



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

LEVELUP

ریاضی و آمار ۱



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات لول آپ

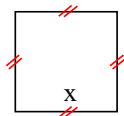
ریاضی و آمار : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان ریاضی : عارف بهرامنیا

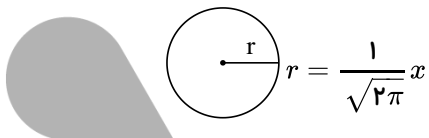
فصل اول: معادله ی درجه ی دوم

معادله و حل مسئله به کمک آن

۱) اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۶ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

۲) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $-2 - \frac{x}{4} = \frac{1+x}{3}$

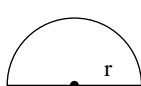
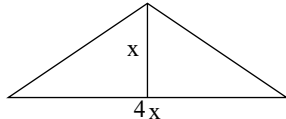
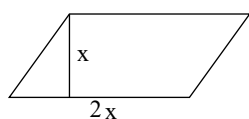
ب) $x^2 - 3x - 10 = (x-8)^2$

۳) در یک دفتر مشاوره، مشاوران معمولی هم‌زمان به دو دانش‌آموز و مشاوران ارشد هم‌زمان به پنج دانش‌آموز می‌توانند مشاوره بدهند. اگر در این شرکت ۵۰ مشاور حداکثر به ۱۹۰ دانش‌آموز مشاوره دهند، تعداد مشاوران ارشد چقدر است؟

۴) در پارکینگی تعداد دوچرخه‌های موجود، ۳ برابر تعداد سه‌چرخه‌ها است. اگر مجموع تعداد کل چرخ‌ها برابر ۹۰ باشد، در این پارکینگ مجموع دوچرخه‌ها و سه‌چرخه‌ها چقدر است؟

۵) حاصل جمع دو عدد طبیعی برابر ۴۸ است. هرگاه یکی از این عددها ۱۲ واحد از عدد دیگر بیشتر باشد، آن دو عدد را بیابید.

۶) اگر مجموع مساحت‌های نیم‌دایره، مثلث و متوازی‌الاضلاع برابر ۱۸ باشد، ارتفاع مثلث را بیابید. $(r = \frac{x}{\sqrt{\pi}})$



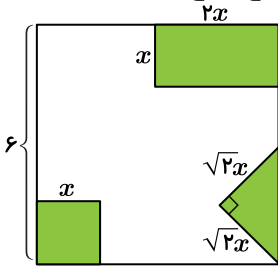


حل معادله درجه ۲ به روش تجزیه

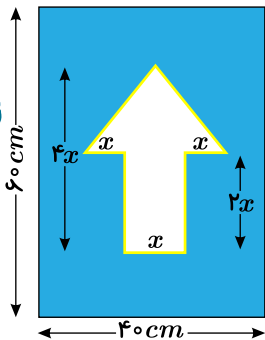
۷) معادله‌ی $(x+2)^2 - 4(x+2) + 3 = 0$ را حل کنید.

۸) معادله درجه دومی با ضرایب صحیح که ریشه‌های آن $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{5}$ باشند، کدام است؟

۹) از مربعی به ضلع 6 cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24 cm^2 است. طول ضلع مربع کوچک بریده‌شده چقدر است؟



۱۰) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک‌طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه 1 cm^2 برچسب سفید ۳۰ تومان و هزینه 1 cm^2 برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینه برچسب‌های سفید و آبی ۲۷,۰۰۰ تومان شده است. الف) اندازه x چقدر است؟



ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه‌رو علاوه بر چسب سفید و آبی از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm^2 آن ۱۰۰ تومان است، هزینه رنگ‌آمیزی تابلو ۳۴,۸۰۰ تومان می‌شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟

۱۱) در معادله $(x-1)^2 = K$:

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به‌ازای $K=2$, $K=4$, $K=0$ و $K=-9$ به دست آورید.

ب) به‌ازای چه مقادیری از K معادله ریشه مضاعف دارد؟

پ) به‌ازای چه مقادیری از K معادله دو ریشه حقیقی دارد؟

ت) به‌ازای چه مقادیری از K معادله ریشه حقیقی ندارد؟

۱۲) معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید. $x^3 + x^2 - 15x - 15 = 0$

۱۳) جواب‌های معادله $9(x-1)^2 = 25$ را به دست آورید.



۱۴) با توجه به روش‌های تجزیه در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

الف) اگر $c = 0$ از کدام روش تجزیه استفاده می‌کنید؟

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟

پ) برای حل معادله درجه دوم به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟ آیا علامت‌های a و c مهم است؟

ت) در کدام یک از اتحادها جواب معادله ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟

حل معادله درجه ۲ به روش مربع کامل

۱۵) معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2 - 4x + 3 = 0$

۲) $x^2 + 6x + 5 = 0$

۱۶) معادله درجه دوم $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

۱۷) معادله زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$3x^2 - 2 = 6x$

حل معادله درجه ۲ به روش کلی یا دلتا

۱۸) به ازای چه مقدار m معادله $mx^2 - 3x + 2x^2 - 4 = 0$ ریشه حقیقی ندارد؟

۱۹) در معادله درجه دوم $ax^2 + (2a + 3)x + 6 = 0$ ، جمع ریشه‌ها برابر -3 است. ریشه بزرگتر معادله کدام است؟

۲۰) در معادله درجه دوم $5x^2 + (k + 2)x + k = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر $\frac{1}{5}$ باشد، ریشه مثبت آن کدام است؟

۲۱) نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a + b + c = 0$) یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

۲۲) با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید، حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

۲۳) نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

۲۴) مثلث قائم‌الزاویه ABC به وتر $4x - 3$ و اضلاع $2x + 4$ و $x + 1$ مفروض است. مساحت مثلث را بیابید.

۲۵) یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - kx + 28 = 0$ برابر -4 است. جواب دیگر معادله را محاسبه کنید.



۲۶ یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 - (5k + 3) + 2 = 0$ سه واحد از قرینه ریشه دیگر بزرگتر است. k کدام است؟

۲۷ ثابت کنید که معادله $(m - 1)x^2 - 3mx + 1 - m = 0$ به ازای هر مقداری حقیقی، m دارای دو جواب است.

۲۸ در معادله $x^2 - 6x + m = 0$ چنانچه یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بزرگتر باشد، مقدار m را بیابید.

۲۹ در صورتی که $m \neq 0$ باشد، مقداری از m را بیابید که به ازای آن معادله درجه دوم $mx^2 - 2x + m - 2 = 0$ فقط یک ریشه داشته باشد.

۳۰ اگر t_1 و t_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2$ (ب) $\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1}$

۳۱ در معادله درجه دوم $4x^2 - 4x + a = 0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد بیشتر از جواب دیگر است مقدار a را به دست آورید.

۳۲ در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر به‌طور تقریبی از رابطه $P(x) = -x^2 + 2000x - 24000$ به دست می‌آید.

(الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد، چقدر از دست می‌دهد؟

(ب) نقطه سربه‌سر ($break - even$) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می‌دهد که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدها برابر می‌شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می‌کند و نه ضرر. در این مثال به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سربه‌سر خود می‌رسد؟

معادلات شامل عبارات گویا

۳۳ هنگامی که دو چاپگر باهم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به‌تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هرکدام از چاپگرها به‌تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

۳۴ به ازای چه مقدار k معادله $\frac{x-2}{5x} = \frac{1}{k} - \frac{4}{15x}$ دارای جواب $x = 4$ است؟

۳۵ معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$$

۳۶ گلدانی از جنس نقره و مس داریم که نسبت وزن نقره‌ی خالص به وزن مس خالص آن برابر ۸ است استاد قلم‌کار آن را ذوب کرده و

۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرده و گلدان جدیدی می‌سازد. اگر $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره باشد، این گلدان قبل ذوب شدن چه وزنی داشته است؟



۳۷ حاصل جمع معکوس دو عدد فرد متوالی $\frac{8}{15}$ است. آن دو عدد کدامند؟

۳۸ یک پیتزا را بین چند نفر به طور مساوی تقسیم کردیم. سپس ۲ نفر به جمع آنها اضافه شده و دوباره تکه پیتزاها را به طور مساوی بین همه افراد تقسیم کردیم. در این حالت به هریک از افراد اولیه به اندازه $\frac{1}{12}$ پیتزا کمتر رسید. در این صورت تعداد اولیه افراد چند نفر بوده است؟

۳۹ یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

۴۰ دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می شود.

