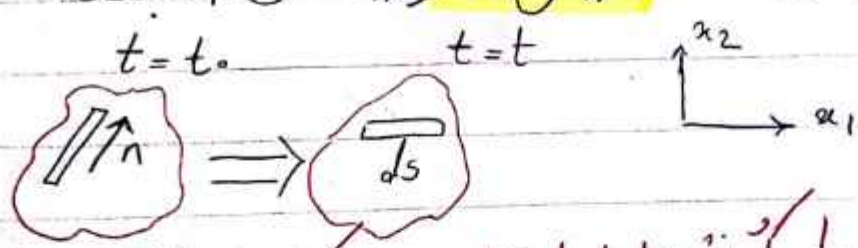
α_1 باشد و بعد سیم پس از تغییر شکل چه اتفاقی می افتد:
 $t = t_0$



در خواصیم المانی را بینیم که در حالت ثانویه در موقعیت α_1 باشد. یعنی لحظه حاضر برای ما
 مهم است.
 تفسیر هندسی مؤلفه های نرمال کرنش اولیه:

برای تفسیر هندسی مؤلفه e_{11}^* ، المانی را در جسم در نظر میگیریم (با طول اولیه

ds و طول ثانویه ds_1) که در زمان حاضر در راستای α_1 باشد:



از تعریف مربوط به کرنش اولیه استفاده می کنیم: داشتیم.

$$ds^2 - ds_1^2 = 2 d\alpha \cdot e_{11}^* d\alpha = \frac{1}{2} (F^T F - I)_{11}$$

برای استخراج این رابطه نویسیم
 $ds^2 = d\alpha \cdot d\alpha$
 $ds_1^2 = d\alpha \cdot d\alpha$ چون نگاه اولی بود که رابطه تبدیل میگیریم

$$= (F^{-1} d\alpha) \cdot (F^{-1} d\alpha)$$

سپس با جایگذاری به رابطه بالا رسیدیم.

Scanned with CamScanner

گرنش‌های کوچک درون مدار باشند گرنش‌های بزرگ هستند

Year: ۱۴۰۲ Month: ۱۰ Day: ۲

Subject: ۲۳ دینامیک

$$= d\mathbf{x}_2 \cdot (2\mathbf{e}^* + \tilde{\mathbf{I}}) d\mathbf{x}_1$$

$$= ds_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot (2\mathbf{e}^* + \tilde{\mathbf{I}}) ds_1 \tilde{\mathbf{e}}_1$$

$$= ds_1 ds_2 [2\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1^* + \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{e}}_1] = 2 ds_1 ds_2 e_{12}^*$$

$$\vec{dx}_1 \cdot \vec{dx}_2 = ds_1 ds_2 \cos \alpha_{12}$$

زاویه قبل تغییر شکل

$$e_{12}^* = \frac{ds_1 ds_2 \cos \alpha_{12}}{2 ds_1 ds_2}$$

تعریف مؤلفه‌های غیرقطری
گرنش / مؤلفه‌های
برشی

چرا گفتیم مؤلفه‌های برشی؟

چون گرنش‌ها بر می‌گردند به تغییر زاویه و تغییر زاویه حامل از حرکت ماسک
دو مفهوم هم هست که به همین دلیل از اسم مؤلفه‌های برشی
گفتیم

سوال از رتبه‌های همان رابطه آنها می‌آید این مفاهیم را خوب یاد بگیرید 😊

3.5. Infinitesimal strains. گرنش‌های کوچک

منتظر از گرنش‌های کوچک چیست؟

در صورتی که حرکت در یک سیستم محدود به جابجایی‌های کوچک باشد گرنش

های مربوطه، گرنش‌های کوچک نامیده می‌شوند.

به بیان دیگر (تعریف ریاضی)

به بیان دیگر گرنش کوچک درجه کوچک بودن مؤلفه‌های ϵ_{ij} است

صافند

در گرنش کوچک یعنی مؤلفه‌های ϵ کوچک باشند

If $(\nabla \vec{u})_{ij} < \epsilon$ then $(\nabla \vec{u})_{mi} (\nabla \vec{u})_{mj} \ll \epsilon$

ع. دس بیار کوچک ترازند

در این حالت در رابطه کرنش جایای می توان نوشت:

$$\tilde{E}^* = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] + \frac{1}{2} (\nabla \vec{u})^T (\nabla \vec{u})$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T]$$

ترم های غیر خطی حذف شده و
ترم های خطی می مانند

وقتی کرنش های کوچک را می خواهم مقایسه کنیم * را بر می داریم

* تعیین در اثرش کوچک جابجایی ها را می توان کوچک فرض کرد.

دوره ۱۲ می خواهم از تعریف کرنش لایتر به طرف = ۴ Day: ۱۰ Month: ۱۲.۱ Year: ۱۲.۱
 کرنش کوچک بریم از رابطه کرنش کوچک رسیدیم که تفاوتش با کرنش لایتر از درین حد
 خطی بود

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T)$$

تفسیر هندسی کرنش کوچک:
 برای این کار از تعریف کرنش لایتر

$$\tilde{E}_{11}^* = \frac{ds_1^2 - dS_1^2}{2dS_1^2}$$

شروع می کنیم باید بگیریم یک تم جابجایی مار اولیه - مار ثانیه
 بسیار کنیم و آن را کوچک بگیریم

$$\Rightarrow \tilde{E}_{11}^* = \frac{(ds_1 - dS_1)(ds_1 + dS_1)}{2dS_1^2}$$

علامه توجه به این نکته که در کرنش های کوچک جابجایی ها را می توان کوچک
 فرض کرد و در معادله بالا هم اول را کوچک در نظر می گیریم.

