

پاسخنامه

مسابقات رستا

سری صفرم



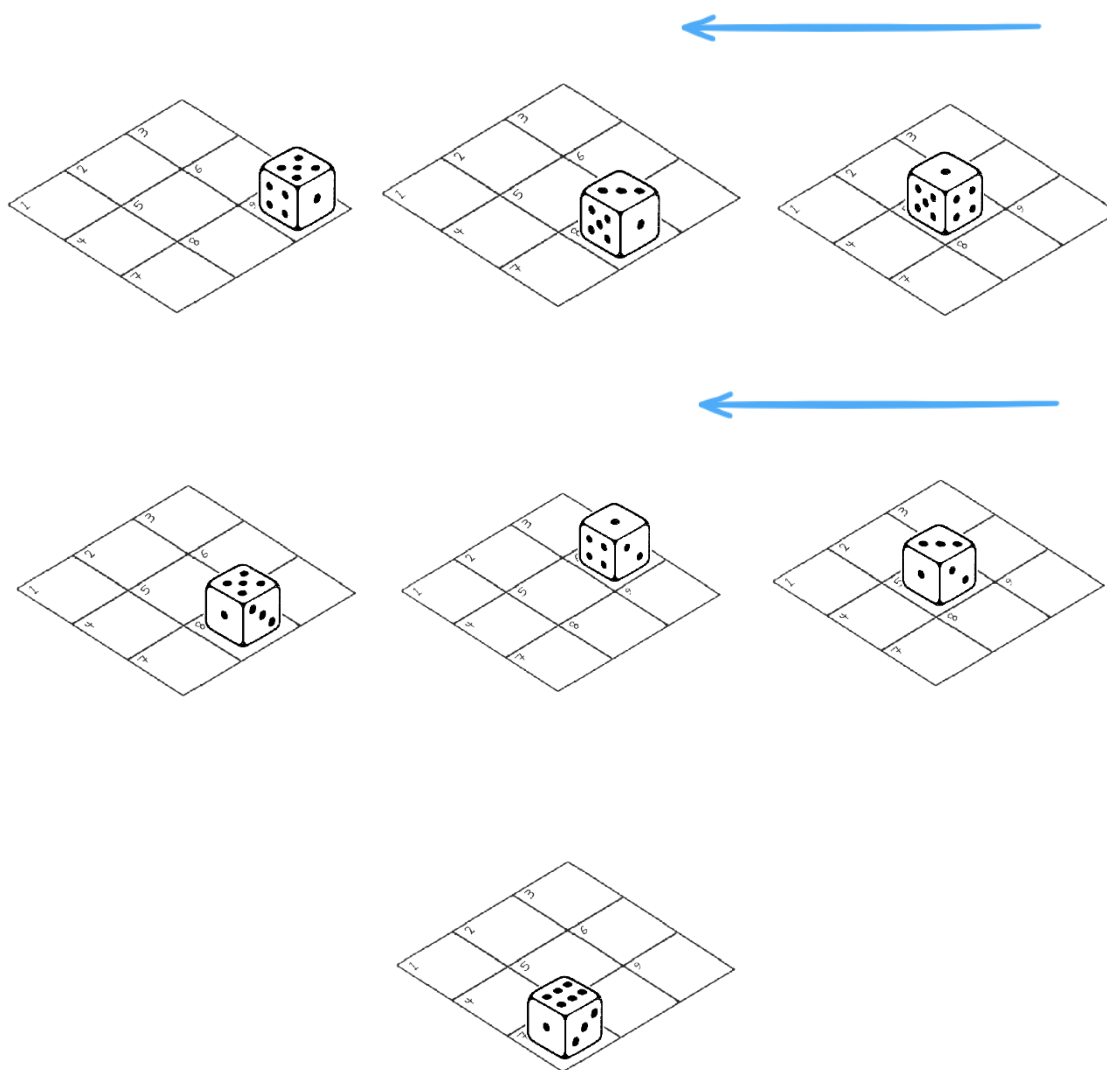
تهیه شده توسط جمع علمی-ترویجی رستا



بخش یک: دست گرمی

تاس غلتان

جواب درست این سوال، ۶ حرکت. یکی از حالت‌هایی که با ۶ حرکت می‌تونید تاس رو به خونه ۷ ببرید درحالی که عدد ۶ تاس به سمت بالا باشه رو می‌تونید توی این تصاویر ببینید.





