

تحقیق در عملیات ۳

استاد:

دکتر ناصر حمیدی

برنامه ریزی با اعداد صحیح «LP»

مفروضات یک مدل LP: ۱- فرض تناسب

۲- فرض جمع پذیری

۳- فرض بخش پذیری

۴- فرض معین بودن

در مدل LP فرض بخش پذیری را نداریم.

روش حل اول: گرد کردن جوابها

مساله LP را بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن حل نموده و سپس جوابها را گرد می کنیم.

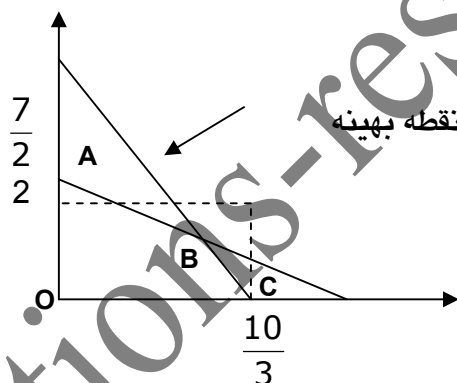
$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

s.t :

$$3x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{Int.}$$



نقطه	مختصات	مقدار Z
O	(0,0)	0
A	(0, $\frac{7}{2}$)	$\frac{21}{2}$
B	($\frac{10}{3}, \frac{11}{5}$)	$\frac{98}{3}$ ✓
C	($\frac{10}{3}, 0$)	$\frac{50}{3}$

$$x_1^* = \frac{13}{5} = 2/6 \approx 3$$

$$x_2^* = \frac{11}{5} = 2/1 \approx 2$$

$$Z_{IP}^* = 5(3) + 3(2) = 21$$

ایراد وارد به این روش آنست که ممکن است جواب انتخابی LP ناموجه باشد و هنگامی که مساله دارای چندین متغیر

باشد نمی توانیم آنرا تشخیص دهیم اما تشخیص این امر در روش ترسیمی امکان پذیر است. نقطه بهینه انتخابی اشتباه

است و نمی توان به این روش اعتماد کرد. (نقطه بهینه روی نمودار صفحه قبل)

روش دوم: شمارش کامل جوابهای صحیح

این روش برای مسائل کوچک و دومتغیره قابل استفاده می‌باشد که طی آن ابتدا مساله را باروش ترسیمی حل و سپس کلیه

نقاط با عدد صحیح در ناحیه را انتخاب می‌کنیم از قرار دادن جوابها در تابع هدف Z بهینه خواهد شد. برای مثال داریم:

$$\begin{aligned} Z &= 5(0) + 3(3) = 9 \\ &= 5(1) + 3(3) = 14 \\ &= 5(2) + 3(2) = 16 \\ &= 5(3) + 3(1) = 18 \quad \checkmark \\ &= 5(3) + 3(0) = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Z_{IP}^* = 18 \\ x_1^* = 3 \\ x_2^* = 1 \end{cases}$$

هنوز برای مسائل برنامه ریزی عدد صحیح روشی قطعی مانند الگوریتم سیمپلکس ارائه نشده است. و تحقیقات در زمینه حل مسائل برنامه ریزی LP اشاره خواهیم نمود. پیش از پرداختن به حل با الگوریتم ها لازم است مدلهای برنامه ریزی عدد صحیح را دسته بندی کنیم:

۱- اگر تمامی متغیرهای برنامه ریزی شرط عدد صحیح بودن را داشته باشند می‌گوییم با برنامه ریزی عدد صحیح محض روبرو هستیم.

۲- هرگاه در مدلی فقط تعدادی از متغیرها شرط صحیح بودن را داشته باشند می‌گوییم با مساله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط روبرو هستیم.

۳- اگر متغیرهای یک مساله برنامه ریزی عدد صحیح فقط مقادیر صفر یا یک به خود نگیرد می‌گوییم با حالت خاص برنامه ریزی عدد صحیح که آنرا برنامه ریزی صفر و یک می‌نامند روبرو هستیم.

الگوریتم اول حل مسائل عدد صحیح

-الگوریتم انشعاب و تحدید $Branch\ and\ Bound \rightarrow Band\ B$

در این روش که در سال ۱۹۶۰ توسط $Land$ و $Doig$ ارائه گردید. ابتدا مساله را بدون در نظر گرفتن شرط صحیح بودن حل می‌کنند. آنگاه از بین متغیرهایی که جواب صحیح ندارند یکی از متغیرها را انتخاب می‌کنند مسلماً از بین بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از مقدار بهینه متغیر انشعاب که آنرا L می‌نامیم و از $L+1$ که مدنظر ما قرار می‌گیرند فضایی بوجود می‌آید که در این فضا هیچ جواب عدد صحیحی وجود ندارد. لذا اگر متغیر انشعاب X_j باشد دو محدودیت

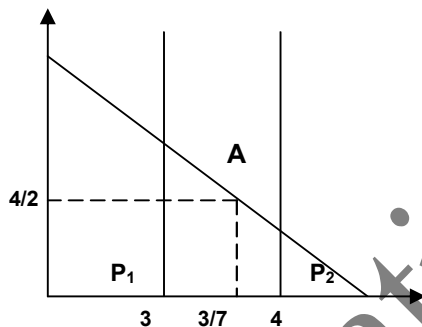
جایی که: $x_j \leq L$, $x_j \geq L+1$ به ترتیب به مدل اضافه شده و مجدداً هر یک از مدل های جدید حل می شوند این عمل تا

✓ ۱- به یک جواب موجه LP برسیم.

✓ و ۲- هیچ ناحیه موجهی باقی نماند. ادامه می یابد و هرگاه یکی از این دو حالت پیش آمد به منزله تحدید خواهد بود.

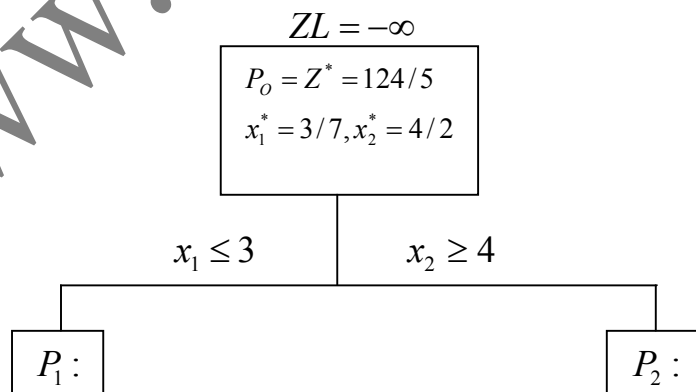
فرض کنید برای یک مساله مفروض نقطه A با مختصات (۳/۷ و ۴/۲) جواب بهینه LP می باشد اگر متغیر x_1 به دلخواه برای انشعاب انتخاب شود بین بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از ۳/۷ یعنی ۳ و عدد بعدی یعنی ۳+۱ هیچ جواب موجه صحیحی وجود ندارد لذا این ناحیه را حذف و با دو مساله جدید P_1 , P_2 روبرو می شویم.

برای حل یک مساله با استفاده از روش انشعاب و تحدید که مساله دو متغیره می باشد از روش ترسیمی و اگر چند متغیره باشد از روش سیمپلکس استفاده کنید. قدم های حل مساله عبارتند از:



قدم اول: مساله را بدون توجه به صحیح بودن متغیرها حل کنید. اگر به جواب صحیح رسیدید توقف نمایید در غیر اینصورت به قدم دوم بروید.

قدم دوم: برای جلوگیری از گمشدگی اطلاعات به ازاء هر مساله ای که حل می کنید (مساله اصلی و مسائل فرعی انشعاب) مستطیلی را در نظر بگیرید و مقدار تابع هدف و مقدار متغیرها را به همراه شماره مساله p_i در آن بیاورید برای حل مساله اصلی p_0 را انتخاب کنید.



مسلماً همواره $Z^*LP \leq Z^*IP$ می باشد و اگر یک مساله Max سازی داشته باشیم می توان گفت بدترین Z که انتظار داریم $(ZL = -\infty)$ خواهد بود همچنین در مسائل Min سازی بدترین Z مورد انتظار و برای LP $(Z = +\infty)$ خواهد بود. این مقدار را بر روی مستطیل p_0 می نویسند و زمانی که به جواب بهتری رسیدند این عدد را خط زده و جواب بهتر را جایگزین می کنند.

قدم سوم: یکی از متغیرهای تصمیم را که دارای مقدار عدد صحیح نیست انشعاب کنید و آنرا متغیر انشعاب بنامید آنگاه دو محدودیت زیر را اضافه کنید و دو مساله جدید بسازید:

$$xj \geq L+1$$

$$xj \leq L$$

قدم چهارم: این قدم نام قدم تحدید شناخته می شود و طی آن مسائل جدیدی را که بوجود آورده ایم را حل می کنیم اگر به جواب موجه جدید دست یافتیم که مقدار آن بهتر از Z_L بود جایگزین نماییم و یا اینکه اگر با یکی از شروط زیر روبرو شده اید به عمق رسیده اید و مساله را متوقف کنید. انشعاب ها در یکی از سه حالت زیر به عمق می رسند و دیگر آن انشعاب را ادامه نمی دهیم:

۱- مقدار تمامی متغیرها عدد صحیح گردد یا به یک جواب موجه عدد صحیح برسیم.

۲- مساله فرعی فاقد ناحیه موجه باشد.

۳- مقدار Z موجه بدست آمده در انشعاب بدتر از Z_L فعلی باشد.

قدم پنجم: اگر تمامی انشعاب ها به عمق رسیدند مساله را متوقف کنید. و مستطیلی را که مقدار تابع هدفش مساوی Z_L است بعنوان جواب بهینه انتخاب کنید.

مسائل چند متغیره: اگر یک مساله چند متغیره LP دارید به یکی از روشهای زیر عمل کنید:

۱- P_0 را به روش سیمپلکس حل کنید انشعاب را انجام دهید مسائل p_1 و p_2 را مجدداً به روش سیمپلکس حل کنید و ... ایراد این روش آنست که بسیار وقت گیر است.

۲- P_0 را به روش سیمپلکس حل کنید سپس از تحلیل حساسیت برای اضافه شدن محدودیت جدید استفاده کنید اگر محدودیت جدیدی (یعنی $xj \leq L$ یا $xj \geq L+1$) زائد باشند آنرا در حل مدل تاثیر ندهید و در صورتی که مؤثر باشند آنرا به مساله اضافه و مجدداً مساله جدیدی را حل کنید این عمل را تا رسیدن به جواب بهینه طبق الگوریتم انشعاب و تحدید ادامه دهید.

۳-مساله P_0 را به روش سیمپلکس حل کنید بجای اضافه نمودن محدودیتهای جدید به مساله از روش تغییر متغیر استفاده نمایید و مسائل جدید را مجدداً حل کنید این عمل را تا رسیدن به جواب بهینه نهایی ادامه دهید. بنظر می رسد که روش سوم یعنی تغییر متغیر برای مسائل چند متغیره بهتر و کاراتر از دو روش دیگر باشد با این حال هنگام حل مساله با نرم افزارهای مختلف می توان بکارگیری هریک از این ها را مشاهده کرد.

مثال: مدل برنامه ریزی عدد صحیح زیر مفروض است با استفاده از روش انشعاب و تحدید جواب بهینه را بدست آورید:

P_0 :

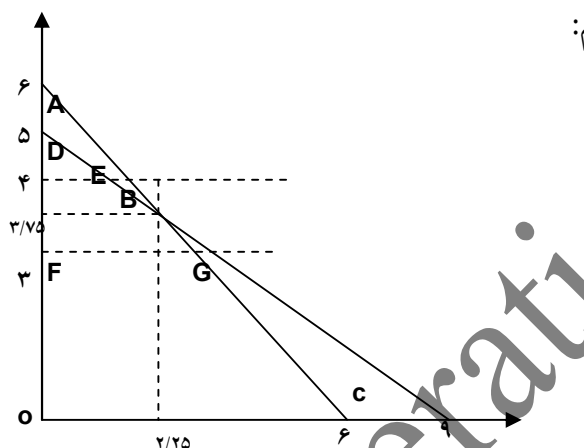
$$\text{Max} Z = 5x_1 + 8x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{Int}$$



بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن مساله را حل می کنیم:

بین ۳ و ۴ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد

پس این فاصله حذف می شود.

نقطه	مختصات	مقدار Z
O	(0,0)	0
A	(0,5)	40
B	(2/25, 3/75)	41/25
C	(6,0)	30

برای انشعاب متغیر x_2 را انتخاب می کنیم.

$P_1 :$

$$MaxZ = 5x_1 + 8x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

$P_2 :$

$$MaxZ = 5x_1 + 8x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

به روش ترسیمی P_1 و P_2 را حل می کنیم: مختصات روی شکل صفحه قبل:

نقطه	مختصات	مقدار Z	نقطه	مختصات	مقدار Z
D	(0,4)	32	O	(0,0)	0
E	(1/8,4)	41✓	F	(0,3)	24
A	(0,5)	40	G	(3,3)	39✓
			C	(6,0)	30

انشعاب بعدی را بایستی بر روی x_1 بدهیم: و مسائل جدید را P_3 و P_4 می نامیم:

$P_3 :$

$$MaxZ = 5x_1 + 8x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

$P_4 :$

$$MaxZ = 5x_1 + 8x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

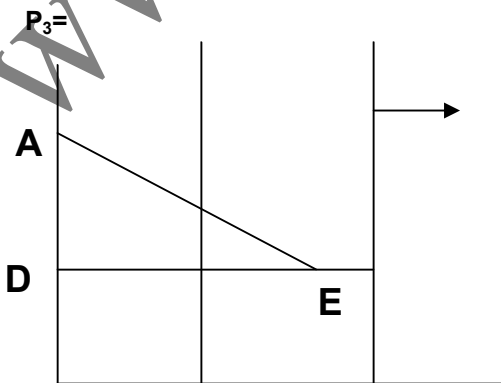
$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_2 \geq 4$$

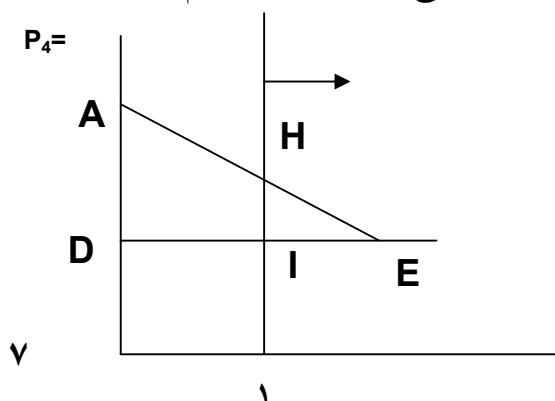
$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

جواب بهینه عدد صحیح در ناحیه فوق نداریم ← فاقد جواب است.



$P_3 =$ فاقد جواب



$P_4 =$

نقطه	مختصات	مقدار Z
D	(0,4)	32
A	(0,5)	40
H	(1,4/5)	40/6 ✓
I	(1,4)	37

$P_5 :$

$$\text{Max} Z = 5x_1 + 8x_2$$

st

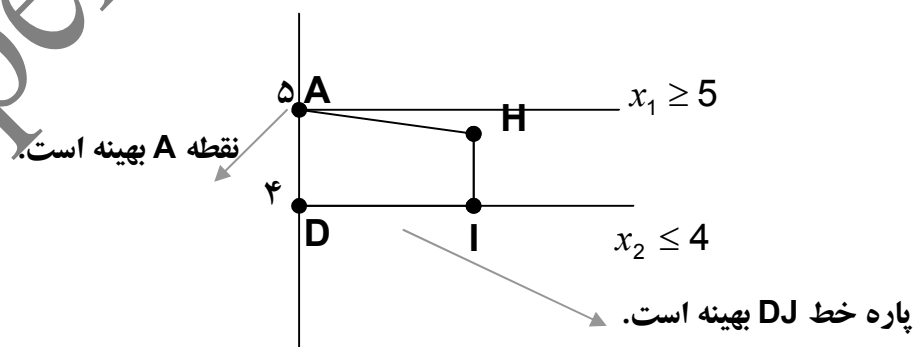
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{Int} \end{aligned}$$

$P_6 :$

$$\text{Max} Z = 5x_1 + 8x_2$$

st

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{Int} \end{aligned}$$



نقطه	مختصات	مقدار Z
A	(0,5)	40
D	(0,4)	32
I	(1,4)	37

$$Z = -\infty$$

^

$p_0 :$

$$Z = 41/25 \quad x_1 = 2/25$$

$$x_2 = 3/75$$

این جواب را نمی پذیریم زیرا Z آن از Z بهینه کمتر است.
 $37 < 40$

$$\begin{cases} Z_{IP}^* = 40 \\ x_1^* = 0 \\ x_2^* = 5 \end{cases} \quad \text{جواب بهینه:}$$

حل مدل به روش سیمپلکس

مساله قبل یعنی p_0 را بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن متغیرهای تصمیم به روش سیمپلکس حل می کنیم:

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
--	-------	-------	-------	-------	-----

Z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$41\frac{1}{4}$
X ₁	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
X ₂	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$

P_0 :

$$MaxZ = 5x_1 + 8x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

اگر بخواهیم مدل فوق را با سیمپلکس معمولی تا آخر حل کنیم بایستی هریک از مسائل p_1, p_2 و تا p_6 را که در روش ترسیمی نوشتیم بصورت جداگانه و با روش سیمپلکس حل کنیم. یعنی عملاً ۶ بار بایستی عملیات سیمپلکس را تا تحقق شرط بهینگی تکرار کنیم. اگر بخواهیم از روش تحلیل حساسیت پیش برویم عملیات نسبت به روش قبل اندکی ساده تر است. اما مشکل اضافه شدن به محدودیت مؤثر بعنوان یک سطر اضافی در تابلو وجود دارد. برای آشنایی یک تکرار از عملیات را برای تحلیل حساسیت نمایش می دهیم.

در تابلوی نهایی p_0 متغیری را که بزرگترین عدد اعشار را دارد برای انشعاب انتخاب می کنیم. متغیر x_2 خواهد بود. $x_2 = 3\frac{3}{4}$ ، محدودیتهای ناشی از انشعاب را می نویسیم:

$$x_2 = 3\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_2 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

جواب بهینه را در هریک از محدودیتهای قرار می دهیم و محدودیت زائد را کنار گذاشته و محدودیت مؤثر را انتخاب و به تابلوی نهایی اضافه می کنیم و با تحلیل حساسیت محدودیت اضافه شده به مدل، یکبار کردن سطر جدید را برای متغیرهای پایه انجام می دهیم شرط موجه بودن نقض می گردد. آنرا با استفاده از سیمپلکس ثانویه ایجاد می کنیم. «از آنجاییکه این روش مستلزم صرف منابع بالایی است لذا توصیه نمی شود»

روش سوم:

در این روش از تغییر متغیر استفاده می کنیم بدین صورت که محدودیت های ناشی از انشعاب را نوشته و آنها را با ۲ متغیر جدید بنامهای y_1 به شکل محدودیت تساوی در آورده و تغییر لازم را در تابلوی نهایی می دهیم در صورت نقض شرط موجه بودن با سیمپلکس ثانویه عملیات را ادامه خواهیم داد.

