



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

LEVELUP

ریاضیات گسسته



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات لول آپ

گسسته : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان آمار و گسسته : امیر سلیمانی فر

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

۱ ثابت کنید در بازه $(0, 1)$ عضوی که در همه اعضا بزرگتر باشد وجود ندارد.

۲ فرض کنید تابع f در $x = a$ پیوسته باشد ولی تابع g در $x = a$ پیوسته نباشد ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

۳ ثابت کنید $\log_p^5$ عددی گنگ است.

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

۴ چند مقسوم علیه $n = 3^3 \times 7 \times 11^4$ مربع کامل است؟

۵ فرض کنید a, b, c اعداد صحیح مخالف صفر باشند، ثابت کنید اگر $a^2 \mid bc$ ، $b \mid a$ ، آنگاه داریم:

$$ab \mid c^2$$

۶ اگر $ab \mid b + c$ گزاره های زیر را نتیجه بگیرید:

الف) $b \mid c$

ب) $a \mid b^2 - c^2$

ج) $a \mid b^3 + c^3$

۷ فرض کنید a عددی صحیح باشد. بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $a^2 - a + 1$ ، $a^2 + a + 1$ را بیابید:

۸ فرض کنید $(a, b) = 1$ ، $(a, c) = 1$ آیا می توان نتیجه گرفت $(a^2 + b, ab) = 1$ ، $(a^2 + b, a^2 - b) = 1$ ؟

در غیر این صورت مثال نقض بنویسید:

۹ فرض کنید $ax - by = 1$ حاصل $(a + b, x + y)$ را بیابید:



۱۰ ثابت کنید اگر $a = bq + r$ آنگاه $(a, b) = (b, r)$

۱۱ فرض کنید a و b اعدادی صحیح باشند دست کم یکی از آنها صفر نباشد ثابت کنید:

$$(ka, kb) = k(a, b) : k \in \mathbb{N}$$

۱۲ فرض کنید $(a, b) = 1$ ثابت کنید: $(a + b, ab) = 1$.

۱۳ ثابت کنید اگر $(a, b) = d$ آنگاه $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

۱۴ فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید:

$$(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$$

۱۵ فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح k داریم:

$$(a, b) = (a, b + ka)$$

۱۶ فرض کنید $(b, c) = 1$ ثابت کنید: $(ac, b) = (a, b)$.

۱۷ اگر $(a, b) = 1$ حاصل $(a + b, a - b)$ را بیابید:

۱۸ ثابت کنید اگر a و b عدد صحیح و مخالف صفر باشند آنگاه $(a, b) = |ab|$.

۱۹ در یک تقسیم مقسوم علیه برابر ۱۷ باقیمانده برابر ۳ می باشد حداکثر چند واحد می توان به مقسوم اضافه کرد بدون آنکه خارج قسمت، مقسوم علیه تغییر کنند؟

۲۰ باقیمانده عدد زوج a بر ۱۷ برابر ۷ است باقیمانده $\frac{a}{۲}$ بر ۱۷ چقدر است؟

۲۱ باقیمانده یک عدد مکعب کامل در تقسیم بر ۷ چه مقادیری می تواند بسازد؟

۲۲ یک عدد مربع کامل در تقسیم بر ۵ چه باقیمانده هایی می تواند داشته باشد؟

۲۳ عدد a مضرب ۳ است. اگر بدانیم باقیمانده تقسیم a بر ۱۳ برابر یک است، باقیمانده تقسیم $\frac{a}{۳}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.

درس ۳: هم نهشتی در اعداد صحیح، کاربردها

۲۴ ثابت کنید $[۱۵]_{۳۰} \cap [۱۰]_{۲۰} = \emptyset$



۲۵ ثابت کنید: $[5]_8 \subseteq [37]_{24}$

۲۶ باقیمانده تقسیم 3^{15} بر ۱۷ را بیابید:

۲۷ باقیمانده تقسیم 17^{19} بر ۲۵ را بیابید.

۲۸ تمام جواب‌های n که به ازای آن‌ها معادله $(2m^2 + 1)x + (2m - 4)y = n$ همواره در $\mathbb{Z}$ جواب دارد را بیابید:

۲۹ کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۱۸۵۰ ریال تمبر دارد با تمبرهای ۷۰ و ۶۰ ریالی چقدر است؟

فصل دوم: گراف و مدل سازی

درس ۱: معرفی گراف

۳۰ با ۷ رأس a, b, c, d, e, f, g چند گراف ساده می‌توان ساخت به‌طوری که همسایگی باز رأس a حداقل ۴ عضو داشته باشد؟

۳۱ آیا گرافی ساده و ۱۰ - منتظم با ۳۵ یال وجود دارد؟

درس ۲: مدل‌سازی با گراف

۳۲ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که:

(الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد؟
(ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد؟

فصل سوم: ترکیبیات

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

۳۳ در چند عدد ۳ رقمی مجموع رقم‌ها فرد است؟

۳۴ در چند عدد ۳ رقمی حاصل ضرب رقم‌ها زوج است؟



۳۵ حاصل عبارت A چقدر است؟

$$A = \binom{17}{3} + \binom{17}{4} + \cdots + \binom{17}{8}$$

۳۶ حاصل عبارت A چقدر است؟

$$A = \binom{16}{3} + \binom{16}{4} + \cdots + \binom{16}{13}$$

۳۷ علی و حسین و ۴ نفر دیگر به چند حالت می‌توانند دور یک میز دایره‌ای بشینند به‌طوری که علی روبه‌روی حسین باشد؟

۳۸ چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که رقم‌هایش از چپ به راست نزولی باشد؟ (ارقام تکراری نباشند.)