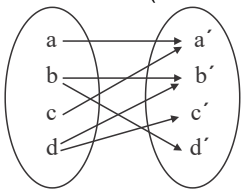
۴۱ دو شیر A و B به یک استخر متصل هستند. شیر A استخر را ۶ ساعت دیرتر از شیر B پر می کند. اگر دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۴ ساعت پر می شود. شیر A به تنهایی استخر را در چند ساعت پر می کند؟

۴۲ در یک محلول آب نمک، نسبت وزن آب خالص به وزن نمک خالص، برابر با ۸ است. اگر ۱۰۰ گرم نمک به این محلول اضافه کنیم، آنگاه $\frac{4}{5}$ وزن محلول را آب تشکیل خواهد داد. این محلول قبل از اضافه کردن نمک چند گرم وزن داشته است؟

فصل دوم: تابع

مفهوم تابع و انواع نمایش آن

۴۳ در نمودار پیکانی زیر با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟ (پیکان های مربوط به آن عضو هم حذف می شوند.)



ضابطه جبری تابع

۴۴ اگر $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + |5x|$ باشد، مقدار $f(3\sqrt{7}) + f(\sqrt{5})$ کدام است؟

۴۵ در تابع $f = \{(2, 5), (-1, 1), (5, -1)\}$ حاصل $f(2)$ و $f(f(2))$ و $f(f(f(2)))$ را محاسبه کنید.



۴۶ اگر برای هر $x \geq 0$ داشته باشیم $f(\sqrt{x}) = 2x + \sqrt{x}$ آنگاه حاصل $f(3) + f(1)$ را محاسبه کنید.

۴۷ برای هریک از توابع زیر یک ضابطه مناسب بنویسید.

الف $f = \{(1, 9), (2, 14), (3, 19), (4, 24)\}$ ب $g = \{(-2, 1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$

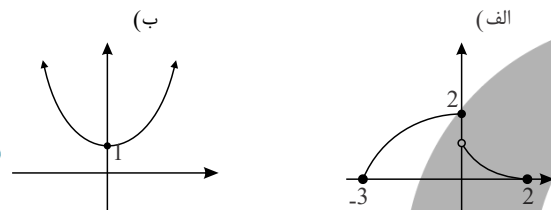
۴۸ ضابطه تابع محیط مستطیل‌هایی که طول آنها از ۴ برابر عرض آنها ۲ واحد کمتر است را، برحسب عرض آن بنویسید.
 $P(x)$ را محیط و x را عرض مستطیل در نظر بگیرید.

۴۹ اگر $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$ و $f(a) = -1$ و a عددی صحیح باشد، مقدار $f(a - 1)$ را به دست آورید.

۵۰ در تابع با ضابطه $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{a}{x^3} + b \end{cases}$ ، اگر $f(1) = 3$ و $f(-1) = -5$ باشد، در این صورت $f(\sqrt[3]{2})$ چقدر است؟

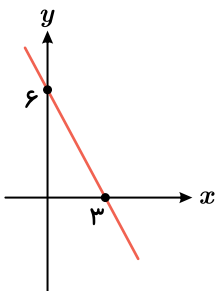
دامنه و برد توابع

۵۱ در نمودارهای زیر دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

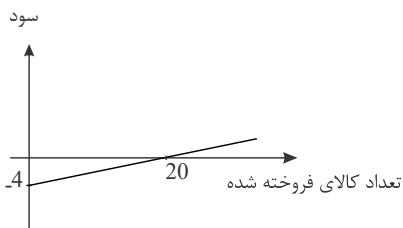


تابع خطی و نمودار آن

۵۲ اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، $f(4)$ را محاسبه کنید.



۵۳ نمودار روبه‌رو سود و زیان یک شرکت را برحسب میلیون تومان نمایش می‌دهد. برای سودی بیش از ۵ میلیون تومان، این شرکت حداقل چه تعداد کالا بفروشد؟





۵۴ اگر تابع f یک تابع خطی باشد و بدانیم $f(0) = 2$ و $f(f(1)) = 2$ ، معادله خط تابع f را بنویسید.

تابع درجه ۲ و سهمی

۵۵ در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هریک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $C(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

(الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

(ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

(پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

۵۶ محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با S نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را برحسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیمم می‌شود.

۵۷ اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیمم مقدار سود را مشخص کنید.

۵۸ یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ‌آمیزی روزانه هر متر مربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می‌کند، مبلغ $x - 1200$ تومان است. x میزان رنگ‌آمیزی روزانه گروه برحسب متر مربع است. هزینه رفت و آمد و مصرف غذای گروه برحسب متر مربع است. هزینه رفت و آمد و مصرف غذای گروه به طور ثابت روزانه ۳۰۰۰۰ تومان و همچنین متر مربعی ۲۰۰ تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

(الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ‌آمیزی به ازای $x = 200$ (متر کار در یک روز) و $x = 300$ چقدر است؟

(ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x = 200$ و $x = 300$ چقدر است؟

(پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(200), P(100), P(200), P(300)$ محاسبه کنید.

$$P(200) = 20 \times (12\% - 20) - (30000 + 20 \times 200) = -10400$$

$$P(100) =$$

$$P(200) =$$

$$P(300) =$$

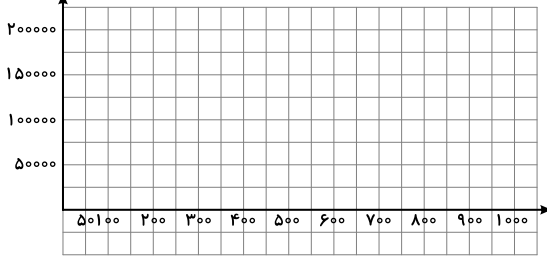
(ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید.

(ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	۲۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
$P(x)$	-۱۰۴۰۰	۶۰۰۰۰								



ج نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



چ. چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هر چه متر از بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می کند؟

۵۹ اگر $(-1, -1)$ و $(-3, -1)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن سهمی را به دست آورید.

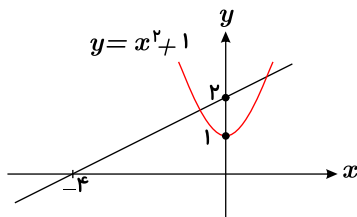
۶۰ بیشترین مقدار تفاضل مربع عددی از ۲ برابر خود آن عدد چه قدر است؟

۶۱ اگر در یک کارگاه تولیدی، معادلات درآمد و هزینه به صورت $R(x) = 240x - \frac{1}{20}x^2$ و $C(x) = 36000 + 40x$ باشند؛

الف) معادله سود را بنویسید. ب) تعداد کالایی را مشخص کنید که در صورت فروش آنها به حداکثر سود برسیم. ج) بیشترین سود چه مقداری است؟

۶۲ در کارگاهی هزینه تولید روزانه x واحد کالا برابر $C(x) = x^2 + 40x + 100$ است که هر واحد کالای آن ۲۰۰ تومان به فروش می رسد. هم اکنون کارگاه روزانه ۱۰۰ واحد کالا تولید می کند. برای اینکه کارگاه به بیشترین سود روزانه برسد، می بایست چند کالا از تولید روزانه خود کم کند؟

۶۳ مجموع طول های نقاط تلاقی خط و سهمی مقابل را به دست آورید.



۶۴ در یک شرکت اگر تابع درآمد به صورت $R(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 20x$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = 10x + 40$ باشد، ماکزیمم مقدار سود شرکت چقدر است؟

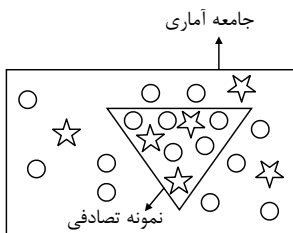
۶۵ نمودار سهمی $y = x^2 + 4x$ را رسم کنید.



فصل سوم: داده های آماری

گرد آوری داده ها و آشنایی با مفاهیم آماری

۶۶ با توجه به شکل زیر، آماره و پارامتر مربوط به خودروهای هیبریدی را به دست آورید. (هر ستاره نمایش یک خودروی هیبریدی و هر دایره نمایش یک خودروی معمولی است.)



مقیاس های اندازه گیری و بررسی انواع متغیر

۶۷ یک نمونه ۲ تایی از اعداد ۱ تا ۳۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه راهی را پیشنهاد می کنید. اگر بخواهید واحدهای انتخابی این نمونه تصادفی، تکراری نباشند، چگونه ای کار را انجام می دهید؟ (راهنمایی: می توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید.)