جواب بهینه p_0 را در اختیار داریم با انتخاب x_2 بعنوان متغیر انشعاب و اضافه شدن محدودیتهای جدید دو مساله p_1, p_2 بوجود می آیند برای p_1 از قبل داریم: $x_2 \geq 4$ و برای p_2 داریم: $x_2 \leq 3$

می توان با متغیر y_2 آنها را به شکل تساوی درآورد:

$$x_2 = 4 + y_2 \quad \text{برای } p_1 :$$

$$x_2 = 3 - y_2 \quad \text{برای } p_2 :$$

$$p_1 : \quad x_2 \geq 4 \quad p_2 : \quad x_2 \leq 3$$

↓

↓

$$x_2 = 4 + y_2 \quad x_2 = 3 - y_2$$

در تابلوی نهایی p_0, x_2 را با $y_2 + 4$ جایگزین می کنیم آنگاه تابلوی p_1 بدست می آید:

جای $x_2 \leftarrow y_2 + 4$ قرار داده و سطر سوم را محاسبه می کنیم:

شرط صحیح بودن فقط برای x_2 هاست.

با سیمپلکس ثانویه ادامه می دهیم ←

(شرط موجه بودن نقض شده)

	x_1	y_2	↓ s_1	s_2	RHS
Z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$41\frac{1}{4}$
x_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
$\leftarrow y_2$	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
Z	0	1	0	1	41
x_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
s_1	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$x_1^* = \frac{9}{5} = 1/8$$

$$x_2^* = 4 + y_2 = 4 + 0 = 4$$

$$Z^* = 41$$

چون y_2 در پایه نیست، صفر است.

نکته: «همواره این رابطه $Z_{LP}^* \geq Z_{IP}^*$ برقرار است»

برای رسیدن به مساله p_2 در تابلوی نهایی p_0 بایستی x_2 را با $3 - y_2$ جایگزین کنیم:

	X_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$41\frac{1}{4}$
X_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
$\leftarrow y_2$	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
Z	0	3	5	0	39
X_1	1	-1	1	0	3
S_1	0	-4	-5	1	3

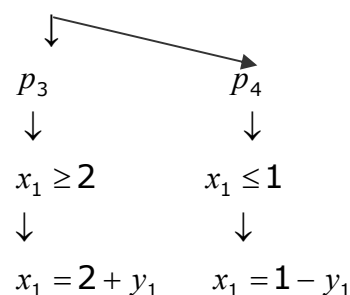
$$\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 3 \\ Z^* = 39 \end{cases}$$

↑ «به عمق رسیده است»

انشعاب را از p_1 ادامه خواهیم داد بنابراین تابلوی مرجع ما تابلوی p_1 خواهد بود.

	X_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
X_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
S_1	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

تابلوی $p_1 \leftarrow$



در روی تابلوی p_1 نهایی متغیری را که دارای بزرگترین مقدار اعشاری بدون متغیر انشعاب انتخاب کنید در اینجا x_1 بعنوان متغیر انشعاب انتخاب میشود که تنها متغیر واجد شرایط است:

p_1 :

	X_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
X_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
S_1	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$p_3 :$

	y_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
y_1	1	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
S_1	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$



متغیر ورودی نداریم مساله فاقد جواب موجه است.

$p_4 :$

	y_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	1	0	1	41
y_1	1	$-\frac{9}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
S_1	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
y_2	$-\frac{5}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
S_1	$-\frac{4}{9}$	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$\begin{cases} x_1^* = 1 - y_1 = 1 - 0 = 1 \\ x_2^* = 4 + y_2 = 4 + \frac{4}{9} = 4\frac{4}{9} \\ Z = 40\frac{5}{9} \end{cases}$$

انشعاب را از p_4 ادامه می دهیم همانگونه که در جوابها مشخص است تنها متغیر مورد نظر برای انشعاب x_2 خواهد بود لذا مساله p_5 و p_6 به شکل زیر تشکیل می گردند.

$$\begin{array}{lcl} p_4 : & & p_5 : \\ x_2 \geq 5 & & x_2 \leq 4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_2 = 5 + y'_2 & & x_2 = 4 - y'_2 \end{array}$$

در تابلوی نهائی p_4 با جایگزینی $x_2 = 5 + y'_2$ به تابلوی p_5 می رسمیم. از آنجایی که در مراحل قبل از y_2 استفاده شده بود در اینجا y'_2 را بکار می بریم.

$p_4 :$

	y_1	y_2	S_1	S_2	RHS
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
y_2	$-\frac{5}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
S_1	$\frac{4}{9}$	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$

$p_5 :$

	y_1	y'_2	S_1	S_2	RHS
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
$\leftarrow y'_2$	$-\frac{5}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{5}{9}^*$
S_1	$\frac{4}{9}$	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$
Z	0	1	0	$\frac{7}{9}$	40
y_1	1	$-\frac{9}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1

$p_6 :$

	y_1	y'_2	S_1	S_2	RHS
Z	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$40\frac{5}{9}$
y'_2	$\frac{5}{9}$	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$
S_1	$-\frac{4}{9}$	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
Z	$\frac{35}{9}$	8	0	0	37
S_2	-5	-9	0	1	4

S_1	0	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{45}$	1
-------	---	----------------	---	----------------	---

S_1	-1	-1	1	0	1
-------	----	----	---	---	---

$$x_2 = 4 + y_2 \rightarrow y_2 = x_2 - 4$$

ابتدا y را به x_2 برمی گردانیم پس به y' تبدیل می کنیم:

$$-\frac{5}{9}y_1 + x_2 - 4 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{4}{9}$$

$$-\frac{5}{9}y_1 + x_2 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{4}{9} + 4 = \frac{40}{9}$$

$$-\frac{5}{9}y_1 + 5 + y'_2 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{40}{9}$$

$$-\frac{5}{9}y_1 + y'_2 + \frac{1}{9}S_2 = \frac{40}{9} - 5$$

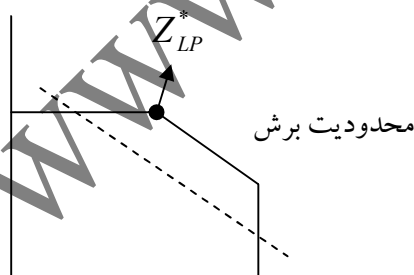
$$-\frac{5}{9}y_1 + y'_2 + \frac{1}{9}S_2 = -\frac{5}{9}^*$$

روش صفحه برش گموری

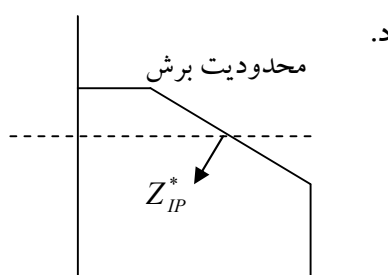
Gomory Cutting Plane

یکی از مشکلاتی که در روش انشعاب و تحدید وجود داشت انتخاب متغیر انشعاب و اضافه شدن محدودیتهای جدید بود ما می توانیم این مساله را با استفاده از روش پیشنهادی آقای گموری برطرف کنیم. بدین صورت که پس از حل مساله با روش ترسیمی یا سیمپلکس و بدون در نظر گرفتن شرط صحیح بودن جواب بهینه بدست می آید. آنگاه در هر تکرار با استفاده از خطی که آنرا محدودیت برش می نامند بخشی از صفحه را به گونه ای برش می دهیم که هیچ جواب موجه عدد صحیحی در ناحیه برش خورده وجود نداشته باشد و ما را به جواب عدد صحیح نزدیک نماید (بی تردید برش در صفحه مقدار تابع هدف را کاهش می دهد) نمونه هایی از محدودیت های برش در شکل زیر که منجر به رسیدن از Z_{LP}^*

فرضی به Z_{IP}^* فرضی است دیده می شود.



۱



۲

اولین چیزی که در شکل فوق نظر شما را جلب می کند آنست که محدودیتهای برش برچه مبنایی رسم شده اند؟

برای رسم محدودیتهای برش ضروری است تا معادله خط برش را داشته باشیم که آنرا محدودیت برش نیز می نامند. معادله خط برش که توسط آقای گموری اثبات گردید برابر است با:

$$-\sum [a_{ij}]_F W_j + S_{gi} = -[b_i]_F$$

در این رابطه: W_j نشان دهنده متغیرهای غیر پایه

$[a_{ij}]_F$ نشان دهنده جزء کسری ضریب متغیرهای غیر پایه

$[b_i]_F$ نشان دهنده جزء کسری مقادیر سمت راست

S_{gi} نشان دهنده متغیر کمکی گموری می باشد.

پس از آشنایی با معادله خط برش ابتدا ضروری است تا بدانیم این معادله به چه طریق توسط گموری اثبات شده است و سپس نحوه استفاده از آن را یاد بگیریم.

اثبات معادله خط برش یا محدودیت گموری:

فرض کنید تابلوی زیر تابلوی نهایی مربوط به یک مسئله مفروض است که در آن V_1 تا V_m نشان دهنده متغیرهای پایه و W_1 تا W_n نشان دهنده متغیرهای غیر پایه می باشد.

	W_1	W_2	...	W_n	V_1	V_2	...	V_n	R.H.S
Z	$C_j \geq 0$				0	0		0	y_0
V_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
V_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2
...	.	.		.	.	.		.	.
...	.	.		.	.	.		.	.
V_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0		1	b_m

می توانیم سطر i ام این تابلو را در خارج از تابلو به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \dots + a_{in}\omega_n + V_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\omega_j + V_i = b_i$$

معادله شماره (۱) ←

می دانیم که هر عدد را می توان بصورت مجموع جزء صحیح و جزء کسری آن عدد در نظر گرفت. همچنین می دانیم که جزء کسری هر عدد، عدد مثبت بین صفر و یک می باشد. و برای تعیین جزء صحیح و جزء کسری بشرح زیر عمل می کنیم:

هر عدد را در نظر بگیرید؛ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از آن عدد بعنوان جزء صحیح و فاصله آن عدد تا جزء صحیح بعنوان جزء کسری پذیرفته می شود.

برای عدد $5\frac{2}{3}$ جزء صحیح و جزء کسری عبارتند از:

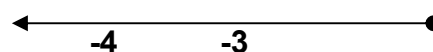
5: جزء صحیح

$\frac{2}{3}$: جزء کسری

$$5\frac{2}{3} = [5]_I + \left[\frac{2}{3}\right]_F$$

برای هریک از اعداد زیر جزء کسری و جزء صحیح آنرا بنویسید.

عدد	جزء صحیح	جزء کسری
$2\frac{3}{10}$	2	$\frac{3}{10}$
4	4	0
$-3\frac{1}{4}$	-4	$\frac{3}{4}$
-5	-5	0
0/2	0	0/2
-0/4	-1	0/6



جزء کسری همیشه عددی مثبت است.

در معادله شماره یک a_{ij} ها و b_i ها عدد می باشند لذا می توان آنها را به شکل مجموع جزء صحیح و جزء کسری نوشت:

$$a_{ij} = [a_{ij}]_I + [a_{ij}]_F$$

$$b_i = [b_i]_I + [b_i]_F$$

و می دانیم که:

$$0 \leq [aij]_F < 1$$

$$0 \leq [bi]_F < 1$$

اینک با روابطی که داریم می توان معادله (۱) را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\sum_{j=1}^n [aij]_I + [aij]_F W_j + Vi = [bi]_I + [bi]_F$$

یا

$$\sum_{j=1}^n [aij]_I W_j + \sum_{j=1}^n [aij]_F W_j + Vi = [bi]_I + [bi]_F$$

می دانیم که جواب مساله بایستی عدد صحیح باشد لذا مقادیر صحیح به همراه متغیر پایه Vi به سمت چپ و مقادیر کسری را به سمت راست انتقال می دهیم:

$$\sum_{j=1}^n [aij]_I W_j - [bi]_I + Vi = [bi]_F - \sum_{j=1}^n [aij]_F W_j$$

بنابراین سمت چپ معادله جدید یک عدد صحیح خواهد بود از آنجاییکه دو طرف با همدیگر مساوی هستند بنابراین بایستی سمت راست معادله نیز عدد صحیح باشد.

می دانیم که $W_j \geq 0$ می باشد همچنین جزء کسری $0 \leq [aij]_F < 1$ قرار دارد آنگاه حاصل $[aij]_F W_j \geq 0$ خواهد بود. در سمت راست معادله ملاحظه می کنیم این مقدار غیرمنفی از $[bi]_F$ کسر شده و حاصل عددی صحیح است. لذا این عدد صحیح الزاماً صفر یا منفی خواهد بود. بنابراین می توانیم قرار دهیم:

$$[bi]_F - \sum_{j=1}^n [aij]_F W_j \leq 0 \quad \text{معادله شماره (۲)}$$

اینک می توان نامعادله (۲) را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$-\sum_{j=1}^n [aij]_F W_j \leq -[bi]_F$$

و با اضافه نمودن متغیر کمکی گموری Sgi ، آنرا به شکل زیر درآورد:

$$-\sum_{j=1}^n [aij]_F W_j + Sgi = -[bi]_F$$

بدین ترتیب محدودیت گموری اثبات می گردد.

اینک که با اثبات محدودیت برش آشنا شدیم بایستی نحوه استفاده از آنرا طی الگوریتم حل مسائل عدد صحیح با روش برش یا گموری بیاموزیم.

الگوریتم صفحات برش:

قدم اول: در مسئله خود a_{ij} ها و b_i ها قبل از شروع به حل کنترل نمایید تا به شکل عدد صحیح باشد. محدودیت شماره (۲) مساله ای به شکل زیر می باشد:

$$(۲) 3x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \leq \frac{1}{5}$$

نمی توان بخاطر ضرایب غیر صحیح a_{ij} و b_i مساله را با روش برش حل نمود. لذا از کوچکترین مضرب مشترک برای تبدیل آنها به عدد صحیح استفاده می کنیم.

$$\xrightarrow{\text{ك. م. م. } 60} 180x_1 + 15x_2 + 40x_3 \leq 12$$

قدم دوم: مساله را بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن متغیرها حل کنید و جواب بهینه را بدست آورید. اگر جواب بهینه عدد صحیح است توقف کنید در غیر این صورت به قدم سوم بروید.

قدم سوم: محدودیتی را که در تابلوی نهایی جواب بهینه متغیر پایه آن مقدار غیر صحیح است انتخاب و محدودیت برش را برای آن بنویسید. محدودیت برش را به جدول نهایی اضافه و با سیمپلکس ثانویه جواب بعدی را پیدا کنید و به گام دوم بازگردید.

مثال: برنامه ریزی برای شرکت تولیدی در قالب مدل LP زیر ارائه شده است جواب بهینه را با استفاده از روش برش بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 8x_2 \\ (1) \quad 2x_1 - 6x_2 &\leq 3 \\ (2) \quad -x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\ (3) \quad 2x_1 + 2x_2 &\leq 13 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{Int} \end{aligned}$$

جدول بهینه مساله به شکل زیر می باشد:

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	0	0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{134}{5}$

S_1	0	0	1	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{42}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\leftarrow \frac{22}{10} = 2/3$ متغیر انتخابی برای نوشتن $2/3$ محدودیت برش
X_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{5} = 2/1$

از قدم سوم:

از بین قادیر سمت راست برای متغیرهای دارای شرط عدد صحیح متغیری را که بیشترین جزء کسری را دارد انتخاب نمایید و محدودیت برش را برای آن بنویسید:

$$1x_2 + \frac{1}{5}S_2 + \frac{1}{10}S_3 = 2\frac{3}{10} = 2/3$$

متغیر غیر پایه (معادل [W] در معادله برش) متغیر پایه

$$-\left[\frac{1}{5}S_2 + \frac{1}{10}S_3\right] + Sg_1 = -\left[\frac{3}{10}\right]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5}S_2 - \frac{1}{10}S_3 + Sg_1 = -\frac{3}{10}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	RHS
Z	0	0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{134}{5}$
S_1	0	0	1	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{42}{5}$
X_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
X_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{21}{5}$
$Sg_1 \leftarrow$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{3}{10}$
Z	0	0	0	0	1	6	25
S_1	0	0	1	0	-1	8	6
X_2	0	1	0	0	0	1	2
X_1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{45}{10}$
S_2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-5	$\frac{3}{2}$

محدودیت برش X_1 است:

$$1x_1 + \frac{1}{2}S_3 - Sg_1 = \frac{45}{10}$$

$$-\left[\frac{1}{2}S_3 + 0Sg_1\right] + Sg_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}S_3 - Sg_2 = 0/5$$

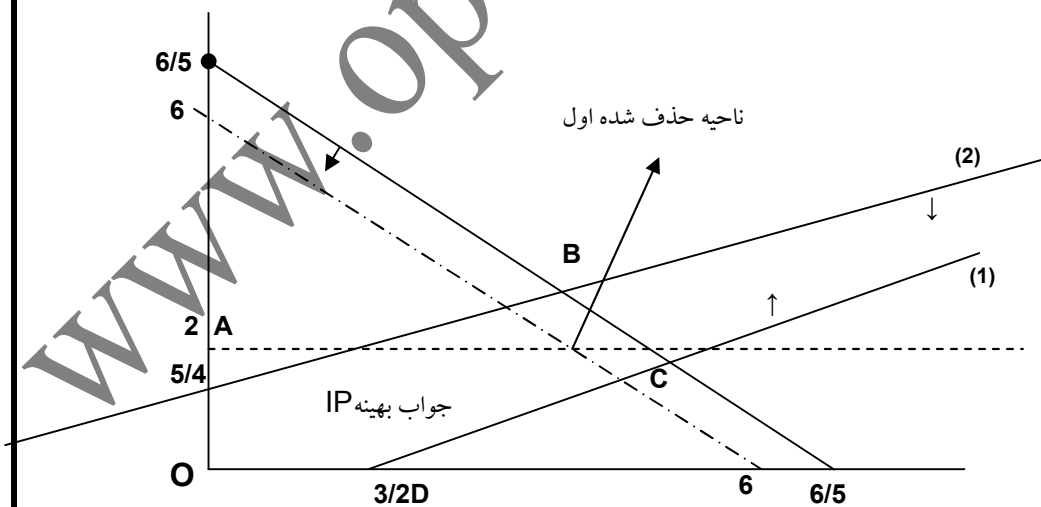
$$-\frac{1}{2}S_3 + Sg_2 = -0/5 = -\frac{1}{2}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	Sg_2	RHS
Z	0	0	0	0	1	6	0	25
S_1	0	0	1	0	-1	8	0	6
X_2	0	1	0	0	0	1	0	2
X_1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{45}{10}$
S_2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-5	0	$\frac{3}{2}$
Sg_2	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
Z	0	0	0	0	0	6	2	24
S_1	0	0	1	0	0	8	-2	7
X_2	0	1	0	0	0	1	0	2
X_1	1	0	0	0	0	-1	1	4
S_2	0	0	0	1	0	-5	1	1
S_3	0	0	0	0	1	0	-2	1

$$\begin{cases} Z^* = 24 \\ x_1^* = 4 \\ x_2^* = 2 \end{cases}$$

اینک می خواهیم نحوه رسم محدودیتهای برش را در فضای موجه مساله دوبعدی شاهد باشیم:

نقطه B جواب بهینه LP است.