۳۹ تاسی را به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم. چند حالت مختلف وجود دارد برای اینکه تاس در نهمین پرتاب برای سومین بار ۶ بیاید؟

۴۰ هفت مهره با رنگ‌های متفاوت در یک ردیف قرار دارند. می‌خواهیم دو مهره جدید را در این ردیف در کنار یا بین این هفت مهره قرار دهیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (رنگ تمام ۷ مهره متفاوت است.)

۴۱ مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد که $\{8, 9\}$ زیرمجموعه آنها نباشد؟

۴۲ شخصی در یک آزمون تستی ۴ گزینه‌ای با ۲۰ سؤال، شرکت کرده است و به همه سؤالات پاسخ می‌دهد. در چند حالت به حداقل ۱۸ سؤال پاسخ درست داده است؟ (همه سؤالات یک پاسخ درست دارند.)

۴۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده‌شده به دست آورید.

الف

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 10 \quad x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$$

ب تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 12 \quad x_1 > 2, x_5 \geq 4$$

پ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 11 \quad x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$$

ت تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$



ث

$$x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

۴۴ در مربع لاتین زیر، حاصل $3a - 2b$ چند است؟

	۲		
	a		۲
۱		b	
		۱	

۴۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.

۴۶ در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است، ۷ راننده در هفت روز هفته با ۷ ماشین مختلف در ۷ مسیر مختلف مسابقه دهند. به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- الف) هر راننده هر روز، با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛
 - ب) هر راننده با هر ماشین، دقیقاً یک روز رانندگی کند؛
 - پ) هر راننده هر روز، دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛
 - ت) هر ماشین در هر مسیر، دقیقاً یکبار به کار گرفته شود.
- برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.

درس ۲: روش‌هایی برای شمارش

۴۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی مختلف را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۴۸ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند، باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۴۹ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح است.

۵۰ یک تاس را چند بار پرتاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل ۴ نتیجه یکسان حاصل می‌شود؟



پاسخنامه تشریحی

۱) فرض کنید a عضوی از $(\circ, 1)$ باشد که از همه اعضای $(\circ, 1)$ بزرگتر باشد آنگاه چون $\circ < a < 1$ پس $\frac{a+1}{2} < 1$ یعنی عضوی از $(\circ, 1)$ وجود دارد که از a بزرگتر است. پس a بزرگترین عضو بازه $(\circ, 1)$ نیست از این تناقض نتیجه می‌گیریم $(\circ, 1)$ ، بزرگترین عضو ندارد.

۲) به برهان خلف فرض می‌کنیم $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه چون f در $x = a$ پیوسته است پس $f + g - f$ نیز در $x = a$ پیوسته است یعنی g در a پیوسته است که تناقض است. بنابراین باید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته باشد.

۳) فرض کنیم $\log_p^b$ گویا باشد یعنی اعداد طبیعی n, m وجود دارند به طوریکه $\log_p^b = \frac{m}{n}$ در اینصورت $2^{\frac{m}{n}} = 5$ در نتیجه $2^n = 5^n$ که این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست زیرا به ازای هر n, m طبیعی راست تساوی زوج و سمت چپ تساوی عددی فرد است. بنابراین از این تناقض می‌توان درستی حکم را نتیجه گرفت.

۴) همه مقسوم‌علیه‌های n به فرم $11^z \times 7^y \times 3^x$ هستند. برای اینکه یک عدد مربع کامل باشد، باید توان تمامی عوامل اول آن زوج باشد. بنابراین برای x و y و z به ترتیب ۲ و ۱ و ۳ انتخاب وجود دارد. پس ۶ مقسوم‌علیه مربع کامل هستند.

۵)

$$(1) \left. \begin{matrix} a^r | bc \\ b | a \end{matrix} \right\} \rightarrow a^r b | bca \rightarrow a | c$$

$$(2) \left. \begin{matrix} b | a \rightarrow b^r | a^r \\ a^r | bc \end{matrix} \right\} \rightarrow b^r a^r | a^r bc \rightarrow b | c$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} ab | c^r$$

$$(الف) \left. \begin{matrix} ab | b+c \\ b | ab \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{b | b+c}{b | b} \rightarrow b | c$$

$$(ب) \left. \begin{matrix} ab | b+c \\ a | ab \end{matrix} \right\} \rightarrow a | b+c \rightarrow a | (b+c)(b-c) \rightarrow a | b^2 - c^2$$

$$(ج) \left. \begin{matrix} a | b+c \\ b+c | b^3 + c^3 \end{matrix} \right\} \rightarrow a | b^3 + c^3$$

۷) می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{matrix} d | a^r + a + 1 \xrightarrow{a^r - 1 = (a-1)(a^r + a + 1)} d | a^r - 1 \\ d | a^r - a + 1 \xrightarrow{a^r + 1 = (a+1)(a^r - a + 1)} d | a^r + 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow d | a^r + 1 - a^r + 1 \rightarrow d | 2$$

بنابراین ۲ یا $d = 1$ از طرفی چون $a^r + a$ به ازای هر عدد صحیح و دلخواه a زوج است بنابراین $a^r + a + 1$ همواره فرد است و چون $d | a^r + a + 1$ بنابراین $d = 1$.