اگر بازم شک دارید، بهتون توصیه می‌کنیم که یه تاس بردارید و خودتون امتحان کنید!

❖ یه نکته مهم برای حل این سوال حالت اولیه قرارگیری تاس بود که برای رسیدن به جواب صحیح باید بهش دقت می‌کردید.

❖ یکی از روش‌هایی که برای حل این سوال می‌تونستید استفاده کنید، حالت بندی بود:

- حداقل تعداد حرکت‌هایی که تاس باهاش به ۷ میرسه چندتاست؟ ۲
- آیا می‌تونیم با دو حرکت شرط سوال رو برآورده کنیم؟ نه. با دو حرکت یا ۳ بالا میشه و یا ۲.
- با سه تا حرکت می‌تونیم تاس رو به خونه ۷ برسونیم؟
- اصلاً با تعداد فرد حرکت می‌تونیم به خونه ۷ برسیم؟
- با ۴ حرکت چطور؟ ...

با جواب دادن به این سوال‌ها و یکی یکی زیاد کردن تعداد حرکت‌ها می‌تونستید نهایتاً به ۶ حرکت برسید و با بررسی حالت‌های ۶ حرکتی، جواب سوال رو پیدا کنید.



نمونه‌ای از پاسخ درست شما به این سوال:

۱- از این سمت

جواب: $\leftarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

از آنجا که یگانگی در تاس عددی
رو به رو مجامع ایشان ۷ شود پس آنکه
تاس ۱ است و ما نمی‌توانیم از خانه ۵
مستقیم به خانه ۷ برسیم که عرا به ۱ به دست
ص ۵ خانه ۵ می‌بریم با این تفاوت که دیگر عدد ۱ را به نشان نمی‌دهیم
در نشان ۵ ده یا ۳ پس یعنی راست با در حرکت به سمت خانه ۷ ما به عدد ۶ نیز
می‌رسیم

یلدارحیمی به این شکل به سوال جواب داده بود و نمره کامل رو گرفت.



بخش دو: معمای هندسی

وسواس پادشاه

مسئله‌ای که اینجا چند حالت مختلفش رو دیدید، یک مسئله در شاخه‌ای از ریاضیات به نام هندسه ترکیبیاتی که به «مسئله مثلث کوبون» (Kobon Triangle Problem) معروفه.

در واقع سوال این مسئله اینه: بیشترین تعداد مثلث‌های «ناهمپوشایی» که می‌تونیم با چیدمان n تا خط بسازیم چندتا است؟

اینجا «ناهمپوشا» به این معنی که مثلث‌ها نباید توی همدیگه قرار گرفته باشن.

نکته‌هایی که بهشون می‌تونستید توجه کنید تا بهینه‌تر به جواب برسید:

- تلاش کنید خط‌هایی که می‌کشید با هم موازی نباشند. (به نظرتون این چرا باعث همیشه مثلثی رو از دست بدیم؟ یا چطوری باعث میشه بتونیم مثلث‌های بیشتری داشته باشیم؟)

- مطمئن باشید هیچ سه خطی وجود ندارند که همه توی یک نقطه به هم برسند (همیشه میتونید با یکم جا به جا کردن خط یا تغییر دادن شیبش کاری کنید که از چنین حالتی جلوگیری بشه، پیشنهاد می‌کنیم خودتون امتحان کنید!)

اما آیا راهی وجود داره که تعداد مثلث‌هارو قبل از کشیدن حدس بزنیم؟

البته ما توی صورت سوال بهتون راهنمایی‌هایی از حدود تعداد کرده بودیم و لازم نبود شما چنین حدسی رو بزنید.



خب بیاید فکر کنیم به تعدادی خط داریم: n تا.

یکی از این خط‌ها رو انتخاب میکنیم و روی صفحه می‌کشیمش. بیشترین تعداد برخوردی که خط‌های دیگه با این خط می‌تونستند داشته باشند، $n - 1$ عدد. پس می‌تونیم بگیم که چون n تا خط داریم، بیشترین تعداد برخوردی که مجموعاً می‌تونیم داشته باشیم $n(n - 1)$ تاست.

