



دانشگاه تهران

بسمه تعالی

آزمون درس: فیزیک ۲ (میانترم)

مدرس:

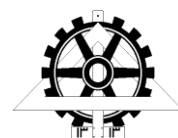
دانشکده علوم مهندسی

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

ساعت آزمون: ۸:۳۰

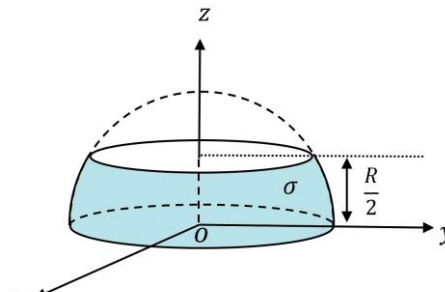
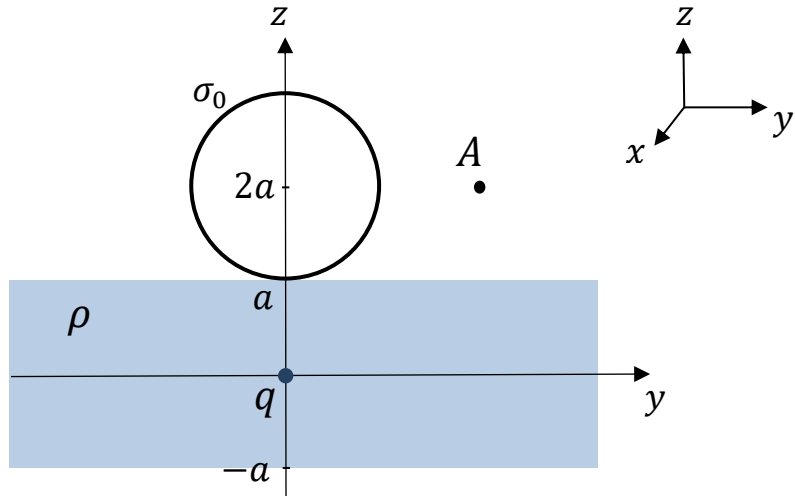
تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۲/۱۱

نیمسال: دوم - سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۱۴۰۴



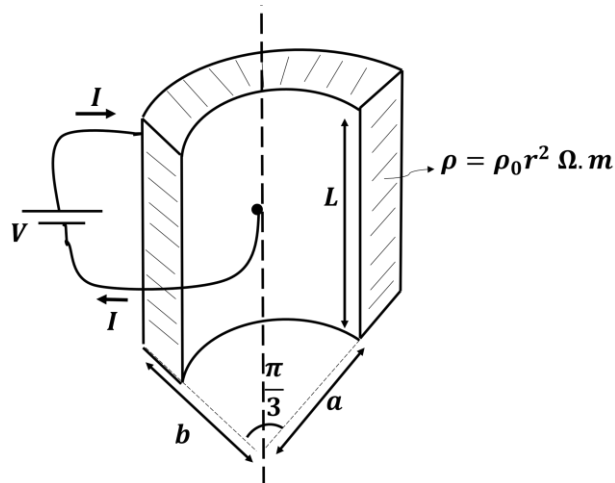
پرديس
دانشکده های فنی

استفاده از کتاب، جزوه درسی و ماشین حساب مجاز نیست.

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف) بردار میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه با بار یکنواخت Q به شعاع R را روی محور حلقه، به فاصله Z از مرکز آن با محاسبه به دست آورید (محورهای مختصات را در شکل خودتان مشخص کنید). ب) مطابق شکل پوسته نیم کره ناقصی با چگالی بار یکنواخت و مثبت σ، به شعاع R و ارتفاع $\frac{R}{2}$ مفروض است. اگر یک الکترون در مرکز پوسته (مبدأ مختصات، نقطه O) قرار بگیرد، بردار نیروی وارد بر الکترون را محاسبه کنید.		
۵			
۲	مطابق شکل، توزیع باری داریم که دارای سه بخش حجمی، سطحی و نقطه‌ای است. توزیع بار <u>حجمی</u> ناحیه‌ی $-a \leq z \leq a$ از فضا را پر کرده و دارای چگالی حجمی $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)$ است. بار <u>سطحی</u> با چگالی سطحی σ_0 بر روی یک کره‌ی نارسا به شعاع a پخش شده است و مرکز کره در نقطه‌ی $(0,0,2a)$ قرار دارد. بار <u>نقطه‌ای</u> q نیز در مبدأ مختصات قرار گرفته است. ρ_0 و σ_0 دو ثابت مثبت هستند. با فرض این که میدان الکتریکی در نقطه A به مختصات $(0,2a,2a)$ صفر باشد، مقادیر q و σ_0 را بر حسب ρ_0 و a تعیین کنید.		
۵			