۸) درستی $(a^r + b, ab) = 1$ را اثبات می‌کنیم و برای $(a^r + b, a^r - b) = 1$ مثال نقض می‌آوریم:

فرض کنید $(a^r + b, ab) = d$ آنگاه:

$$\left. \begin{matrix} d | ab \\ d | a^r + b \xrightarrow{\times a} d | a^r + ab \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} d | -ab \\ d | a^r + ab \end{matrix} \right\} \rightarrow d | a^r$$

$$\left. \begin{matrix} d | a^r b^r + b^3 \\ d | a^r b^r \end{matrix} \right\} \rightarrow d | b^3$$

$$d | (a^r, b^3) \rightarrow d | 1 \rightarrow d = 1$$

و اگر قرار دهید $a = 3, b = 5, c = 5$ مثال نقضی برای $(a^r + b, a^r - b) = 1$ بدست می‌آید.

۹) فرض کنید $(a + b, x + y) = d$ آنگاه:

$$\left. \begin{matrix} d | a + b \rightarrow d | x(a + b) \\ d | x + y \rightarrow d | b(x + y) \end{matrix} \right\} \rightarrow d | ax + b \cancel{x} - \cancel{y}x - by \rightarrow d | ax - by \rightarrow d | 1$$

بنابراین $d = 1$.

۱۰) تذکر: $(a, b) = (a, ka + b) \quad k \in \mathbb{Z}$

$$(a, b) = (bq + r, b) = (bq + r - bq, b) = (r, b)$$



۱۱ فرض کنید $(a, b) = d$ در اینصورت $d|b$ ، $d|a$ در نتیجه $kd|ka$ ، $kd|kb$ بنابراین داریم: $kd|(ka, kb)$

در نتیجه عددی طبیعی مانند q وجود دارد که $(ka, kb) = kdq$ به این ترتیب $kdq|ka$ ، $kdq|kb$ بنابراین $dq|a$ ، $dq|b$ یعنی $dq|d$ پس $1|q$ در نتیجه $q = 1$ حال می‌توان نوشت:

$$(ka, kb) = kd = k(a, b)$$

۱۲ تذکر: می‌دانیم: $(a, b) = (a, ka + b)k \in \mathbb{Z}$

$$(a + b, a) = (a + b - a, a) = (b, a) = 1$$

$$(a + b, b) = (a + b - b, b) = (a, b) = 1$$

$a + b$ هم نسبت به a و هم نسبت به b اول است بنابراین نسبت به حاصلضرب این دو نیز اول است.

$$\rightarrow (a + b, ab) = 1$$

۱۳ فرض کنید $d' = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ و می‌دانیم $d' \geq 1$ می‌توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} d' \frac{a}{d} \rightarrow dd'|a \\ d' \frac{b}{d} \rightarrow dd'|b \end{array} \right\} \xrightarrow{ad'(a, b)} \begin{array}{l} (a, b) = d \\ dd' \leq d \rightarrow d' \leq 1 \end{array}$$

حال از $d' \geq 1$ ، $d' \leq 1$ نتیجه می‌گیریم: $d' = 1$.

۱۴ فرض کنیم $d = (n! + 1, (n + 1)! + 1)$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} d|n! + 1 \\ d|(n + 1)! + 1 \end{array} \right\} \rightarrow d|(n + 1)! + 1 - (n + 1)(n! + 1) \rightarrow d|n$$

حال از $d|n$ ، $d|n! + 1$ نتیجه می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} d|n \\ d|n! + 1 \end{array} \right\} \rightarrow d|n! + 1 - (n - 1)! \times n \rightarrow d|1 \rightarrow d = 1$$

۱۵ فرض کنید $(a, b + ka) = d'$ ، $(a, b) = d$ چون $d|b + ka$ پس $d|d'$ از طرف دیگر $d'|a$ بنابراین $d'|ka$ و چون $d'|b + ka$ پس $d'|b + ka - ka$ پس $d'|b$ و یا $d'|b + ka - ka$ در نتیجه $d'|d$ به این ترتیب $d' = d$.

۱۶ قرار دهید $(a, b) = d$ ، $(ac, b) = d'$ در این صورت داریم:

$$(a, b) = d \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d|a \rightarrow d|ac \\ d|b \end{array} \right\} \xrightarrow{(ac, b) = d'} d \leq d'$$

چون $(ac, b) = d'$ پس $d'|ac$ ، $d'|b$ و چون $(c, b) = 1$ و با توجه به اینکه c نسبت به هر مقسوم‌علیه b از جمله d' اول است بنابراین $(c, d') = 1$ حال داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} d'|ac \\ d'|b \end{array} \right\} \xrightarrow{(c, d') = 1} d'|a \xrightarrow{(a, b) = d} d' \leq d$$

از $d \leq d'$ ، $d' \leq d$ نتیجه می‌گیریم $d = d'$.

۱۷ داریم:

$$(a, b) = (a, ka + b)k \in \mathbb{Z}$$

$$(a + b, a - b) = (a + b - (a - b), a - b) = (2b, a - b)$$

از طرفی داریم:

$$(b, a - b) = (b, a - b + b) = (b, a) = 1$$

پس $(2b, a - b) = (2, a - b)$ بنابراین $(a + b, a - b)$ می‌تواند ۱ یا ۲ باشد.