حالا بیاید از اون طرف به مسئله نگاه کنیم. اگه ما m مثلث داشته باشیم تو حالت کلی بیشترین تعداد ضلع‌هایی که داریم $3m$ میشه پس می‌تونیم بگیم:

$$3m \leq n(n - 1)$$

$$m \leq \frac{n(n - 1)}{3}$$

اما نتیجه این کسر لزومی نداره که به عدد صحیح بشه درحالی که مطمئنیم تعداد مثلث‌ها همیشه صحیح. به همین دلیل، برای دقیق‌تر کردن رابطه بالا از تابع «جزء صحیح» استفاده می‌کنیم (اگر باهاش آشنا نیستید، کاری که می‌کنه اینه که هر عددی بهش بدیم، بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر از عدد ورودی باشه رو بهمون برمی‌گردونه):

$$m \leq \left\lfloor \frac{n(n - 1)}{3} \right\rfloor$$

با این روش ما تونستیم به حد بالا برای تعداد مثلث‌ها پیدا کنیم. ریاضیدان‌ها تونستن با استفاده از تعاریف دیگه هندسی تقریب‌های دقیق‌تری از این حد بالا هم پیدا کنن ولی به دست آوردن یک رابطه ریاضی برای تعداد دقیق بیشترین مثلث‌های ناهمپوشا با n خط، هنوز حل نشده باقی مونده هرچند که جواب‌های خوبی برای بعضی از n ‌ها وجود داره.



نمونه‌ای از پاسخ درست شما به این سوال:

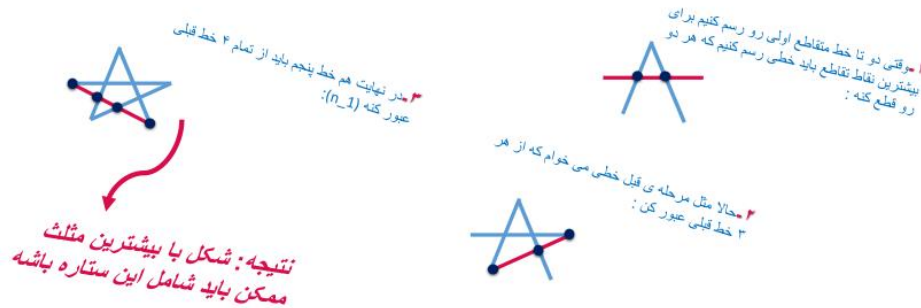
♣ وسواس پادشاه



خب این سوال مورد علاقه ی خودم بود که مراحل کارم رو هم تو به ویدیو کوتاه براتون قرار دادم. قبل از اینکه به اصل سوال برسیم بریم سراغ یک الگویی که بعد رسم ۲۰ تا ۳۰ شکل دستم اومد:

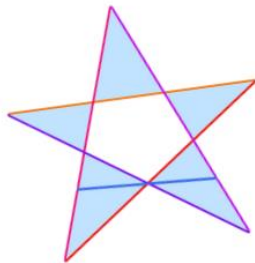
چونم براتون بگه که عقل حکم می کنه برای رسم بیشترین مثلث به بیشتر نقطه تقاطع ممکن نیاز دارم پس باید شکلی با این ویژگی پیدا کنیم که همون ستاره ی ۵ خطیه که از بچگی گوشه دفترامون می کشیدیم.

حالا من که خواب نما نشدم پس اینو از کجا آوردم ؟



• ۶ خطی

از اینجا به بعد بیشتر با آزمون و خطا دست و پنجه نرم کردم که تو ویدیویی که ذکر خیرش بود مراحل کار هست. برای ۶ خط و ۷ مثلث با پایه ی ستاره به این شکل رسیدم:



• ۷ خطی

برای ۷ تا قالب با پدونه ستاره نهایتا میشد همون ۱۰ تا مثلث رو زد و از اونجایی که من هنوز جوونم و آرزو دارم و نمی خوام انقدر زود اعدام بشم اومدم تعداد ستاره هارو افزایش بدم. ولی برای ۲ تا ستاره ۱۰ تا خط نیاز دارم پس سه تا از یال هاشون رو مشترک قرار دادم و امتداد دادم که شد این:

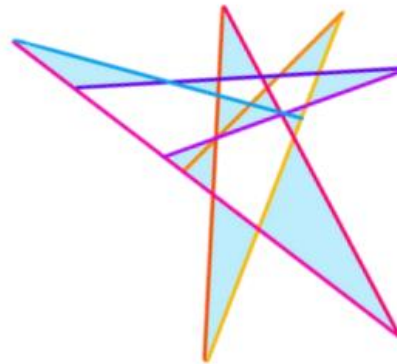




۸۰ خطی

خیلی خب رسیدیم به غول مرحله ی آخر که نه تنها پادشاه بلکه من رو هم به شخصه دیوونه کرد. اینجا هم با 2 تا ستاره نهایتا به 12 تا مثلث می رسیدیم. پس میریم سراغ 3 تا ستاره. اینبار می خوام 15 تا خط (یک عدد فرد) رو به 8 خط (یک عدد زوج) برسونم. پس هر برای هر دو ستاره 2 یال مشترک قرار دادم و یکی از یال هارو بین هر سه ستاره مشترک گذاشتم:

$$15 - 3(2) - 1 = 8$$



حالا مشکل اینه که حتی این حالت فقط ۱۵ تا مثلث میده و دیگه همیشه با این تعداد خط ستاره اضافه کرد چون برای ۴ ستاره به ۲۰ تا خط نیاز و بیشتر از ۳ یال مشترک بین هر دو ستاره همیشه قرار داد و وقتی دو ستاره ۳ یال مشترک داشته باشند نمی تونم با ستاره ی بعدی بیشتر از ۲ یال مشترک داشته باشند پس عدد 20 را نمی توان هرگز به 8 رساند.

آریانا دانشمند به این شکل به سوال جواب داده بود و نمره کامل رو گرفت.



بخش سه: معمای فیزیکی

نجات زمین

این سوال راه حل های خیلی زیادی می تونه داشت باشه.

ولی نکته کلیدی ای که برای حل راحت تر این سوال می تونست کمکتون کنه اینه که شهاب سنگی که داریم در طول کل مسیر با تندی ثابت و به طور پیوسته در حال حرکت!

چیزی که حل سوال رو سخت می کرد قطعه قطعه فرض کردن سوال بود مثلاً بیابین بگین در اولین بار بازگشت این قدر مسافت رو طی می کنه در دفعه دوم اون قدر و همینطوری این هارو جمع می زدین تا آخر...

راه حل درستی بود ولی احتمال خطا داخلش بالا بود و توی راه حل های دریافت شده این اشتباهات دیده می شد.

مسیر پیشنهادی ما برای حل این سوال این شکلیه:

الف) اول می خوایم حساب کنیم که چقدر طول می کشه که عا و عو به هم برخورد کنن.

می تونیم فرض کنیم عا ثابت و به جاش عو با سرعت $20 \frac{km}{h}$ به سمت عو حرکت می کنه.

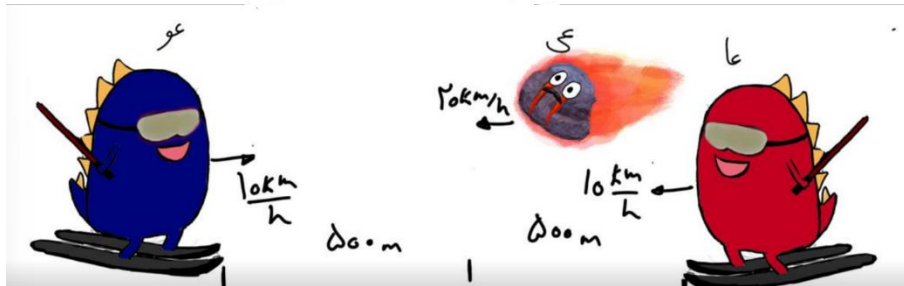
$$1_{km} = \text{فاصله اولیه}$$

$$\text{زمان} = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت عو نسبت به عا}} = \frac{1_{km}}{20 \frac{km}{h}} = \frac{1}{20} h$$



با دقت کردن به این نکته که تندی لحظه‌ای عی در تمام برخورد ها ثابت و رابطه مسافت و تندی می‌تونیم بگیم:

$$\text{مسافت} = \text{تندی عی} \times \text{زمان} = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1}{20} \text{h} = 1 \text{km}$$



راه‌حلی که شما استفاده کرده بودید راه حل درستی بود اما مسیر حل سخت‌تری داشت و احتمال خطاهای محاسباتی در طول مسیر رو بالا می‌برد.