معیارهای گرایش به مرکز

۶۸ میانگین ۴ داده دیگر برابر ۷ و میانگین ۶ داده برابر ۲ است. میانگین ۱۰ داده چقدر است؟

۶۹ اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۳- باشد، میانگین داده های $2x_1 + 2, 4x_2 + 2, \dots, 4x_n + 2$ چقدر است؟

۷۰ تفاضل میانگین ۶ داده آماری از خود داده ها به ترتیب ۱۵، ۹، ۱، ۳-، ۷-، ۱۳- است. اگر میانه داده ها ۱۳ باشد، در این صورت میانگین داده ها را به دست آورید.

۷۱ اگر میانگین داده های $3 + x_4, 2 + x_3, 1 + x_2, x_1$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $3 + 2x_4, 2 + 2x_3 + 1, 2x_2 + 1, 2x_1$ برحسب $\bar{x}$ چقدر است؟

۷۲ میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است:

سمت	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	۲ نفر فروشنده	منشی	مستخدم
حقوق میلیون ریال	۵۰۰	۳۰۰	۱۵۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۶۰	۴۰

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می دارد که میانگین پرداخت حقوق در این شرکت بیشتر از است. آیا این رقم می تواند دلیلی برای پرداخت حقوق زیاد در این شرکت باشد؟ چرا؟ کدام یک از معیارهای گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب تر است؟



۷۳) میانگین داده‌های $2 - 5x_1, 2 - 5x_2, \dots, 2 - 5x_n$ برابر ۸ است. میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به دست آورید.

معیارهای پراکندگی (واریانس و انحراف معیار)

۷۴) دو دسته داده زیر، قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه برحسب هزار ریال نشان می‌دهد.

بازار الف	۱۰	۱۱	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۱۰	۱۲	۹	۱۳	۸
بازار ب	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۱	۹	۱۰	۸	۱۳	۱۰	۱۰

الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟

ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

پ) آیا دامنه تغییرات با پراکندگی مشاهده شده در قسمت «الف» همخوانی دارد؟

ت) ترجیح می‌دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟

ث) اگر داده‌ها را در اختیار نداشته باشید، آیا فقط با داشتن دامنه تغییرات می‌توانید تصمیم‌گیری کنید؟

۷۵) چه تعداد از داده‌های یک مجموعه ۱۴ عضوی که همگی متمایز هستند، بین چارک‌های اول و سوم آن قرار دارند؟

۷۶) واریانس قیمت‌های تعدادی کالای اساسی در سال گذشته برابر ۲۰۰۰ واحد بوده است. اگر امسال ۳۰ درصد به قیمت هر یک از این کالاها اضافه شود، واریانس قیمت‌ها امسال چند واحد است؟

۷۷) میانگین ۸ داده برابر ۲۰ و انحراف معیار آنها برابر ۲ است. اگر ۲ داده ۲۱ و ۱۹ از این داده‌ها حذف شوند. واریانس سایر داده‌های باقی‌مانده را به دست آورید.

۷۸) جدول زیر را تکمیل کنید.

$-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma$	تقریباً ۹۹٫۹ درصد از مشاهدات در فاصله سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
$-2\sigma < \bar{x} < 2\sigma$	تقریباً از مشاهدات در فاصله دو برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
.....	تقریباً از مشاهدات در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.

۷۹) در دو فروشگاه قیمت بعضی از اجناس به صورت زیر است. (واحد هر کالا برحسب هزار تومان است) ترجیح می‌دهید از کدام فروشگاه خرید کنید؟ چرا؟

A	۹	۱۲	۱۰	۱۰	۸	۹	۱۴	۸
B	۸	۱۳	۸	۱۲	۷	۹	۱۵	۸



فصل چهارم: نمایش داده ها

نمودارهای یک متغیره

۸۰ نمودار تعداد شیرینی خراب شده در هنگام تولید در یک شیرینی پزی طبق جدول زیر است. نمودار نقطه‌ای آن را رسم کنید.

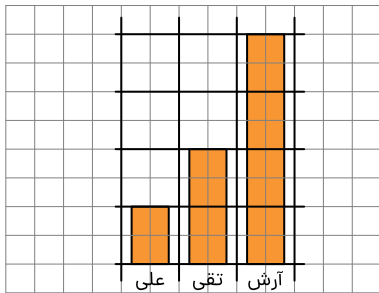
روز	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
تعداد	3	2	3	4	3	1	2	4	3	2	4	5	4	3	1	2	0	3	4	4	3	2	1	4	3	2	2	1	3	1



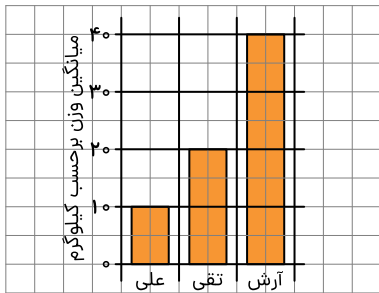


۸۱ به‌کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به‌عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.

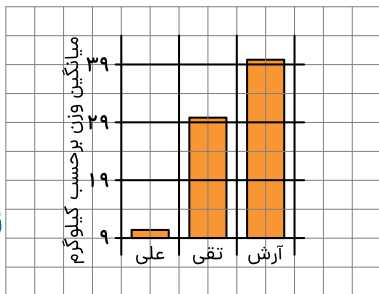
الف) بیاپید از کدو تنبل‌های باغ‌های آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به‌صورت زیر است: این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدو تنبل‌ها را؟



ب) نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟ این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می‌کند؟

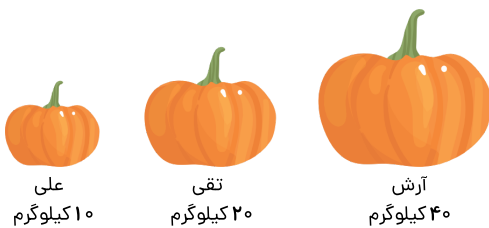
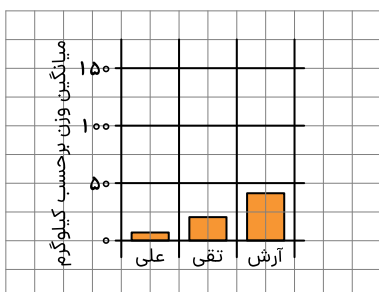


پ) اگر نقطه شروع محور عرض‌ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می‌شود؟



در واقع اعداد همان اعداد قبلی‌اند، اما محور عرض‌ها تغییر کرده است. اکنون این‌طور به نظر می‌رسد که کدو تنبل‌های

ت) اگر کسی بخواهد دیگران را متقاعد کند که همه کدو تنبل‌ها حدوداً به یک اندازه‌اند، چه کاری می‌تواند بکند؟ اعداد تغییری نکرده‌اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟



ث) گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو. این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدو تنبل را برای نشان‌دادن وزنش تغییر می‌دهد. ارتفاع کدو تنبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل علی (۱۰ کیلوگرم) است؟ ارتفاع کدو تنبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدو تنبل علی است.

آیا این شکل، اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید: شما این شکل را چگونه رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟ به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظراتان به بیننده تأثیر دارد؟



۸۲ سن ورزشکاران یک باشگاه والیبال به شرح زیر است.

A	۱۳	۱۷	۱۶	۱۴	۱۲	۵	۱۵
B	۶	۱۵	۱۰	۱۵	۱۶	۱۱	۱۸
C	۱۴	۸	۷	۸	۱۹	۱۵	۱۸

الف. نمودار جعبه‌ای داده‌های بالا را رسم کنید.

ب. مد داده‌های بالا را به دست آورید.

نمودارهای چند متغیره

۸۳ نمودار راداری جدول زیر را رسم کنید.

متغیر	x_1	x_2	x_3	x_4
سینا	۹۰	۶۰	۸۰	۶۰
رامین	۸۰	۹۰	۵۰	۱۰۰
مهرداد	۱۰۰	۹۰	۱۰۰	۷۰

۸۴ جدول زیر میزان رشد دانش‌آموزان را در یک سال نشان می‌دهد؛ نمودار راداری آن را رسم کنید. (بیشینه در هر ماه ۱ است.)

نگار	نگین	مژده	نسیم	نام
۰٫۸	۰٫۹	۰٫۷	۰٫۸	۲ ماه اول
۱	۰٫۶	۰٫۸	۰٫۷	۲ ماه دوم
۰٫۶	۰٫۹	۰٫۹	۰٫۷	۲ ماه سوم
۱	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۸	۲ ماه چهارم
۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹	۰٫۸	۲ ماه پنجم
۱	۰٫۶	۰٫۵	۰٫۸	۲ ماه ششم

۸۵ برای داده‌های زیر نمودار راداری رسم کنید.