۱۸ فرض کنید $(a, b) = d$ داریم:

$$(a, b) = d \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = a'd \\ b = b'd \end{array} \right\} \rightarrow [a, b] = |a'b'|d$$

$$(a', b') = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

$$[a, b] \cdot (a, b) = |a'b'|d^2 = |a'd \cdot b'd| = |a \cdot b|$$

۱۹ طبق فرض $a = 17q + 13$ اگر x واحد به a اضافه کنیم به طوریکه خارج قسمت تغییر نکند، الگوریتم تقسیم به فرم زیر در می‌آید:

$$a + x = 17q + (13 + x)$$

به طوریکه $17 < 13 + x$ یا $14 < x$ در نتیجه حداکثر مقدار x برابر ۱۳ می‌باشد.

۲۰ طبق فرض $a = 17k + 7$ ، k تنها می‌تواند به صورت $2k' + 1$ (فرد) باشد زیرا اگر k مضرب ۲ باشد آنگاه با زوج بودن a به تناقض می‌رسیم؛ حالا می‌توان نوشت:

$$a = 17(2k' + 1) + 7 = 17 \times 2k' + 17 + 7 = 17 \times 2k' + 24$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = 17k' + 12$$

بنابراین باقیمانده $\frac{a}{2}$ بر ۱۷ برابر ۱۲ است.

۲۱ هر عدد صحیح دلخواه a در تقسیم بر ۷ به یکی از ۷ حالت $7k$ ، $7k \pm 1$ ، $7k \pm 2$ ، $7k \pm 3$ است. باید هریک از حالت‌های فوق عدد a را به توان ۳ برسانیم تا



باقیمانده‌های ممکن a^3 تقسیم بر ۷ بیابیم:

$$\begin{aligned} a = 7k &\rightarrow a^3 = 7k^3 \\ a = 7k \pm 1 &\rightarrow a^3 = 7k^3 \pm 1 \\ a = 7k \pm 2 &\rightarrow a^3 = 7k^3 \pm 1 \\ a = 7k \pm 3 &\rightarrow a^3 = 7k^3 \pm 1 \end{aligned}$$

بنابراین باقیمانده تقسیم مکعب هر عدد صحیح بر ۷ فقط می‌تواند یکی از مقادیر ۰، ۱، ۶ باشد.

۲۲ عدد صحیح و دلخواه a در تقسیم بر ۵ به یکی از ۵ صورت $5k$ ، $5k \pm 1$ ، $5k \pm 2$ است. حال کافی است هریک از صورت‌های فوق را به توان ۲ برسانیم تا باقیمانده‌های ممکن مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۵ بدست آید:

$$\begin{aligned} a = 5k &\rightarrow a^2 = 5k^2 \\ a = 5k \pm 1 &\rightarrow a^2 = 5k^2 \pm 1 \\ a = 5k \pm 2 &\rightarrow a^2 = 5k^2 + 4 \end{aligned}$$

پس مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۵ تنها می‌تواند باقیمانده‌های ۰ و ۱ و ۴ را بسازد.

۲۳ طبق فرض $a = 13k + 1$ برای k تقسیم بر ۳، سه حالت $3k' \pm 1$ ، $3k'$ وجود دارد اگر k به دو صورت $3k'$ یا $3k' + 1$ باشد دیگر a مضرب ۳ نمی‌شود. بنابراین باید به فرم $3k' - 1$ باشد؛ حال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a = 13k + 1 &= 13(3k' - 1) + 1 = 13 \times 3k' - 13 + 1 = 13 \times 3k' - 12 \Rightarrow \frac{a}{3} = 13k' - 4 \\ &= 13q + 9 \end{aligned}$$

پس باقیمانده تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۳ برابر ۹ است.

۲۴ فرض کنیم $10 \equiv 15 \pmod{3}$ در این صورت عدد صحیح x وجود دارد به طوری که:

$$\begin{cases} x \in [10]_{30} \Rightarrow x \equiv 10 \pmod{30} \xrightarrow{10|20} x \equiv 10 \pmod{10} \Rightarrow 10 \equiv 15 \\ x \in [15]_{30} \Rightarrow x \equiv 15 \pmod{30} \xrightarrow{10|30} x \equiv 15 \pmod{10} \Rightarrow 10 \equiv 15 \end{cases}$$

که $10 \equiv 15$ درست نیست، پس $10 \pmod{30} \cap 15 \pmod{30} = \emptyset$.

$$a \in [37]_{24} \rightarrow a \equiv 37 \pmod{24} \xrightarrow{8|24} a \equiv 5 \pmod{8} \quad \left. \begin{matrix} 37 \equiv 5 \pmod{8} \end{matrix} \right\} \rightarrow a \equiv 5$$

در نتیجه $a \in [5]_8$ بنابراین $[37]_{24} \subseteq [5]_8$.

۲۶ باید باقیمانده تقسیم توان‌های مختلف ۳ بر ۱۷ را حساب کنیم تا به یک هم‌نهشتی مطلوب برسیم:

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{17}, & 3^2 &\equiv 9 \pmod{17}, & 3^3 &\equiv 27 \equiv 10 \pmod{17} \\ 3^4 &\equiv 3 \times 3^3 \equiv 3 \times 10 \equiv 30 \equiv 13 \pmod{17} \\ 3^5 &\equiv 3 \times 3^4 \equiv 3 \times 13 \equiv 39 \equiv 5 \pmod{17} \\ 3^6 &\equiv 3 \times 3^5 \equiv 3 \times 5 \equiv 15 \pmod{17} \\ 3^7 &\equiv 3 \times 3^6 \equiv 3 \times 15 \equiv 45 \equiv 11 \pmod{17} \\ 3^8 &\equiv 3 \times 3^7 \equiv 3 \times 11 \equiv 33 \equiv -1 \pmod{17} \end{aligned}$$

حال می‌توان نوشت:

$$3^{15} \equiv 3^8 \times 3^7 \equiv (-1) \times (-1) \equiv 1 \pmod{17}$$

پس باقیمانده تقسیم 3^{15} بر ۱۷ برابر ۱ است.