برای جابجایی
 کوچک کرنش برابر است با
 Potting $ds_1 - dS_1 - \epsilon \ll 1$

$$\tilde{E}_{11}^* = \frac{\epsilon(\epsilon + 2dS_1)}{2dS_1^2}$$

ϵ^2 باید منفرجه چون خطی است

$$= \frac{\epsilon^2 + 2\epsilon dS_1}{2dS_1^2}$$

Since $\epsilon \ll 1 \Rightarrow \tilde{E}_{11} = \frac{\epsilon}{dS_1} \Rightarrow$

تعریف کرنش کوچک (کرنش نرمال)

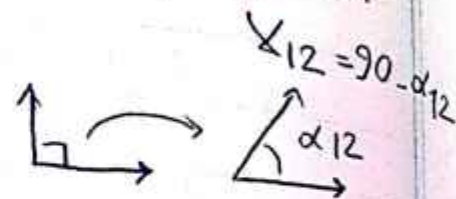
$$\tilde{E}_{11} = \frac{ds_1 - dS_1}{dS_1}$$

برای کرنش کوچک نرمال از رابطه کرنش نرمال لایتر استفاده

به خصوص اولیای تقیم بر دو برابر محذور محل اولیه
 محذور اولیه تقیم بر دو برابر محذور محل اولیه
 Subject: حال می خواهم بنشینم برش برسی
 Year: ۱۴۰۲ Month: ۱۰ Day: ۴
 برای بنشینم برش برسی
 راوی بن دو اله ان بعد بنشینم برش برسی
 به خصوص اولیای تقیم بر دو برابر محذور محل اولیه
 محذور اولیه تقیم بر دو برابر محذور محل اولیه

Subject: حال می خواهم بینش برشی ۴
Year: ۱۴۰۲ Month: ۱۰ Day: ۲۴
برای ترنیش برشی داریم
راوی بنی دواله ان بعد بنیر کل

$$E_{12}^* = \frac{dS_1 dS_2 \cos \alpha_{12}}{2 dS_1 dS_2}$$



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{dS_1}{dS_1} \right) \left(\frac{dS_2}{dS_2} \right) \cos \left(\frac{90 - \angle_{12}}{\sin \angle_{12}} \right)$$

تغیر زاویه نرمی لا

: برای جایاسرکهای کوچک

$$E_{12} = V_{12} / 2$$

پس کرنس کو جب برابر با تغییر زاویه رخ داده پس دو ایماں عمود بر هم بعد از تغییر شکل است .

* کزنش کجسته اے - تنوری و با ۹ مؤلفه ان را محض مہ -
تنسور بودن کزنش بہ حیث مفاہت = ۹

در دعوات مختلف کوشش می تواند تغییر کند. یعنی کوشش به

راستای صفحہ ای کہ روی آن اندازه گیری می شود بستی دارد

۱۲) تفسیر زاویه بین دو المان بعد از تفسیر شکل
تجزیه را می توان با ۹ مؤلفه تعریف کرد. تجزیه می تواند در صفحات مختلف مقداری
تفسیر کنند

مثال: در صورتی که مؤلفه های جابجایی برای یک جسم به شکل زیر باشد:

$$u_1 = k (2x_1 + x_2^2)$$

$$u_2 = k (x_1^2 - x_2^2)$$

$$u_3 = 0 \quad \text{و} \quad k = 10^{-4}$$

الف) تغییر طول در المان مقایسه با طول $\Delta 1$ و $\Delta 2$ را به ترتیب

در راستای $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ محاسبه با استفاده از مؤلفه های کرنش محاسبه کنید.

ب) زاویه بین دو المان را بعد تغییر شکل محاسبه کنید.

ج) تغییر طول در المانی به در راستای بردار $n = \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$ باشد را

محاسبه کنید.

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \vec{u} + \tilde{\nabla} \vec{u}^T)$$

چون جابجایی های ماکزیمم اند $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ می توانیم بنویسیم E_{11} و E_{22} را محاسبه کنیم.

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 2k$$

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -2k x_2$$

برای اینکه تغییر طول $\Delta 1$ و $\Delta 2$ را بدست بیاوریم باید E_{11} و E_{22} را به دست بیاوریم.

حال من توانم تغییر طول را بدست بیآورم

$$E_{11} = \frac{ds_1 - \Delta_1}{\Delta_1} = 2k$$

$$\Rightarrow ds_1 = (2k + 1) \Delta_1 E_{11}$$

$$E_{22} = \frac{ds_2 - \Delta_2}{\Delta_2} = -2k X_2$$

$$\Rightarrow ds_2 = (-2k X_2 + 1) \Delta_2 E_{22}$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{از رابطه } u_2 \text{ نسبت به} \\ x_1 \text{ مشتق می گیریم} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} (2k X_2 + 2k X_1)$$

$$= k (X_1 + X_2)$$

* توجه زاویه بین دو المان منسوس (۹۰ - α)

$$E_{12} = \gamma_{12} / 2 \Rightarrow \gamma_{12} = 2E_{12} = 2k (X_1 + X_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - 2k (X_1 + X_2)$$

چون خود زاویه را می خواهیم نه cos را پس در جابجایی ۹۰ که بر حسب

درجه هست را منفرجه می گذاریم (بر حسب رادیان جابجایی می کنیم تا به دست آید)

$$\Rightarrow E'_{11} = \frac{ds - \Delta}{\Delta} \Rightarrow ds = \Delta [E'_{11} + 1]$$

یا به عبارتی $\frac{ds}{\Delta} = E'_{11} + 1$

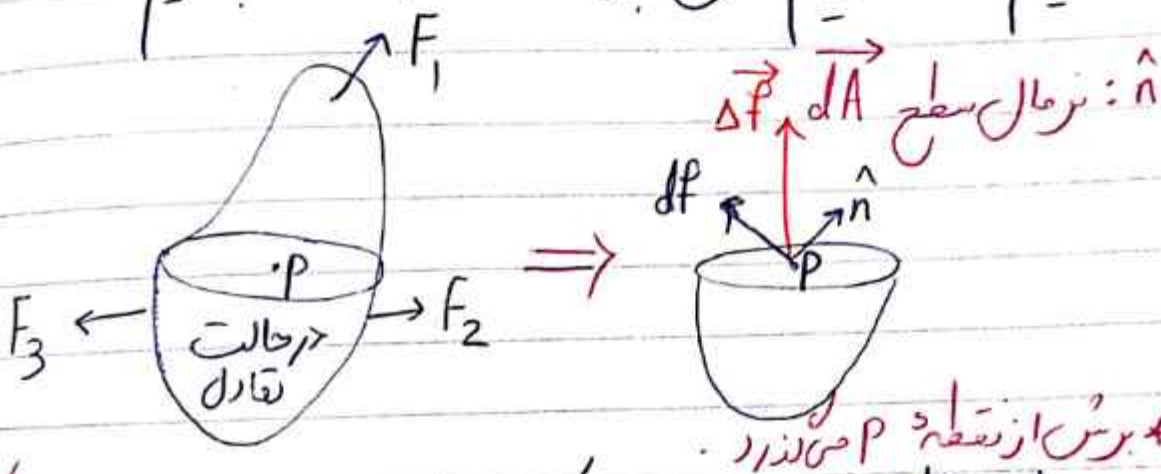
* کرنش کمیتی نسبی است یعنی اگر بخواهیم در یک صفحه خاص کرنش را حساب کنیم مقدار آن که بران آن بدست می آید با مقدار آن که در صفحه دیگر بدست می آید متفاوت است.