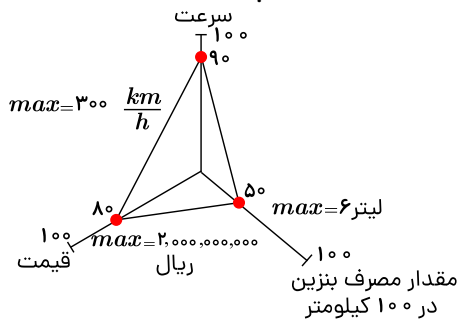
نام درس	نمره درس	نمره بیشینه
ریاضی	۱۷	۲۰
عربی	۱۸	۲۰
فنون ادبی	۲۰	۲۰
تاریخ	۱۹	۲۰
اقتصاد	۱۲	۲۰



۸۶ داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید.

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
x_1	۷۵٫۵	۶۶٫۴	۷۵٫۸	۸۴
x_2	۲۳	۱۴	۴۱٫۱	۲۴۵
x_3	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
x_4	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
x_5	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

۸۷ با توجه به نمودار راداری مقابل، سرعت خودروی *BMW* موردنظر ما برحسب کیلومتر بر ساعت و همچنین مقدار مصرف بنزین آن

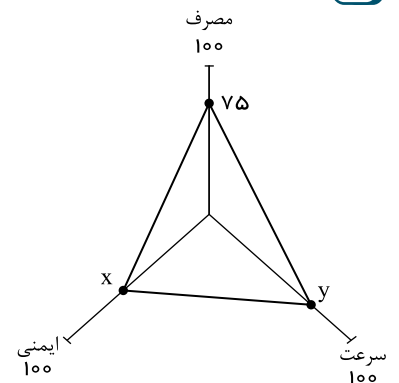


در هر ۱۰۰ کیلومتر برحسب لیتر چقدر است؟ max مقدار هر متغیر در کنار شعاع مربوطه نوشته شده است.

(نمودار راداری مربوط به خودروی *BMW* جدید)

۸۸ نمودار راداری زیر مربوط به خودروی دنا در جدول داده شده است، حاصل x ، y و z را به دست آورید.

نام متغیر	دنا	پژو	بیشینه
سرعت خودرو (km/h)	۳۶۰	۳۵۰	۴۸۰
مصرف بنزین در کیلومتر	z	۴	۸
تعداد ستاره‌های ایمنی	۳	۴	۵

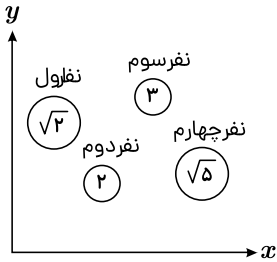


۸۹ با توجه به جدول داده‌های زیر، نمودار راداری مربوط به A و B را با هم رسم کنید.

مشاهده	A	B	بیشینه
x_1	۱۲	۱۸	۳۰
x_2	۴۰	۳۰	۵۰
x_3	۱۰	۲۰	۲۵
x_4	۶۰	۱۲	۱۲۰



۹۰ در نمودار حبابی زیر متغیر سوم وزن ۴ نفر را نشان می‌دهد. میانگین وزن آنها چند برابر وزن نفر اول است؟ (در نمودار، شعاع نفر اول $\sqrt{2}$ ، نفر دوم ۲، نفر سوم ۳ و نفر چهارم $\sqrt{5}$ است.)



۹۱ شاخص‌های توسعه‌یافتگی در چهار کشور سوئیس، استرالیا، هند و روسیه بررسی شده و در جدول زیر آمده است. ابتدا نمودار راداری آن را رسم کنید و سپس بگویید به نظر شما کدام کشور رشد و توسعه بیشتری داشته است؟

شاخص توسعه‌یافتگی	سوئیس	استرالیا	هند	روسیه
ساختار اقتصادی	۸۹	۸۴	۵۸	۶۰
کارآفرینی و نوآوری	۸۴	۸۱	۴۱	۵۴
مردم‌سالاری	۱۰۰	۹۵	۷۸	۳۶
آموزش و پرورش	۸۱	۹۱	۳۸	۷۸
تندرستی	۱۰۰	۹۰	۲۸	۶۸
امنیت	۹۰	۸۴	۳۴	۲۱
حکمرانی	۹۵	۹۰	۵۷	۳۲
آزادی فردی	۹۳	۹۹	۶۷	۲۶
سرمایه اجتماعی	۹۶	۹۲	۹۱	۱۸

۹۲ از بین مدیران شرکت‌های متفاوت مقایسه‌ای از لحاظ سن، سابقه، درآمد و بیمه انجام شده در جدول زیر آمده است. نمودار حبابی آن را رسم کنید.

نوع بیمه	درآمد	سابقه کار	سن	اشخاص
تأمین اجتماعی	۱۴,۰۰۰,۰۰۰	۲۵	۵۶	الف
خویش فرما	۲۵,۰۰۰,۰۰۰	۳۴	۷۰	ب
خدمات درمانی	۱۵,۰۰۰,۰۰۰	۵	۲۵	پ
خویش فرما	۳۴,۰۰۰,۰۰۰	۲۵	۴۸	ت
تأمین اجتماعی	۲۹,۰۰۰,۰۰۰	۳۳	۵۳	ث
سلامت	۲۲,۰۰۰,۰۰۰	۳۰	۶۰	ج
خدمات درمانی	۴۲,۰۰۰,۰۰۰	۴۰	۷۲	چ
سلامت	۲۰,۰۰۰,۰۰۰	۲۵	۶۵	ح
تأمین اجتماعی	۳۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۵	۴۰	خ
خدمات درمانی	۱۳,۰۰۰,۰۰۰	۲۲	۴۵	د



پاسخ نامه تشریحی

۱

$$S = S_{\text{کل}} + S_{\text{دایره}} = 6$$

$$S = x^2 + \pi \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 = 6$$

$$S = x^2 + \frac{x^2}{2} = 6$$

$$\frac{3}{2}x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x>0} x = 2$$

۲ الف) ابتدا سمت راست تساوی $-2 - \frac{x}{4} = \frac{1+x}{3}$ را به صورت جمع دو کسر می‌نویسیم که می‌شود:

$$-2 - \frac{x}{4} = \frac{1}{3} + \frac{x}{3}$$

در مرحله بعد عددها را یک طرف تساوی و x ها را طرف دیگر قرار می‌دهیم: $\frac{-x}{4} - \frac{x}{3} = \frac{1}{3} + 2$

طرفین وسطین $\rightarrow \frac{-3x - 4x}{12} = \frac{1+6}{3} \rightarrow \frac{-7x}{12} = \frac{7}{3} \rightarrow 3(-\cancel{7}x) = \cancel{7} \times 12$

$$x = \frac{12}{-3} = -4$$

ب) ابتدا اتحاد مربع طرف راست تساوی را باز می‌کنیم. $\cancel{x^2} - 3x - 10 = 64 - 16x + \cancel{x^2}$

$$-3x + 16x = 64 + 10 \rightarrow 13x = 74 \rightarrow x = \frac{74}{13}$$

توجه داشته باشید با حرکت اعداد از یک طرف تساوی به طرف دیگر تغییر علامت می‌دهند.