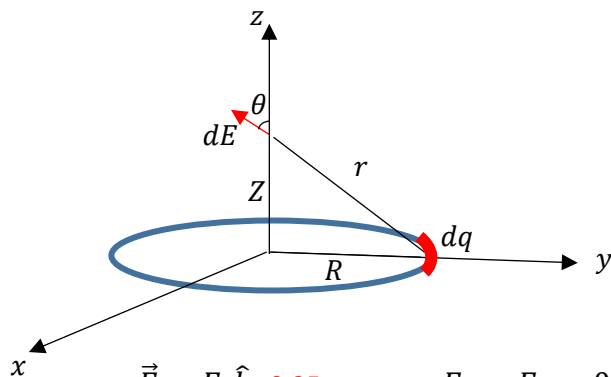
ادامه سوال ها پشت برگه

۵	۳ مطابق شکل، خازنی استوانه‌ای با صفحات رسانا به شعاع داخلی a (دارای بار $+Q$) و شعاع خارجی b (دارای بار $-Q$) و ارتفاع بلند h مفروض است. فضای بین صفحات خازن، در ناحیه $c \leq r \leq b$ با ماده دی الکتریک با ضریب متغیر $k = k_0 r$ (k_0 مقدار ثابت مثبت و r فاصله از محور استوانه) پر شده و فضای باقیمانده بین صفحات خلا می‌باشد. <u>الف</u>) بزرگی و جهت میدان الکتریکی را درون ماده دی الکتریک بدست آورید. <u>ب</u>) ظرفیت کل این خازن را با نشان دادن همه مراحل محاسبه کنید. سپس با فرض اینکه $a = \frac{c}{2}$ و $b = 2c$ باشد، پاسخ را بر حسب c ساده کنید. <u>ج</u>) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی A و B ($V_B - V_A$)، مشخص شده بر روی شکل را بدست آورید. پاسخ را تا حد امکان ساده کنید.	۳
۵	۴ دو پوسته فلزی استوانه‌ای هم محور به طول L و شعاع‌های a و b را در نظر بگیرید. مطابق شکل، برشی از این ساختار با زاویه داخلی $\frac{\pi}{3}$ را جدا می‌کنیم و بین دو صفحه ایجاد شده را با ماده‌ای با مقاومت ویژه $\rho = \rho_0 r^2$ ($\Omega \cdot m$) (ρ_0) ثابت مثبت و r فاصله از محور) پر می‌کنیم. اگر همانند شکل، اختلاف پتانسیلی به اندازه V بین دو صفحه فلزی برقرار کنیم: <u>الف</u>) جریان عبوری از قطعه (I) را محاسبه کنید (فرض کنید چگالی جریان داخل قطعه، در جهت شعاعی است). <u>ب</u>) شدت میدان الکتریکی داخل قطعه را به صورت تابعی از r به دست آورید.	۴



پاسخنامه آزمون میانترم فیزیک ۲ - نیمسال دوم ۱۴۰۳

۱- الف) میدان الکتریکی حلقه بار روی محور به فاصله Z از مرکز آن:

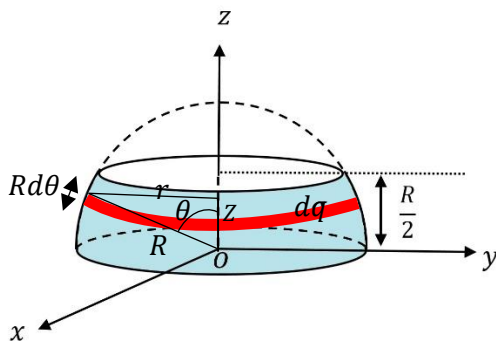


بنا به تقارن توزیع بار $E_x = E_y = 0$ 0.25 $\vec{E} = E_z \hat{k}$ 0.25

$$E_z = \int dE \cos \theta = \int \frac{k dq}{r^2} \times \frac{Z}{r} = \frac{kZ}{(Z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq = \frac{kQZ}{(Z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad 0.5$$