- (1) ≤ 3
 (2) $\leq 5 \rightarrow -x_1 + 4x_2 + S_2 = 5$
 (3) $\leq 13 \rightarrow 2x_1 + 2x_2 + S_3 = 13$

در محدودیت برش اول قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} *) \quad S_2 &= 5 + x_1 - 4x_2 \\ S_3 &= 13 - 2x_1 - 2x_2 \\ -\frac{1}{2}S_3 + Sg_2 &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5}S_2 - \frac{1}{10}S_3 + Sg_1 &= -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5}(5 + x_1 - 4x_2) - \frac{1}{10}(13 - 2x_1 - 2x_2) &\leq -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

معادله خط برش اول $x_2 \leq 2$

$$-\frac{1}{2}(13 - 2x_1 - 2x_2) \leq -\frac{1}{2}$$

معادله خط برش دوم $x_1 + x_2 \leq 6$

$$Max Z = 3x_1 + \frac{10}{3}x_2$$

S.t

$$3x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$x_1 - \frac{3}{4}x_2 \leq 9 \xrightarrow{\times 4} 4x_1 + 3x_2 \leq 36$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 8 \xrightarrow{\times 2} 2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

تابلوی اول سیمپلکس

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	-3	$-\frac{10}{3}$	0	0	0	0
S_1	3	4	1	0	0	40
S_2	4	3	0	1	0	36
S_3	2	1	0	0	1	16
Z	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{100}{3}$

X_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	10
S_2	$\frac{7}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	6
S_3	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	6
Z	0	0	$-\frac{13}{21}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{736}{21}$
X_2	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{52}{7}$
X_1	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{24}{7}$
S_2	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1	$\frac{12}{7}$

$$\text{محدودیت اول} = x_2 + \frac{4}{7}S_1 - \frac{3}{7}S_2 = \frac{52}{7}$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -\frac{4}{7}S_1 - \frac{4}{7}S_2 + Sg_1 = -\frac{3}{7}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Sg_1	RHS
Z	0	0	$\frac{13}{21}$	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{736}{21}$
X_2	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{52}{7}$
X_1	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	0	$\frac{24}{7}$
S_3	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$	0	0	$\frac{12}{7}$
$\leftarrow Sg_1$	0	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	1	$-\frac{3}{7}$
Z	0	0	3	0	0		
X_2	0	1	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{55}{8}$
X_1	1	0	-1	0	0	1	3
S_3	0	0	1	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{63}{25}$
S_2	0	0	1	1	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$x_2 + 1S_1 + \frac{3}{4}Sg_1 = \frac{217}{28} \quad \text{یا} \quad \frac{3}{4}$$

$$+ \left[0S_1 + \frac{3}{4}Sg_1 \right] + Sg_2 = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4}Sg_1 + Sg_2 = -\frac{3}{4}$$

روش برش اولیه تماماً عدد صحیح:

یکی از ایرادات وارده به روش برش آنست که در هر تکرار یک متغیر و یک محدودیت به مدل اضافه می شود. و این امر منجر به آن خواهد شد که مساله به اندازه ای گسترده شود تا در بعضی مواقع از انجام محاسبات بهر دلیل ممکن امتناع نموده و جواب صحیح بدست نیاوریم. وجود چنین مشکلی استفاده از روش برش اولیه تماماً عدد صحیح را روشی کارا تر و روشی که می تواند از مشکلات روش برش بکاهد معرفی نمود.

از مزایای این روش آنست که ضرورت ندارد ابتدا جواب LP را داشته باشیم و طی قدمهایی که بر می داریم کنترل خواهیم نمود که به اعداد صحیح برسیم ضمناً این روش از سیمپلکس ثانویه استفاده نمی کند. برای استفاده از این روش الگوریتم زیر را بکار می بریم:

قدم اول: شرط عدد صحیح بودن a_{ij} ها و b_i ها در مدل اولیه را تعیین کنید.

قدم دوم: تابلوی اول سیمپلکس را رسم کنید.

متغیر ورودی به پایه را انتخاب نمایید. سپس با قاعده حداقل نسبتها متغیر خروجی و عنصر لولا را مشخص کنید.

قدم سوم: اگر عنصر لولا مساوی ۱ می باشد یک تکرار با سیمپلکس اولیه پیش بروید و در غیر اینصورت سطر لولا را بیرون از تابلو نوشته a_{ij} هر متغیر غیر پایه را تقسیم بر عنصر لولا نمایید. و جزء صحیح آنرا در نظر بگیرید. مجموع نتایج در سمت چپ به همراه متغیر برش که آنرا S'_i می نامند سمت چپ معادله خط برش و جزء صحیح حاصل تقسیم مقدار سمت راست بر عنصر لولا که عدد صحیحی خواهد بود سمت راست معادله خط برش را تشکیل می دهد، تشکیل دهید و آنرا به تابلوی نهایی اضافه کنید و یک تکرار با سیمپلکس اولیه پیش بروید.

این الگوریتم را تا جایی که کلیه متغیرهای صحیح به مقدار عدد صحیح دست یابند ادامه دهید:

$$Max Z = x_1 + 4x_2$$

S.t

$$5x_1 + 7x_2 \leq 21$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0, Int$$

چون عنصر لوله $3 \neq 1$ است:

	X1	X2	S1	S2	
Z	-1	-4	0	0	0
S1	5	7	1	0	21
←S2	-1	3	0	1	8

$$-1x_1 + 3x_2 + 1S_2 = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} S_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-1x_1 + 1x_2 + 0S_2 + S'_1 = 2$$

معادله خط برش اول به تابلو اضافه می شود.

	X1	X2	S1	S2	S' ₁	RHS
Z	-1	-4	0	0	0	0
S1	5	7	1	0	0	21
S1	-1	3	0	1	0	8
← S' ₁	-1	1	0	0	1	2
Z	-5	0	0	0	4	8
← S1	12	0	1	0	-7	7
S2	2	0	0	1	-3	2
X2	-1	1	0	0	1	2

$$12x_1 + 0x_2 + 1S_1 - 0S_2 - 7S'_1 = 7$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} S_1 - \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} S'_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$1x_1 + 0S_1 - 1S'_1 + S'_2 = 0$$

	X1	X2	S1	S' ₁	S' ₂	RHS
Z	-5	0	0	4	0	8
S1	12	0	0	-7	0	7
S2	2	0	1	-3	0	2
X2	-1	1	0	1	0	2
← S' ₂	1	0	0	-1	1	0
Z	0	0	0	-1	5	8
← S1	0	0	0	5	-12	7
S2	0	0	1	-1	-2	2
X2	0	1	0	0	1	2
X1	1	0	0	-1	1	0

$$1S_1 + 5S'_1 + (-12)S'_2 = 7$$

$$\left[\frac{1}{5}\right]S_1 + \left[\frac{5}{5}\right]S'_1 - \left[\frac{-12}{5}\right]S'_2 = \left[\frac{7}{5}\right]$$

$$0S_1 + S'_1 - 3S'_2 + S'_3 = 1$$

	X1	X2	S1	S2	$\downarrow$ S'_1	S'_2	S'_3	RHS
Z	0	0	0	0	-1	5	0	8
S1	0	0	1	0	5	-12	0	7
S2	0	0	0	1	-1	-2	0	2
X2	0	1	0	0	0	1	0	2
X1	1	0	0	0	-1	1	0	0
$\leftarrow S'_3$	0	0	0	0	1	-3	1	1

(۱)مساله:

مدل برنامه ریزی خطی مثال فوق را در نظر بگیرید مطلوبست:

الف) آنرا به روش انشعاب و تحدید ترسیمی حل کنید.

ب) آنرا به روش انشعاب و تجدید سیمپلکس (با تغییر متغیر) حل کنید.

ج) با استفاده از روش برش گموری آنرا حل کنید. و محدودیت های برش را رسم نمایید.

	X1	X2	S1	S2	S'_1	S'_2	S'_3	RHS
Z	0	0	0	0	-1	5	0	8
S1	0	0	1	0	5	-12	0	7
S2	0	0	0	1	-1	-2	0	2
X1	0	1	0	0	0	1	0	2
X2	1	0	0	0	-1	1	0	0
$\leftarrow S'_3$	0	0	0	0	1	-3	1	1
Z	0	0	0	0	0	2	1	9
S1	0	0	1	0	0	3	-5	2
S2	0	0	0	1	0	-5	1	3
X2	0	1	0	0	0	1	0	2
X1	1	0	0	0	0	-2	1	1

S'_1	0	0	0	0	1	-3	1	1
--------	---	---	---	---	---	----	---	---

$$\begin{cases} Z^* = 9 \\ x_1^* = 1 \\ x_2^* = 2 \end{cases}$$

مدلهای برنامه ریزی صفر-یک

در هنگام حل مسائل تخصیص یکی از روش های حل فرموله کردن مساله با استفاده از برنامه ریزی LP بود. هنگام مدل سازی فرا گرفتیم که بسیاری از مباحث مطروحه در مدیریت نیز می تواند در برنامه ریزی خطی چنین ویژگی را داشته باشد.

این ویژگی که برای اولین بار با آن آشنا شدیم شرح دو حالتی بودن متغیرهای تصمیم بود. به این صورت که متغیر تصمیم فقط می تواند یکی از دو حالت را داشته باشد و این دو حالت را با صفر و یک نشان می دادیم. در مدل تخصیص متغیر تصمیم به شکل زیر تعریف می شود:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{شغل } i \text{ ام به فرد } j \text{ ام واگذار نشود} \\ 1 & \text{شغل } i \text{ ام به فرد } j \text{ ام واگذار شود} \end{cases}$$

مدلهایی که در آنها متغیرهای صفر و یک وجود داشته باشد بنام مدل های برنامه ریزی صفر و یک معروفند. در مورد این مدلها ضروری است با دو بخش متفاوت آشنا شویم:

۱- چگونه مساله ای را که دارای متغیر صفر و یک است مدله کنیم؟

۲- چگونه یک مساله مدله شده صفر و یک را حل کنیم؟

حل مدل های صفر و یک

در اینجا به حل مدل هایی که از نوع صفر و یک محض هستند می پردازیم. برای آشنایی با حل مدل های صحیح و صفر و یک مختلط به کتاب برنامه ریزی عدد صحیح تألیف دکتر محمدجواد اصغرپور (انتشارات دانشگاه تهران) مراجعه شود. برای حل یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح از روش های زیر می توان استفاده نمود:

۱- **حل مدل با روش سیمپلکس:** استفاده از این روش به دلیل آنکه محدودیتهای متعددی وجود داد و همچنین

مشکلات عدیده ای در حل مدل پدید می آید پیشنهاد نمی گردد. چرا که صرف زمان و منابع زیادی را نیز به همراه دارد.

۲- **حل مدل با روش شمارش کامل:** در این روش تمام جوابهای ممکن برای مدل نوشته شده و از بین آنها

برای مساله جواب شدنی بهینه را انتخاب می کنیم. در روش شمارش کامل اگر n متغیر صفر و یک وجود

داشته باشد ضروری است که به تعداد 2^n حالت شمارش گردد. لذا اگر ۳ متغیر داشته باشیم $2^3 = 8$ شمارش و

اگر ۴ متغیر داشته باشیم $2^4 = 16$ شمارش خواهیم داشت. ملاحظه می شود با افزایش متغیرها کار شمارش بسیار

مشکل می شود. لذا از این روش برای مسائل کوچک استفاده می کنیم.

۳- **حل مدل با روش شمارش ضمنی:**

آقای بالاس (Balas) معتقد است که نیازی به شمارش تمامی حالات وجود ندارد. او با ادامه الگوریتم بالاس

فرایند حل مسائل صفر و یک را تسریع نموده و از عملیات زائد کاسته است.

مثال برای روش شمارش کامل:

مدل برنامه ریزی صفر و یک زیر در اختیار شماست:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - x_2 + 5x_3$$

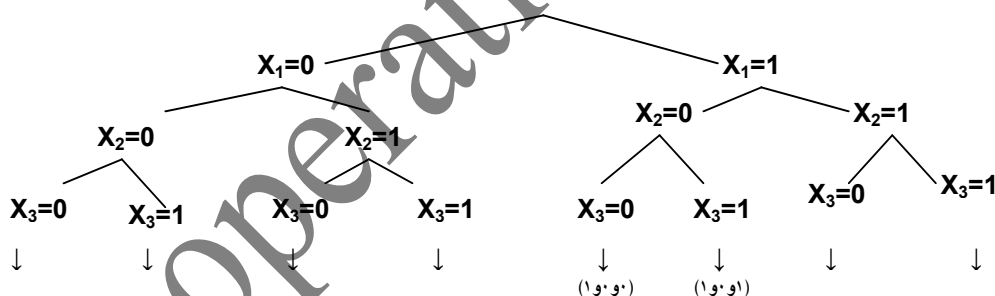
S.t

$$(1) \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$(2) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ یا } 1$$

$$\begin{cases} Z^* = 8 \\ x_1^* = 1 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 1 \end{cases}$$



در محدودیتها قرار

می دهیم

صادق میکند (۱)

صادق میکند (۲)

موجه

Z=0

$$1 \leq 3$$

$$-1 \leq 5$$

موجه

Z=5

$$2*1 \leq 3$$

$$2*1 \leq 5$$

موجه

Z=-1

موجه

Z=4

موجه

Z=3

موجه

Z=8

موجه

Z=2

صادق نمیکند

-

ناموجه

جواب بهینه

الگوریتم بالاس

آقای بالاس الگوریتمی را طراحی نموده است که مدل برنامه ریزی آن استاندارد خاص خود را دارد:

۱- تابع هدف آن به شکل Max سازی است.

۲- تمامی ضرایب تابع هدف بایستی منفی باشند یا صفر (غیر مثبت باشند)

۳- کلیه محدودیتها به شکل کوچکتر مساوی ($\leq$) باشند.

۴- تمامی متغیرها به شکل صفر و یک باشند یعنی $x_j=0$ یا $x_j=1$

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

S.t

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1 \text{ تا } m)$$

$$x_j = 0 \text{ یا } 1$$

برای شروع حل مساله با روش شمارش ضمنی ضروری است که مدل شما به شکل استاندارد بالاس باشد. ممکن است در برخی از مسائل مدل استاندارد نباشد به شکل زیر استاندارد بودن را ایجاد می کنیم:

۱- اگر تابع هدف به شکل Min سازی است با ضرب طرفین آن در (-۱) مدل را به شکل Max در آورید.

۲- اگر ضریب متغیر x_j به شکل مثبت است، آنرا با متغیر $y_j = 1 - x_j$ جایگزینی نمایید تا منفی شدن C_j تضمین شود. (y_j خود از جنس متغیرهای صفر و یک است)

۳- اگر محدودیتی به شکل $\geq$ می باشد طرفین آن را در (-۱) ضرب و مساله را به فرم استاندارد در آورید. (منفی بودن مقادیر سمت راست در فرم استاندارد بالاس مشکلی ایجاد نمی کند).

۴- اگر محدودیتی به شکل تساوی وجود دارد آنرا به دو محدودیت $\leq$ و $\geq$ بازنویسی نموده و محدودیت $\geq$ را همانند حالت ۳ استاندارد کنید.

بدین ترتیب شما با یک مساله برنامه ریزی صفر و یک استاندارد بالاس روبرو خواهید شد. و می توانید قدم های حل مساله را با الگوریتم بالاس پی بگیرید.

مثال) مدل صفر و یک زیر مفروض است با استفاده از الگوریتم بالاس آنرا استاندارد کنید.

$$\text{Max } Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

st.

$$1) \quad 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \geq 6$$

$$2) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_1 \text{ یا } x_5 = 0 \text{ تا } 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - y_1 \\ x_3 = 1 - y_3 \\ x_5 = 1 - y_5 \\ x_2 = y_2 \\ x_4 = y_4 \end{cases} \quad \begin{aligned} (2) & \{ 1 - y_1 - y_2 + 2(1 - y_3) - 4y_4 + 2(1 - y_5) \leq 0 \\ (3) & \{ 1 - y_1 - y_2 + 2(1 - y_3) - 4y_4 + 2(1 - y_5) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= 2(1 - y_1) - y_2 + 5(1 - y_3) - 3y_4 + 4(1 - y_5) \\ &= -2y_1 - y_2 - 5y_3 - 3y_4 - 4y_5 + 11 \end{aligned}$$

st.

$$(1) \quad 3(1 - y_1) - 2y_2 + 7(1 - y_3) - 5y_4 + 4(1 - y_5) \geq 6$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} (1) \quad 3y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 5y_4 + 4y_5 \leq 8$$

$$(2) \quad -y_1 - y_2 - 2y_3 - 4y_4 - 2y_5 \leq -5$$

$$(3) \quad y_1 + y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 \leq 5$$

روش شمارش ضمنی:

الگوریتم شمارش ضمنی (الگوریتم بالاس)

قدم اول:

مساله خود را به شکل استاندارد درآورید.

قدم دوم:

با استفاده از جواب موجه در گره صفر حد پائینی Z_L را مشخص کنید. در صورتی که جواب موجه اولیه ندارید و تمام متغیرها آزاد هستند $Z_L = -\infty$ در نظر بگیرید:

$$Z_L = -\infty$$

قدم سوم:

الگوریتم بالاس همانند روش انشعاب و تحدید است لذا در این قدم با استفاده از ضوابط سه گانه انشعاب یکی از متغیرهای آزاد را برای انشعاب انتخاب کنید.

پیش از پرداختن به ضوابط انشعاب ضروری است با سه مفهوم آشنا شوید.

الف) جواب جزئی: نشان دهنده جوابهای انتخاب شده برای متغیرها می باشد یا بعبارت دیگر به ازای هر متغیری که انشعاب داده ایم یا عدد صفر یا عدد یک انتخاب شده است.

جواب جزئی که آنرا بصورت $p_i(\dots)$ نمایش می دهیم. جواب هر متغیر را نشان می دهد.

اگر در جایی داشته باشیم (۴و۲-۳و۱) p_5 یعنی جواب جزئی گره پنجم را داریم که در آن متغیر x_1 مقدار ۱ و متغیر x_3 و x_2 به دلیل وجود منفی در پشت اندیس آنها مقدار صفر و متغیر x_4 دارای مقدار ۱ است.

$$x_1=1$$

$$x_2=0$$

$$x_3=0$$

$$x_4=1$$

اندیس متغیر انشعاب یافته

$$p_1(1) \rightarrow x_1=1$$

مقدار متغیر انشعاب یافته

اندیس متغیر انشعاب یافته

$$p_2(-1) \rightarrow x_1=0$$

مقدار متغیر انشعاب یافته

مثال: در مساله ۳ متغیر x_1, x_2, x_3 وجود دارد:

انشعاب اول (فرضی) x_1 را انتخاب می کنیم.

انشعاب دوم (فرضی) x_3 را انتخاب می کنیم.

ب) متغیر ثابت: هر متغیری که در جواب جزئی به آن مقدار اختصاص داده شده باشد بنام متغیر ثابت نامیده می شود.

Partial Solution

مثال) مساله دارای ۵ متغیر است: (۵و۲-۱) p_i

$x_1, x_2, x_5 \rightarrow$ Fixed variable متغیرهای ثابت هستند.

ج) متغیر آزاد: متغیرهایی که برای آنها هنوز تصمیم گرفته نشده است بنام متغیرهای آزاد شناخته می شوند. به تعریفی

دیگر متغیرهایی که در مجموعه متغیرهای ثابت قرار ندارند مجموعه متغیرهای آزاد را تشکیل می دهند.

در مثال فوق ۵ متغیر داشتیم $(x_1-x_2-x_3-x_4-x_5)$

Free variable F (3,4)

اینک می توان با تعاریف فوق متغیر انشعاب را براساس متغیرهای آزاد موجود انتخاب نمود. چگونه؟ بایستی از ضوابط

زیر استفاده نموده و متغیری را که برای انشعاب انتخاب می شود را تشخیص دهیم.

ضابطه اول: هر متغیر آزادی که ضرایب آن در تمامی محدودیتها که مقدار متغیر کمکی آنها منفی است، مثبت باشد.

برای انشعاب انتخاب نکنیم.

