Created: February 18, 2025 at 10:35 AM

جلسه چهارم 30 بهمن

مثال: اگر $f: D \to \mathbb{C}$ تحلیلی بوده و $f'(z)=0$ روی D، آنگاه f روی D ثابت است.

$f = u + iv$

کوشی ریمان $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ $\qquad f' = u_x + i v_x$

اگر $f' = 0 \Rightarrow u_x = 0 , v_x = 0 \Rightarrow u_y = 0 , v_y = 0$

D همبند $\Leftarrow$ u, v توابع ثابت هستند روی D $\Leftarrow$ f ثابت است

مثال: فرض کنید $f: D \to \mathbb{C}$ تحلیلی روی D. فرض کنید $|f(z)|$ ثابت است روی D. نشان میدهیم f روی D تابعی ثابت است.

حل: اگر $|f(z)|=0$ همه جا $\Leftarrow$ $f(z)=0$ همه جا

حالا فرض کنید $|f(z)|= r_0 > 0$ $\Leftarrow$ ثابت مثبت

$f = u + iv \Rightarrow |f|^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow$ نسبت به x, y مشتق می‌گیریم

$$0 = 2u u_x + 2v \cdot v_x \Rightarrow u \cdot u_x + v \cdot v_x = 0$$

$$0 = 2u u_y + 2v \cdot v_y \Rightarrow u \cdot u_y + v \cdot v_y = 0$$

کوشی ریمان $\leftarrow$

$$u u_x - v \cdot u_y = 0 \xrightarrow{\times u} u^2 \cdot u_x - uv u_y = 0$$

$$u \cdot u_y + v \cdot u_x = 0 \xrightarrow{\times v} uv \cdot u_y + v^2 \cdot u_x = 0$$

$$+ \Rightarrow u^2 u_x + v^2 u_x = 0 \Rightarrow \underbrace{(u^2 + v^2)}_{0 < r_0^2} u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0$$

به طور مشابه $0 = u_y$ $\Leftarrow$ $v_y = 0 , v_x = 0$

u, v ثابت هستند $\Leftarrow$ f ثابت است

نکته: f تحلیلی، $f = u + iv \Rightarrow u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

در ادامه خواهیم دید که وقتی f تحلیلی است حتماً u و v مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته دارند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = v_{yx}$$

$$u_{yy} = -v_{xy} \qquad\qquad v_{xy} = v_{yx}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ معادله لاپلاس}$$

تابع همساز است

مثال: $u(x,y) = y^3 - 3x^2 y$ روی $\mathbb{R}^2$ و تابع $v(x,y)$ را طوری می‌سازیم که $f = u + iv$ روی $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد

شرط اول را چک می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= -6y \\ u_{yy} &= 6y \end{aligned}\right. \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \checkmark$$

به چنین v ای اصطلاحاً یک مزدوج همساز از u می گویند

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x \Rightarrow u_x = -6xy$$

$$v_y = -6xy$$

$$\rightarrow u_y = 3y^2 - 3x^2$$

$$-v_x = 3y^2 - 3x^2$$

$$v(x,y) = -3xy^2 + g(x) \Rightarrow v_x = -3y^2 + g'(x)$$

$$v_x = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g(x) = x^3 + C$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$$

مثال:

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y \qquad f(z) = u + iv$$

$$f(z) = u + iv = (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3 + C)$$

مثال:

$$f(z) = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\arg(z)$$

$$0 < r \quad , -\pi < \theta < \pi$$

کوشی ریمان قطبی <=

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i v_r)$$

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f(z) = \ln z$$

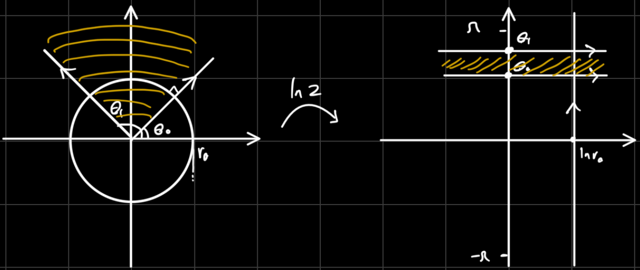
$$\ln z = \ln|z| + i\arg(z) \quad 0 < |z| \quad , -\pi < \arg(z) < \pi$$

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(r_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2}) = \ln(r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)})$$

$$= \ln(r_1 \cdot r_2) + i(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2) = (\ln r_1 + i\theta_1) + (\ln r_2 + i\theta_2)$$

اگر $\theta_1+\theta_2$ در بازه $(-\pi,\pi]$ نبود آن را شیفت می دهیم



$(\ln z)' = \frac{1}{z} \neq 0$ همدیس

تعریف:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . (\cos y + i \sin y)$$

$u(x,y) = e^x \cos y$ $\qquad$ $z \in \mathbb{C}$

$v(x,y) = e^x \sin y$

معادلات کوشی ریمان ✓

بر e^z تحلیلی است روی $\mathbb{C}$

$(e^z)' = u_x + i v_x = e^z \neq 0 \Rightarrow$ همدیس

اگر $z = x \Leftarrow e^z = e^x$