زمان پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

زمان نقصانی: ۴۵ دقیقه

زمان ذخیره شده: ۲۵ دقیقه

ریاضیات

۱- در یک دنباله با تعریف $a_{n+1} = a_n + ۲$، $(n \in \mathbb{N})$، جملهٔ اول $a_1 = \alpha$، به هر یک از جملات دنباله، ۳ واحد اضافه می‌کنیم. اگر در دنبالهٔ حاصل، جملات دوم، چهارم و پنجم آن، با همین ترتیب، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت β باشند، آن‌گاه زوج مرتب (α , β) در کدام گزینه آمده است؟

$\beta = \frac{1}{2} = 0/5$

۱) $(۳ , \frac{۵}{۴})$ ۲) $(-۱۳ , ۰/۵)$ ✓ ۳) $(-۳ , ۲/۵)$ ۴) $(۱۳ , \frac{۵}{۸})$

۲- اگر $a = \sqrt[6]{\frac{۲}{۲-\sqrt{۳}}} - \sqrt[6]{۴-۲\sqrt{۳}}$ باشد، حاصل $a^۲ - \frac{۲}{a}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{۴}$ ۲) $-۲\sqrt[3]{۳}$ ۳) $-۳\sqrt[3]{۲}$ ۴) $۴\sqrt[3]{۲}$

$\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$

$4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$

$\frac{2}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4-3} = 4+2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$a = \sqrt[3]{\sqrt{3}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

$x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

خواسته: $a^2 - \frac{2}{a} = \frac{a^3 - 2}{a} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}+1 - (\cancel{\sqrt{3}}-1) - 3(\sqrt[3]{3-1})(a) - \cancel{2}}{(a)} = -3\sqrt[3]{2}$

۳- نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاطی به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. این سهمی از کدام نقطهٔ زیر عبور می‌کند؟

ریشه ها

۱) $(-۲ , -۴)$ ✓ ۲) $(-۴ , ۱۴)$ ۳) $(۳ , ۴)$ ۴) $(۱ , -۲)$

$y = -(x+1)(x-2)$ اگر $x = -2$: $-4 = -4$

۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳}{x^۲ + ۱۱x + ۲۸} + \frac{۲}{x^۲ + ۶x + ۸} + \frac{۱}{x^۲ + ۳x + ۲} = ۶$ کدام است؟

$\frac{a-b}{ab} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab}$

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۷- ۴) ۸- ✓

$y = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} + \frac{(x+4)-(x+2)}{(x+2)(x+4)} + \frac{(x+7)-(x+4)}{(x+4)(x+7)} = 6$

$y = \frac{1}{x+1} - \cancel{\frac{1}{x+2}} + \cancel{\frac{1}{x+2}} - \cancel{\frac{1}{x+4}} + \cancel{\frac{1}{x+4}} - \frac{1}{x+7} = 6$

$S = -8$

$y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} = \frac{6}{x^2+8x+7} = 6 \longrightarrow x^2+8x+7 = 1 \longrightarrow x^2+8x+6 = 0$

۵- اگر f یک تابع خطی و $f(x).f^{-1}(2x) = 2x^2 - x - 3$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای $f(3)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۷

$f(x) = ax + b$

$x=0 \to f(0) \times f^{-1}(0) = -3 \to b \times \frac{-b}{a} = -3 \to \frac{b^2}{a} = 3 \to a = \frac{b^2}{3}$

$x=-1 \to f(-1) \times f^{-1}(-2) = 0 \to (-a+b)\left(\frac{-b-2}{a}\right) = 0$

$ax + b = -2$

$x = \frac{-b-2}{a}$

$(a-b)\left(\frac{b+2}{a}\right) = 0$

$(b^2 - 3b)\left(\frac{b+2}{b^2}\right) = 0 \to b=0$ غ‌ق ، $b=3$ ، $b=-2$

$b=3 \to a=3 \to f(x) = 3x+3 \to f(3) = 12$

$b=-2 \to a=\frac{4}{3} \to f(x) = \frac{4}{3}x - 2 \to f(3) = 2$

$\xrightarrow{\times} 24$

۶- توابع $f(x) = x + \sqrt{x^2 + a}$ و $g(x) = x - \frac{3}{x}$ مفروض‌اند. اگر $D_g = (0, +\infty)$ و $(gof^{-1})(a) = 2$، مقدار $g(a-1)$ کدام است؟