* در حالت کرنش بابوجه به اینکه به بردار نرمال صفحه متجه دارد و از طرفی داخل صفحه مؤلفه عمادی برش و نرمال داشته باشد پس کمیتی نسبی است.

- برای تعریف تنش در قدم اول تعریف وکتور تنش است که در این جلسه ۲۴ Subject: صفحه ارائه داریم. Year: ۱۳۰۲ Month: ۱۰ Day: ۳

Chapter 4 Stress

فرض کنید جسم داریم که نیروهای آن یکدیگر را خنثی می کنند و در حالت تعادل است. و ما این سطح را برش میزنیم بخش پایین من مانده بالا را جدا می کنیم و من خواهیم تنش برای نقطه P را محاسبه کنیم.



روی سطح dA نیرویی اعمال می شود که با ΔF نشان می دهیم. جهت کشش

ΔF روی $\hat{n}$ (از حال سطح) منطبق نیست (یعنی)

بردار تنش بر داری است در راستای نیروی برآیند است.

- برای تعریف تنش ابتدا، کمیت بردار تنش تعریف می شود.

$$\vec{t}_n = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \bigg|_{\Delta A \rightarrow 0} \quad \text{Cauchy stress vector}$$

(تعریف stress (بردار تنش))

که $\vec{t}_n$ بردار تنش کاشن نامیده می شود و هم راستا با بردار نیروی برآیند در نقطه P است. یعنی بردار تنش در راستای $\hat{n}$ نیست.

چون تنش یک تبدیل است پس مفهوم تنش مفهوم هندسی است.

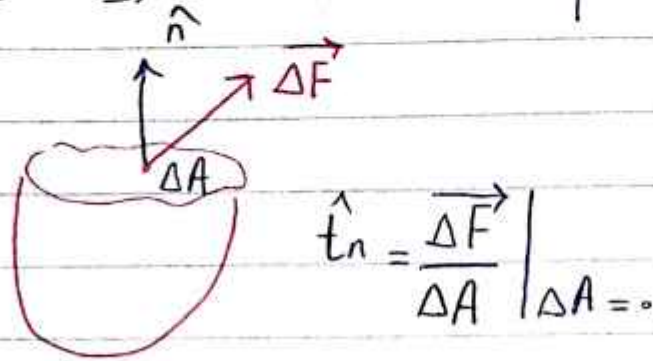
Year: ۱۴۰۲ Month: ۱۰ Day: ۹

Subject: ۱۲۰۱

4. Stress

تعریف هندسی تنش:

ابتدا مفهوم میانی را به اسم **Stress vector** تعریف می کنیم و با $\vec{t}_n$



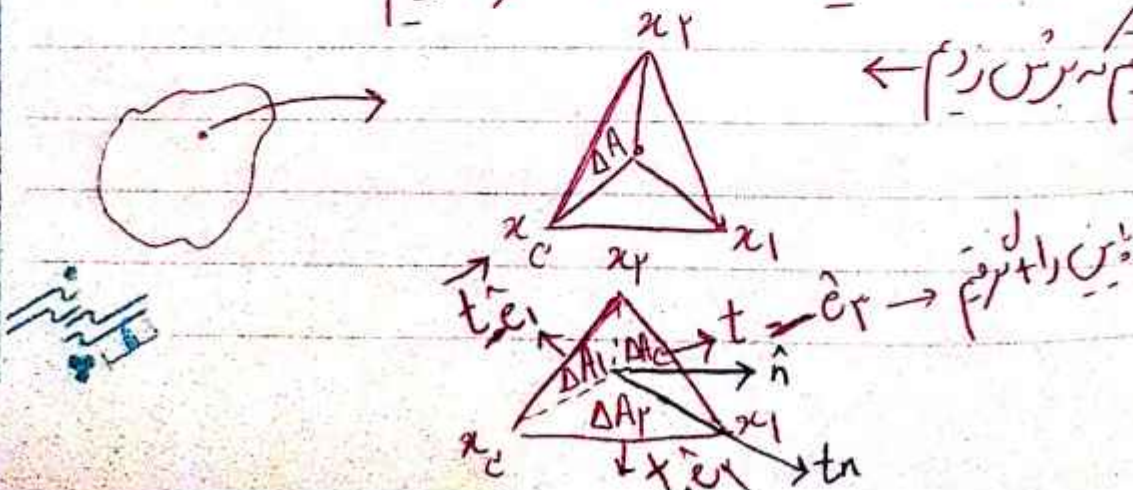
نشان می دهیم -

چون بردار تنش و نرمال برهم منطبق نیست بنابراین از یک تبدیلی استفاده کرد.
 حتماً می توان تبدیلی را یافت که بردار نرمال سطح $\hat{n}$ را به بردار تنش منتقل کند.
 ناگهان تبدیل $\tilde{T}$ در نظر می گیریم از اینجه:

$$\vec{t}_n = \tilde{T} \hat{n}$$

* اگر تبدیل $\tilde{T}$ خطی باشد می توانیم بگوییم $\tilde{T}$ یک تنشور است.

برای اثبات خطی بودن $\tilde{T}$ یک المانی را در نظر می گیریم.
 یک مکعبی را می گیریم که برش زدیم ←



حال می‌خواهیم معادله تعادل را برای مثلث صفحه قبل بنویسیم پس نیروها را بنویسیم

و مساوی هم قرار می‌دهیم.