نمونه این حل رو یکی از بچه‌ها به این صورت نوشته بود:

$$\Rightarrow \frac{l_0}{2v_A} = \frac{l_0}{3v_A} + \frac{l_0}{9v_A} + \frac{l_0}{27v_A} + \dots \Rightarrow \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i}$$

که خوب چون در واقع تعداد برخوردها به بی‌نهایت می‌رسه پس بجای که ما بتی بنده کمتر از ۱ متر بر خورد آخری بگیریم

$$l_1 = 1 \text{ km} \quad l_2 = 333,3 \text{ m} \quad l_3 = 111,1 \text{ m} \quad l_4 = 37 \text{ m} \quad l_5 = 12 \text{ m} \quad l_6 = 4 \text{ m}$$

$$l_7 = 1,37 \text{ m} \quad \text{پس تعداد برخوردها 7 تا می‌شه.}$$



سوال دو: میزان مسافتی که عی در طول این مسیر طی می‌کند تا عا و عو به هم برسند چقدره؟ این چیزی که به دست آوردین با بخش قبل جور در میاد؟ چجوری؟

8 در هر مرتبه $\frac{2}{3}$ مسافت بین A و B را می‌پیماید. پس از این‌ها که تعداد مرتبه‌ها 7 باشد :

$$d_6 = \frac{2d_0}{3} + \frac{2d_0}{9} + \frac{2d_0}{27} + \frac{2d_0}{81} + \frac{2d_0}{243} + \frac{2d_0}{729} + \frac{2d_0}{2187} = 2d_0 \sum_{i=1}^7 \frac{1}{3^i} = 999,54 \text{ m}$$

که برای عی و عو یک الیومره تقریباً که منفعه رانند چمن انبار هم داره $\frac{2}{3}$ اون بخشی که دفعه قبل نوشته بودیم

که اگه خیلی کنجکاوید، می‌تونین از اینجا ببینید که با این روش چطور میشه به جواب رسید:

<https://math.stackexchange.com/questions/784888/apparent-paradox-for-the-bird-traveling-between-two-trains-puzzle>



بخش چهار: مونته کارلو

آزمایش تاس

توی این بخش با مفهوم شبیه سازی مونته کارلو آشنا شدین. ایده این روش، به طور خلاصه، رسیدن به جواب از طریق نمونه گیری با تعداد بسیار زیاده.

دیدین که چطور مسئله هایی که در اولین مواجهه شاید فکر می کردیم که چقدر حلشون سخته رو تونستیم از یک منظر دیگه ببینیم و حل کنیم.

یعنی مشخصاً، حل عادی و به اصطلاح تحلیلی سوال اول مستلزم این بود که یه تعداد زیادی حالت رو بررسی کنیم؛ و در سوال دوم هم اگه انتگرال بلد نبودیم، حلش سخت یا ناممکن بود.

اما این ابزاری که باهاش آشنا شدین، یعنی شبیه سازی مونته کارلو، در شرایطی که پیچیدگی مسئله باعث میشه استفاده از روش های تحلیلی برامون سخت باشه، به دادمون می رسه. (البته همین سوال هایی که دیدید رو هم میشد طوری طراحی کرد که حل تحلیلیش بسیار پیچیده تر باشه اما این پیچیدگی، حل با روش مونته کارلو رو چندان سخت تر نمی کرد).

این روش محدودیت هایی هم داره، از جمله اینکه هر مسئله ای رو نمیشه اینطوری راحت مدل کرد و همچنین این روش عدد دقیق رو بهمون نمیده و ممکنه در هر بار اجرا کردن شبیه سازی نتیجه کمی متفاوت باشه، در حالی که در مواردی ما ممکنه دنبال جواب دقیق باشیم.

این مسائل یه فرصتی هم می داد که روش کار با ابزار بسیار کاربردی و جذاب Spreadsheet (چه Excel و چه Google Sheets) رو کمی یاد بگیریم.