برای اطلاع از اینکه چرا چنین متغیرهایی انتخاب نمی شوند مدل گسترده استاندارد بالاس را در نظر بگیرید: در گره صفر هیچ متغیری در جواب جزیی نداریم. بنابراین کلیه متغیرها آزاد هستند. برابر ضابطه (۱) متغیر X_2 انتخاب نمی شود چون قادر به بهبود در ناموجهی مساله نیست، و با انتخاب آن مساله بسمت ناموجهی بیشتر نیز حرکت خواهد نمود.

اما ما بدنبال آن هستیم که با کمترین تکرارها مساله را به جواب موجه برسانیم.

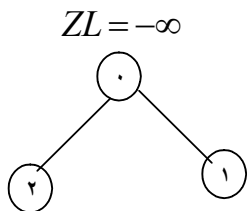
$$\text{Max } Z = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3$$

st.

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + S_1 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + S_2 = -6$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \quad \text{یا} \quad 1$$



$p_0()$
 $F(1,2,3) \rightarrow$ متغیرهای آزاد
 $S(-2,-6) \rightarrow$ متغیرهای کمکی
 $Z=0$

متغیر X_2 انتخاب نمی شود: بدلیل زیر:

$$2x_2 + S_1 = -2 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow S_1 = -2 \\ x_2 = 1 \rightarrow S_1 = -4 \end{cases}$$

$$3x_2 + S_2 = -6 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow S_2 = -6 \\ x_2 = 1 \rightarrow S_2 = -9 \end{cases}$$

X_2 قادر به کاستن از ناموجهی نیست $\rightarrow$

ضابطه دوم: هر متغیر آزادی که توسط ضابطه اول حذف نشده است و در رابطه زیر صدق کند برای انشعاب انتخاب

$$Z + C_j \leq Z_L$$

نمی شود:

در این رابطه Z نشان دهنده مقدار تابع هدف در جواب جزیی و C_j نشان دهنده مقدار ضریب متغیر j ام در تابع هدف می باشد.

(نکته مهم: تا زمانی که $Z_L = -\infty$ است این ضابطه بکار نمی رود چون بهیچ جواب موجهی نرسیده ایم.)

نکته: این ضابطه بدنبال آنست که شما متغیرهای آزادی را که نمی تواند مقدار Z فعلی را بهبود بخشند. (Z_L بجز منفی بی نهایت) و مقدارشان بدتر از آن می شود را انتخاب نکنیم. تا سریعتر به جواب بهینه برسیم.

ضابطه سوم: برای متغیرهایی که با ضابطه ۱ و ۲ کنار گذاشته نشده اند متغیری را انتخاب کنید که قدر مطلق مجموع مقادیر منفی متغیرهای کمکی را حداقل کند برای هر متغیر j ام از رابطه زیر این عمل را تضمین نمایند.

$$V_j = \sum_{i=1}^n \min (0, S_i - a_{ij}) \quad \text{ضابطه سوم:}$$

در رابطه فوق $S_i - a_{ij}$ میزان بهبود را نشان می‌دهد که اگر عدد مثبتی باشد در ضابطه ما نمی‌گنجد و نباید آنرا دخالت دهیم لذا با انتخاب حداقل بین صفر و $S_i - a_{ij}$ تضمین می‌دهیم که هیچگاه عدد مثبت انتخاب نمی‌شود:

$$\min (0, S_i - a_{ij})$$

با مثال صفحه قبل ادامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} V_1 &= \min (0, S_1 - a_{11}) + \min(0, S_1 - a_{21}) \\ &= \min (0, (-2 - (-1))) + \min(0, (-6 - 1)) \\ &= \min -1 + \min -7 = -8 \\ V_3 &= \min (0, -2 - (-1)) + \min(0, (-6 - (-4))) = -3 \end{aligned}$$

متغیر x_3 متغیرانشعاب است $\leftarrow \min\{|V_1| = -8, |V_3| = -3\} = 3$

تحقیق نمایید مفهوم V_j چیست و چه عملی را انجام می‌دهد که می‌توان براساس حداقل قدرمطلق V_j ها متغیرانشعاب را انتخاب نمود؟

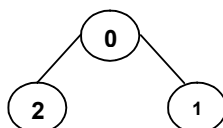
پس از اینکه تغییری برای انشعاب انتخاب گردید در شکل مربوطه نمایش دهید که آیا میتوان به عمق رسید یا خیر؟

قدم چهارم:

اطلاعات مربوطه را برای انشعابتان در هر گره مشخص نمایید (شکل را تکمیل کنید و در هر گره جواب جزیی متغیرهای آزاد مقدار متغیرهای کمکی و مقدار Z را مشخص کنید).

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ p_2(3) \\ F(1,2) \\ S(-1,-2) \\ Z &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0() \\ F(1,2,3) \\ S(-2,-6) \\ Z(0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ p_1(-3) \\ F(1,2) \\ S(-2,-6) \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

قدم پنجم:

پس از اینکه هر جواب جزیی را بدست آوردیم بایستی بررسی کنیم که آیا ادامه از این گره امکان پذیر و یا مطلوب است یا خیر؟

لذا بایستی مشخص شود از آن گره ادامه بدهیم یا اینکه آن گره به عمق رسیده است ضوابط تعیینی به عمق رسیدن یک گره عبارتند از:

ضابطه اول: به جواب موجه رسیده ایم

(یعنی مقدار تمامی S_i ها غیر منفی است) اگر در یک جواب موجه مقدار Z بهتر از آخرین Z_L باشد آنگاه آن Z را جایگزین آخرین Z_L می‌نمائیم.

ضابطه دوم:

در آن گره هیچ متغیر آزادی وجود ندارد، تا بتوانیم انشعاب را ادامه دهیم.

ضابطه سوم:

اگر از آن گره حرکت کنیم به هیچ جواب موجهی نخواهیم رسید. برای نمایش این امر از رابطه زیر استفاده کنید:

برای S_i مثبت تست نمی‌کنیم مقدار S_i منفی $| < |$ مجموع ضرایب منفی متغیرهای آزاد $|$ چون قبلاً موجه شده است.

نکته: اگر در آخرین تکرار به جواب موجهی در یک گره رسیدید و در آنجا $Z = Z_L$ می‌باشد ممکن است جواب بهینه چندگانه داشته باشیم.

از آنجایی که ممکن است در گره‌های بعد بهبود داشته باشیم لذا از واژه «ممکن است» استفاده گردید.

بررسی ضوابط انشعاب برای گره (۱): (برای مثال صفحات قبل)

ضابطه (۱): خیر $\leftarrow$ به عمق نمی‌رسد چون جواب موجه نیست زیرا $S(-2)$ است.

ضابطه (۲): خیر $\leftarrow$ چون متغیر آزاد وجود دارد. زیرا $F(1, 2)$ است.

ضابطه (۳): مقدار S_i منفی $| < |$ مجموع ضرایب منفی متغیرهای آزاد $|$

$$1 < 2 \Rightarrow |-2| < |-1| \rightarrow \text{برای محدودیت ۱}$$

$$0 < 6 \Rightarrow |-6| < |0| \rightarrow \text{برای محدودیت ۲}$$

بدین ترتیب با ضابطه سوم گره ۱ به عمق می‌رسد.

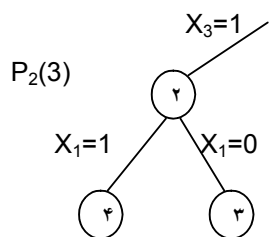
برابر الگوریتم در قدم پنجم کلیه گره‌های جدید را از نظر به عمق رسیدن بررسی می‌نمودیم. اگر گره‌ای وجود داشت

که به عمق نرسیده بود به قدم ششم می‌رفتیم و اگر تمامی گره‌ها به عمق رسیده بودند جواب نهایی را استخراج می‌نمودیم.

قدم ششم:

به قدم سوم بروید و برای انشعاب جدید اقدام کنید:

چون گره ۲ به عمق نرسیده بنابراین انشعاب دوم را انجام می دهیم:



تکرار قدم سوم:

انتخاب متغیر انشعاب:

ضابطه (۱):

S_i	متغیر x_1	متغیر x_2
-۱	-۱	۲
-۲	۱	۳

انتخاب نمی شود انتخاب می شود.

ضابطه (۲): -

ضابطه (۳): نیاز نداریم چون فقط x_1 متغیر باقی مانده است. پس $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \leftarrow \\ x_1 = 1 \leftarrow \end{array} \right.$

پایان قدم چهارم:

گره ۳ ←

$$p_4(3,1)$$

$$F(2)$$

$$S(0,-3)$$

$$Z = -3(0) - 0 - 6(1) = -9$$

$$-1 + 0 - 1 + S_1 = -2$$

$$1 + 0 - 4 + S_2 = -6$$

$$p_3(3,-1)$$

$$F(2)$$

$$S(-1,-2)$$

$$Z = -3(0) - 0 - 6(1) = -6$$

$$-0 + 0 - 1 + S_1 = -2$$

$$0 + 0 - 4 + S_2 = -6$$

و قدم پنجم: ضوابط به عمق رسیدن:

ضابطه اول و دوم برای گره ۳ مصداق ندارد. چون نه جواب موجه است و نه فاقد متغیر آزاد.

ضابطه سوم:

$$0 < 1 \Rightarrow |0| < |-1| \rightarrow \text{برای محدودیت ۱}$$

$$\rightarrow 0 < 2 \Rightarrow -2 < 0 \text{ برای محدودیت ۲}$$

از گره سوم امکان بهبود وجود ندارد.

گره چهارم: رابطه مساوی نداریم حتماً باید کوچکتر باشد.

$$\rightarrow 0 \neq 0 \Rightarrow 0 < 0 \text{ برای محدودیت ۱}$$

$$\rightarrow 0 < 3 \Rightarrow -3 < 0 \text{ برای محدودیت ۲}$$

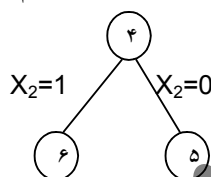
برای گره چهارم ضابطه ۱ و ۲ به عمق نمی رسد و ضابطه ۳ را کنترل می کنیم:

قدم ششم: به جواب بهینه نرسیده ایم. انشعاب را از گره ۴ و با در نظر گرفتن قدمها پیش می بریم.

S_i	x_2	انشعاب سوم:
	متغیر باقی مانده	-قدم سوم:
۰	۲	ضابطه اول:
-۳	۳	

از آنجایی که در ابتدای انشعاب سوم یک متغیر بیشتر وجود ندارد که آزاد باشد

آن متغیر را که x_2 است برای انشعاب انتخاب می کنیم و نیازی به بررسی ضوابط انشعاب نداریم.



قدم چهارم:

$$p_6(3,1,2)$$

$$F()$$

$$S(-2,-6)$$

$$Z = -14$$

$$-1 + 2 - 1 + S_1 = -2$$

$$1 + 3 - 4 + S_2 = -6$$

$$p_5(3,1,-2)$$

$$F()$$

$$S(0,-3)$$

$$Z = -9$$

$$-1 + 0 - 1 + S_1 = -2 \rightarrow S_1 = 0$$

$$1 + 0 - 4 + S_2 = -6 \rightarrow S_2 = 0$$

قدم پنجم:

چون گره ۵ و ۶ فاقد متغیر آزاد هستند هر دو به عمق می رسند و می گوئیم مساله فاقد جواب موجه است.

نکته مهم: اگر به مسائل مربوط به بالاس تسلط داشته باشید ملاحظه می نمودید که در قدم سوم متغیری برای انشعاب

بواسطه ضابطه (۱) وجود ندارد. لذا می توانستیم از همانجا مشخص نماییم که مساله فاقد جواب است.

مساله زیر را با استفاده از الگوریتم بالاس حل کنید:

$$MaxZ = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

st.

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1 \quad x_5 = 0$$

$$x_1 = 1 - y_1$$

$$x_3 = 1 - y_3$$

$$x_5 = 1 - y_5$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_4 = y_4$$

$$MaxZ = -2y_1 - y_2 - 5y_3 - 3y_4 - 4y_5 + 11$$

st.

$$-3y_1 - 2y_2 - 7y_3 - 5y_4 - 4y_5 + S_1 = -8$$

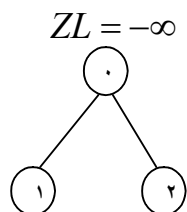
$$-y_1 - y_2 - 2y_3 - 4y_4 - 2y_5 + S_2 = -5$$

$$y_1 \leq 1 \quad y_5 = 0$$

تکرار اول:

ضابطه ۱) انتخاب متغیر انشعاب

ضابطه ۲)



$$V_j = \sum_{j=1}^n (0, S_i - a_{ij}) \quad \text{ضابطه ۳}$$

$$V_1 = \min(0, -8 - (-\infty)) + \min(0, -5, (-1)) = -9$$

$$V_2 = \min(0, -8 - (-2)) + \min(0, -5, (-1)) = -10$$

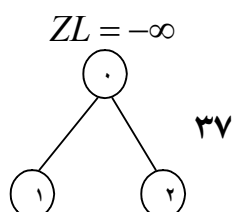
$$V_3 = \min(0, -8 - (-7)) + \min(0, -5, (-2)) = -4$$

$$V_4 = \min(0, -8 - (-5)) + \min(0, -5, (-4)) = -4$$

$$V_5 = \min(0, -8 - (-4)) + \min(0, -5, (-2)) = -7$$

متغیر y_3 برای انشعاب انتخاب می شود (می توانستیم y_4 را هم انتخاب کنیم).

$$\min\{-9, -10, -4, -4, -7\} = -4 \leftarrow y_3 \leq y_4$$



$$p_1(-3)$$

$$F(1,2,4,5)$$

$$S(-8,-5)$$

$$Z = 11$$

$$p_2(4)$$

$$F(1,2,4,5)$$

$$S(-1,-3)$$

$$Z = 6$$

ضوابط به عمق رسیدن را کنترل می کنیم: در گره (۱)

$$(1) \quad |-3 + (-2) + (-4) + (-5)| \not\leq |-8| \quad \text{ضابطه ۱ به عمق نمی رسد.}$$

(۲) ضابطه ۲ به عمق نمی رسد.

$$(2) \quad |-1 + (-1) + (-4) + (-2)| \not\leq |-5| \quad \text{ضابطه ۳ به عمق نمی رسد.}$$

گره دوم:

$$(1) \quad |-3 + (-2) + (-4) + (-5)| \not\leq |-1| \quad \text{ضابطه ۱ به عمق نمی رسد.}$$

$$(2) \quad |-1 + (-1) + (-4) + (-2)| \not\leq |-3| \quad \text{ضابطه ۲ به عمق نمی رسد.}$$

(۳) ضابطه ۳ به عمق نمی رسد.

انشعاب از گره یک: (انتخاب متغیر انشعاب)

ضابطه (۱) -

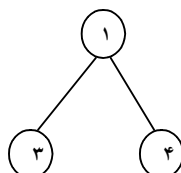
ضابطه (۲) -

ضابطه (۳)

چون S_i ها با گره صفر یکی هستند V_j ها عوض نمی شوند.

$$\min\{|-9, -10, -4, -7|\} = 4$$

V_4 برای انشعاب انتخاب می شود.



دکتر ناصر حمیدی

$$p_3(-2, -4)$$

$$F(1, 2, 5)$$

$$S(-8, -5)$$

$$Z = 11$$

$$p_4(3, 4)$$

$$F(1, 2, 5)$$

$$S(-3, -1)$$

$$Z = 8$$

ضوابط به عمق رسیدن: گره ۳ مانند گروه ۱ است پس با ضابطه ۱ و ۲ به عمق نمی رسد.

$$\begin{aligned} \text{ضابطه ۳)} \quad & |-3 + (-2) + (-4)| \not\leq |-8| \\ & |-1 + (-1) + (-2)| \not\leq |-5| \end{aligned}$$

ضوابط به عمق رسیدن گره ۴ به ضابطه ۱ و ۲ به عمق نمی رسد.

$$\begin{aligned} \text{ضابطه ۳)} \quad & |-3 + (-2) + (-4)| \not\leq |-3| \\ & |-1 + (-1) + (-2)| \not\leq |-1| \end{aligned}$$

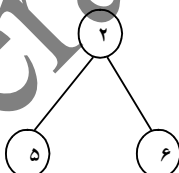
به عمق نمی رسد.

انشعاب از گره (۲):

ضابطه ۱ و ۲ نداریم:

$$\begin{aligned} V_1 &= \min(0, -1 - (-3)) + \min(0, -3 - (-1)) = -2 \\ V_2 &= \min(0, -1 - ()) + \min(0, -3 - (-1)) = -2 \\ \text{ضابطه ۳)} \quad V_4 &= \min(0, -1 - (-5)) + \min(0, -3 - (-4)) = 0 \\ V_5 &= \min(0, -1 - (-4)) + \min(0, -3 - (-2)) = -1 \end{aligned}$$

متغیر y_4 برای انشعاب است:



$$p_5(3, -4)$$

$$F(1, 2, 5)$$

$$S(-1, -3)$$

$$Z = 6$$

$$p_6(3, 4)$$

$$F(1, 2, 5)$$

$$S(4, 1)$$

$$Z = 3$$

ضوابط به عمق رسیدن گره (۵):

ضابطه ۱ و ۲ به عمق نمی رسد.

$$\begin{aligned} \text{ضابطه ۳)} \quad & |-3 + (-2) + (-4)| \not\leq |-1| \\ & |-1 + (-1) + (-2)| \not\leq |-3| \end{aligned}$$

به عمق نمی رسد.

ضوابط به عمق رسیدن گره ۶: ضابطه ۱ به عمق می رسد.

چون گره ۶ بهتر از Z_L است آن را جایگزین Z_L می کنیم: $Z_L = -\infty \rightarrow Z_L = 3$

انشعاب از گره ۳:

از آنجاییکه برابر درخت تصمیم می توان ملاحظه نمود انشعاب از گره ۳ بهبود نمی دهد آیا می توانید این را بعنوان یک

قاعده کلی تلقی و گره ۳ را به انتها رسیده قلمداد کنید؟

ضابطه ۱) نداریم.

ضابطه ۲) کنار نمی گذاریم.

$$11 + (-2) \not\leq 3$$

$$Z + C_j \not\leq Z_L$$

$$11 + (-1) \leq 3$$

$$Z + C_j \leq Z_L$$

ضابطه ۳) V_j ها دقیقاً همان V_j های گره یک خواهند بود.

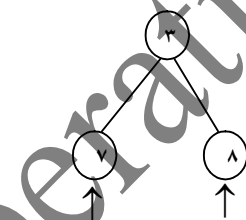
$$V_1 = -9$$

$$V_2 = -10$$

$$V_3 = -7$$

$$\min|-9, -10, -7| = 7$$

پس V_5 برای انشعاب انتخاب می شود.



$$p_7(-3, -4, 5)$$

$$F(1, 2)$$

$$S(-8, -5)$$

$$Z = 11$$

$$p_8(-3, -4, 5)$$

$$F(1, 2)$$

$$S(-4 - 3)$$

$$Z = 7$$

ضوابط گره ۷

ضابطه ۱ و ۲ نمی رسد.

$$|-3 + (-2)| < |-8|$$

$$|-1 + (-1)| < |-5|$$

ضابطه ۳ به عمق می رسد.

زمانی Z_L عوض می شود که جواب موجه باشد.

ضوابط گره ۸

با ضابطه ۱ و ۲ به عمق نمی رسد.

$$|-3 + (-2)| \not\leq |-4|$$

$$|-1 + (-1)| < |-3|$$

ضابطه ۳ به عمق نمی رسد.