Equilibrium Eq:

چون اگر در هم جلوی مساوی متغیر گرفت

$$\vec{t} \cdot \vec{e}_1 \Delta A_1 + \vec{t} \cdot \vec{e}_2 \Delta A_2 + \vec{t} \cdot \vec{e}_3 \Delta A_3 = -\vec{t} \cdot \vec{n} \Delta A \quad (I)$$

$$\hat{n} = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3 \quad (II) \quad \text{از طرفی}$$

$$\Rightarrow \Delta A_1 = n_1 \Delta A, \Delta A_2 = n_2 \Delta A, \Delta A_3 = n_3 \Delta A \quad (III)$$

$$\vec{t} \cdot \hat{e}_1 = -\vec{t} \cdot \hat{e}_1, \vec{t} \cdot \hat{e}_2 = -\vec{t} \cdot \hat{e}_2, \vec{t} \cdot \hat{e}_3 = -\vec{t} \cdot \hat{e}_3 \quad (IV) \quad \text{صاف شدن}$$

حال با جایگذاری این II و III و IV در I می‌توان نوشت:

$$\vec{t} \cdot n_1 \Delta A + \vec{t} \cdot n_2 \Delta A + \vec{t} \cdot n_3 \Delta A = -\vec{t} \cdot \vec{n} \Delta A$$

$$\Rightarrow t_n = t_{e1} n_1 + t_{e2} n_2 + t_{e3} n_3$$

حال جای t_n می‌توان از تعریفی که در اعتبار داریم استفاده کنیم

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = \tilde{T} \hat{n}$$

$$\tilde{T} \hat{n} = \tilde{T} \hat{e}_1 n_1 + \tilde{T} \hat{e}_2 n_2 + \tilde{T} \hat{e}_3 n_3$$



ارمونی برابر بردار:

$$\hat{n} = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3$$

$$\tilde{T} (n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3) = \tilde{T} (n_1 \hat{e}_1) + \tilde{T} (n_2 \hat{e}_2) + \tilde{T} (n_3 \hat{e}_3)$$

ماتریس به عبارتی که بدست آوردیم اشیاء برداریم که آ خطی است زیرا که از روابط خطی بودن پیروی می کند. پس چون آ خطی است لذا یک تانسور است این تانسور تانسور تنش نامیده می شود.

نماد دقیق تر این تانسور:

تنش واقعی (True stress) چون واقعاً نسبت نیرو به سطح زمان حاضر بیان می کند به همین دلیل تنش واقعی می گویند.
تنش کوشی (Cauchy stress) علامت مراحل تعیین تنش: یک جسم را در حالت تعادل به نیروهای بیرونی وارد شده یک ناحیه را در نظر گرفته در

می زنیم



برای تعریف جبری تنش بردار تنش روی سطح بانزمال $\hat{e}_1$ را مقرر می‌کنیم.

من رسم $expand$

$$\vec{t} \hat{e}_1 = \tilde{T} \hat{e}_1 = T_{11} \hat{e}_1 + T_{21} \hat{e}_2 + T_{31} \hat{e}_3$$

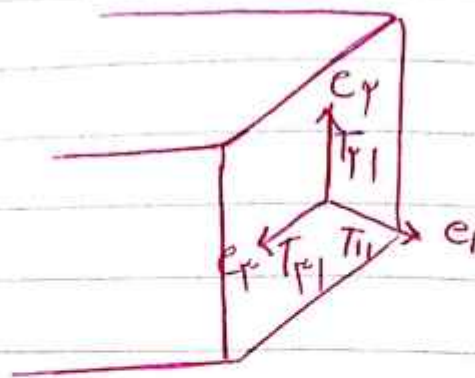
بردار تنش روی سطح بانزمال $\hat{e}_1$

T_{11} : مؤلفه‌ای از تنش که هم‌راست با بانزمال سطح است. بر این اساس به این تنش، تنش نرمال گفته می‌شود.

T_{21} : مؤلفه‌ای از بردار تنش روی سطح بانزمال $\hat{e}_1$ که در راستای $\hat{e}_2$ اعمال می‌شود.

T_{31} : مؤلفه‌ای از بردار تنش روی سطح بانزمال $\hat{e}_1$ که در راستای $\hat{e}_3$ اعمال می‌شود.





باتوجه به این خاصیت از T_{21} و T_{12} می‌توان این مؤلفه‌های تنش را مؤلفه‌های هم‌مماس و باینرسی تعریف کرد.

همین کار را می‌توان برای $\vec{t}_2$ و $\vec{t}_3$ انجام داد بر این اساس

از مؤلفه‌های T_{ij} از بردار تنش $\vec{t}_i$ می‌توان به دست آورد
 صفحه ij بوده و در راستای e_j اعمال می‌شود.

مثال: تنش در یک نقطه طبق رابعه زیر داده شده است:

$$[\tilde{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ Mpa}$$

الف) برادر تنش روی سطح با معادله $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 6 = 0$

ب) تنش نرمال بر سطح را تعیین کنید.

ج) اگر $\hat{e}'_1 = \frac{1}{3}(2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3)$ و $\hat{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$

باشد تنش بر روی سطح با نرمال $\hat{e}'_1$ و در راستای $\hat{e}'_2$ را بدست آورید.

حل: الف)

باید از سطح که روی سؤال به ما داده نرمال را بدست آوریم برای این کار

ضرایب معادله و بردار یک هاسیان را می‌نویسیم.

$$\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$$

برای این که به صورت یک نویسیم $\rightarrow$

انرژی را بدست آورده و تقیم بر آن می‌کنیم. $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$



$$\vec{t\hat{n}} = \tilde{T} \hat{n} \rightarrow [t_n] = [T][n]$$

$$[t_n] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

تension normal

$$T_{nn}' = t_n \cdot \hat{n}$$

تension در n که سرش در جهت داخلی

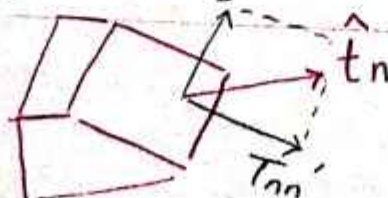
$$= \frac{1}{9} [16 \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{26}{9} \text{ mpa}$$

نکته برای تنش مماس هم می توان از رابطه فیثاغورت استفاده کرد.