$2 \leftarrow 3$

$g(6) = 5/5$

۱) ۲ ۲) $\frac{26}{3}$ ۳) ۵/۵ ✓ ۴) $\frac{17}{3}$

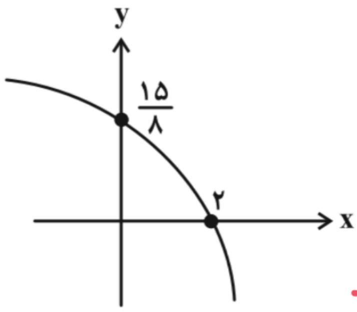
$f(3) = a \to 3 + \sqrt{9 + a} = a$

$a = 7 \to 3 + 4 = 7$ ✓

۷- در شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = 2 + a \times 2^{c+bx}$ رسم شده است. مقدار $f(1 + f^{-1}(-6))$ کدام است؟

$2 + \underbrace{a(2^c)}_{-1/8}(2^{bx})$

۱) ۴
۲) صفر
۳) ۱۴-
۴) ۳۰-



$f(0) = \frac{15}{8} \to 2 + a(2)^c = \frac{15}{8} \to a \times 2^c = \frac{-1}{8}$

$f(2) = 0 \to 2 + a \times 2^{c+2b} = 0 \to \underbrace{a \times 2^c}_{-1/8} \times 2^{2b} = -2 \to 2^{2b} = 16 \to b = 2$

$f(x) = 2 + a(2^c) \times 2^{2x} = f(x) = 2 + \left(-\frac{1}{8}\right) \times 2^{2x}$

$\to f(x) = ۲ - ۲^{۲x-۳}$

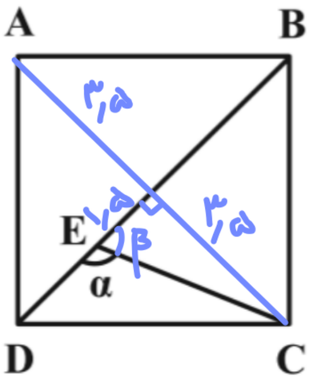
$f^{-1}(-۶) = \alpha \to f(\alpha) = -۶ \to ۲ - ۲^{۲\alpha-۳} = -۶ \to ۲^{۲\alpha-۳} = ۸ \to ۲\alpha - ۳ = ۳$, $\alpha = ۳$

خواسته: $f(۴) = ۲ - ۲^{۵} = -۳۰$

۸- حاصل عبارت $(\log ۲)^{۳} + \log ۸ . \log ۵ + (\log ۵)^{۳}$ کدام است؟ ۰/۶۳

۱) $\log_{۲}^{۵}$ ۰/۲۵ ۲) $۲\log_{۲}^{۵}$ ۰/۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۹- در مربع زیر $۷DE = ۲BD$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



$\tan\beta = \frac{۳/۵}{۱/۵} = \frac{۷}{۳}$

۱) $-\frac{۹}{۴}$

۲) $-\frac{۷}{۳}$

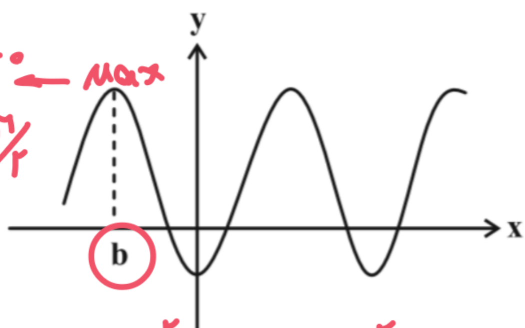
۳) $-\frac{۵}{۳}$

۴) $-\frac{۵}{۴}$

۱۰- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos ۲x + \cos^{۲} x + ۱$ را نشان می‌دهد. اگر اختلاف بیشترین و کمترین مقدار این تابع برابر ۷ باشد، حاصل $f(ab)$ کدام است؟