الف و ب) همونطور که تقریباً همه اشاره کرده بودن، بدون استفاده از شبیه‌سازی، برای یافتن پاسخ این سوال باید از بین کل حالت‌ها (که برابر ۲۱۶ حالت) حالت‌های مطلوب (که برابر ۱۰۸ حالت) رو بشماریم و بر تعداد کل تقسیم کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{108}{216}$$

امیدواریم خودتون این شمارش طاقت‌فرسا رو انجام نداده باشید :

ج) در این بخش باید با کمک Excel یا Google Sheets و تابع `RANDBETWEEN(1,6)` این نمونه‌گیری رو انجام می‌دادین. هر بار اجرای این تابع یه عدد تصادفی یکنواخت بین ۱ تا ۶ تولید می‌کنه که عملاً معادل انداختن تاسه. بعد از اینکه ۱۰۰۰ بار این شبیه‌سازی رو انجام دادیم («تاس انداختیم»)، باید با یه تابع `IF` تعیین کنیم که توی هر کدوم از این ردیف‌ها («پرتاب‌ها») آیا شرط ما محقق شده یا نه. محقق شدن رو با می‌تونیم با ۱ نشون بدیم و نشدن رو با ۰.

	A	B	C	D	E	F
1	آزمایش	تاس اول	تاس دوم	تاس سوم	جمع ارقام	جمع ارقام < 10؟
2	1	2	5	3	10	0
3	2	6	5	3	14	1
4		↓	↓	↓	↓	↓
5		=RANDBETWEEN(1,6)	=RANDBETWEEN(1,6)	=RANDBETWEEN(1,6)	=SUM(B4:D4)	=IF(E4>10,1,0)

و بعد در نهایت تعداد ۱‌ها رو پیدا کنیم و بر تعداد کل (مثلاً ۱۰۰۰) تقسیم کنیم.



نمونه‌ای از پاسخ درست شما به این سوال:

	F	E	D	C	B	A	
1	جمع ارقام بزرگتر از ۱۰؟	جمع ارقام	تاس سوم	تاس دوم	تاس اول	آزمایش	
2	۱	۱۳	۴	۵	۴	۱	
3	۰	۹	۱	۶	۲	۲	
4	۱	۱۵	۵	۵	۵	۳	
5	...	...	...	...	...	...	
1000	۰	۳	۱	۱	۱	۹۹۸	
1001	۱	۱۵	۵	۵	۵	۹۹۹	
1002	۰	۷	۱	۳	۳	۱۰۰۰	
1003	۵۰.۶	درصد نتیجه مطلوب	۰.۵۰۶	احتمال نتیجه مطلوب	۵۰.۶	تعداد نتایج مطلوب	
1004							

علی فاضل به این شکل به سوال جواب داده بود و نمره کامل رو گرفت.

سوالات بیشتر برای فکر کردن:

- ❖ چرا جواب‌ها در هر بار شبیه‌سازی متفاوت هستند؟ این تفاوت چه معنایی داره؟
اگه همین شبیه‌سازی رو خودش رو ۱۰۰۰ بار انجام بدیم، یعنی فرض کنیم ۱۰۰۰ تا شرکت‌کننده این مسابقه داشت و جواب آخر همه رو توی یه نمودار می‌آوردیم چه شکلی میشد؟
- ❖ حالا که با ابزار اکسل آشنا شدین، راه دیگه‌ای به ذهنتون می‌رسه که بدون شبیه‌سازی و با همون بررسی و شمارش حالت‌ها جواب مسئله رو پیدا کنیم؟