دقت کنید 😊 که برآیند تنش مماس روی سطح مورد نظر برابر خواهد بود با

$$T_s' = |t_n|^2 - (T_{nn}')^2$$

$$= \frac{1}{9} (16^2 + 4^2 + 1) - \left(\frac{26}{9}\right)^2$$



T_{nn}' در راستای n است

* تنش کوشش همینه مقدارن است

Subject: جلسه ۲

در راستای e'_1 عیس مورب بوجه افغانه از منبر

Year: ۱۴۰۲ Month: ۱۰ Day: ۹

$$T_{12} = \hat{e}_2 \cdot \tilde{T} e_1$$

ج ۱

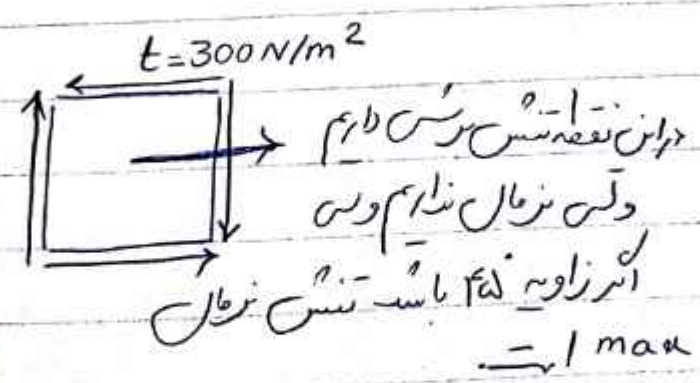
بردار تنش صفحه ای با نرمال e'_1

$$T'_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

۲-۴ تنش های اصلی

من توان مؤلفه های تنش را نسبت به دستگاه مختلفه به دست آورد
تنش نرمال به نسبت به همه این دستگاه ها به دست آید کمتر از مقدار بیشینه
تنش های نرمال است که نسبت به دستگاه متشکل از بردارهای ویژه،
به دست آمده است هر کدام از این مؤلفه ها نیز مربوط به مقدار ویژه تنشور

تنش خواهند بود



معین تنش در نسبت به دستگاه مختصات از بردارهای ویژه، شکل ماتریس قطری را خواهد داشت:

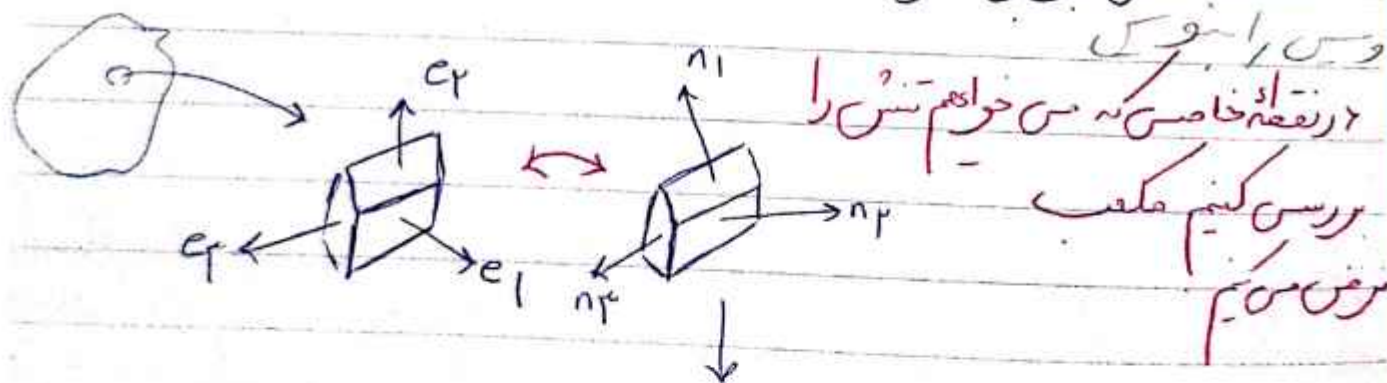
$$[\tilde{T}]_{\hat{n}} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

$\hat{n}$: بردار ویژه

T_1, T_2, T_3 : مقادیر ویژه

نکته: قطری بودن ماتریس نیز بدین معنی است که تنش های برشی نسبت به

دستگاه اصلی برابر با صفر هستند.



در صفحات این مگر فقط تنش نرمال وجود دارد

همچنین می توان راستاها را پیدا کرد که در سطوح با برمال این راستاها، تنش برشی به مقدار بیشینه خود برسد. این راستاها از رابطه زیر تعیین می شوند

$$\alpha_s = (\hat{n}_{max} \pm \hat{n}_{min}) / \sqrt{2}$$

برای اینکه یک شبه .

$\hat{n}_{max}$: بردار ویژه مربوط به تنش نرمال بیشینه

$\hat{n}_{min}$: بردار ویژه مربوط به تنش نرمال کمینه

$$T_{max} = \max \left[\frac{|T_{11} - T_{22}|}{2}, \frac{|T_{12} - T_{21}|}{2}, \frac{|T_{11} - T_{22}|}{2} \right]$$

تنش max برشی

😊 دقت کنید : α_s بردار نرمال صفحه ای را نشان می دهد که بر روی آن صفحه

تنش برشی به مقدار بیشینه یا کمینه خود می رسد.

مثال : در صورتی که تنش واقعی به شکل زیر داده شده باشد

$$[\tilde{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این حالت یعنی تنش صفحه ای
plane-stress



الف) تنش های کمینه و بیشینه را محاسبه کنید.

ب) در صورتی که $T_{11} = T_{22} = 0$ ، $T_{12} = 1000 \text{ MPa}$ باشد.

مغشای را که تنش های کمینه و بیشینه بر روی آن عمل می کنند پیدا کنید.