انشعاب از گره ۴:

$$y_1 = 8 + (-2) \not\leq 3$$

$$y_2 = 8 + (-1) \not\leq 3$$

ضابطه ۱ و ۲ نمی رسد.

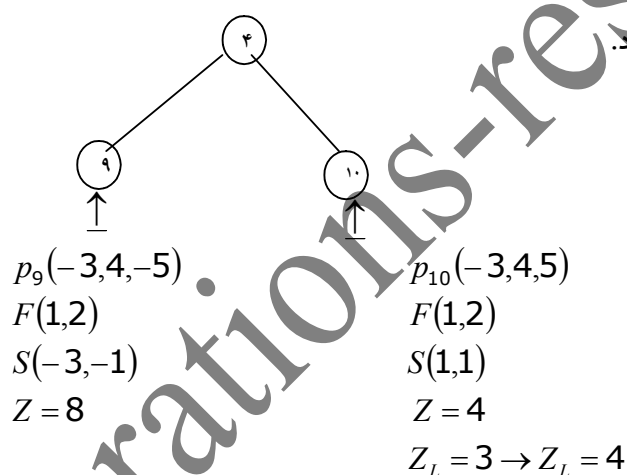
$$V_1 = \min(0, -3, (-3)) + \min(0, -1, (-1)) = 0$$

$$V_2 = \min(0, -3, -(-4)) + \min(0, -1, (-1)) = -1$$

ضابطه ۳

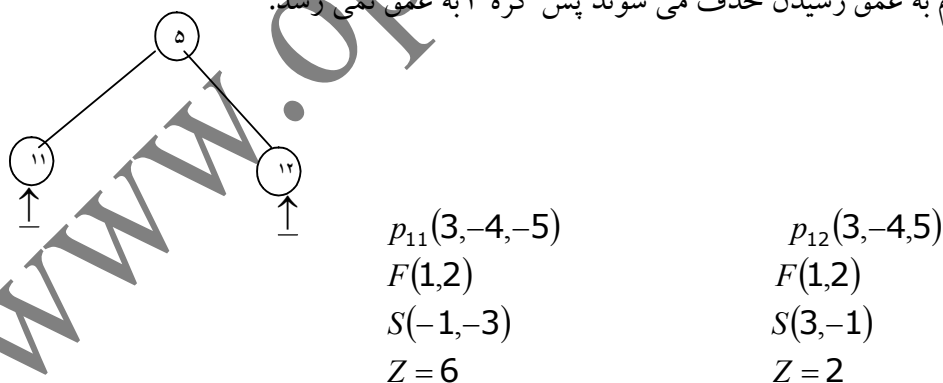
$$\min|0, -1| = 0$$

V_1 برای انشعاب انتخاب می شود.



ضوابط گره ۹ به عمق نمی رسد.

گره ۷ و ۸ بخاطر اصلاح ضابطه سوم به عمق رسیدن حذف می شوند پس گره ۳ به عمق نمی رسد:



گره ۱۱ ضابطه ۱ و ۲ صدق نمی کند.

(ضابطه ۳)

$$|-3 + (-2)| \not\leq |-1|$$

$$|-1 + (-1)| < |3|$$

به عمق می رسد.

$$3) \quad | -1 + (-1) | \neq | -1 |$$

انشعاب از گروه ۱۲)

ضابطه ۱ نداریم.

هر دو متغیر کنار گذاشته می شود چون قادر به بهبود در مقدار Z ما نخواهد بود.

$$2 + (-2) \leq 6$$

$$2 + (-1) \leq 6$$

$$\text{جواب بهینه} \begin{cases} y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 1 - x_3 \rightarrow x_3 = 1 \\ y_4 = 1 \rightarrow y_4 = x_4 \rightarrow x_4 = 1 \\ y_5 = 1 \rightarrow y_5 = 1 - x_5 \Rightarrow 1 = 1 - x_5 \rightarrow x_5 = 0 \\ y_2 = 0 \rightarrow y_2 = x_2 \rightarrow x_2 = 0 \\ y_1 = 0 \rightarrow y_1 = 1 - x_1 \rightarrow 0 = 1 - x_1 \rightarrow x_1 = 1 \\ Z^* = 2(1) - 0 + 5(1) - 3(1) + 4(0) = 4 \end{cases}$$

مدل سازی برنامه ریزی عدد صحیح و صفر و یک

در بسیاری از مسائل واقعی که در درس تحقیق در عملیات یک به ساخت مدل های آنها اقدام نمودیم ضروری بود تا شرط صحیح بودن متغیرها منظور گردد اما به جهت سهولت در حل مسائل و تبدیل آن به LP از این کار خودداری نمودیم مانند صحیح در نظر گرفتن تعداد تولید از محصولات یک کارخانه مانند یخچال و فریزر.

اگر مدلی داشته باشیم که بخواهیم آنرا همانند قبل فرموله و شرط صحیح بودن را در نظر بگیریم کافی است که در هنگام نوشتن محدودیت های وضعیت برای هر متغیر تصمیم عدد صحیح شرط صحیح بودن مدنظر قرار گیرد.

مثال: یک شرکت تولیدی خودرو سه نوع خودرو را با توجه به محدودیت های سه گانه تولید می نماید. مدل برنامه ریزی عدد صحیح آن برای رسیدن به جواب بهینه که حداکثر سود می باشد به شکل زیر است:

$$\text{Max } Z = 5000000x_1 + 800000x_2 + 60000x_3$$

st.

$$1) 70x_1 + 65x_2 + 48x_3 \leq 10000$$

$$2) 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 600$$

$$3) 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 1100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{Int.}$$

نتیجه می گیریم رویه کلی فرموله کردن مسائل LP شبیه رویه مدل سازی LP می باشد لذا از ذکر مجدد آن خودداری می کنیم. برخی از مدل ها هستند که ماهیتاً متغیرهایی از نوع صفر و یک را می طلبند و یا بعضاً استفاده از متغیرهای صفر و یک می تواند ما را در فرموله کردن یاری کند. اینک سؤال آن است که چگونه از منطق متغیرهای صفر و یک استفاده کنیم.

در برخی موارد مانند مساله تخصیص متغیر از ابتدا به شکل دو وضعیتی است لذا کار کردن با آن همانند برنامه ریزی LP خواهد بود. اما در برخی موارد می خواهیم وضعیت جدیدی را در مدل بواسطه آوردن متغیرهای صفر و یک انجام دهیم با ذکر مثال از هر کدام به شرح آنها می پردازیم.

مثال:

یک شرکت تولیدی می خواهد سه کارگر را به سه ماشین تخصیص دهد هزینه روزانه ناشی از تخصیص بشرح زیر است:

ماشین کارگر	A	B	C
۱	۳۰	۶۰	۴۵
۲	۴۵	۵۰	۳۸
۳	۵۲	۴۷	۴۲

مدل برنامه ریزی صفر و یک را برای این مساله به نحوی فرموله کنید که با حل آن شرکت بداند کدام ماشین به کدام کارگر تخصیص یابد تا هزینه کل حداقل شود:

(قاعده تخصیص یک به یک است)

هزینه کل تخصیص $Z =$

$$x_{ij} \begin{cases} 0 & \text{اگر کارگر } i \text{ ام روی ماشین } j \text{ ام کار نکند.} \\ 1 & \text{اگر کارگر } i \text{ ام روی ماشین } j \text{ ام کار کند.} \end{cases}$$

$$\text{Min} Z = 30x_{1A} + 60x_{1B} + \dots + 47x_{3B} + 42x_{3C}$$

$$\text{محدودیت تخصیص کارگر} \begin{cases} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 1 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 1 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 1 \end{cases}$$

$$\text{محدودیت تخصیص ماشین} \begin{cases} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 1 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 1 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 1 \end{cases}$$

۱ یا $x_{ij} = 0$ all

مثال:

شرکت تولیدی سراب دو محصول را با سود ۱۵ و ۱۰ تومان تولید می کند در این شرکت محدودیت ماده A و ماده B وجود دارد برای تولید هر واحد محصول اول ۳ و ۴ کیلو گرم از مواد و برای هر واحد محصول دوم ۵ و ۲ کیلو گرم از مواد نیاز داریم. در حال حاضر موجودی از این مواد ۱۰۰۰ و ۱۵۰۰ کیلو گرم است با توجه به فرایند موجود تولید شرکت یا نبایستی از محصول یک تولید نماید و یا اینکه در صورت راه اندازی خط برای تولید آن باید حداقل ۲۰۰ واحد تولید کند. مدل برنامه ریزی صحیح را برای این مساله بنویسید؟

$$\text{Max} Z = 10x_1 + 15x_2$$

st.

$$\text{ماده A} \quad (1) \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 1000$$

$$\text{ماده B} \quad (2) \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 1500$$

$$(3) \quad x_1 \geq 200$$

$$(4) \quad x_1 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{Int.}$$

$$y = 0 \text{ یا } 1$$

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow x_1 \geq 0, x_1 \leq 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ y = 1 \rightarrow x_1 \geq 200, x_1 \leq 0 \text{ and } x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \geq 200 \end{cases}$$

از دیدگاه دیگری می توان خواسته های مساله را مطرح نمود:

$$[x_1 = 0 \text{ یا } 200 \leq x_1 \leq +\infty]$$

در اینصورت بجای محدودیت ۳ و ۴ می توان محدودیت ۳ را بصورت زیر در نظر گرفت:

$$(3) \quad 200y \leq x_1 \leq +\infty y$$

اگر y مساوی صفر شود نتیجه می گیریم: $y = 0 \Rightarrow 0 \leq x_1 \leq 0 \Rightarrow x_1 = 0$

اگر y مساوی یک شود نتیجه می گیریم: $y = 1 \Rightarrow 200 \leq x_1 \leq +\infty$

در این صورت می گوئیم متغیر y متغیر از نوع بله-خیر می باشد. اگر در مثال فوق گفته شده باشد یا از محصول ۲ تولید

نکند و اگر تولید می کنید حداکثر ۳۰ واحد باشد در آن صورت چه محدودیتی به مدل اضافه می شود؟

$$x_2 \leq 30y$$

$$y = 0 \text{ یا } 1$$

$$\text{if } y = 0 \text{ then } x_2 \leq 0 \text{ (and } x_2 \geq 0) \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\text{if } y = 1 \text{ then } x_2 \leq 30 \text{ (and } x_2 \geq 0) \Rightarrow x_2 \leq 30$$

تولید تا حداکثر ۳۰ واحد

برنامه ریزی پویا:

هر مساله برنامه ریزی پویا یک مساله تصمیم گیری چند مرحله ای می باشد که در آن هر مرحله نیازمند تصمیم گیری خاص خود بوده و هر مرحله را در متون مربوطه با واژه Stage می شناسیم. هر مرحله دارای چندین وضعیت است که ارتباط دهنده بین مراحل می باشند وضعیت را State می نامند.

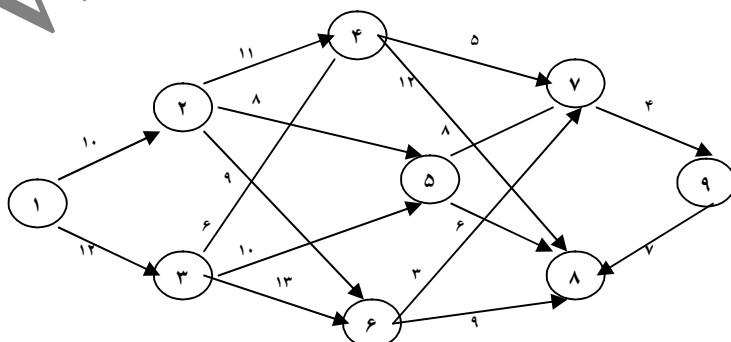
برای رسیدن از هر وضعیت به وضعیتی در مرحله بعد بایستی اقدامی انجام شود که هر اقدام معادل یک متغیر تصمیم است و آنرا Action می نامند. با انتخاب اقدامات متوالی در هر مرحله بهترین رویه حرکت بین مراحل شناخته می شود، که آنرا رویه یا Policy می نامند. در اثر عبور از یک مرحله به مرحله دیگر ممکن است هزینه یادآوری برای سیستم بوجود آید ما آنرا عایدی یا Return می گوئیم.

تابع انتقال وضعیت تابعی است که نشان میدهد از هر وضعیت یک مرحله چگونه به وضعیت مرحله بعد می رسم. این تابع برای مدلهایی که وضعیتهای پیوسته هستند الزاماً باید تعریف شود.

ارزش یک وضعیت: تابعی از تعریف عایدی است و مشخص می کند که اگر سیستم در آن وضعیت قرار گیرد و رویه ای را پیش گیرد ارزش عایدی چقدر خواهد بود. باتوجه به تعاریف فوق می توان انواع مسائل را با استفاده از Dynamic Programming یا برنامه ریزی پویا حل نمود.

مثال اول: حل مسائل شبکه با برنامه ریزی پویا:

مسافری در نظر دارد از مبدا شماره یک خود را به مقصد شماره ۲ برساند. شبکه زیر نحوه پرداخت هزینه ها برای حرکت از هر فرودگاه ۱ ام به فرودگاه ۲ ام را نشان می دهد با استفاده از برنامه ریزی پویا مشخص نمایید که بهترین مسیر برای حرکت وی کدام است.



طبق روش اول:

هر مساله پویا را می توان به دو روش مرحله بندی نمود یا عبارتی دیگر آنرا حل نمود.

(۱) روش Back ward (۲) روش For ward

بیشتر مسائل پویا با استفاده از روش Back ward حل می شوند.

در مثال فوق می گوئیم اگر اینک در وضعیت ۹ قرار داریم پیش از این می توانستیم در کدام وضعیتها باشیم. این تعریف مرحله اول را مشخص می کند. یعنی در یکی از وضعیتهای ۷ یا ۸ بوده ایم که توانسته ایم به وضعیت فعلی برسیم. به این ترتیب می توان مراحل بعدی را نیز مشخص کنیم.

اینک می توان طی جدولی اطلاعات مربوط به تصمیم اول در مرحله اول را نوشت:

کمترین هزینه مسافت $\{k_n\}$

k_n = اقدام در مرحله n ام

$f^*(n, i)$ = بهترین اقدام (رویه) برای مرحله n ام از وضعیت i ام یا ارزش وضعیت

k_n^* = بهترین اقدام از بین اقدامات مرحله n ام

جدول مرحله اول $n=1$

وضعیت i	$(i \rightarrow 9)$ $k_1 = 1$	$f^*(1, i)$	رویه	k_1^*
۷	۴	۴	$7 \rightarrow 9$	۱
۸	۷	۷	$8 \rightarrow 9$	۱

اگر اینک در وضعیت ۷ یا ۸ هستیم پیش از آن می توانستیم در کدام وضعیت ها باشیم. ۴ یا ۵ یا ۶

جدول مرحله دوم $n=2$

i	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$f^*(2, i)$	رویه	k_2^*	k_1^*
۴	$5+4$	$12+7$	۹	$4 \leftarrow 7 \leftarrow 9$	۱	۱
۵	$8+4$	$6+7$	۱۲	$5 \leftarrow 7 \leftarrow 9$	۱	۱
۶	$3+4$	$9+7$	۷	$6 \leftarrow 7 \leftarrow 9$	۱	۱

$k_2 = 1$ یعنی از i به ۷ می رویم.

$k_2 = 2$ یعنی از i به ۸ می رویم.

جدول مرحله سوم $n=3$

i	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$f^*(3,i)$	k_3^*	k_2^*	k_1^*	نتیجه
۲	۱۱+۹	۱۲+۸	۹+۷	۱۶	۳	۱	۱	۲→۶→۷→۹
۳	۶+۹	۱۰+۱۲	۱۳+۷	۱۵	۱	۱	۱	۳→۴→۷→۹

جدول مرحله چهارم $n=4$

i	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$f^*(4,i)$	k_4^*	k_3^*	k_2^*	k_1^*
۱	۱۰+۱۶	۱۲+۱۵			۲۶	۲	۳	۱	۱

$Z^*=26$, جواب بهینه $۱→۲→۶→۷→۹$

مثال ۲: یک شرکت سرمایه گذاری در پروژه های تحقیقاتی در نظر دارد ۳ میلیارد تومان را در ۳ پروژه A-B و C سرمایه گذاری نماید. درآمد شرکت برای تولید محصولات به شرح زیر خواهد بود. برای سهولت کار فرض کنید سرمایه گذاری در هر پروژه باید بر مبنای میلیارد تومان باشد. (یعنی ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ میلیارد تومان سرمایه گذاری کند).

پروژه پروژه پروژه
میزان سرمایه گذاری

	A	B	C
۰	۰	۰	۰
۱	۱/۶	۱/۲	۱/۵
۲	۲/۳	۲/۴	۲
۳	۳/۵	۳/۳	۳/۱

مرحله: سرمایه گذاری در هر یک از پروژه ها

وضعیت: ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ میلیارد سرمایه گذاری در هر پروژه

جدول سرمایه گذاری در پروژه A $n=1$

i	$k_1=0$	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$f^*(1,i)$	k_1^*
۰	۰	-	-	-	۰	۰
۱	۰	۱/۶	-	-	۱/۶	۱
۲	۰	۱/۶	۲/۳	-	۲/۳	۲

۳	۰	۱/۶	۲/۳	۳/۵	۳/۵	۳
---	---	-----	-----	-----	-----	---

k_1 = مبلغ سرمایه گذاری در پروژه A ام

جدول سرمایه گذاری در پروژه B								
n=2								
i	$k_3=0$	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$f^*(3,i)$	k_3^*	k_2^*	k_1^*
3	0+4	2/8+1/5	1/6+2	0+3/1	4/3	1	1	1

جواب بهینه: سرمایه گذاری در هر پروژه ۱ میلیارد باشد تا درآمد کل $\frac{4}{3}$ میلیارد شود.

در جدول سرمایه گذاری آخر در پروژه C نیازی به اینکه وضعیتهای ۰-۱ و ۲ را محاسبه کنیم وجود ندارد و می دانیم که جواب بهینه زمانی حاصل می شود که همه ۳ میلیارد سرمایه گذاری شده باشد.

مساله: اگر مساله قبل گفته می شد حداقل بایستی ۲ میلیارد در پروژه C سرمایه گذاری شود آنگاه جواب بهینه جدید چه خواهد بود؟

مثال: یک کارخانه می تواند کالاهای A, B, C را به تعداد مختلف تولید نماید هر محصول احتیاج به دو نوع ماده خام الف و ب دارد که فقط ۴ تن از هر کدام در دسترس است مقادیری از مواد که برای تولید محصولات به تعداد ۱، ۲، ۳ واحد لازم است در جدول زیر داده شده و درآمد مربوطه نیز آمده است. مطلوبست میزان تولید هر محصول بطوری که درآمد کل Max گردد.

→ جدول مقادیر مورد نیاز برای تولید

مقدار تولید	محصول A		محصول B		محصول C	
	الف	ب	الف	ب	الف	ب
۱	۱	۲	۱	۲	۱	۱
۲	۲	۲	۲	۳	۱	۲
۳	۳	۳	۲	۲	۲	۳

→ جدول درآمد حاصل از تولید

مقدار تولید	محصول A	محصول B	محصول C
۱	۱۰	۶	۵

۸	۱۲	۱۷	۲
۱۱	۱۷	۱۹	۳

می دانیم که در این مساله قصد تخصیص منابع را به نحوی داریم که ضمن استفاده از منابع محدود برای هریک از محصولات حداکثر درآمد حاصل گردد. از آنجاییکه در این مدل با دو نوع ماده سروکار داریم وضعیتی که تعریف می گردد بایستی برای هر دو ماده باشد. اگر بتوانیم برای یک ماده خاص برنامه ریزی نماییم آنگاه می توان برای دو یا چند منبع نیز تخصیص را براحتی انجام داد. لذا ابتدا مدلی را با یک منبع برای تخصیص حل نموده و از اطلاعات آن برای حل مدل های با چند منبع استفاده می کنیم.