۳ تعداد مشاوران معمولی را x و تعداد مشاوران ارشد را y می‌نامیم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حل دستگاه معادلات خطی به روش جایگذاری} \\ \text{تعداد مشاوران} = 50 \rightarrow x + y = 50 \rightarrow x = 50 - y \\ \text{تعداد دانش‌آموزان} = 190 \rightarrow 2x + 5y = 190 \end{array} \right\}$$

$$2x + 5y = 190 \rightarrow 2(50 - y) + 5y = 190 \rightarrow 100 - 2y + 5y = 190$$

$$\rightarrow 3y = 190 - 100 \rightarrow 3y = 90 \rightarrow y = \frac{90}{3} = 30$$

۴

اگر تعداد سه‌چرخه‌ها را برابر x در نظر بگیریم، تعداد دوچرخه‌ها برابر $3x$ است، حال مجموع تعداد چرخ‌ها برابر است با:

$$3 \times (x) + 2 \times (3x) = 90 \Rightarrow 3x + 6x = 90 \Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{9} = 10$$

$$\begin{array}{c} \text{تعداد سه‌چرخه} \\ \uparrow \\ \text{تعداد کل دوچرخه‌ها و سه‌چرخه‌ها} = x + 3x = 4x = 4 \times 10 = 40 \\ \downarrow \\ \text{تعداد دوچرخه} \end{array}$$

۵ عدد کوچکتر $x =$

و عدد دیگر که ۱۲ واحد بیشتر است $x + 12 =$

حال حاصل جمع این دو عدد ۴۸ است بنابراین:

$$x + (x + 12) = 48 \rightarrow 2x + 12 = 48 \rightarrow 2x = 48 - 12$$

$$\Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{2} = 18$$

بنابراین عدد کوچکتر = ۱۸

و عدد بزرگتر $18 + 12 = 30$

۶

$$2x \times x = 2x^2 = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت متوازی‌الاضلاع}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4x \times x}{2} = \frac{4x^2}{2} = 2x^2$$

$$\text{مساحت نیم‌دایره} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}x\right)^2 = \frac{1 \times \pi}{2} \times \frac{x^2}{\pi} = \frac{x^2}{2}$$



$$\frac{2x^2}{1} + \frac{2x^2}{1} + \frac{x^2}{2} = 18 \rightarrow \frac{4x^2 + 4x^2 + x^2}{2} = 18 \rightarrow \frac{9x^2}{2} = 18 \Rightarrow 9x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{قق} \\ x = -2 & \text{قق غ} \end{cases}$$

۷ $t = x + 2$ را در نظر می‌گیریم و معادله را به شکل روبه‌رو بازنویسی می‌کنیم:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \xrightarrow[\text{جملهی مشترک}]{\text{تجزیه}} (t-1)(t-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow x + 2 = 1 \rightarrow x = -1 \\ t = 3 \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۸

α و β را ریشه‌های معادله درجه دوم سوال در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{5} + \frac{2 - \sqrt{3}}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha\beta = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{5}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{5}\right) = \frac{4 - 3}{25} = \frac{1}{25} \xrightarrow[\text{معادله باید به فرم } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0]{\text{معدله باید به فرم}} x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

$$\times 25 \rightarrow 25x^2 - 20x + 1 = 0$$

$$\text{مساحت باقی‌مانده} = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت کل} = 6 \times 6 = 36$$

$$\text{مساحت قسمت ۱} = 2x \times x = 2x^2$$

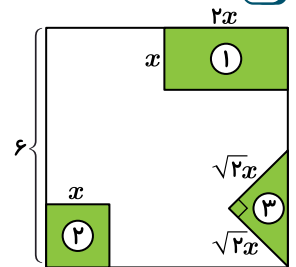
$$\text{مساحت قسمت ۳} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}x \times \sqrt{2}x = \frac{2}{2}x^2 = x^2$$

$$\text{مساحت قسمت ۲} = x \times x = x^2$$

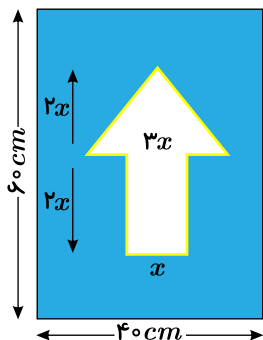
$$\text{جمع مساحت قسمت‌های ۱ و ۲ و ۳} = 2x^2 + x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\text{داریم: } 36 - 4x^2 = 24 \rightarrow -4x^2 = -12 \xrightarrow{\div (-1)} 4x^2 = 12 \rightarrow x^2 = \frac{12}{4} = 3$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} & \text{قق} \\ x = -\sqrt{3} & \text{قق غ} \end{cases}$$



۱۰ الف



$$\text{مساحت فلش} = \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت مثلث} = \left(\frac{3x \times x}{2}\right) + (2x \times x) = 3x^2 + 2x^2 = 5x^2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مساحت فلش (قسمت سفید)} &= 3x^2 + 2x^2 = 5x^2 \\ \text{مساحت کل} &= 40 \times 60 = 2400 \text{ cm}^2 \\ \text{مساحت قسمت آبی} &= 2400 - 5x^2 \end{aligned} \right\}$$

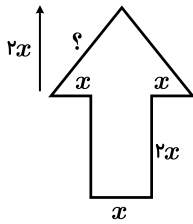
$$\Rightarrow (5x^2 \times 30) + ((2400 - 5x^2) \times 10) = 27000$$

$$\Rightarrow 150x^2 + 24000 - 50x^2 = 27000$$

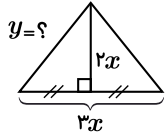
$$\Rightarrow x^2 = \frac{3000}{100} = 30 \Rightarrow x = \pm\sqrt{30} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{30} & \text{قابل قبول} \\ x = -\sqrt{30} & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$



برای به دست آوردن اندازه شبرنگ باید محیط فلش را به دست آوریم.



در مثلث متساوی الساقین میانه، نیمساز و ارتفاع روی هم منطبق اند لذا داریم:

$$y^2 = (2x)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 4x^2 + \frac{9}{4}x^2 = \frac{25}{4}x^2$$


$$\rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{25}{4}x^2} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2}x & \text{فوق} \\ y = -\frac{5}{2}x & \text{غرف} \end{cases}$$

$$\text{محیط فلش} = \text{اندازه شبرنگ} = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x + x + 2x + x + 2x + x = 12x$$

$$\text{هزینه شبرنگ زرد} = 12x \times 100 = 1200x$$

هزینه برچسب آبی + هزینه برچسب سفید + هزینه شبرنگ زرد = هزینه کل

$$34800 = 1200x + (5x^2 \times 30) + (2400 - 5x^2) \times 10$$

$$\rightarrow 34800 = 1200x + 150x^2 + 24000 - 50x^2$$

$$\rightarrow 10800 = 1000x^2 + 1200x \xrightarrow{\div 100} 108 = x^2 + 12x \rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0$$

$$\rightarrow (x + 18)(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -18 & \text{غرف} \\ x = 6 & \text{فوق} \end{cases}$$

در صورت $\begin{cases} k = 2 \\ k = 4 \\ k = 0 \\ k = -9 \end{cases}$

$$k = 2 \rightarrow (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} \\ x - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$k = 4 \rightarrow (x - 1)^2 = 4 \rightarrow \underbrace{\sqrt{(x - 1)^2}}_{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} = \sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ x - 1 = -2 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$k = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ریشه مضاعف}$$

$$k = -9 \rightarrow (x - 1)^2 = -9$$

سمت چپ تساوی (معادله) مقداری بزرگتر مساوی صفر است و سمت راست مقداری منفی، بنابراین معادله جواب ندارد.

(ب) به ازای $k = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد.

(پ) به ازای مقادیر مثبت k معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

(ت) به ازای مقادیر منفی k معادله ریشه ندارد.

۱۱
(الف)

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

۱۲



$$x^2 + x^2 - 15x - 15 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - 15(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm\sqrt{15} \end{cases}$$

۱۳

$$(x-1)^2 = \frac{25}{9} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} (x-1) = \pm\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$(x-1) = \pm\frac{5}{3} \rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{+5}{3} \rightarrow x = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3} \\ x-1 = \frac{-5}{3} \rightarrow x = \frac{-5}{3} + 1 = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

۱۴ الف) از روش فاکتورگیری

(ب) در صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم که a و c مربع کامل باشند و b دو برابر حاصل ضرب ac باشد.(پ) $b = 0$ و علامت‌های a و c مختلف باشد یعنی $ac < 0$ باشد.

(ت) در حالتی که بر مربع کامل تبدیل شود.