0.25 0.25

ب) با توجه به قسمت الف، پوسته را به نوارهای حلقه ای با بار dq و شعاع r تقسیم می کنیم. dE میدان هرکدام از این حلقه ها در راستای محور Z (رو به پایین، به علت بار مثبت پوسته) است و با هم جمع میشوند:



$$E = E_z = \int dE_{\text{حلقه}} = \int \frac{k dq Z}{(Z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad 0.5$$

0.25

$$Z = R \cos \theta \quad r = R \sin \theta \quad dq = \sigma(2\pi r R d\theta) \quad 0.5$$

0.25 0.25

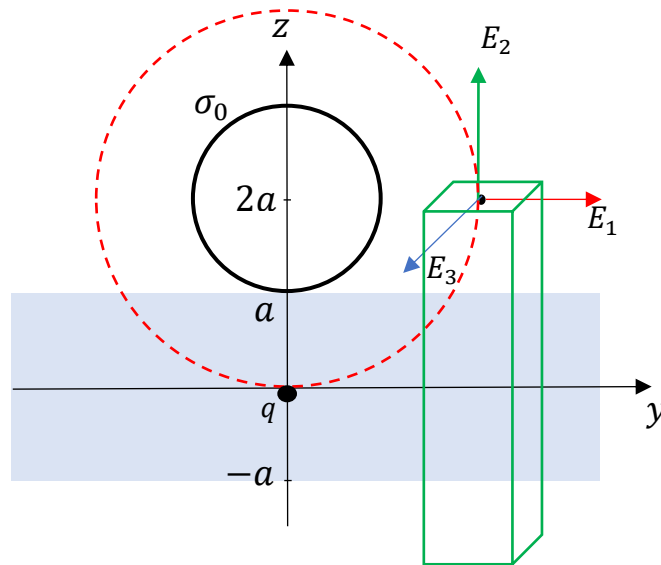
$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sigma}{16\epsilon_0} \quad 0.5$$

0.5 limits

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{16\epsilon_0} \hat{k} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = q\vec{E} = +\frac{e\sigma}{16\epsilon_0} \hat{k} \quad \text{نیروی وارد بر الکترون در مرکز پوسته}$$

0.25 0.5

۲- میدان هر کدام از بارها را جداگانه با گاوس به دست می آوریم. در برآیند گیری، باید به جهت بردار هر میدان دقت کرد:



$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow \begin{cases} E_1 (4\pi (2a)^2) = \frac{\sigma_0 (4\pi a^2)}{\epsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} & \text{پوسته کروی} \\ 2E_2 S = \frac{q_2}{\epsilon_0} \rightarrow E_2 = \frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0} & \text{صفحه بی نهایت و ضخیم} \end{cases}$$

$$q_2 = \int \rho \, dV = \int_{-a}^a \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) S \, dz = \frac{4}{3} \rho_0 S a$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2\sqrt{2}a)^2} = \frac{q}{32\pi\epsilon_0 a^2}$$

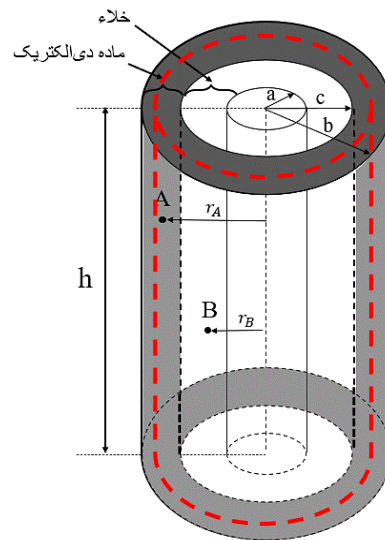
بار نقطه ای -

که باید منفی باشد

$$E_3 = \sqrt{2} E_2 \text{ و } E_1 = E_2 \text{ باید برآیند،}$$

$$\sigma_0 = \frac{8}{3} \rho_0 a, \quad q = -\frac{64\pi\sqrt{2}}{3} \rho_0 a^3$$

الف) برای پیدا کردن میدان درون دی الکتریک، مطابق شکل یک سطح گاوسی استوانه ای به شعاع r در نظر می گیریم که لبه آن داخل دی الکتریک واقع شده است:



0.25

0.75

0.25

$$\oint k \vec{E}_{bc} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow k_0 r \times E_{bc} \times 2\pi r h = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{bc} = \frac{q}{2\pi k_0 \epsilon_0 h r^2} \hat{r}$$

0.25

جهت میدان الکتریکی شعاعی و از صفحه مثبت به صفحه منفی خازن می باشد.