مثال برای تخصیص یک منبع:

فرض کنید در همین شرکت یک نوع ماده خام داریم که چهارتن بیشتر نیز از آنان وجود ندارد درآمد حاصل از تخصیص برای محصولات بشرح جدول زیر است: با استفاده از برنامه ریزی پویا مناسبترین حالت تخصیصی را برای اینکه بیشترین درآمد حاصل شود پیدا کنید.

مقدار تولید	محصول A	محصول B	محصول C	اقدام به مقدار موادی
۱	۱۰	۶	۸	
۲	۱۷	۱۷	۱۱	که باید به مرحله
۳	۱۹	—	—	جاری تخصیص دهیم.

جدول تصمیم برای محصول C (به روش Backward) $n=1$

i	$k_1=0$	$k_1=1$	$k_1=2$	$f^*(1,i)$	k^*
0	۰	—	—	۰	۰
1	۰	۸	—	۸	۱
2	۰	۸	۱۱	۱۱	۲
3	۰	۸	۱۱	۱۱	۲
4 تن مواد	۰	۸	۱۱	۱۱	۲

جدول تصمیم برای محصول B

i	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$f^*(1,i)$	k_2^*	k_1^*
0	0	-	-	0	0	0
*1	0+8	6+0	-	8	0	1
			*			
2	0+11	6+8	17+0	17	2	0
3	0+11	6+11	17+8	25	2 □	1
4	0+11	6+11	17+11	28	2 ○	2

$$\text{=جواب بهینه} \begin{cases} x_C^* = 1 \\ x_B^* = 2 \\ x_C^* = 1 \\ Z^* = 35 \end{cases}$$

* یک تن مواد اولیه به C ندهیم به B قبلاً داده ایم.

* هر ۲ تن را به B می دهیم و ۱۷ عایدی دارد.

○ یعنی ۴ تن داریم ۲ تن در محصول B و ۲ تن در محصول C* مصرف می شود.

□ یعنی ۳ تن داریم ۲ تن در محصول B و ۱ تن در محصول C مصرف می شود.

اینک با تعریف وضعیت به شکل (n, i, i') و در نظر گرفتن اینکه i مقدار ماده خام الف برای تخصیص و i' ماده B قابل تخصیص باقی مانده را نشان می دهد می توان در سه مرحله ۱ و ۲ و ۳ جواب بهینه را با روش پویا بدست آورد.

K اقدام برای i ها

K اقدام برای i' ها

مساله کوله پشتی

یکی از مسائلی که در برنامه ریزی عدد صحیح با آن آشنا شدیم مساله کوله پشتی بود در این مساله بدنبال آن بودیم که بدانیم سرباز از هر کدام از n قلم کالایی که وجود دارد و وزن هر کدام w_j به چه میزانی در کوله پشتی خود قرار دهد تا وزن کل از وزن تعریف شده برای کوله بیشتر نشود و با توجه به میزان کالری هر کدام از محصولات حداکثر کالری در اقلام ذخیره شده در کوله وجود داشته باشد. این مساله را می توان برای باربری با یک کشتی یا یک هواپیما که دارای ظرفیت مشخصی است نیز برنامه ریزی نمود.

مثال زیر نمونه ای از این مسائل می باشد. که می خواهیم آنرا با روش برنامه ریزی پویا حل کنیم.

مثال: وزن کوله پشتی یک سرباز حداکثر ۵ کیلوگرم می باشد که می تواند آنرا با ۳ نوع کالای C-B-A پر کند وزن هر واحد از این محصولات به ترتیب ۲-۱ و ۲ کیلوگرم می باشد. ارزش غذایی هر کدام نیز برحسب کالری ایجاد شده ۶۰-۵۰ و ۲۰ کالری می باشد.

سرباز با یاری رسانید تا با ارزشترین مواد غذایی را در کوله جای دهد تا در حین اردوی شبانه روزی از کمبود کالری نگیرد.

مراحل: هر کدام از محصولات

اقدام: تعداد محصول n ام

وضعیت: وزنی که دارد ۰ تا ۵

$\frac{5}{2} = 2/5$ سن حداکثر ۰ یا ۱ یا ۲ واحد از محصول A می تواند در کوله قرار گیرد.

جدول تصمیم برای محصول A					
n=1					
i	$k_1=0$	$k_1=1$	$k_1=2$	$f^*(1,i)$	k^*
0	0 کالری	-	-	0	0
1	0 کالری	-	-	0	0
2	0 کالری	60 کالری	-	60	1
3	0 کالری	60 کالری	-	60	1
4	0 کالری	60 کالری	60+60=120 کالری	120	2
5	0 کالری	60 کالری	120	120	2

وضعیت کوله پشتی ۰ تا ۵ یعنی ۵ تا ۵ کالا جا دارد.

K یعنی تعداد محصول مورد نظر

جدول تصمیم برای کالای B						
n=2						
i	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$f^*(2,i)$	k_2^*	k_1^*
0	0	-	-	0	0	0
1	0+0	-	-	0	0	0
2	0+60	50+0	-	60	0	1
3	0+60	50+0	-	60	0	1
4	0+120	50+60	(2*50)+0	120	0	2
5	0+120	50+60	100+0	120	0	2

جدول تصمیم برای کالای C

i	$k_3=0$	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$k_3=5$	$f^*(3,i)$	k_3^*	k_2^*	k_1^*
---	---------	---------	---------	---------	---------	---------	------------	---------	---------	---------

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 0+120 & 20+120 & (20*2)+60 & (20*3)+60 & (20*4)+60 & 100+0 & 140 & 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

جواب بهینه $\begin{cases} x_A^* = 2, & x_B^* = 0, & x_C^* = 1 \\ Z^* = 140 \end{cases}$

مسأله:

در یک پروژه حساس دولتی ۳ تیم کارشناس کار می کنند تحت شرایط فعلی حدس زده می شود. احتمال عدم موفقیت تیم های ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب ۰/۴-۰/۶ و ۰/۸ باشد بنابراین احتمال عدم موفقیت پروژه ۰/۱۹۲ خواهد بود. (۰/۱۹۲ حاصل ضرب ۰/۴*۰/۶*۰/۸ است) این نتیجه برای دولت اضطراب آور است لذا تصمیم می گیریم دو کارشناس زبده را طوری به این تیم ها ملحق کنیم که احتمال عدم موفقیت پروژه به حداقل کاهش یابد جدول زیر نشان دهنده احتمال عدم موفقیت هر یک از تیم ها در اثر افزایش کارشناسان می باشد. مطلوبست نحوه تخصیص این دو کارشناس به تیم ها با روش برنامه ریزی پویا، پیدا کنید که احتمال عدم موفقیت پروژه به حداقل برسد.

تعداد کارشناس	احتمال عدم موفقیت		
	۱	۲	۳
۰	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۱	۰/۲	۰/۴	۰/۵
۲	۰/۱۵	۰/۲	۰/۳

مرحله اول:

هر تیم یک مرحله می شود.

کارشناسان قابل تخصیص هم وضعیت می شود.

جدول تصمیم برای تیم ۱					
n=1					
i	$k_1=0$	$k_1=1$	$k_1=2$	$f^*(1,i)$	k^*
۰	۰/۴	-	-	۰/۴	۰
۱	۰/۴	۰/۲	-	۰/۲	۱
۲	۰/۴	۰/۲	۰/۱۵	۰/۱۵	۲

n=2

جدول تصمیم برای تیم ۲

i	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$f^*(2,i)$	k_2^*	k_1^*
۰	۰/۶*۰/۴	-	-	۰/۲۴	۰	۰
۱	۰/۶*۰/۲	۰/۳*۰/۴	-	۰/۱۲	۰	۱
۲	۰/۶*۰/۱۵	۰/۴*۰/۲	۰/۲*۰/۴	۰/۰۸	۱ یا ۲	۱ یا ۰

n=3

جدول تصمیم برای تیم ۳

i	$k_3=0$	$k_3=1$	$k_3=2$	$f^*(3,i)$	k_3^*	k_2^*	k_1^*
2	0/8*0/08	0/5*0/12	0/3*0/24	0/06	1	0	1

یک نفر در تیم ۱

یک نفر در تیم ۳

بکار بگیرد.

تصمیم گیری های چند معیاره:

به دو دسته تقسیم می شوند:

(۱) تصمیم گیری با اهدا چند گانه (۲) تصمیم گیری با شاخص های چند گانه

یکی از زمینه های این نوع تصمیم گیری برنامه ریزی آرمانی نام دارد. (Goal P)

نحوه حل مدل های چند هدفه:

ممکن است در شرایط واقعی وضعیت هایی رخ دهد که مدل ریاضی بجای یک هدف چند هدف را دنبال نماید گرچه این امر کارایی مدل و مطلوبیت نتایج را کاهش می دهد اما واقعیتی است که رخ خواهد داد بطور مثال در قسمت کنترل کیفی هدف اصلی کنترل ضایعات و حداقل سازی آن است مسلماً تجهیزات بسیاری لازم است تا به حداقل هزینه ضایعات برسیم و مدیریت شرکت می تواند هدف دیگری را برای خود بدین شکل که هزینه کنترل کیفی نیز حداقل شود تعریف کند لذا دارای دو تابع هدف خواهیم بود.

در قسمت نگهداری-تعمیرات هدف اول حداکثر سازی زمان استفاده از ماشین آلات و ظرفیت تولید می باشد و این امر نیازمند آن است که زمان معطلی برای تعمیر حداقل شود و این امر خود برگرفته از دو عامل نیروی تعمیراتی و همچنین موجودی قطعات کافی می باشد. شرکت در راستای استفاده بهینه از منابع می تواند هدف دوم خود را حداقل سازی نیروی انسانی در بخش تعمیرات و هدف سوم را حداقل سازی موجودی قطعات در انبار تعریف کند.

اینک این سؤال پیش می آید که اگر یک مساله دارای چند هدف باشد چگونه آنرا حل کنیم. روشهای متعددی برای حل مساله پیش نهاد گردیده است که سه روش زیر را بیش از همه بکار می برند:

(۱) تبدیل تابع هدف به شکل محدودیت

(۲) روش وزن دهی به اهداف

(۳) روش اولویت مطلق

روشهای دیگری نیز وجود دارد که می توانیم با مطالعه منابع دیگر آنها را یاد بگیرد.

(کتاب تصمیم گیری چند معیاره-تالیف دکتر محمد جواد اصغرپور-دانشگاه تهران)

مثال: شخصی ۱۰۰۰ واحد پول دارد و می خواهد در دو پروژه سرمایه گذاری کند. سود ناشی از سرمایه گذاری در پروژه اول ۶٪ و ریسک آن ۴٪ است.

سرمایه گذاری در پروژه دوم بدون ریسک بوده و سود آن معادل ۳٪ است. حداقل و حداکثر میزان سرمایه گذاری در هر

پروژه ۲۰۰ و ۷۰۰ واحد پولی است در صورتی که اهداف تصمیم گیرنده حداکثر سازی سود و حداقل سازی ریسک

سرمایه گذاری در پروژه ها باشد و الزامی به سرمایه گذاری کل موجودی نباشد مدل مربوط به مساله را بنویسید:

متغیر مستقل (تصمیم):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \quad \text{میزان سرمایه گذاری در پروژه ۱} \\ x_2 \quad \text{میزان سرمایه گذاری در پروژه ۲} \end{array} \right\}$$

متغیر وابسته:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 \quad \text{سود کل} \\ Z_2 \quad \text{ریسک کل} \end{array} \right\}$$

$$Max Z_1 = \%6x_1 + \%3x_2$$

$$Min Z_2 = \%4x_1$$

st.

$$x_1 + x_2 \leq 1000$$

$$x_1 \leq 700$$

$$x_2 \leq 700$$

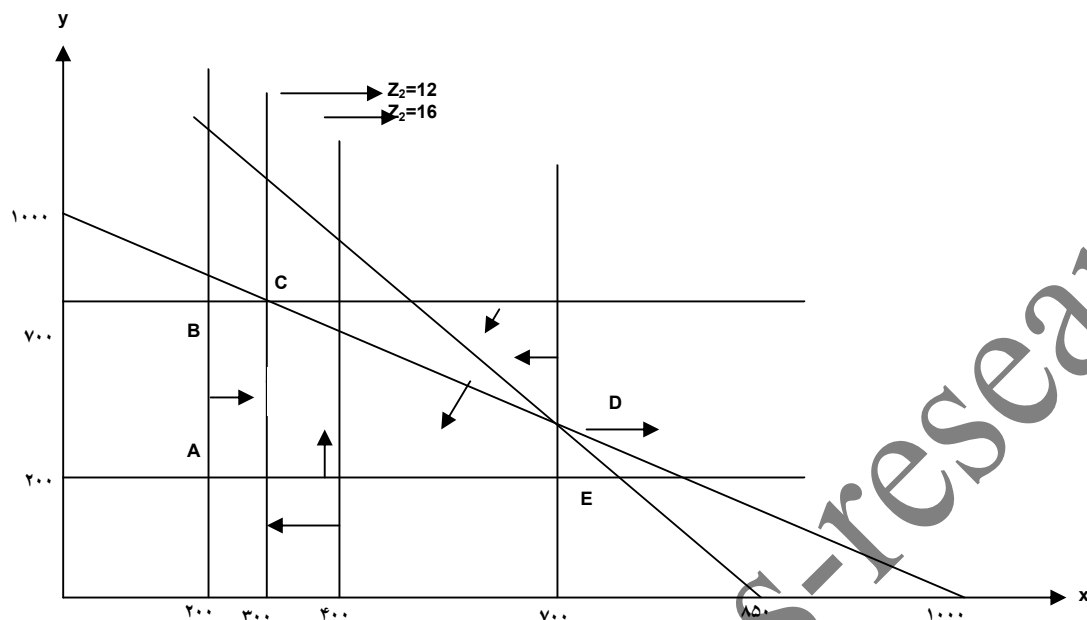
$$x_1 \geq 200$$

$$x_2 \geq 200$$

حل به روش اول: تبدیل به محدودیت

مساله را فقط با در نظر گرفتن یکی از توابع هدف و بدون در نظر گرفتن مابقی تابع ها حل می کنیم (حل می تواند به روش ترسیمی یا سیمپلکس باشد)

در این مثال تابع دوم را در نظر نگرفته و مساله را با فرض وجود تنها تابع هدف اول حل می کنیم.



نقطه	مقدار Z_1
A(200 و 200)	۱۸
B(200 و 700)	۳۳
C(300 و 700)	۳۹
D(700 و 300)	۵۱ ✓
E(700 و 200)	۴۸

پس از اینکه مقدار بهینه Z_1 مساوی ۵۱ بدست آمد می توانیم تابع هدف اول را به شکل محدودیت $6x_1 + 3x_2 = 51$ به محدودیتها اضافه نموده و اینک مساله را که به شکل زیر در می آید حل نمود:

$$\text{Min } Z_2 = 4x_1$$

st.

$$x_1 + x_2 \leq 1000$$

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 700 \\x_2 &\leq 700 \\x_1 &\geq 200 \\x_2 &\geq 200 \\0/06x_1 + 0/03x_2 &= 51 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

ملاحظه می شود با اضافه نمودن محدودیت تساوی ناحیه موجه به یک نقطه تبدیل میشود آنگاه ما مدل را ملزم به پذیرش دقیق تابع هدف اول نموده ایم و بخاطر وجود یک نقطه موجه جواب بهینه بایستی برای دومین مساله نیز همین نقطه باشد. اما اگر بگوییم شرکت حاضر است در مقابل کاهش در ریسک سرمایه گذاری از بخشی از سود خود چشم پوشی نماید آنگاه محدودیت جدید به شکل $\leq$ خواهد بود و می گوییم در نظر داریم که هر دو هدف را آورد بکنیم. لذا ناحیه موجه مجدداً "ABCDE" خواهد بود.

در این شرایط با رسم خط تابع هدف دوم خواهیم دید که مساله دارای جواب بهینه چندگانه بوده و کلیه نقاط روی پاره خط AB جواب بهینه ما می باشند. (بهینه چندگانه)

$$\begin{aligned}A \quad Z_2 = 8 : & \xrightarrow{\text{از } A \text{ به } Z_1} 0/06(200) + 0/03(200) = 18 \\B \quad Z_2 = 8 : & \xrightarrow{\text{از } B \text{ به } Z_1} 0/06(200) + 0/03(700) = 33\end{aligned}$$

نقطه B جواب بهینه برای هر دو بطور همزمان است.

$$\begin{cases}x_1^* = 200 \\x_2^* = 700 \\Z_1^* = 33 \\Z_2^* = 8\end{cases}$$

حل به روش وزن دهی به اهداف:

از آنجایی که در روش اول در بسیاری از موارد نمی توان با قاطعیت تصمیم گرفت از روش وزن دهی به اهداف استفاده می شود.

برای استفاده از این روش بایستی:

(۱) همه توابع هدف به یک شکل باشند یعنی همه ماکزیمم سازی یا همه مینیمم سازی باشند.

(۲) C_j ها از نظر اندازه مشابه باشند و اگر برای تابع هدفی C_j ها بزرگتر از تابع هدف دیگر است با تقسیم بر یک عدد ثابت آنها را بصورت مشابه هم درآورید.

در مثال قبل فرض کنید که اهمیت حداکثر سازی سود ۳ برابر اهمیت کاهش ریسک می باشد مساله را مجدداً حل نمایید:

$$Max Z_1 = 0/06x_1 + 0/03x_2$$

$$(Min Z_2 = 0/04x_1) \xrightarrow{\times(-1)} Max(-Z_2) = -0/04x_1$$

$$Max Z = W_1 (\text{تابع هدف اول}) + W_2 (\text{تابع هدف دوم})$$

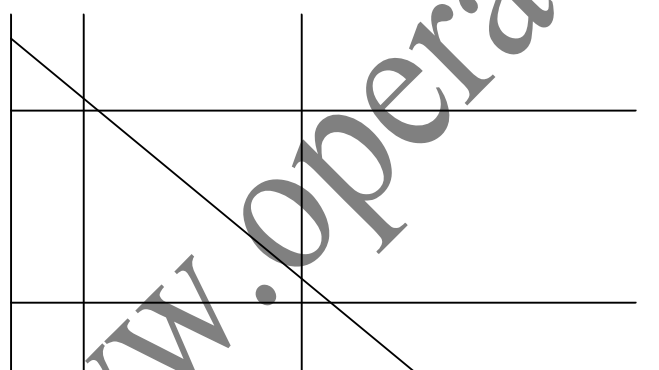
$$Max Z = 0/75(0/06x_1 + 0/03x_2) + 0/25(0/04x_1)$$

$$Max Z = 0/035x_1 + 0/0225x_2$$

تابع هدف بدست آمده:

$$\begin{array}{llll} \rightarrow \text{سازي Min} & \text{اهميت} & \text{تابع} & \text{دوم} \\ \rightarrow \frac{1}{4} = \%25 & & & \\ 3+1=4 & & & \\ \rightarrow \frac{3}{4} = \%75 & \text{اهميت} & \text{تابع} & \text{اول} \end{array}$$

اینک می توان این مدل را با روش ترسیمی یا روش سیمپلکس حل و جواب بهینه را در هر یک از توابع هدف اولیه قرار داده و جواب نهایی را اعلام نمود:



Z نقاط قبلی

A	۱۱/۵
B	۲۲/۷۵
C	۲۶/۲۵
D	۳۱/۲۵
E	۲۹

$$x_1^* = 700 \quad Z_1^* = 0/06(700) + 0/03(300) = 51$$

$$x_2^* = 700 \quad Z_2^* = 0/04(700) = 28$$

حل روش اولویت مطلق:

گفته می شود که وزن دهی به اهداف سلیقه ای می باشد و کاری ذهنی است لذا ضروری است به هر یک از هدفها اولویت مربوطه را داده آنگاه مساله را با تابع هدف دارای اولویت بالاتر حل می کنیم: و سپس جواب بهینه برای آن

اولویت را به عنوان یک محدودیت تساوی در مدل وارد نموده و مدل را با اولویت دوم حل می کنیم تا به جواب بهینه نهایی برسیم.