۲۷ می‌توان نوشت:

$$17 \equiv 17 - 25 \equiv -8 \pmod{25} \rightarrow 17^{19} \equiv (-8)^{19} \pmod{25}$$

حال با محاسبه توان‌های ۲ بر هم‌نهشتی $1 \equiv 1024 \pmod{25} \rightarrow 41 \times 25 + 1024 \equiv -1 \pmod{25}$ می‌رسیم، پس داریم:

$$\begin{aligned} (17^{19})^{25} &\equiv (-1)^{25} \pmod{25} \rightarrow 17^{475} \equiv -1 \pmod{25} \\ 17^{475} &\equiv -1 \pmod{25} \rightarrow 17^{475} \equiv -1 \pmod{25} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$17^{19} \equiv -1 \pmod{25} \rightarrow 17^{38} \equiv 1 \pmod{25}$$

۲۸ فرض کنید $d \mid n$ باید $(2m^2 + 1, 2m - 4) = d$ می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{matrix} d \mid 2m - 4 \rightarrow d \mid 2m^2 - 4m \\ d \mid 2m^2 + 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow d \mid 4m + 1$$



$$\left. \begin{array}{l} d | 4m + 1 \\ d | 2m - 4 \rightarrow d | 4m - 8 \end{array} \right\} \rightarrow d | 9$$

بنابراین اگر $n = 9k$ باشد d در هر صورت آن را عاد خواهد کرد.

۲۹

$$60x + 70y = 1850 \rightarrow 6x + 7y = 185 \rightarrow 7y \equiv 185 \equiv 185 - 6 \times 30 \equiv 5$$

$$\xrightarrow{7 \equiv 1} y \equiv 5 \rightarrow y = 6k + 5$$

$$6x + 7(6k + 5) = 185 \rightarrow 6x = 150 - 6 \times 7k \rightarrow x = 25 - 7k$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 25 - 7k \\ y = 6k + 5 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

برای بدست آوردن جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 25 - 7k \geq 0 \rightarrow k \leq 3 \\ y \geq 0 \rightarrow 6k + 5 \geq 0 \rightarrow k \geq 0 \end{cases}$$

در بین جواب‌های طبیعی معادله به ازای $x = 4$ و $y = 23$ و $x + y = 27$ کم‌ترین مقدار لازم برای تمبرها بدست می‌آید.

۳۰ رأس a را کنار می‌گذاریم. با بقیه رأس‌ها، $2^{15} = 2^{\binom{6}{2}}$ گراف می‌توان ساخت. درجه رأس a بزرگتر یا مساوی ۴ است، پس:

$$\deg a = 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \rightarrow \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$$

طبق اصل ضرب، تعداد گراف‌ها برابر است با:

$$22 \times 2^{15} = 11 \times 2 \times 2^{15} = 11 \times 2^{16}$$

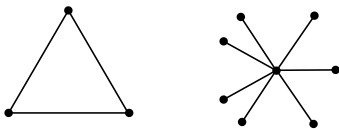
۳۱

$$rp = 2q \Rightarrow 10p = 70 \Rightarrow p = 7$$

گرافی با ۷ رأس نمی‌تواند ۱۰- منتظم باشد.

۳۲ الف) کافی است گراف را به صورت یک زیرگراف ستاره‌ای و یک رأس تنها در نظر بگیریم. در این صورت، رأس وسط گراف ستاره‌ای و رأس تنها مجموعه احاطه‌گر را تشکیل می‌دهند.

ب) اگر گراف را به صورت مقابل در نظر بگیریم که شامل یک مثلث و یک گراف ستاره‌ای است، هر رأس گراف مثلث با رأس وسط گراف ستاره‌ای تشکیل یک مجموعه احاطه‌گر ۲ عضوی می‌دهند که این مجموعه یکتا نیست.



۳۳ حالت اول: هر ۳ رقم فرد باشد. در این صورت برای هر رقم، ۵ انتخاب وجود دارد. تعداد حالات برابر است با:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{حالت ۵} & \text{حالت ۵} & \text{حالت ۵} \\ \hline \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } 5 \times 5 \times 5 = 125$$

حالت دوم: دو رقم زوج باشد و یک رقم فرد باشد. خود این حالت را نیز به ۳ بخش تقسیم می‌کنیم. یک: اگر یکان فرد باشد، تعداد حالات برابر است با:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{حالت ۴} & \text{حالت ۵} & \text{حالت ۵} \\ \hline \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } 4 \times 5 \times 5 = 100$$

دو: دهگان فرد است که تعداد حالات برابر است با:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{حالت ۴} & \text{حالت ۵} & \text{حالت ۵} \\ \hline \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } 4 \times 5 \times 5 = 100$$

سه: صدگان فرد است که تعداد حالات برابر است با:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{حالت ۵} & \text{حالت ۵} & \text{حالت ۵} \\ \hline \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{حالت مطلوب: } 5 \times 5 \times 5 = 125$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$\underbrace{125}_{\text{حالت اول}} + \underbrace{100 + 100 + 125}_{\text{حالت دوم}} = 450$$

۳۴ ابتدا تعداد کل اعداد سه رقمی را محاسبه می‌کنیم:

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

اگر هر سه رقم فرد باشند، حاصل ضرب آنها فرد است. تعداد این دسته از اعداد، برابر است با:

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

در اعداد باقی‌مانده، حاصل ضرب ارقام زوج است، بنابراین داریم:



$$900 - 125 = 775$$

نکته: به ازای عبارات تعریف شده، همواره داریم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$A = \binom{17}{3} + \binom{17}{4} + \dots + \binom{17}{8} = \binom{17}{14} + \binom{17}{13} + \dots + \binom{17}{9}$$

نکته: می‌دانیم به ازای عبارات تعریف شده، همواره داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

پس به ازای $n = 17$ داریم:

$$\binom{17}{0} + \binom{17}{1} + \binom{17}{2} + \underbrace{\binom{17}{3} + \dots + \binom{17}{8}}_A + \underbrace{\binom{17}{9} + \dots + \binom{17}{14}}_A + \binom{17}{15} + \binom{17}{16} + \binom{17}{17} = 2^{17}$$

$$\binom{17}{0} = \binom{17}{17} = 1, \quad \binom{17}{1} = \binom{17}{16} = 17, \quad \binom{17}{2} = \binom{17}{15} = 136$$

بنابراین:

$$2A + 2(1 + 17 + 136) = 2^{17} \Rightarrow 2A = 2^{17} - 2 \times 154 \Rightarrow A = 2^{16} - 154$$

نکته: می‌دانیم به ازای عبارات تعریف شده، همواره داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

پس برای $n = 16$ داریم:

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \underbrace{\binom{16}{3} + \binom{16}{4} + \dots + \binom{16}{13}}_A + \binom{16}{14} + \binom{16}{15} + \binom{16}{16} = 2^{16}$$

در عبارت بالا A همان مقدار خواسته شده در صورت سؤال است. از طرفی می‌دانیم:

$$\binom{16}{0} = \binom{16}{16} = 1, \quad \binom{16}{1} = \binom{16}{15} = 16, \quad \binom{16}{2} = \binom{16}{14} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$$

پس معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$1 + 16 + 120 + A + 120 + 16 + 1 = 2^{16} \Rightarrow A = 2^{16} - 274$$

ابتدا فرض می‌کنیم علی نشسته است. برای این کار فرقی ندارد که کجا بنشیند و همه حالت‌ها مشابه‌اند. حالا برای جایگاه حسین، فقط یک حالت وجود دارد (روبه‌روی علی). سپس ۴ نفر دیگر به ۴ حالت، می‌توانند در جایگاه‌های باقی‌مانده جایگشت داشته باشند. بنابراین جواب نهایی ۴! است.

اگر ۵ رقم متفاوت داشته باشیم، برای چیدن آنها کنار هم، فقط یک حالت قابل قبول داریم. باید از بزرگ به کوچک مرتب کنیم. بنابراین تعداد کل حالات برابر با تعداد انتخاب‌های ۵ رقم از بین ۱۰ رقم است که برابر با $\binom{10}{5}$ است.

دقت کنیم که نگران صفر بودن رقم سمت چپ نیستیم، چون چنین حالتی با فرض نزولی بودن ارقام ممکن نیست.

برای اینکه تاس در نهمین پرتاب برای سومین بار، ۶ بیاید، باید در ۸ پرتاب اول ۲ بار ۶ بیاید و ۶ بار یکی از اعداد ۱ تا ۵ بیاید. برای اینکه انتخاب کنیم در کدام پرتاب‌ها ۶ بیاید، باید ۲ پرتاب از ۸ پرتاب را انتخاب کنیم که تعداد حالات برابر با $\binom{8}{2}$ است و برای هر کدام از پرتاب‌هایی که ۶ نیامده است، ۵ حالت وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:

تعداد حالات هر کدام از پرتاب‌هایی که ۶ نیامده

$$\binom{8}{2} \times \underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{6 \text{ بار}} = 28 \times 5^6$$

تعداد حالات برای اینکه کدام پرتاب ۶ آمده

فرض کنیم دو مهره لابه‌لای ۷ مهره قرار دارد و حالا می‌خواهیم آنها را جدا کنیم (یعنی برعکس چیزی که سؤال از ما خواسته است). تعداد حالاتی که این کار ممکن است، برابر است با تعداد انتخاب ۲ مهره از ۹ مهره که مساوی با $\binom{9}{2}$ است.

این جواب با جواب سؤال مطرح شده یکی است.

تعداد کل زیرمجموعه‌های ۴ عضوی برابر است با:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

از بین آنها مجموعه‌هایی که شامل ۸ و ۹ باشند، قابل قبول نیستند. پس به دنبال تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۸ و ۹ می‌گردیم.