ب) برای یافتن ظرفیت کل خازن، ظرفیت مربوط به بخش دی الکتریک و بخش خلاء را جداگانه محاسبه کرده و سپس به صورت سری با هم جمع می کنیم.

0.5

(به دیگر روش های صحیح حل مانند استفاده از اختلاف پتانسیل بین دو صفحه اصلی خازن، یا المان بندی خازن در قسمت دی الکتریک دار نیز نمره کامل تعلق می گیرد)

$$\Delta V_{bc} = - \int_b^c \vec{E}_{bc} \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{2\pi k_0 \epsilon_0 h} \int_b^c \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{2\pi k_0 \epsilon_0 h} \frac{b-c}{bc}$$

0.5

$$C_{bc} = \frac{q}{\Delta V_{bc}} = \frac{2\pi k_0 \epsilon_0 h b c}{b - c}$$

ظرفیت خازن دارای دی الکتریک

0.25

برای ظرفیت خازن دارای خلاء داریم:

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{E}_{ac} \cdot d\vec{s} &= \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E_{ac} \times 2\pi r h = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{ac} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h r} \hat{r} \\ \Delta V_{ac} &= - \int_c^a \vec{E}_{ac} \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_c^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{c}{a}\right) \\ \text{ظرفیت خازن دارای خلاء} \quad C_{ac} &= \frac{q}{\Delta V_{ac}} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} \end{aligned} \right\} \quad \boxed{0.75}$$

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_{bc}} + \frac{1}{C_{ac}} = \frac{b-c}{2\pi k_0 \epsilon_0 h b c} + \frac{\ln\left(\frac{c}{a}\right)}{2\pi\epsilon_0 h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \left(\frac{1}{2k_0 c} + \ln(2) \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \left(\frac{1 + 2k_0 c \ln(2)}{2k_0 c} \right)$$

$$\rightarrow C_{tot} = \frac{4\pi\epsilon_0 k_0 h c}{1 + 2k_0 c \ln(2)} \quad \boxed{0.5}$$

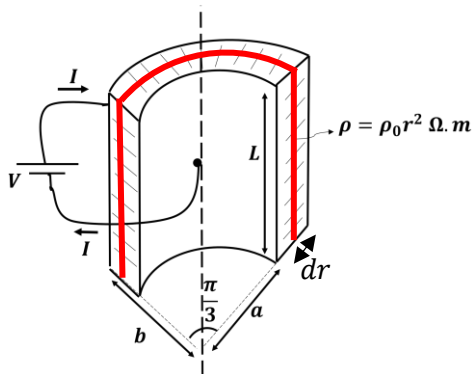
(ج)

$$\Delta V_{AB} = - \int_{r_A}^c \vec{E}_{bc} \cdot d\vec{l} - \int_c^{r_B} \vec{E}_{ac} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{2\pi k_0 \epsilon_0 h} \frac{r_A - c}{r_A c} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{c}{r_B}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \left(\frac{r_A - c}{k_0 r_A c} + \ln\left(\frac{c}{r_B}\right) \right)$$

0.5

0.5

۴- با توجه به اینکه مقاومت ویژه ماده تابع r (فاصله از محور استوانه) است، قطعه را به المان های مقاومتی (شبیه به خود قطعه) با پهنای کوچک dr تقسیم می کنیم. این مقاومت ها به صورت سری با هم جمع می شوند:



(الف)

$$dR = \rho_0 r^2 \frac{dr}{L \left(\frac{\pi}{3} r\right)} \rightarrow R = \int_{r=a}^{r=b} \rho_0 r^2 \frac{dr}{L \left(\frac{\pi}{3} r\right)} \quad 1$$

$$\rightarrow R = \frac{3\rho_0}{L\pi} \int_{r=a}^{r=b} r dr = \frac{3\rho_0 (b^2 - a^2)}{2L\pi} \quad 0.5$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{2VL\pi}{3\rho_0 (b^2 - a^2)} \quad 0.5$$

(ب)

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{L \left(\frac{\pi}{3} r\right)} = \frac{2V}{\rho_0 (b^2 - a^2)(r)} \quad 0.75$$

$$E = \rho J = \rho_0 r^2 \frac{2V}{\rho_0 (b^2 - a^2)(r)} = \frac{2Vr}{(b^2 - a^2)} \quad 0.75$$