مثال: در مثال قبلی فرض کنید اولویت اول با Z_2 و اولویت با Z_1 مجدداً مساله را حل کنید.

برنامه ریزی آرمانی:

این روش که برای اولین بار توسط کوپر مطرح شد و توسط ایلسیزو توسعه یافت روشی است که به ازای هر هدف یک آرمان را تعریف می نماید هر شرکت دارای چندین هدف می باشد که آنها را پیش از این به شکل توابع هدف مشاهده نمودید. اما شرکت می داند دسترسی به تمامی اهداف بصورت همزمان ممکن نمی باشد لذا برای هر هدف سطح تمایلی را تعریف می کنند که براساس آن می گوییم تمایل شرکت برای رسیدن به این هدف تا چه اندازه است و آنرا «آرمان شرکت» می نامند.

بدین سبب متغیرهایی نیز معرفی می شوند که میزان انحراف ما از آرمان را نشان می دهند. ما این انحرافات را با d_i^+, d_i^- نمایش می دهیم.

مثال:

یک شرکت تولیدی ۳ محصول را تولید می نماید سود حاصل از محصولات به ترتیب ۲۵۰-۱۵۰-۲۰۰ تومان برای هر واحد محصول می باشد. اگر هدف شرکت حداکثر سازی سود باشد آنرا بصورت تابع هدف صفحه بعد نمایش می دهیم:

$$MaxZ = 200x_1 + 150x_2 + 250x_3$$

اگر شرکت اعلام نماید که آرمانی برابر با ۴۰۰۰ تومان سود دارد می توان این تابع هدف را به شکل یک محدودیت آرمانی مطرح نمود. در اینصورت خواهیم داشت که در آن هیچ انحرافی از آرمان مدنظر نمی باشد:

$$200x_1 + 150x_2 + 250x_3 = 4000$$

اما می دانیم که ممکن است سود ما کمتر از ۴۰۰۰ تومان یا بیشتر از آن باشد بعبارتی دیگر یا به آرمان خود دست یافته ایم یا پایین تر از حد تمایل خود بوده ایم یا از آرمان تعریف شده پیشی می گیریم لذا می توان میزان انحراف از آرمان را به شکل زیر به مدل اضافه نمود که در اینصورت مدل به شکل آرمانی درآمده است:

$$200x_1 + 150x_2 + 250x_3 = 4000 + d_1^- - d_1^+$$

اگر سود کل بدست آمده در سمت چپ دقیقاً ۴۰۰۰ تومان باشد آنگاه:

و می گوییم که کاملاً به آرمان دست یافته ایم.

$$d_1^+ = d_1^- = 0 \text{ می شود}$$

اگر سود کل بدست آمده بیش از ۴۰۰۰ تومان باشد آنگاه $d_1^+ = 0$ و $d_1^- > 0$ خواهد بود. و می گوئیم از آرمان پیشی گرفته ایم.

اگر سود کل بدست آمده کمتر از ۴۰۰۰ تومان باشد آنگاه $d_1^+ = 0$ و $d_1^- > 0$ خواهد بود و می گوئیم به آرمان دست نیافته ایم.

در حالت اول هر دو متغیر انحراف غیر پایه یا غیر اساسی هستند در حالت دوم انحراف مثبت پایه یا اساسی است و انحراف منفی غیر پایه و در حالت سوم عکس این حالت صادق است.

نکته:

d_i^+, d_i^- هیچگاه با همدیگر دارای مقدار غیر صفر نمی باشند چرا که مفهوم ندارد و هم انحراف منفی و هم انحراف مثبت داشته باشیم.

از آنجایی که در سمت راست مدل متغیر نگهداری نمی کنیم لذا آرمان اول به شکل زیر نوشته می شود:

$$200x_1 + 150x_2 + 200x_3 - d_1^+ + d_1^- = 4000$$

پس از ساخت هر آرمان یا محدودیت آرمانی باید بدانیم که برای ما کنترل انحراف منفی مهم است یا انحراف مثبت و در تابع هدف این انحرافات را به حداقل برسانیم. در مثال فوق اگر سود کل از ۴۰۰۰ تومان بیشتر شود مطلوب تر خواهد بود و کنترلی برای آن نیاز نیست. ما باید کنترل کنیم انحراف منفی رخ ندهد. لذا تابع هدف ما به شکل زیر خواهد بود.

$$\text{Min } d_1^-$$

st.

$$200x_1 + 150x_2 + 350x_3 - d_1^+ + d_1^- = 4000$$

:

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

اگر به مثال فوق آرمان دیگری به شکل زیر معرفی شود مدل شما چه تغییری خواهد نمود:

آرمان شرکت آن است که مجموع تولید محصولات در طی دوره برنامه ریزی کمتر از ۶۰۰ واحد نشود.

$$\text{Min } d_1^-, d_2^-$$

st.

$$200x_1 + 150x_2 + 200x_3 - d_1^+ + d_1^- = 4000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - d_2^+ + d_2^- = 600$$

⋮

$$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

مساله (۱)

شرکت سرمایه گذاری نیکونام برای یک مشتری خوشنام مایل به سرمایه گذاری می باشد مشتری مایل به محدود نمودن سرمایه گذاری خود بر روی سهام ۲ شرکت معروف است. شرکت می خواهد ۵۰۰۰۰ واحد پولی را با در نظر گرفتن ۲ آرمان زیر سرمایه گذاری نماید:

(۱) نرخ بازگشت سرمایه حداقل ۹٪ باشد.

(۲) حداکثر سرمایه گذاری بر روی شرکت دوم بعلت ریسک بیشتر باید ۵۰٪ باشد.

اطلاعات زیر برای سهام در شرکت در دست می باشد:

شرکت	قیمت سهام (هر سهم)	نرخ بازگشت سالیانه
اول	۵۰	۶٪
دوم	۱۰۰	۱۰٪

مساله را بصورت برنامه ریزی آرمانی فرموله کنید:

مساله (۲)

شرکت تولیدی هما ۲ محصول را تولید می کند. طبق برنامه ریزی ماه گذشته ۳۵۰ ساعت از دپارتمان اول و ۱۰۰۰ ساعت از دپارتمان دوم بکار گرفته شده است بعلت تغییرات شدید در سطح نیروی انسانی شرکت در ۶ ماه گذشته شکایات فراوانی رسیده است و مدیریت تصمیم گرفته است تا آرمانهای زیر را مدنظر قرار دهد:

آرمان اول: استفاده از ۳۵۰ ساعت از دپارتمان اول

آرمان دوم: استفاده از ۱۰۰۰ ساعت از دپارتمان دوم

آرمان سوم: کسب حداقل ۱۳۰۰ واحد پول سود

شرکت میداند سود هر واحد محصول اول و دوم به ترتیب ۴ و ۲ تومان است.

از دپارتمان اول برای هر واحد محصول اول و دوم ۱ و ۲ ساعت و از دپارتمان دوم ۵ و ۲ ساعت استفاده می شود. مطلوب است مساله را به شکل آرمانی فرموله کنید.

رسم معادلات آرمان

همانگونه که مشاهده نمودید یک شرکت تولیدی می تواند آرمانهای متعددی را داشته باشد اینک می خواهیم بدانیم که معادلات آرمانی را چگونه رسم می کنند و ناحیه قابل قبول آن به ازای هریک از متغیرهای انحراف چگونه مشخص می کنند. ضروری است برای هر محدودیت آرمانی بدون توجه به متغیرهای انحراف خط مربوطه را رسم می کنیم آنگاه باتوجه به خط رسم شده متغیرهای انحراف در یکی از مقادیری که می توانند اتخاذ نمایند ۳ حالت زیر را ایجاد میکنند:

۱- مقدار متغیرهای انحراف به ازای هر نقطه روی خط صفر خواهد بود.

۲- عدد سمت راست خط رسم شده در مرحله اول را بطور ذهنی افزایش دهید و جهت حرکت را مشخص کنید مقدار d_1^+ در این جهت از صفر بیشتر بوده و هرچه فاصله نقاط از این خط زیادتر گردد مقدار d_1^+ بیشتر می شود.

۳- عدد سمت راست معادله را بطور ذهنی کاهش دهید. مقدار d_1^- در جهت کاهش بزرگتر از صفر بوده و هرچه فاصله از این خط زیادتر گردد مقدار d_1^- بیشتر می گردد.

مثال:

محدودیت آرمانی $2x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20$ مفروض است آنرا رسم کنید و جهات قابل قبول d_1^+ , d_1^- را مشخص نمایید:

$$d_1^+ = d_1^- = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 20$$

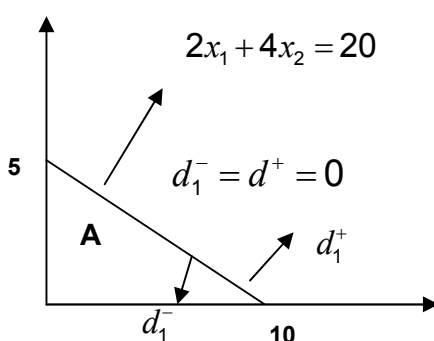
فرض $b_1 = 30$:

خط جدید بالاتر از خط فعلی خواهد بود:

↓

$$d_1^- = 0$$

$$d_1^+ > 0$$



فرض $b_1 = 10$:

خط جدید زیر خط فعلی خواهد بود:

↓

$$d_1^+ = 0$$

$$d_1^- > 0$$

مثال: یک شرکت تولید کننده وسایل الکترونیکی ۲ نوع ماشین حساب معمولی و مهندسی مونتاژ می کند. تولید هر ماشین حساب نیازمند انجام عملیاتی در ۲ کارگاه مختلف A, B می باشد. زمان استفاده از هر کارگاه در هفته و زمان لازم برای انجام عملیات مونتاژ و سود هر ماشین حساب بشرح زیر است:

ش	زمان مورد نیاز برای عملیات هر	ح:
ر		د
ح	ماشین حساب معمولی ماشین حساب مهندسی	ک
	۱ ساعت	۲ ساعت
۱.۲. ۱.۳	۱/۵ ساعت	۱/۵ ساعت
	۷/۵ تومان	۱۰ تومان
سود هر واحد (توم)		
(ان)		

در صورتی که آرمان مدیریت شرکت رسیدن به ۱۰۰۰ تومان سود باشد و شرکت خواهان حداقل سازی میزان عدم موفقیت در دستیابی به آرمان باشد مدل برنامه ریزی آرمانی را برای شرکت ارائه نمایید و به روش ترسیمی مدل برنامه ریزی جواب بهینه را بدست آورید:

$$\text{Min } d_1^-$$

$$\text{st.}$$

$$7/5x_1 + 10x_2 - d_1^+ + d_1^- = 1000$$

x_1 = تعداد تولید ماشین حساب معمولی

x_2 = تعداد تولید ماشین حساب مهندسی

d_1^- = میزان عدم دستیابی به آرمان اول

$$\text{Min } d_1^-$$

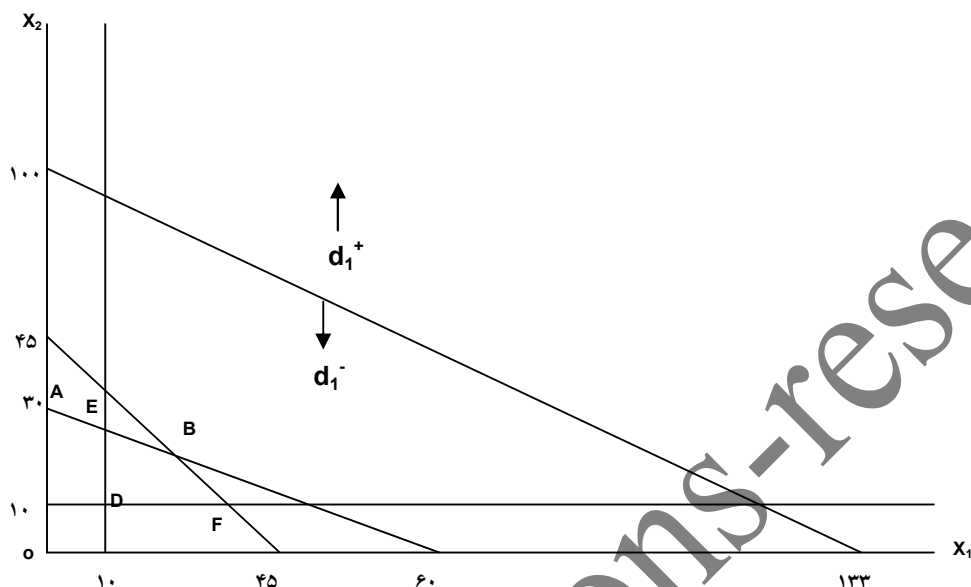
st.

$$7/5x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1000$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$1/5x_1 + 1/5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+ \geq 0$$



ناحیه موجه

باید نقطه ای در ناحیه موجه بیابیم که کمترین d_1^- را داشته باشد.

اگر بدون در نظر گرفتن محدودیت آرمانی مساله را حل کنیم جواب بهینه در یکی از نقاط گوشه ای OABC خواهد

بود. اما اگر آرمان را در نظر بگیریم بایستی نقطه گوشه ای را بعنوان جواب بهینه پذیریم که کمترین مقدار d_1^- را به همراه

دارد لذا بشرح زیر عمل می کنیم:

(میزان عدم دستیابی به آرمان) یا مقدار d_1^-

$$d_1^- = 1000$$

عدم دستیابی به آرمان $\rightarrow d_1^- = 700$

جواب بهینه $d_1^- = 650$

$$d_1^- = 662/5$$

$$\text{نقاط گوشه ای} \begin{cases} d_1^+ = 0 \\ d_1^- > 0 \end{cases}$$

مقدار آرمان اول (در زیر خط)

O	$(0,0)$	$7/5(0) + 10(0) + d_1^- - 0 = 1000$
A	$(0,30)$	$7/5(0) + 10(30) + d_1^- - 0 = 1000$
B	$(20,20)$	$7/5(20) + 10(20) + d_1^- - 0 = 1000$
C	$(45,0)$	$7/5(45) + 10(0) + d_1^- - 0 = 1000$

$$\begin{cases} x_1^* = 20 & d_1^{*-} = 650 & Z^* = 350 \\ x_2^* = 20 & d_1^{+*} = 0 & Z^* = 1000 - d_1^- = 350 \end{cases}$$

اگر برای شرکت آرمان دیگری به شکل حداقل تولید ۱۰ واحد از هریک از محصولات تعریف شده باشد آنگاه مدل برنامه ریزی آرمانی شما به چه شکل خواهد بود. (توجه داشته باشید که تولید از هر دو محصول بطور همزمان مدنظر می باشد و بایستی هنگام آوردن انحرافات در تابع هدف آنها را با یک اولویت منظور کنیم).

مدیریت شرکت به دنبال حداقل سازی عدم دستیابی به آرمان دوم می باشد.

d_2^- : عدم دستیابی به تولید ۱۰ واحد

$$\text{Min } d_1^-(d_2^-, d_3^-)$$

st.

$$\begin{cases} 7.5x_1 + 10x_2 + d_1^- + d_1^+ = 1000 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 1/5x_1 + 1/5x_2 \leq 60 \end{cases}$$

از طریق حداقل سازی انحراف منفی باید

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \quad \text{یا} \quad x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

محدودیت‌های جدید را روی شکل صفحه قبل اضافه می کنیم.

اگر بخواهیم انحراف آرمان دوم را به حداقل برسانیم بایستی $d_2^- = 0$ و $d_3^- = 0$ باشد بدون جل می توان ملاحظه نمود که اگر بر روی خط $x_1 = 10$ و $x_2 = 10$ قرار گیریم این خواسته برآورده می شود و ما دقیقاً به آرمان دوم دست یافته ایم. اینک اگر هریک از نقاط BEDF را بعنوان جواب بپذیریم در این نقاط آرمان دوم برآورده شده است لذا در این نقاط دنبال تامین حداقل d_1^- می گردیم. با قراردادن مختصات این نقاط در آرمان اول مجدداً ملاحظه می کنیم که جواب بهینه ما نقطه B خواهد بود که در این نقطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x_1^* &= 20 & d_2^{+*} &= 10 \\x_2^* &= 20 & d_3^{+*} &= 10 \\d_1^{*-} &= 650 & d_2^{*-} &= 0 \\d_1^{*+} &= 650 & d_3^{*-} &= 0\end{aligned}$$

و تفسیر آن اینست که:

(۱) از هر کدام از ماشین حسابها ۲۰ واحد تولید کنید.

(۲) در این سطح تولید به میزان ۳۵۰ تومان سود کسب می کنید. لذا ۶۵۰ تومان تا رسیدن به آرمان اول انحراف دارید. ($d_1^- = 650$)

$$7/5(20) + 10(20) - 0 + d_1^- = 1000 \Rightarrow d_1^- = 650$$

(۳) در این سطح تولید انحراف مثبت از آرمان دوم به ازای هر ماشین حساب ۱۰ واحد وجود دارد:

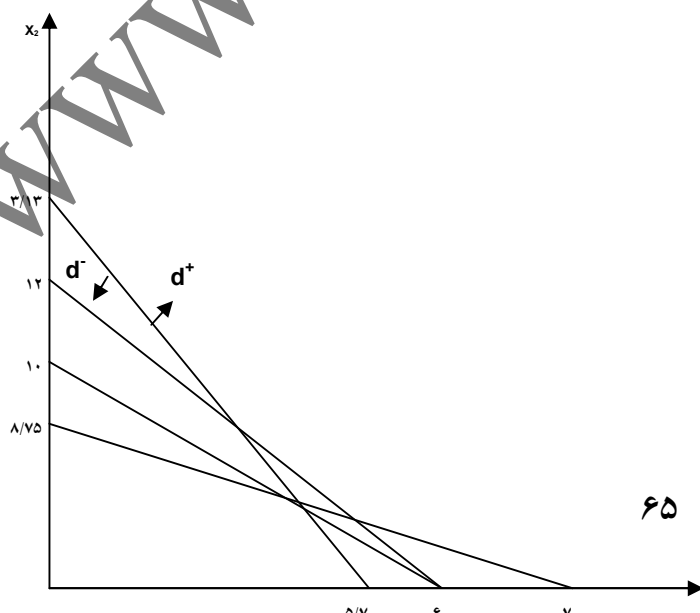
$$\begin{aligned}x_1 - d_2^+ + d_2^- &= 10 & x_2 - d_3^+ - d_3^- &= 10 \\20 - d_2^+ + 0 &= 10 & 20 - d_3^+ + 0 &= 10 \\\Rightarrow d_2^+ &= 10 & \Rightarrow d_3^+ &= 10\end{aligned}$$

$$\text{Min } Z = d_1^-, d_2^-, d_3^+$$

st.