$\cos x = ۰ \to max$

$b = -\frac{\pi}{۲}$



$x = ۰ \to min = a + ۲$

۱) ۲-

۲) ۳/۵-

۳) ۳/۵

۴) ۵

$y = a(۲\cos^{۲}x - ۱) + \cos^{۲}x + ۱ = ۲a\cos^{۲}x + \cos^{۲}x + ۱ - a$

$y = \cos^{۲}x(۲a+۱) + ۱ - a$

$min = ۰$, $max = ۱$

$y_{max} = ۱ - a$

$۱ - a - a - ۲ = ۷$

$-۸ = ۲a$

$a = -۴$

$f(ab) = f(۲\pi)$

۱۱- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan x + \tan 3x = 4\sin 2x$ در بازهٔ $[0 , \pi]$ کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{\sin \overset{\alpha}{x} \cos \overset{\beta}{3x} + \cos \overset{\alpha}{x} \sin \overset{\beta}{3x}}{\cos x \cos 3x}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} \rightsquigarrow \frac{2\sin 2x \cos 2x}{\cos x \cos 3x} = 4\sin 2x$$

$$\sin 2x = 0 \longrightarrow x = 0 ,\ x = \pi$$ قابل قبول　　$x = \pi/2$ ✗

$$\frac{\cos 2x}{\cos x \cos 3x} = 2 \longrightarrow$$

$$\underbrace{\cos 2x}_{\cos(3x - x)} = 2\cos x \cos 3x$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\longrightarrow \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = 2\cos 3x \cos 3x$$

$$\longrightarrow \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = 0$$

$$\cos(3x + x) = \cos 4x = 0 \xrightarrow{\oplus} x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$$

۱۲- حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{\sin(\pi x + \frac{\pi}{3})}{9x^2 - 4}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H} \frac{-1 \times \pi}{18(\frac{2}{3})} = \frac{-\pi}{12}$$

۱) $-\frac{\pi}{12}$ ✓　　۲) $-\frac{\pi}{3}$　　۳) $\frac{\pi}{12}$　　۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۳- حد $\lim\limits_{x\to m^-} \dfrac{[x]-a}{x^2-3x-4} = -\infty$ به ازای دو مقدار متمایز m برقرار است. چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

$(x+1)(x-4)$ جزء صحیح

$m=-1 , m=4$

([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

$-1^- \to \dfrac{-2-a}{0^+} = -\infty \to -2-a<0 \to a>-2$

$4^- \to \dfrac{3-a}{0^-} = -\infty \to 3-a>0 \to a<3$

$\to -2<a<3$

$-1, 0, 1, 2$

۱۴- تابع $f(x)=\dfrac{x^n-x}{x^2+ax+b}$ با شرط $n\in\mathbb{N}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}(fof)(x)=\dfrac{1}{3}$ باشد، مقدار b کدام است؟

$1 \leftarrow \infty$

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۲-

$b=-2 \leftarrow a=1 \leftarrow \frac{1}{3} = \dfrac{1}{2+a} = \dfrac{2x-1}{2x+a} \leftarrow H.P \quad \frac{0}{0} \to 1+a+b=0$

۱۵- توابع $f(x)=\dfrac{5}{2x^2+x-3}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار $g-f$ کدام است؟

$1, -\frac{3}{2}$ $\quad 1$

۱) $(-1 , 1)$ ۲) $(1 , \frac{3}{2})$ ۳) $(-\frac{3}{2} , 1)$ ۴) $(\frac{5}{2} , 1)$

۱۶- خط d، مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^3-2x^2+1$ در ناحیهٔ اول بوده و بر خط $x+4y=5$ عمود است. کدام نقطهٔ زیر بر خط d واقع است؟

$y=-\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$ $\quad m=4$ $\quad (2,1)$ $\quad y=4x-7$ $\quad x=2$

۱) $(3 , 5)$ ۲) $(1 , 3)$ ۳) $(0 , -8)$ ۴) $(2 , -1)$

$3x^2-4x=4 \to 3x^2-4x-4=0$

$x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0 \longrightarrow x=2 , -\frac{2}{3}$