کافی است ۳ عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ انتخاب کنیم و به جای علامت سؤال در مجموعه $\{8, 9, ?, ?\}$ قرار دهیم. برای این کار تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$



پس جواب نهایی برابر است با:

$$۱۲۶ - ۲۱ = ۱۰۵$$

۴۲) حالت اول: اگر به ۱۸ سؤال پاسخ درست داده باشد، ابتدا باید آن ۱۸ سؤال را مشخص کنیم. این کار به $\binom{۲۰}{۱۸}$ حالت ممکن است. برای جواب دادن به دو سؤال غلط هم، ۳×۳ حالت وجود دارد. پس تعداد حالات در این بخش برابر است با:

$$\binom{۲۰}{۱۸} \times ۳ \times ۳ = ۱۷۱۰$$

حالت دوم: اگر به ۱۹ سؤال پاسخ درست داده باشد، ابتدا باید آن ۱۹ سؤال را مشخص کنیم. این کار به $\binom{۲۰}{۱۹}$ حالت ممکن است. برای جواب دادن به یک سؤال غلط هم ۳ حالت وجود دارد. پس تعداد حالات در این بخش برابر است با:

$$\binom{۲۰}{۱۹} \times ۳ = ۶۰$$

حالت سوم: اگر به ۲۰ سؤال پاسخ درست داده باشد، فقط یک حالت وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۱۷۱۰ + ۶۰ + ۱ = ۱۷۷۱$$

۴۳)

الف) با تغییر متغیر $x_i = y_i + 1$, $۲ \leq i \leq ۵$ داریم:

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = ۱۰ - ۴ = ۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۶-۱}{۵-۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

ب) با تغییر متغیر $x_5 = y_5 + ۴$, $x_1 = y_1 + ۳$ داریم:

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = ۱۲ - ۴ - ۳ = ۵$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۹}{۴}$$

پ) با تغییر متغیر $x_i = y_i + 1$, $۱ \leq i \leq ۵$ داریم:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = ۱۱ - ۵ = ۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۶-۱}{۵-۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

ت

اگر $x_2 = ۰$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۷$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۷-۱}{۳-۱} = \binom{۹}{۲}$$

اگر $x_2 = ۱$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۴$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۴-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲}$$

اگر $x_2 = ۲$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۱$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۱-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲}$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\binom{۹}{۲} + \binom{۶}{۲} + \binom{۳}{۲} = ۳۶ + ۱۵ + ۳ = ۵۴$$

ث

اگر $x_2 = ۰$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۳$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۵}{۲}$$

اگر $x_2 = ۱$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۲$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۲-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲}$$

اگر $x_2 = ۴$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۱$ است و جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۱-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲}$$

اگر $x_2 = ۹$ باشد، $x_1 + x_3 + x_4 = ۰$ است و یک جواب دارد.

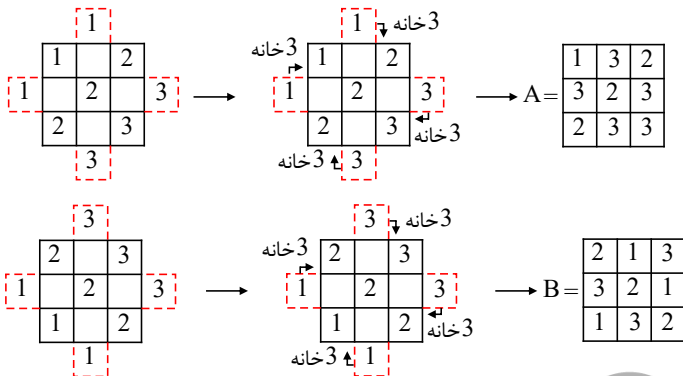
پس جواب نهایی برابر است با:



$$\binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + 1 = 20.$$

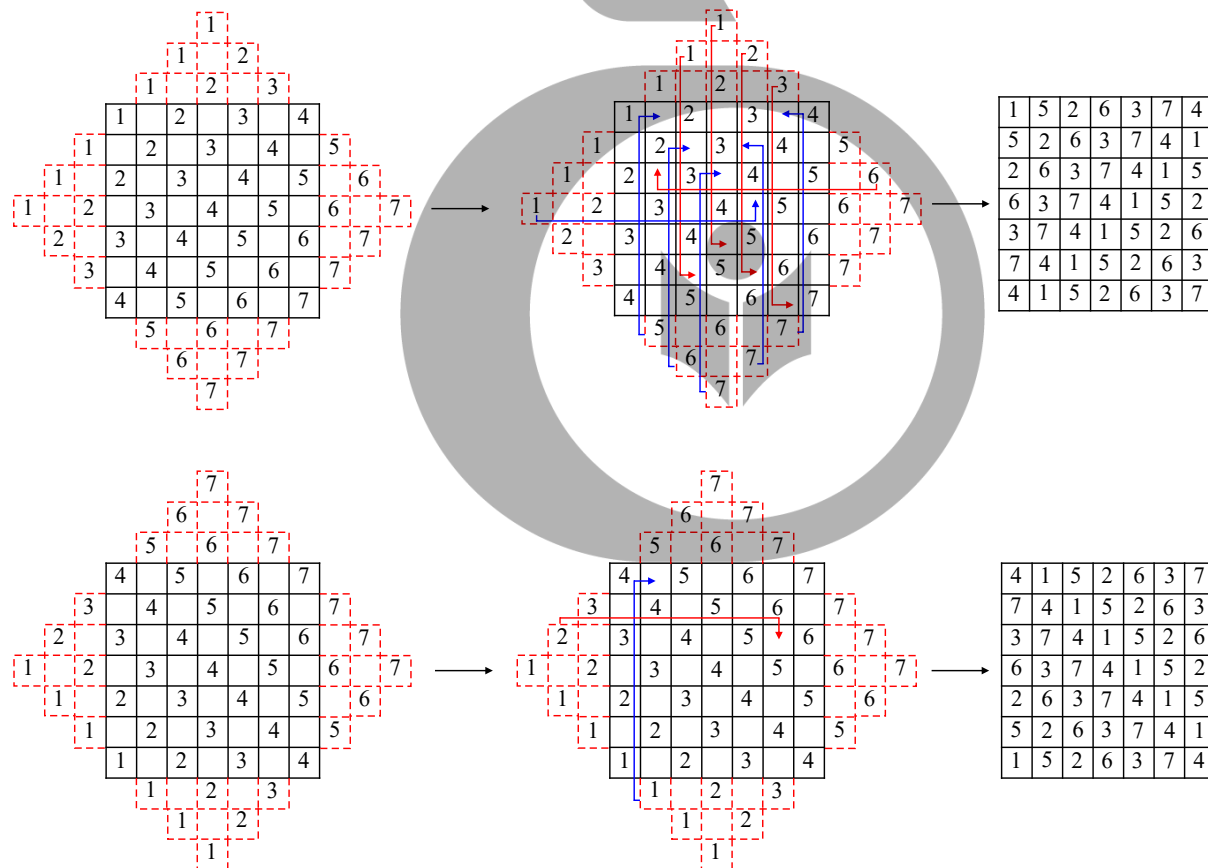
۴۴ در سطر دوم امکان قرار گرفتن عدد ۱ در ستون‌های اول یا سوم وجود ندارد، پس a قطعاً برابر ۱ است. در ستون سوم امکان قرار گرفتن عدد ۲ در سطرهای اول و دوم وجود ندارد، پس b قطعاً برابر ۲ است و در نتیجه داریم: $3a - 2b = 3(1) - 2(2) = 1$