- 1) $7x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$
 - 2) $10x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60$
 - 3) $5x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 35$
 - 4) $100x_1 + 60x_2 \leq 600$
- $x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0$

مساله را به روش ترسیمی برنامه ریزی آرمانی حل کنید:



شبکه ها:

کتاب تحلیل شبکه /تالیف دکتر محمدجواد اصغر پور/انتشارت دانشگاه تهران

«رویکرد نوین تصمیم گیری آتی»

نحوه رسم یک شبکه:

یک شبکه یک گراف خطی است و مجموعه ای از گره ها یا نقاط اتصال است که برخی یا تمامی آنها بوسیله شاخه ها یا کمانهایی به همدیگر متصلند و بر روی هر شاخه و بین دو گره جریانی وجود دارد شاخه ها می توانند جهت دار باشند یعنی حرکت فقط از گره A به گره B مجاز باشد و جریانی از گره B به گره A متصور نباشیم (مثل خیابان یکطرفه). شاخه ها می توانند بدون جهت باشند. شاخه بدون جهت شاخه ای است که در آن حرکت از A به B و بالعکس امکان دارد. شما اگر شبکه اتوبوس رانی شهر را رسم کنید در این شبکه ایستگاههای اتوبوس به عنوان گره ها و شاخه هایی که هر کدام نشاندهنده مسیر بین دو ایستگاه است وجود دارد جریان بین ایستگاهها تعداد اتوبوسهایی می باشد که در تردد هستند.

شبکه تردد بطور مثال:

شبکه	گره	شاخه	جریان
------	-----	------	-------

۱-

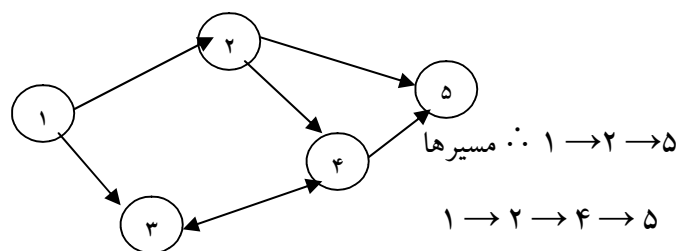
۲-

۳-

لازم است با برخی از تعاریف در بحث شبکه ها آشنا شویم.

(۱) **مسیر:** مجموعه شاخه های متوالی که دو گره را به هم وصل می کند را مسیر گویند.

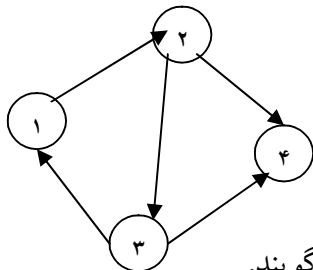
در شکل زیر



(۲) **شاخه متصل شده:** شاخه هایی را که دارای یک گره مشترک شاخه های متصل شده گویند در شکل فوق $1 \rightarrow 2$

و $1 \rightarrow 3$ شاخه های متصل هستند. اما $1 \rightarrow 2$ و $4 \rightarrow 5$ شاخه های غیرمتصل هستند.

(۳) **حلقه:** مسیری را که گره شروع و خاتمه آن یکی باشد را حلقه گویند و در جریان یکطرفه است یا جریان یکطرفه



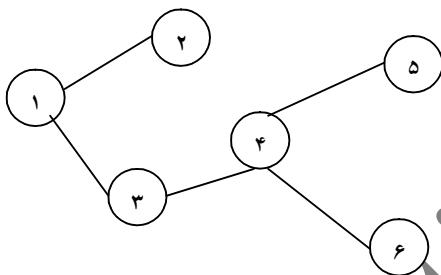
یک حلقه است $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

وجود حلقه در یک شبکه نشانه ضعف طراحی شبکه است.

شبکه غیرمدور:

(۴) هر شبکه جهنداری که در آن هیچ حلقه ای وجود ندارد شبکه غیرمدور گویند.

(۵) **درخت:** شبکه ای که تمامی گره های آن متصل بوده و حلقه ای در آن وجود نداشته باشد را یک درخت می نامند.



یک درخت

«مثال شبکه آبرسانی-روستاها»

سؤال:

در این جلسه مباحث زیادی در مود شبکه ها مطرح شد. باتوجه به مباحث مطرح شده به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(۱) من بعنوان یک دانشجو در زندگی روزمره تا چه اندازه با شبکه های موجود در جامعه درگیر هستم؟

(۲) شبکه های معیوب یا مشکل دار را تا چه اندازه می شناسم و مشکلات آنها چیست؟

(۳) چگونه می توان یک شبکه مشکل دارد را اصلاح نمود؟

در بحث تحلیل شبکه ها می خواهیم بدانیم:

(۱) کوتاهترین مسیر را در یک شبکه را چگونه انتخاب می کند.

(۲) حداکثر جریانی را که در یک شبکه می توان انتقال داد به چه میزان است.

برنامه ریزی غیرخطی

(۱) مساله به نام برنامه ریزی عدد صحیح غیرخطی زیر را با استفاده از روش برنامه ریزی پویا حل کنید:

مرحله اول مرحله دوم مرحله سوم

$$\text{Max } Z = x_3(x_2 - 1)^2(x_1 - 2)^3$$

$$1) \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2 + x_3 \geq 0, \text{Int.}$$

$$\frac{x_3 \text{ های } k}{\frac{RHS \text{ ب } b_1}{a_{13}} = \frac{4}{1} = 4}$$

$$X_3 = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4$$

$$MaxZ = x_3$$

n=1

جدول مرحله اول

i	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$f^*(1,i)$	x_3^*
0	0	0	-	-	-	0	0
1	0	1	-	-	-	1	1
2	0	1	2	-	-	2	2
3	0	1	2	3	-	3	3
4	0	1	2	3	4	4	4

بجای X_3 می نویسند $f^*(1,i)$

$$MaxZ = (x_2 - 1)^2 x_3$$

n=1

جدول مرحله ۲

i	$x_2 = 0$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$f^*(2,i)$	x_2^*	x_3^*
0	0	-	-	0	0	0
1	1	0	-	1	0	1
2	2	0	0	2	0	2
3	3	0	1	3	0	3
4	4	0	2	4	0	4

$$MaxZ = (x_1 - 2)^3 \times f^*(2, i)$$

بجای $f^*(2, i) \rightarrow (x_2 - 1)^2 x_3$

i	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$f^*(3, i)$	x_1^*	x_2^*	x_3^*
۴	-۳۲	-۳	۰	۱	۰	۱	۳	۰	۱
			$(0-2)^3 \times 4 = -32$	$x_1^* = 3$					
			$(1-2)^3 \times 3 = -3$	$x_2^* = 0$					
			$(2-2)^3 \times 2 = 0$	$x_3^* = 1$					
			$(3-2)^3 \times 1 = 1$	$Z^* = 1$					
			$(4-2)^3 \times 0 = 0$	$\Rightarrow 1(0-1)^2(3-2)^3 = 1$					

نکته:

«کمترین مقدار k طبق حداقل نسبتها استفاده می شود.»

۲) مدل برنامه ریزی غیرخطی عدد صحیح زیر مفروض است با استفاده از برنامه ریزی پویا جواب بهینه آنرا بدست آورید.

$$MinZ = x_1 + \overset{\uparrow}{3}x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \cdot (1 + \overset{\uparrow}{x_3})^3 + \overset{\uparrow}{x_4^3} - 2x_4$$

st.

$$1) \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$$

$$x_1 \leq x_4 \geq 0, Int.$$

$$MinZ = (x_2 - 1)^2$$

تابلوی اول

i	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$f^*(1, i)(x_2 - 1)^2$
۰	۰	-	-	
۱	۰	۰	۰	
۲	۰	۰	۱	
۳	۰		۱	
۴	۰			

*۵ .

$$(1-1)^2 = 0 \quad 2(1-1)^2 = 1$$

$$MinZ = (1+x_3)^3 \cdot f^*(1,i) \quad \text{تابلوی دوم}$$

i	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	$f^*(2,i)$
۰							
۱							
۲							
۳							
۴							
۵							

$$MinZ = (x_1 + 3x_1^2) + f^*(2,i) \quad \text{تابلوی سوم}$$

i	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	$f^*(3,i)$
۰							
۱							
۲							
۳							
۴							
۵							

$$MinZ = (x_1 + 3x_1^2) + f^*(2,i) \quad \text{تابلوی سوم}$$

i	$x_3=0$	$x_4=1$	$x_4=2$	$f^*(3,i)$
۵				

مسائل برنامه ریزی غیر خطی

پیش از این هر مدل دارای ۴ مفروضه زیر را بنام برنامه ریزی خطی یا LP نامگذاری نمودیم:

۱- فرض تناسب

۲- فرض جمع پذیری

۳- فرض بخش پذیری

۴- فرض معین بودن

با سلب فرض بخش پذیری مدل به شکل برنامه ریزی عدد صحیح در می آید و با سلب فرض معین بودن مساله ما شکل پارامتر یک بخود می گرفت. اگر فرض های دیگر از مدل برنامه ریزی خطی سلب شوند دیگر نمی توان آنرا یک مساله برنامه ریزی خطی نامید لذا مدل های جدیدی ساخته می شوند که ما آنها را بنام مسائل غیر خطی می نامیم.

(توجه داشته باشید که عنوان برنامه ریزی خطی یک عنوان ایجابی است که با وجود ۴ مفروضه فوق تحقق می یابد. اما عنوان برنامه ریزی غیر خطی یک عنوان سلبی است که به شکل های مختلف می توان آنرا مشاهده نمود).

انواع مختلف مدل های برنامه ریزی غیر خطی «NLP» بشرح زیر می باشند:

۱- **مدل های برنامه ریزی غیر خطی نامقید** - مدل هایی هستند که آنها را بدون هیچ گونه محدودیتی مشاهده می کنیم. باتوجه به آنچه که در بحث مدل سازی فرا گرفتیم بی شک در عالم واقعی وجود مدل غیر خطی نامقید یا بدون محدودیت بندرت امکان پذیر است. اما از آنجایی که ساخت و حل این مدل ها قادر است ما را در حل مسائل مقید یاری رساند و الگوریتم های آنها برای اثبات روش های حل مفید ضرورت دارد لذا با حل آنها آشنا می شویم.

$$MaxZ = x^4 + 3x^2 - x + 3$$

یا

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - x + 3$$

مثال:

۲- **مدل های برنامه ریزی غیر خطی مقید** - مدل هایی هستند که دارای محدودیت هایی نیز می باشند و آنها را می

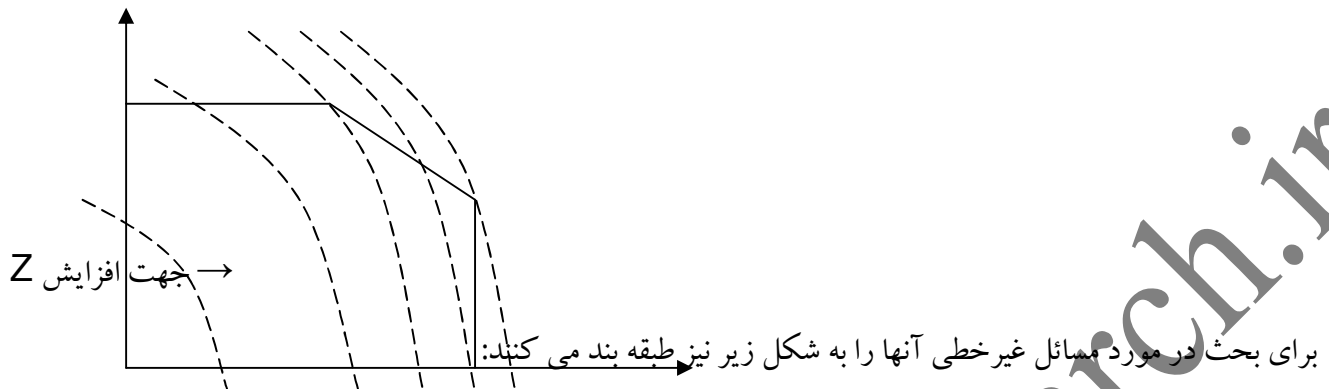
توان به اشکال زیر مشاهده نمود:

الف) مدل هایی که تابع هدف آنها بصورت غیر خطی و محدودیت ها خطی می باشند.

ب) مدل هایی که محدودیت های آنها غیر خطی و یا ترکیبی از خطی و غیر خطی و تابع هدف آنها بشکل خطی است.

ج) مدل هایی که تابع هدف و محدودیت ها همگی به شکل غیر خطی هستند.

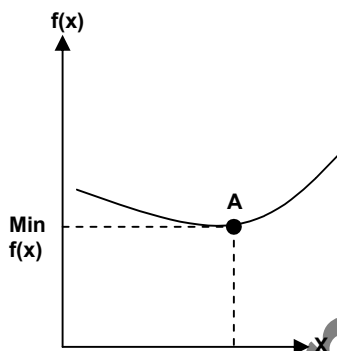
به شکل زیر توجه نمایید در این شکل محدودیتها به شکل خطی و تابع هدف به شکل غیرخطی دارای معادله دایره می باشد:
و Z^* آن پس از تعیین جهت افزایش معادله دایره (که یک معادله درجه ۲ غیرخطی است بدست آمده است).



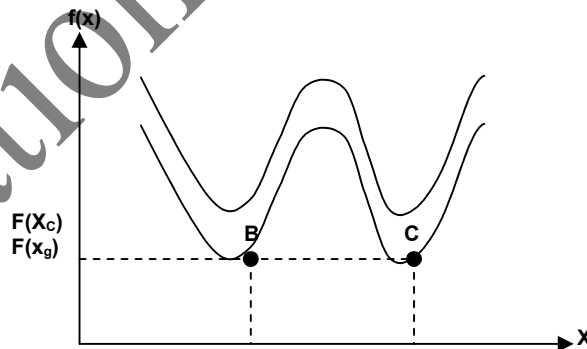
(۱) مسائل NLP یک متغیره

(۲) مسائل NLP دو یا چند متغیره

اگر بخواهیم بحث خود را در مورد مسائل غیرخطی پیش ببریم ضروری است که بدانیم هر مسئله غیرخطی تک متغیره می تواند دارای یک نقطه کمینه (Min) یا بیش از یک نقطه کمینه باشد در شکل الف زیر ملاحظه می شود که تابع ما دارای یک نقطه کمینه و در شکل ب دارای دو نقطه کمینه است:



(شکل الف)



(شکل ب)

اگر به هر دو شکل نگاه کنیم شرط لازم و کافی برای بهینه بودن برای نقطه A و همچنین نقطه B, C برقرار است.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0 \end{cases}$$

اما با توجه به شکل می دانیم علیرغم اینکه برای نقطه B, C شرط لازم و کافی برقرار و هر دو کمینه موضعی ما هستند اما در نقطه B مقدار $f(x)$ کمتر از نقطه C می باشد. لذا نقطه B را کمینه کلی یا [(min) کلی] می نامند. (طبق شکل ب فوق) $f(x_B)$ کمتر از $f(x_C)$ است.

بدین ترتیب می توان نتیجه گرفت که برای برخی از توابع مینیم کلی وجود دارد لذا در هنگام حل مساله آنرا بعنوان جواب بهینه انتخاب می کنیم.

برای برخی از مسائل تابع آنها دارای مینیم کلی نیست و یا عبارتی ما نمی توانیم جواب بهینه قطعی را پیدا کنیم. لذا در این مدلها بدنبال آن خواهیم بود که در دامنه مشخصی از مقادیر X بهینه نسبی را بدست آوریم.

روش های متعددی برای اینکه بتوان جواب یک مساله غیرخطی نامقید را بدست آورد وجود دارد.

ناگفته نماند که این روش ها دارای قاطعیتی همچون روش سیمپلکس و یا سایر روش های برنامه ریزی خطی نیستند و محدودیتهای بسیاری برای آنها وجود دارد.

این روش ها عمدتاً پیچیده و زمان بر نیز می باشند.

یکی از راههای بررسی اینکه یک جواب کمینه کلی یا موضعی (نسبی) در اختیار ما میباشد آنست که مساله را چندین بار متوالی و هر بار از یک نقطه آغازین جدید حل کنیم. اگر تمامی جوابهای بدست آمده یکسان باشند دلالت بر آن دارند که جواب بهینه ما کمینه کلی است در غیر اینصورت شما با یک کمینه موضعی روبرو هستید این روش بدلیل آنکه تعداد بسیار زیادی از تکرار را نیاز دارد روش غیر کارآمد محسوب می گردد.

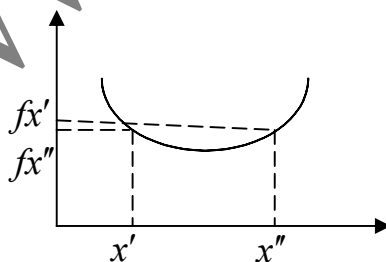
Convex , Concave

«توابع کوژ و کاو»

برای اینکه بتوان یک مساله غیرخطی را حل نمود بایستی در مورد کوژ یا کاو بودن آن نظر داد. پیش از این مشاهده نمودید که در شکل الف مشتق دوم در تمامی محدوده مورد نظر دارای علامت انحنای یکسان است در حالیکه در شکل دوم (ب) چنین چیزی وجود ندارد. شکل الف را دارای حالت (تک مودی) و شکل دوم را (دو مودی) می نامند. برای اشکالی که بیش از یک مود دارند بایستی جواب بهینه در یک منطقه مشخص بین دو X که در آن شکل ما بصورت تک مودی در می آید بدست آید. برای اینکه بتوان ناحیه ای را که چنین حالتی را دارد پیدا کنیم بایستی کوژ یا کاو بودن شکل را تشخیص دهیم و اگر با یک منحنی کوژ روبرو هستیم آنرا در حالتی که بدنبال مینیم سازی یا حداقل مقدار $f(x)$ هستیم مطالعه نمائیم. (برای اشکال کاو می توان آنرا در -1 ضرب و به شکل کوژ درآورده و سپس مانند فوق

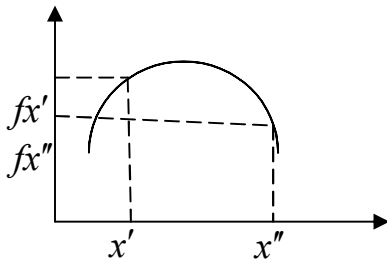
برخورد نمائیم.)

یک شکل تک مودی کوژ:



$$f[\lambda x'' + (1-\lambda)x'] < \lambda f(x'') + (1-\lambda)f(x')$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$



اگر $<$ یعنی کوژ مطلق است.

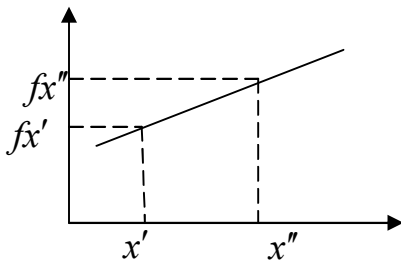
اگر $\leq$ یعنی کوژ نسبی است.

«یک شکل تک مودی کاو»

نکته:

۱- توابعی که دارای چند مود می باشند می گوئیم نه کاو هستند و نه کوژ

۲- توابعی که بصورت خطی هستند می گوئیم هم کاو هستند هم کوژ



$$f[\lambda x'' + (1-\lambda)x'] \geq \lambda f(x'') + (1-\lambda)f(x')$$

پایان