۱۷- اگر $f(x)=-\sqrt{-x}$ باشد، حاصل $(fo\frac{1}{f})'(-4)$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $-\frac{1}{32}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$f'(x) = -1\times\frac{1}{2\sqrt{-x}}\times -1 = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$

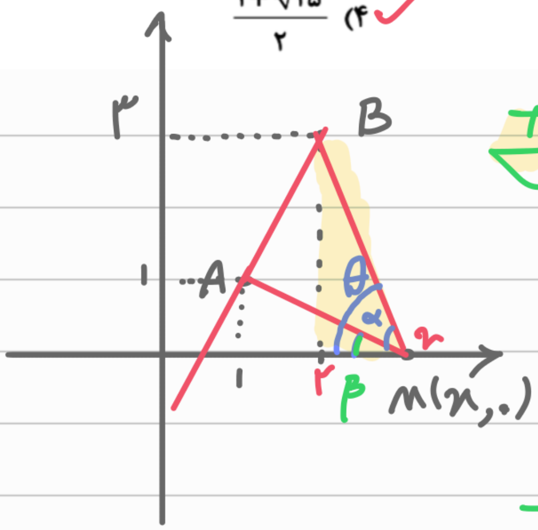
$g(x)=\frac{1}{f}=\frac{-1}{\sqrt{-x}} \rightarrow g'(x) = -1\times\frac{-1}{-x}\times\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\times -1 = \frac{1}{-2x\sqrt{-x}}$

$f(g(x)) \rightarrow g'(x)\times f'(g(x))$

$g'(-4)\times f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1}{16}\times\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{16}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{32}\times\sqrt{2}$

۱۸- نقطهٔ $M(x,0)$ را به نقطه‌های $A(1,1)$ و $B(2,3)$ وصل می‌کنیم. ماکزیمم مقدار ممکن زاویهٔ $A\hat{M}B$ به ازای کدام طول برای نقطهٔ M به دست می‌آید؟ $(x>2)$

۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}+1$ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$



$tg\theta=\frac{3}{x-2}$ $\tan\beta=\frac{1}{x-1}$

$\alpha=\theta-\beta$

$tg(\alpha)=tg(\theta-\beta)$

$tg\alpha = \frac{tg\theta-tg\beta}{1+tg\theta\, tg\beta} = \frac{\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}}{1+(\frac{3}{x-2})(\frac{1}{x-1})} = \frac{2x-1}{x^2-3x+5}$

$\rightarrow \frac{2x-1}{x^2-3x+5} = \frac{2}{2x-3} \rightarrow 4x^2-8x+3 = 2x^2-6x+10$

$2x^2-2x-7=0$

$\Delta = 4-4(2)(-7)=60$ $x=\frac{2+2\sqrt{15}}{4}$ $x=\frac{2-2\sqrt{15}}{4}$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{4\times15}=2\sqrt{15}$ $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$

۱۹- طول نقاط اکسترمم نسبی و نقطهٔ عطف تـابع $f(x)=ax^{3}+bx+c$، سـه عـدد صـحیح متـوالی اسـت. اگـر ایـن نقـاط روی خط $y=2x+1$ واقع باشند، حاصل $a-b+c$ برابر کدام است؟

$3ax^2+b$

عطف $x=0$

۱ و ۰ و ۱-

$f(-1)=-1$ $\quad f(0)=1 \to c=1$ $\quad f(1)=3 \to a+b+c=3$

$a+b=2$

$f'(1)=0 \to 3a+b=0$

$a=-1$, $b=3$

$f''<0$

۱) ۲   ۲) ۳-   ۳) ۴   ۴) ۲-

۲۰- در کدام یک از بازه‌های زیر، نمودار تابع $f(x)=\sin^{2}x-2\sin x$، صعودی با تقعر به سمت پایین است؟

$f'>0$

۱) $(0,\frac{\pi}{2})$ ۲) $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6})$ ۳) $(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$ ۴) $(\frac{11\pi}{6},2\pi)$

$f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x=2\cos x\underbrace{(\sin x-1)}_{\text{منفی}}>0 \to \cos x<0$

$f'(x)=\sin 2x-2\cos x$

$2\cos 2x+2\sin x<0$

$x=90,\ldots$