ج) مقادیر تنش های برشی بیشینه و کمینه و مغشای که روی آن عمل می کنند را

بدست آورید.

$$|\tilde{T} - \lambda \tilde{I}| = 0$$

حل: الف)

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda [(T_{11} - \lambda)(T_{22} - \lambda) - T_{12}^2] = 0$$

$$\lambda = 0$$

رابطه حقیقی استر از زاویه θ بر می آید
شماره دایره

ایمکان دایره

$$\lambda_{1,2} = \frac{T_{11}}{T_{22}} = \frac{T_{11} + T_{22} \pm \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}}{2}$$

$$T_{11} = T_{12} = 1000 \text{ mpa}$$

(ب)

$$T_{22} = -T_{12} = -1000 \text{ mpa}$$

برای اینکه جوابات املر را بصورت یاورم باید بردار عطا و ویر را بدست آوریم

$$[\hat{T} - \lambda \hat{I}][v] = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & 0 \\ T_{22} & T_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda = T_1 : \begin{bmatrix} -T_1 & 1000 & 0 \\ 1000 & -T_1 & 0 \\ 0 & 0 & -T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

چون در میان را مساوی صفر گذاشتیم این سه معادله بهم وابسته هستند

استامادله را تشکیل می دهیم:

این استامادله

$$\begin{cases} -T_1 v_1 + 1000 v_2 = 0 \rightarrow v_2 = \frac{T_1}{1000} v_1 = v_1 \\ 1000 v_1 - T_1 v_2 = 0 \end{cases}$$

$$T_1 v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0$$



$$\lambda = T_2 \Rightarrow v_2 = \frac{T_2}{1000} v_1 = -v_1$$

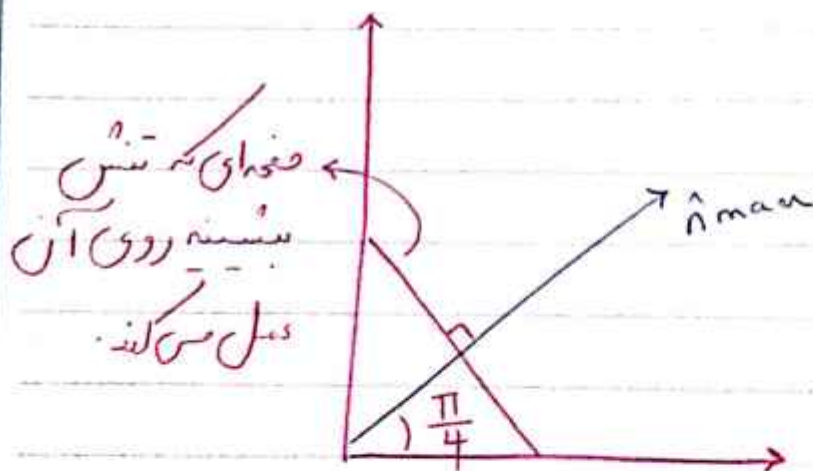
$$\Rightarrow \text{For } \lambda = T_1 : \hat{n}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

تقریب براندازه می‌کنیم به سبب

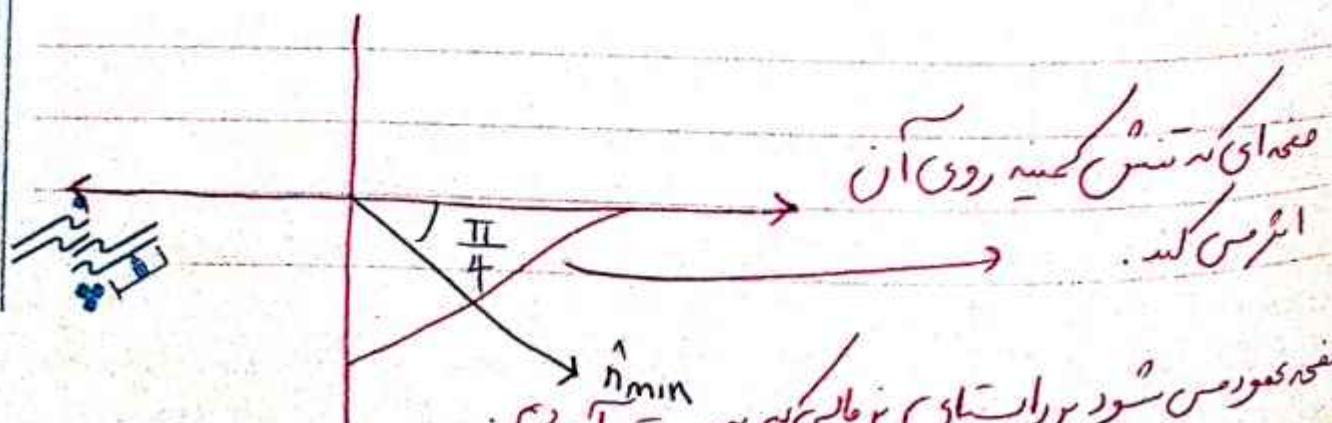
$$\text{For } \lambda = T_2 : \hat{n}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال در خواصم صفحه مرتبط با این بردار قرار می‌دهیم.

For $\lambda = T_1$ ($T_{\max}$):



For $\lambda = T_2$ ($T_{\min}$):



* صفحه عمود می‌شود بر راستای نرمالی که به دست آوریم

۱۲. من خواهم تنش برشی τ_{max} را حساب کنم.

$$\tau_{max} = \max \left[\frac{|T_1 - T_2|}{2}, \frac{|T_2|}{2}, \frac{|T_1|}{2} \right]$$

$$= \max [1000, 500, 500] = 1000 \text{ mpa}$$

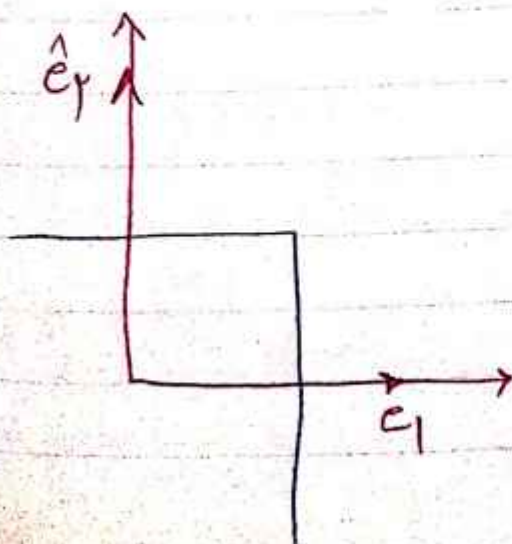
$$\tau_{min} = \tau_{max} = 1000 \text{ mpa}$$