۴۵ برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳، به‌ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



مربع لاتین A و B متعامد هستند.

برای ساخت مربع لاتین مرتبه ۷ نیز به همین روش عمل می‌کنیم:



به این ترتیب دو ماتریس حاصل متعامد خواهند بود.

۴۶ برنامه‌ریزی مطابق شکل زیر، شامل دو مربع لاتین متعامد یکی برای ماشین‌ها و دیگری برای مسیرهاست.



A_i ماشین شماره i و B_i مسیر شماره i است.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	
راننده ۱	$A_V B_V$	$A_F B_F$	$A_D B_D$	$A_F B_F$	$A_V B_V$	$A_I B_I$	
راننده ۲	$A_F B_I$	$A_D B_V$	$A_F B_F$	$A_V B_F$	$A_I B_F$	$A_V B_V$	
راننده ۳	$A_D B_V$	$A_F B_I$	$A_V B_V$	$A_F B_F$	$A_I B_D$	$A_F B_F$	
راننده ۴	$A_F B_F$	$A_V B_I$	$A_I B_V$	$A_V B_F$	$A_F B_D$	$A_D B_F$	
راننده ۵	$A_V B_F$	$A_I B_F$	$A_I B_V$	$A_V B_I$	$A_D B_F$	$A_F B_D$	
راننده ۶	$A_V B_D$	$A_I B_F$	$A_V B_V$	$A_F B_V$	$A_D B_I$	$A_F B_F$	
راننده ۷	$A_I B_F$	$A_V B_D$	$A_F B_F$	$A_D B_F$	$A_F B_V$	$A_V B_V$	

۴۷ تعداد جواب‌های این سؤال، معادل تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است. تعداد این توابع برابر است با:

$$3^6 - 3 \times 2^6 + 3 = 729 - 192 + 3 = 540$$

۴۸ یک رمز ۵ رقمی را به صورت $\overline{abcde}$ در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c, d, e ارقام ۱ تا ۹ می‌باشند.

$$A = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 7\} \rightarrow |A| = 8^5$$

$$B = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 2\} \rightarrow |B| = 8^5$$

$$C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 3\} \rightarrow |C| = 8^5$$

$$A \cap B = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 7, 2\} \rightarrow |A \cap B| = 7^5$$

$$A \cap C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 7, 3\} \rightarrow |A \cap C| = 7^5$$

$$B \cap C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 2, 3\} \rightarrow |B \cap C| = 7^5$$

$$A \cap B \cap C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 2, 3, 7\} \rightarrow |A \cap B \cap C| = 6^5$$

$$|S| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$$

$$|\overline{A \cap B \cap C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 9^5 - 8^5 - 8^5 - 8^5 + 7^5 + 7^5 + 7^5 - 6^5 = 3390$$

$$3390 \times 6 = 20340 \text{ s} = 339 \text{ min}$$

۴۹ فرض کنیم می‌خواهیم ۴ نقطه صحیح را در نظر بگیریم طوری که مختصات وسط هیچ دو نقطه‌ای صحیح نباشد. مختصات این ۴ نقطه حتماً باید به صورت زیر باشد:

$$A_1 = (\text{فرد}, \text{فرد})$$

$$A_2 = (\text{زوج}, \text{زوج})$$

$$A_3 = (\text{زوج}, \text{فرد})$$

$$A_4 = (\text{فرد}, \text{زوج})$$

حالا هر نقطه‌ای به این ۴ نقطه اضافه شود، به کمک یکی از آنها نقطه وسط با مختصات صحیح می‌سازد. بنابراین در بین ۵ نقطه حداقل یک جفت نقطه وجود دارد که وسط آنها صحیح است.

۵۰ در پرتاب یک تاس، ۶ نتیجه مختلف ممکن است حاصل شود. پس تعداد لانه‌ها $n = 4$ است. چون می‌خواهیم حداقل ۴ نتیجه یکسان داشته باشیم، پس $k + 1 = 4$ و

در نتیجه $k = 3$ است. طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم:

$$kn + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$

بنابراین طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، حداقل تعداد تماشاگران برابر است با:

$$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19$$

$$kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936$$