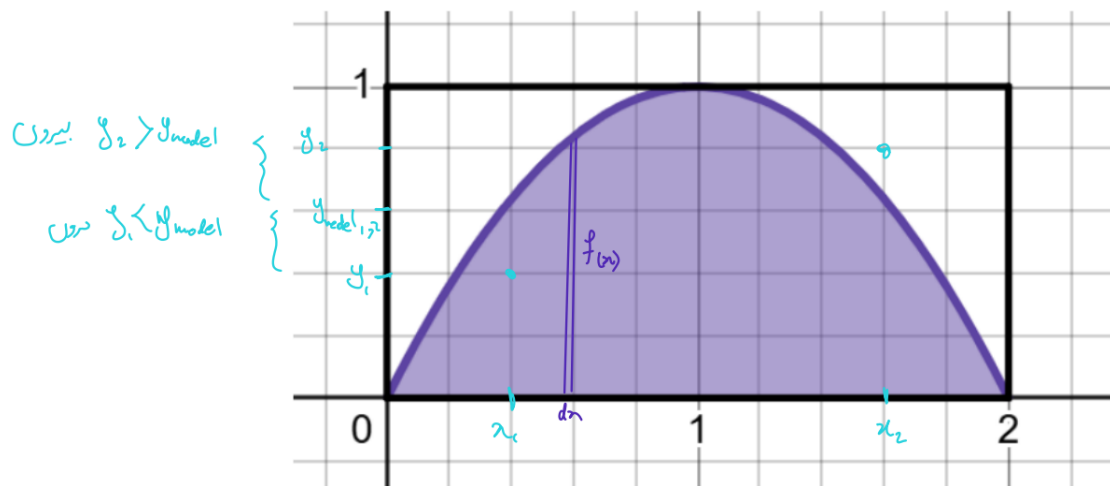


تخمین مساحت

توی این سوال قراره مساحت زیر نمودار رو محاسبه کنیم؛ اما این محاسبه رو با روش‌های هندسی یا روش انتگرال (که جواب دقیق بهمون میدن) نمی‌خوایم انجام بدیم، بلکه می‌خوایم از روش مونته‌کارلو استفاده کنیم.

ایدهٔ زیبای پشت این سوال اینه که با تولید نقطه‌های تصادفی در یک سطح و شمارش و مقایسهٔ نسبی اون‌ها می‌تونیم تخمینی از مساحت زیر یک نمودار داشته باشیم.

یکی از بهترین و کامل‌ترین جواب‌های این سوال، جواب پرنیان مقدمی بود.



پرنیان اینطور نوشته بود که یه تعداد x_i تولید می‌کنیم که در واقع یک عدد تصادفی بین ۰ تا ۲ هستن و یک تعداد y_i که یک تعداد عدد تصادفی بین ۰ تا ۱ هستن. (که اینا در واقع یک نقطه در صفحه رو تشکیل می‌دن) بعد، با استفاده از فرمول $y = 1 - (1 - x)^2$ برای مقادیر x_i ، مقدار متناظرشون روی سهمی رو حساب می‌کنیم و اسمش رو y_{model} می‌ذاریم. بعد اگه دیدیم $y_i < y_{model}$ نتیجه می‌گیریم که این نقطه زیر سهمیه، و بالعکس. به این ترتیب، با استفاده از تابع IF برای هر ردیف (معادل یک نقطه) تعیین می‌کنیم که آیا شرط رو برآورده می‌کنه یا نه. در نهایت



درصد نقاطی که شرط رو برآورده می‌کنن (یعنی زیر سهمی افتاده‌ان) رو در مساحت کل مستطیل ضرب می‌کنیم و در نهایت مساحت زیر سهمی تقریباً برابر $1/355$ به دست میاد.

	A	B	C	D	E
1	آزمایش	طول نقطه (x)	عرض نقطه (y)	عرض نقطه‌ی روی سهمی، منتظر با x داده شده	آیا نقطه زیر سهمیه یا نه؟
2	1	1.4227	0.0111	0.8213	1
3	2	1.9736	0.1970	0.0522	0
4		↓	↓	↓	↓
5		=RAND()*2	=RAND()	=1-(1-B3)^2	=IF(C3<D3, 1, 0)

پرنیان همچنین روش انتگرال برای به دست آوردن جواب دقیق رو هم بیان و حل کرده بود.

روش تحلیلی دیگر این که به سمت های خیلی کوچک تقسیم کنیم تا به بی نهایت مستطیل $dx \times f(x)$ تقسیم بشه و اینا رو با هم جمع کنیم یا در واقع انتگرال این تابع رو بگیریم.

$$S = \int_0^2 (1 - (1-x)^2) dx = x \Big|_0^2 + \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^2 = 2 - \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1.33$$

سوالات بیشتر برای فکر کردن:

- ❖ حالا که با ابزار اکسل آشنا شدین، راه دیگه‌ای به ذهنتون می‌رسه که با همین منطق شمارش نسبی و به صورت عددی ولی بدون استفاده از متغیرهای تصادفی، مساحت رو تخمین بزنیم؟
- ❖ درباره کاربردهای دیگه شبیه سازی و مشخصاً روش مونته کارلو تحقیق کنین.
- ❖ چطور می‌تونیم با روش مونته کارلو عدد پی رو محاسبه کنیم؟