مختصات که تنش برشی روی آن اثر من کند کجا میسه.

$$\hat{n}_s = (\hat{n}_{max} \pm \hat{n}_{min}) / \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{e}_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{e}_2$$



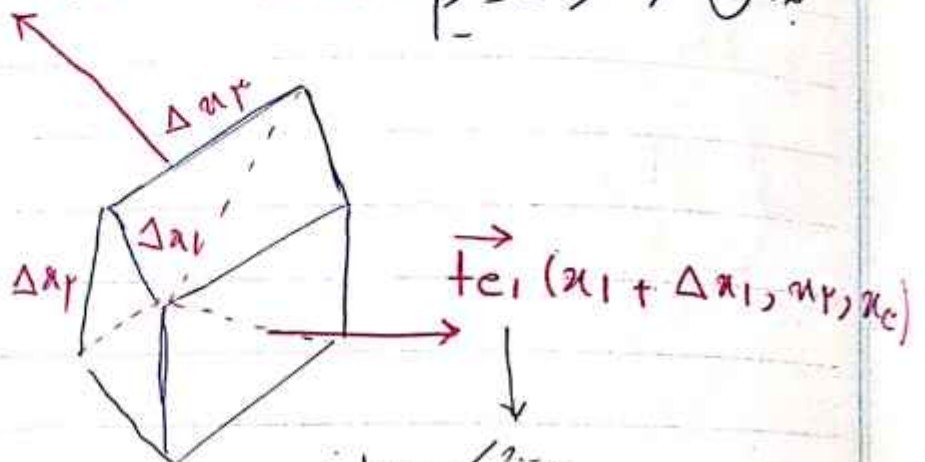
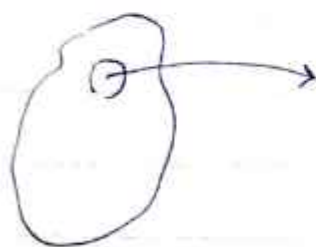
مختصات که روی آنها تنش برشی
بیشینه من شوند به صورت زیر است.

همه را دیده ای که روی آن تنش
برشی τ_{max} میسه با مختصات که روی
تنش نرمال τ_{max} میسه ۴۵ درجه است.

۳-۴ معادلات تعادل

برای استخراج معادلات تعادل یک المان از جسم را بافتا نیروهای اعمال شده

به آن در نظر می گیریم. $\vec{f}_e(x_1, x_2, x_3)$



بردارش که روی این

دو صفحه عمل می کند بردارش برای وجه اعلا

نویم و می توان برای e_1 و e_2 نوشت. این دو خواهیم داشت که با هم جمع می شود

اگر بردار تنش را به سطح ضرب کنیم می شود نیروی عمل کننده سطح. منفرجه قرار می دهیم

با جمع برداری نیروهای ناشی از ابردار تنش و فرض $\Delta x_i \rightarrow 0$ به

رابطه زیر می توان دست یافت

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{e2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{e3}}{\partial x_3} = 0 \quad (18.3)$$



$$\hat{t}_{ij} = \tilde{T}_{ij} = T_{ji} \hat{e}_j$$

که با جایگذاری رابطه در معادله تعادل می توان نوشت:

$$\frac{\partial T_{j1}}{\partial x_1} \hat{e}_j + \frac{\partial T_{j2}}{\partial x_2} \hat{e}_j + \frac{\partial T_{j3}}{\partial x_3} \hat{e}_j = 0$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

معادله تعادل در نگاه اولیری بر حسب
تنشهای واقعی

حالت expanded شده ی معادله بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$i=1; \quad \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$i=2; \quad \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = 0$$

$$i=3; \quad \dots$$

معادلات تعادل همواره نیازمند وابستگی به شرط مرزی هستند.

همیشه ای از این شرایط مرزی به شکل هندسی بوده و شامل قیودی مولفه های

جابجایی و دوران خواهند بود.

در مقابل دسته ی دیگر شامل نواحی با مقدار مشخص توزیع نیرو در واحد سطح

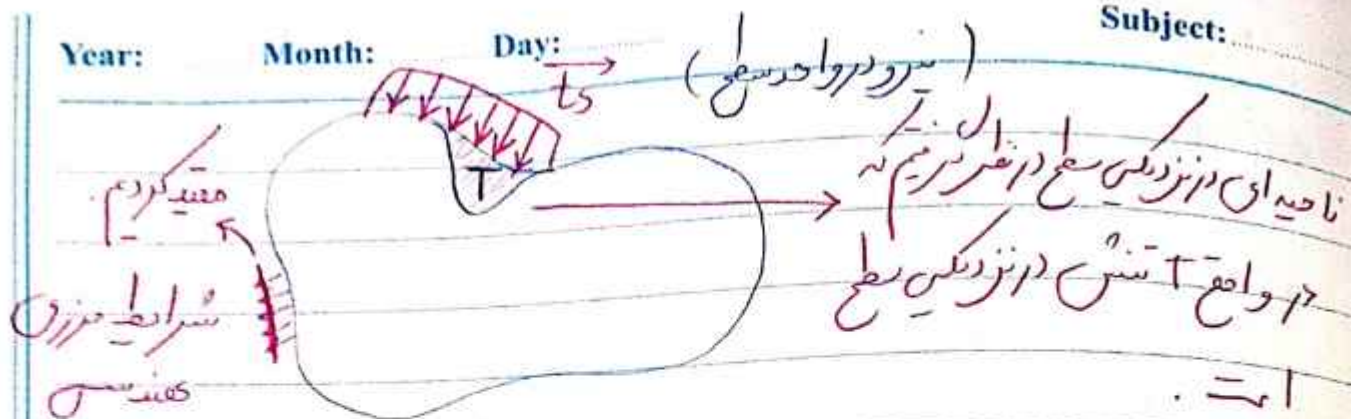
خواهند بود.