۱۵

$$1) x^2 - 4x = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -3 + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 4 - 3 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x-2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{یا} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$2) x^2 + 6x = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} (x+3) = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{یا} \\ x = -5 \end{cases}$$

۱۶ ابتدا باید ضریب x^2 را برابر یک کنیم:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{مجنور نصف ضریب } x \text{ را به دو طرف اضافه می‌کنیم}} x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{5}{2} = \frac{9+40}{16} = \frac{49}{16} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x + \frac{3}{4} = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1 \\ x = -\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

۱۷

$$3x^2 - 6x = 2$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{مجنور نصف ضریب را به دو طرف}} x^2 - 2x + 1 = \frac{2}{3} + 1$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \xrightarrow{\text{اضافه می‌کنیم}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع کامل می‌سازیم}} (x-1)^2 = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{ریشه‌گیری} \begin{cases} x-1 = \sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x-1 = -\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

۱۸

$$x^2(m+2) - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{فرم استاندارد}} \begin{cases} a = m+2 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$$

شرط نداشتن جواب حقیقی معادله درجه دوم برابر است با: $\Delta < 0$

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m+2)(-4) < 0 \Rightarrow 9 + 16(m+2) < 0$$

$$9 + 16m + 32 < 0 \Rightarrow 16m < -41 \Rightarrow m < \frac{-41}{16}$$

۱۹

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} \text{ و ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a}$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} = -3 \rightarrow -\frac{2a+3}{a} = -3 \rightarrow 2a+3 = 3a \rightarrow a = 3$$

با جایگذاری مقدار a ، معادله را حل می‌کنیم.



$$3x^2 + 9x + 6 = 0 \rightarrow 3(x^2 + 3x + 2) = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x+1)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{ریشه بزرگتر} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$5x^2 + (k+2)x + k = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{k+2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow -5(k+2) = 1 \rightarrow -k-2 = 1 \rightarrow -k = 3 \rightarrow k = -3$$

$$5x^2 + (-3+2)x - 3 = 0 \rightarrow 5x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(5)(-3) = 61 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2 \times 5} \xrightarrow{\text{ریشه مثبت}} \frac{1 + \sqrt{61}}{10}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = (a-c)^2$$

$$\Delta = (a-c)^2 > 0 \rightarrow \text{معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a-c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a+c+a-c}{2a} = \frac{2a}{2a} \rightarrow \boxed{x=1} \\ x = \frac{a+c-a+c}{2a} = \frac{2c}{2a} \rightarrow \boxed{x=\frac{c}{a}} \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$\frac{\Delta = b^2 - 4ac}{4a^2} \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2$$

$$\Delta = (a-c)^2 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} \rightarrow \boxed{x=-\frac{c}{a}} \\ x = \frac{-a-c-a+c}{2a} = \frac{-2a}{2a} \rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$$

۲۴ ابتدا باید مقادیر x را بیابیم تا بتوانیم مساحت مثلث را پیدا کنیم برای به دست آوردن مقادیر x از رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(4x-3)^2 = (2x+4)^2 + (x+1)^2$$

$$16x^2 - 24x + 9 = 4x^2 + 16x + 16 + x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 11x^2 - 42x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -42 \\ c = -8 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-42)^2 - 4(11)(-8) = 2116$$

$$x = \frac{-b \pm \Delta}{2a} = \frac{42 \pm \sqrt{2116}}{22} = \frac{42 \pm 46}{22} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{2}{11} \end{cases} \text{ غ ق}$$

$$x = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 2(4) + 4 = 12 \\ x + 1 = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\text{مساحت مثلث } S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{12 \times 5}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

۲۵

$$x^2 - kx + 28 = 0 \xrightarrow{x=-4} 2(-4)^2 - k(-4) + 28 = 0 \rightarrow k = -15$$

$$2x^2 - kx + 28 = 0 \xrightarrow{k=-15} 2x^2 + 15x + 28 = 0 \rightarrow (x+4)(2x+7) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$x' = -x'' + 3 \rightarrow x' + x'' = 3 \rightarrow \frac{-b}{a} = 3$$

مثال آب خوردن ۲۰ بگیر

۲۶



$$\rightarrow \frac{-(-(\Delta k + 3))}{2} = \frac{\Delta k + 3}{2} = 3 \rightarrow \Delta k + 3 = 6 \rightarrow \Delta k = 3 \rightarrow k = \frac{3}{\Delta}$$

۲۷) باید ثابت کنیم که به ازای هر مقدار m همواره داریم $\Delta > 0$

$$(m-1)x^2 - 3mx + 1 - m = 0 \rightarrow \begin{cases} a = m-1 \\ b = -3m \\ c = 1-m \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3m)^2 - 4(m-1)(1-m) = 9m^2 - 4(m-1)(1-m)$$

$$\Rightarrow \Delta = 9m^2 + 4(m-1)^2 > 0$$

می‌بینیم که همواره $\Delta > 0$

۲۸) دو ریشه‌ی معادله را $\alpha + 2$ و α در نظر می‌گیریم بنابر فرض سوال داریم:

$$\alpha + (\alpha + 2) = \frac{-b}{a} \rightarrow 2\alpha + 2 = \frac{-(-6)}{1} \rightarrow 2\alpha + 2 = 6 \rightarrow \alpha = 2$$

از طرفی می‌دانیم ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ یعنی برابر m است. در نتیجه:

$$m = \alpha(\alpha + 2) = 2 \times 4 = 8$$

۲۹

$$\Delta = 0 \rightarrow (-2)^2 - 4 \times m \times (m-2) = 0 \rightarrow 4 - 4m^2 + 8m = 0 \xrightarrow{\div 4} -m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$\rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \left\{ \begin{aligned} m_1 &= \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times (-1)}}{-2} = \frac{-2 + \sqrt{4}}{-2} = 1 - \sqrt{2} \\ m_2 &= \frac{-2 - \sqrt{4}}{-2} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned} \right.$$

۳۰) ابتدا دو مقدار $(t_1 + t_2)$ و $(t_1 t_2)$ را به دست می‌آوریم.

$$t_1 + t_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \quad t_1 t_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$\text{الف)} t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2 = t_1 t_2 (t_1 + t_2) = -4 \times 3 = -12$$

$$\text{ب)} \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 t_2} = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2}{t_1 t_2} = \frac{3^2 - 2 \times (-4)}{-4} = \frac{9 + 8}{-4} = \frac{-17}{4}$$

۳۱

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{4} = 1 \\ \text{طبق فرض سوال} \end{cases} \Rightarrow x_2 + 2 + x_2 = 1$$

$$\Rightarrow 2x_2 = 1 - 2 \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

به‌طور دلخواه $x = \frac{3}{2}$ یا $x = \frac{-1}{2}$ را در معادله اصلی قرار می‌دهیم تا مقدار را به دست آوریم:

$$4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{-1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{4}\right) + 2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

۳۲) الف)

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow p(0) = -24000 \quad \text{ضرر می‌کند} \\ p(x)=0 &\rightarrow -x^2 + 2000x - 24000 = 0 \\ \text{سود برابر صفر می‌شود} &\Rightarrow x^2 - 2000x + 24000 = 0 \end{aligned}$$

برای محاسبات از ماشین حساب کمک بگیرید.

$$\Delta = 4,000,000 - 96,000 = 3,904,000$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 1976$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2000 + 1976}{2} = 1988 \\ x_2 = \frac{2000 - 1976}{2} = 12 \end{cases}$$

x : زمان چاپگر جدید

$y = x + 3$: زمان چاپگر قدیمی

۳۳



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \frac{4x + 12 + 4x - x^2 - 3x}{4x(x+3)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{-x^2 + 5x + 12}{4x(x+3)} = 0 \rightarrow -x^2 + 5x + 12 = 0 \rightarrow \Delta = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{73}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{73}}{2} > 0 \text{ قی} \rightarrow y = x + 3 = \frac{5 + \sqrt{73}}{2} + 3 \\ x = \frac{-5 + \sqrt{73}}{-2} = \frac{5 - \sqrt{73}}{2} < 0 \text{ غقی} \end{cases}$$

۳۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x-2}{5x} + \frac{4}{15x} = \frac{1}{k} \xrightarrow[\text{مخرج مشترک گرفتیم}]{\text{سمت چپ تساوی}} \frac{3x-6+4}{15x} = \frac{1}{k} \rightarrow \frac{3x-2}{15x} = \frac{1}{k}$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{x=4} k(3x-2) = 15x \xrightarrow{x=4} k(3 \times 4 - 2) = 60$$

$$\Rightarrow 10k = 60 \rightarrow k = 6$$

۳۵

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} &= 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) \\ \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - 3x + \frac{3x(x-1)}{x+1} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 - 3x(x-1)(x+1) + 3x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 - 3x^2 + 3x + 3x^2 - 6x^2 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow 10x - 6x^2 = 0 \rightarrow 2x(5 - 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ قی} \\ x = \frac{5}{3} \text{ قی} \end{cases}$$

۳۶ وزن مس را x و وزن نقره را y فرض می‌کنیم بنابر فرض سوال داریم

$$\text{وزن گلدان قبل ذوب} = x + y = x + 8x = 9x$$

$$\text{وزن گلدان بعد ذوب} = 9x + 100$$

$$\rightarrow \frac{8x}{9x + 100} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{5}(9x + 100) = 8x \xrightarrow{\times 5} 36x + 400 = 40x \rightarrow 4x = 400 \rightarrow x = 100$$

$$\rightarrow \text{وزن ابتدای گلدان} = 9x = \boxed{900 \text{ گرم}}$$

۳۷ دو عدد فرد متوالی را به صورت $\underbrace{2x+1}_{t_1}$ و $\underbrace{2x+3}_{t_2}$ در نظر می‌گیریم بنابر این داریم:

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} = \frac{8}{15}$$

$$\rightarrow \frac{(2x+3) + (2x+1)}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{8}{15}$$

$$\rightarrow \frac{4x+4}{4x^2+6x+2x+3} = \frac{4x+4}{4x^2+8x+3} = \frac{8}{15} \xrightarrow{\div 4} \frac{x+1}{4x^2+8x+3} = \frac{2}{15}$$

$$\rightarrow 15x + 15 = 4x^2 + 16x + 6 \rightarrow 4x^2 + x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(8)(-9) = 289$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{289}}{8} = 1 \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{289}}{8} \text{ غقی} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow t_1 = 2 \times 1 + 1 = \boxed{3} & t_2 = 2 \times 1 + 3 = \boxed{5} \\ x_2 = \frac{-9}{4} \text{ غقی} \end{cases}$$

۳۸

اگر افراد اولیه n نفر باشند سهم هر فرد $\frac{1}{n}$ است و اگر دو نفر اضافه شوند سهم هر فرد $\frac{1}{n+2}$ است پس داریم:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{12} \rightarrow \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{1}{12} \rightarrow n^2 + 2n = 24$$

$$n^2 + 2n - 24 = 0 \rightarrow (n+6)(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -6 \text{ (غقی)} \\ n = 4 \text{ (قی)} \end{cases}$$

پس $n = 4$ است.



۳۹ فرض کنید در ابتدا n نفر بوده‌اند؛ بنابراین به هر یک $\frac{1}{n}$ کیک رسید، در مرحله بعد به هر یک $\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هر یک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{6} \Rightarrow n^2+n-6=0$$

$$\Rightarrow (n-2)(n+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \text{ ق ق} \\ n=-3 \text{ غ ق} \end{cases}$$

۴۰ حل فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پُر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پُر می‌شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ استخر پُر می‌شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{12(x-10)}{12x(x-10)} + \frac{12x}{12x(x-10)} - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{12x-12+12x-x^2+10x}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow x^2-34x+120=0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=30 \text{ ق ق} \\ x=4 \text{ غ ق} \end{cases} \quad (\text{چون زمان شیر } A \text{ منفی می‌شود})$$

شیر B در $x-6$ ساعت استخر را پُر می‌کند. $\Rightarrow$ شیر A در x ساعت استخر را پُر می‌کند.

شیر B در یک ساعت $\frac{1}{x-6}$ استخر را پُر می‌کند. $\Rightarrow$ شیر A در یک ساعت $\frac{1}{x}$ استخر را پُر می‌کند.

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x-6+x}{x(x-6)} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2-6x=4x-24 \Rightarrow x^2-14x+24=0 \Rightarrow (x-2)(x-12)=0$$

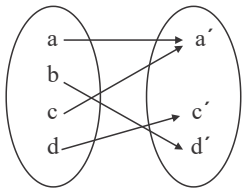
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (چون زمان شیر } B \text{ منفی می‌شود) غیر قابل قبول} \\ x=12 \checkmark \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{وزن آب خالص} = x \\ \text{وزن نمک خالص} = y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = 8 \Rightarrow x = 8y$$

$$\frac{\text{آب خالص}}{\text{آب نمک}} = \frac{x}{x+y} \xrightarrow[\text{بعد از اضافه کردن ۱۰۰ گرم نمک}]{\text{نمک}} \frac{x}{x+y+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow 4x+4y+400=5x \Rightarrow 4y+400=x \xrightarrow{x=8y} 4y+400=8y \Rightarrow 4y=400 \Rightarrow y=100$$

$$\Rightarrow x=8y=800 \Rightarrow x+y=800+100=900 \text{ وزن محلول قبل از اضافه کردن نمک}$$

۴۳ نمودار پیکانی هنگامی تابع است که از هر عضو در مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شود. با توجه به شکل از عضوهای b و d دو پیکان خارج شده است که از هر یک، یک پیکان مشترک به عضو b' وصل شده است. لذا با حذف این عضو پیکان‌های دوم عضوهای b و d نیز حذف می‌شود و نمودار به صورت زیر درمی‌آید که شرط تابع بودن برقرار شود.



$$f(3\sqrt{7}) = -\frac{2}{3}(3\sqrt{7})^2 + |5 \times (3\sqrt{7})| = -\frac{2}{3}(9 \times 7) + 15\sqrt{7} = -42 + 15\sqrt{7}$$

$$f(\sqrt{5}) = -\frac{2}{3}(\sqrt{5})^2 + |5 \times \sqrt{5}| = -\frac{10}{3} + 5\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow f(3\sqrt{7}) - f(\sqrt{5}) = -42 + 15\sqrt{7} + \frac{10}{3} - 5\sqrt{5} = -\frac{116}{3} + 15\sqrt{7} - 5\sqrt{5}$$

$$f(f(2)) = f(5) \xrightarrow{(5,-1)} -1$$

۴۵ چون $(2, 5) \in f$ در نتیجه: $f(2) = 5$

کافی است در هر مرحله جایگذاری کنیم تا مقدار خواسته شده را به دست آوریم.



$$f(\underbrace{f(f(f(2))))}_{\circ} = f(-1) \xrightarrow{(-1,1)} = 1$$

۴۶

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= f(\sqrt{9}) = 2 \times 9 + \sqrt{9} = 18 + 3 = 21 \\ f(1) &= f(\sqrt{1}) = 2 \times 1 + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) + f(1) = 21 + 3 = 24$$

$$g(x) = |x + 1| \text{ (ب)}$$

$$f(x) = 5x + 4 \text{ (الف)}$$

۴۷

۴۸

$$\left. \begin{aligned} \text{عرض مستطیل} &= x \\ \text{طول مستطیل} &= y \end{aligned} \right\} \times \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} \Rightarrow y = 4x - 2$$

$$\text{محیط مستطیل} \Rightarrow P(x) = 2(y + x)$$

$$\xrightarrow{y=4x-2} P(x) = 2(4x - 2 + x) = 2(5x - 2) = 10x - 4$$

۴۹

$$f(a) = -1 \Rightarrow -2a^2 + 2a - 2 = -1 \Rightarrow -2a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times (-1) = 9 - 8 = 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-3 + 1}{-4} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{-3 - 1}{-4} = 1$$

a عددی صحیح است، پس تنها $a = 1$ قابل قبول است. در نتیجه $a - 1 = 0$ و در نتیجه $a = 1$ است.

$$f(a - 1) \stackrel{a=1}{=} f(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

۵۰

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + b \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{a}{(1)^2} + b = a + b = 3 \quad (1) \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{a}{(-1)^2} + b = -a + b = -5 \quad (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a + b - a + b &= 3 - 5 \\ 2b &= -2 \\ b &= -1 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{میکنیم } f(x) = \frac{4}{x^2} - 1 \text{ و } a \text{ و } b \text{ را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم}$$

$$f(\sqrt[3]{2}) = \frac{4}{(\sqrt[3]{2})^2} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$$

۵۱ الف دامنه تابع برابر طول نقاط نمودار، یعنی روی محور x ها اعداد از -3 تا 2 عضو دامنه هستند، بنابراین $D = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 2\}$ دامنه برد برابر عرض

نقاط روی نمودار است. بنابراین $R = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 2\}$ برد

ب) نمودار تابع از دو طرف ادامه دارد یعنی: $D = \mathbb{R}$

و برد آن یعنی عرض نقاط نمودار: $R = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$

۵۲ باتوجه به نمودار دو نقطه $A \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 6 \\ 0 \end{vmatrix}$ روی نمودار قرار دارند. معادله خط گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 0}{0 - 3} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 6 \Rightarrow f(x) = -2x + 6$$

$$\Rightarrow f(4) = -2 \times 4 + 6 = -2$$

۵۳ میزان سود شرکت برحسب تعداد کالای فروخته شده که در آن x تعداد کالا باشد، رابطه‌ای خطی برحسب x است یا فروش هیچ کالایی، شرکت ۴ میلیون تومان ضرر می‌دهد پس رابطه سود به صورت زیر است.

طبق نمودار به ازای فروش ۲۰ کالا $x = 20$ شرکت نه سود می‌دهد نه ضرر پس:

$$0 = 20m - 4 \Rightarrow 20m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

اگر بخواهیم سود بیش‌تر از ۵ میلیون باشد:



$$y > 5 \Rightarrow \frac{1}{5}x - 4 > 5 \Rightarrow \frac{1}{5}x > 9 \Rightarrow x > 45$$

این بدان معناست که باید حداقل ۴۶ کالا بفروشد تا بیش از ۵ میلیون تومان سود کند.