Year:

Month:

Day:

Subject:



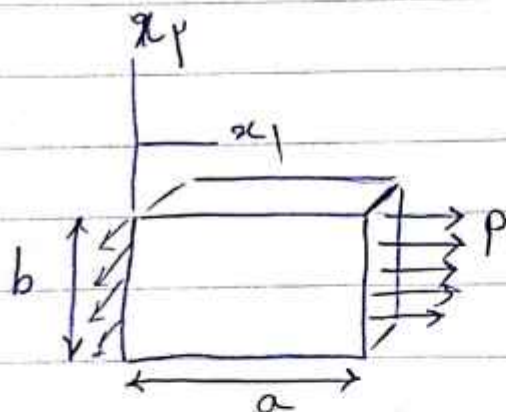
برای شرایط مرزی نیروی می توان رابطه بین تنش در نزدیکی سطح و نیروی عکس
در واحد سطح را طبق روابط زیر نوشت :

$$\hat{T} \approx t_s$$

سوال : یہ کنواں سوال

فرض کنید سازه‌ای به شکل زیر داریم

۲ نیرو در واحد سطح



$$x = 0, \quad \psi_1, \psi_2, \psi_3 = 0$$

چون من خواصم تنفس دوز دیکس میز را به دست آورم

از این راجعه استفاده من کنیم

$\hat{e}_1 = p \hat{e}_1$ $\hat{e}_1$ نیروی که
بر اتان $\hat{e}_1$ وارد شده است $\hat{e}_1$ نیرو

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون کہ دراز سودر
سطح دراز است و دراز
در ۱۰ لنگیم

Year:

Month:

Day:

Subject:

تension normal برابر با p است
 $\sigma_{11} = p$
 $\sigma_{22} = 0$
 $\sigma_{33} = 0$
 $\sigma_{12} = 0$
 $\sigma_{13} = 0$
 $\sigma_{23} = 0$

به خودی خود منفره

در حالتی که بردار نیرو در واحد سطح به شکل مایل اعمال شود

$$t_s = p (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) / \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{11} = p / \sqrt{2}$$

$$\sigma_{12} = p / \sqrt{2}$$

اگر برای سطح جهت میباید داریم

$$x_2 = b : \hat{n} = \hat{e}_2$$

له normal سطح

اگر در سطح بالا باشد

$$\vec{T} \cdot \hat{n} = \vec{t}_s = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \sigma_{12} = 0 \text{ و } \sigma_{22} = 0$$



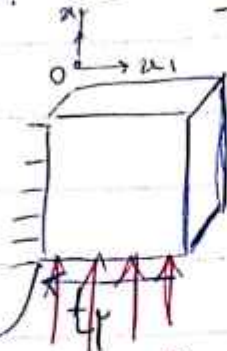
Year:

Month:

Day:

Subject:

حال حالت را فرض کنید که برای سطح پایین یک نیروی برشی اعمال شده باشد.



$$x_2 = 0 \quad \text{سطح} \leftarrow$$

$$x_2 = 0 \quad T \hat{n} = t_s$$

چون سطح پایین است و بالا را x_2 می‌نامیم
 و $\hat{n} = -\hat{e}_2$ بردار نرمال
 $t_s = -t_2 \hat{e}_1 + p_2 \hat{e}_2$

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_2 \\ p_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -T_{12} = -t_2 \rightarrow \sigma_{12} = t_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\sigma_{22} = p_2 \rightarrow \sigma_{22} = -p_2 \end{cases}$$



آفرینش دانش
 کلامم اگر نرمال سطح هم جهت با نیرو بود

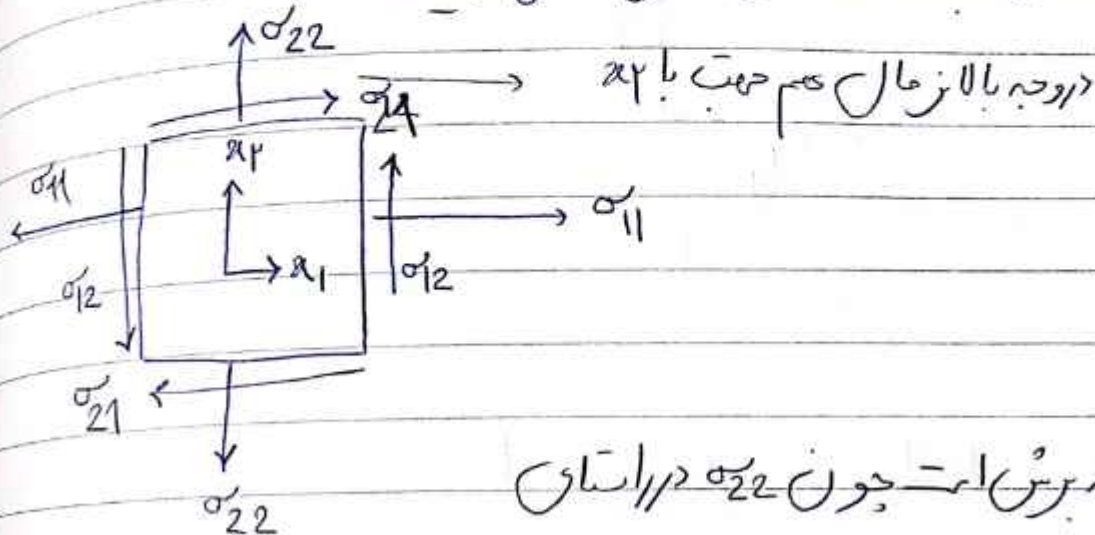
Month:

Day:

Subject:

السر روی سطحی به شکل زیر

راست‌های مثبت مؤلفه‌های تنش به شکل زیر است.



موازی x_2 است σ_{11} هم باید در راستای موازی x_1 باشد. و این

هم به همین ترتیب



مثال: معادله تعادل را برای تنش زیر را به دست آورید.

$$T_{ij} = -p(x_1, x_2, x_3)$$

این مثال تفاوت بین تنش و فشار را نشان می دهد. اثر تنش محوری باشد که تنش قطری باشد که همه قطرهاش مقدار یکسانی دارند پس این تعریف

مرتبط با فشار است. یعنی تنش از جنس فشار است. و این تنش به رات

$$[T] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

وابسته نیست واکال بودن فشار را

اثبات می کند.

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{-\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{-\partial p}{\partial x_i} \Rightarrow \left\{ \frac{-\partial p}{\partial x_i} = 0 \right\}$$

معادله تعادل