۵۴ از آنجا که f تابع خطی است و حاصل $f(0)$ با $f(f(1))$ برابر شده است، پس $f(1) = 0$. بنابراین دو نقطه $A \left(\frac{1}{0} \right)$ و $B \left(\frac{1}{0} \right)$ از این خط را داریم و با محاسبه شیب خط، معادله خط گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{1 - 0} = -2 \Rightarrow (y - y_A) = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 2$$

۵۵

الف) درآمد حاصل از فروش x لامپ به قیمت ۲۰۰ تومان برابر است با:

$$R(x) = 200x$$

$$\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} \Rightarrow P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 160x - 100$$

ب) تابع سود، تابع درجه ۲ (سهمی) است و چون $a < 0$ ، پس max در رأس آن اتفاق می‌افتد.

$$\text{یعنی باید } 80 \text{ لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد.} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} \Rightarrow \boxed{x = 80}$$

پ) $x = 80$ را در تابع سود جایگذاری می‌کنیم:

$$P(80) = -80^2 + 160(80) - 100 \Rightarrow \boxed{P(80) = 6300}$$
 بیشترین سود روزانه کارگاه

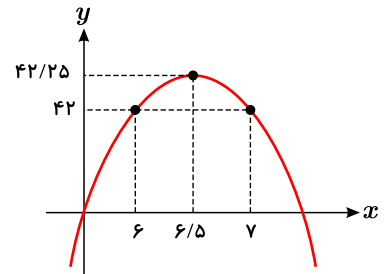
۵۶ ضلع دیگر مستطیل را y فرض می‌کنیم. پس:

$$\text{محیط مستطیل} = 26 \Rightarrow 26 = 2(x + y) \Rightarrow x + y = \frac{26}{2} \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow \boxed{y = 13 - x}$$

$$S = x \times y = x \times (13 - x) \Rightarrow \boxed{S = 13x - x^2} \Rightarrow x_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-13}{2(-1)} = 6.5$$

در جدول نقطه‌یابی مقدار y برای طول رأس، یک نقطه با طول بیشتر از طول رأس و یک نقطه با طول کمتر از طول رأس را به دست می‌آوریم:

x	۶	۶٫۵	۷
y	۴۲	۴۲٫۲۵	۴۲



۵۷

هزینه - درآمد = سود

$$\text{سود} = -\frac{1}{2}x^2 + 30x - 18x - 40 = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 40$$

چون $a < 0$ ، پس سهمی به شکل $\cap$ است و ماکسیمم مقدار در رأس سهمی اتفاق می‌افتد.

$$\text{رأس سهمی} = \frac{-12}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{-12}{-1} = 12$$

$$f(12) = -\frac{1}{2}(12)^2 + 12(12) - 40 = -\frac{144}{2} + 144 - 40 = -72 + 144 - 40 = 32$$

۵۸

الف) تابع قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ‌آمیزی را با $R(x) = x(1200 - x)$ نشان می‌دهیم، پس:

$$R(200) = 200(1200 - 200) = 200 \times 1000 = 200000$$

$$R(300) = 300(1200 - 300) = 300 \times 900 = 270000$$

ب) تابع هزینه گروه برای هر متر مربع رنگ‌آمیزی را با $C(x) = 200x + 30000$ نشان می‌دهیم. پس:

$$C(200) = 200 \times 200 + 30000 = 40000 + 30000 = 70000$$

$$C(300) = 200 \times 300 + 30000 = 60000 + 30000 = 90000$$

پ



$$P(20) = 20 \times (1200 - 20) - (30000 + 20 \times 200) = -10400$$

$$P(100) = 100 \times (1200 - 100) - (30000 + 100 \times 200) = 110000 - 50000 = 60000$$

$$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = 200000 - 70000 = 130000$$

$$P(300) = 300 \times (1200 - 300) - (30000 + 300 \times 200) = 270000 - 90000 = 180000$$

تابع درآمد شرکت $R(x) = x(1200 - x)$ و تابع هزینه $C(x) = 200x + 30000$ است.

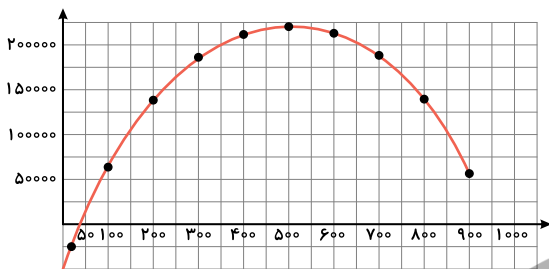
می‌دانیم تابع سود از رابطه $P(x) = R(x) - C(x)$ به دست می‌آید، پس:

$$P(x) = x(1200 - x) - (30000 + 200x) = -x^2 + 1200x - 30000 - 200x \Rightarrow P(x) = -x^2 + 1000x - 30000$$

ث

x	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$P(x)$	-10400	60000	130000	180000	210000	220000	210000	180000	130000	60000

ج

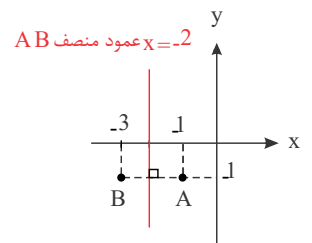


در نقاط پایین محور افقی، شرکت هنوز به سوددهی نرسیده است.

خیر، بیشترین میزان سود در رنگ‌آمیزی 500 مترمربع است، چون نمودار در بالاترین نقطه است و از آن هر چه مقدار بیشتر را رنگ‌آمیزی کند، سود شرکت کاهش می‌یابد.

فرض کنیم دو نقطه هم‌عرض $A(x_1, y)$ و $B(x_2, y)$ دو نقطه از سهمی باشند، در این صورت عمود منصف پاره خط AB ، محور تقارن سهمی است با توجه به شکل رسم‌شده داریم:

$$x = -2: \text{ معادله محور تقارن}$$



عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم، بنابراین ما بیشترین مقدار عبارت $x^2 - 2x$ را می‌خواهیم. می‌دانیم بیشترین مقدار در تابع درجه دوم به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \xrightarrow{x=1} x^2 - 2x = 1^2 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$$

۶۱

$$\text{الف) } P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = (240x - \frac{1}{20}x^2) - (36000 + 40x) = -\frac{1}{20}x^2 + 200x - 36000$$

$$\text{ب) } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2 \times (-\frac{1}{20})} = \frac{-200}{-\frac{1}{10}} = 2000$$

ج) برای محاسبه بیشترین سود عدد حاصل از بخش ب را در معادله سود می‌گذاریم:

$$\xrightarrow{x=2000} P_{\max} = -\frac{1}{20} \times (2000)^2 + 200 \times 2000 - 36000 = 164000$$

۶۲ ابتدا تابع درآمد و سود کارگاه را به دست می‌آوریم:

هزینه - درآمد = سود

$$\text{درآمد: } R(x) = 200x, \text{ هزینه: } C(x) = x^2 + 40x + 100$$

$$\text{سود: } P(x) = R(x) - C(x)$$



$$\Rightarrow P(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100)$$

$$\Rightarrow P(x) = 200x - x^2 - 40x - 100 = -x^2 + 160x - 100$$

برای به دست آوردن تعداد کالایی که حداکثر سود نصیب کارگاه شود، می‌بایست مختصات طول رأس تابع درجه دوم سود را به دست آوریم:

$$P(x) = -x^2 + 160x - 100 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد } y=ax^2+bx+c]{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a = -1 \\ b = 160 \\ c = -100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = \frac{-(160)}{2 \times (-1)} = 80$$

پس به ازای تولید روزانه ۸۰ واحد کالا، کارگاه به بیشترین سود می‌رسد؛ پس کارگاه می‌بایست تولید روزانه خود را ۲۰ واحد کاهش دهد.

ابتدا باید معادله خط را به دست آوریم، سپس با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع، طول نقاط برخورد به دست می‌آید: (۶۳)

$$A(-4, 0), B(0, 2) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$x^2 + 1 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-\frac{1}{2})}{(1)} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید مجموع طول نقاط برخورد برابر مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ است که از رابطه $-\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (۶۴)

هزینه - درآمد = سود

$$\text{سود} \quad P(x) = R(x) - C(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + 20x) - (10x + 40) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x - 40$$

دقت کنید چون رابطه تابع سود به صورت سهمی است و چون ضریب x^2 منفی است پس حداکثر سود در نقطه رأس سهمی می‌باشد و برای به دست آوردن آن داریم:

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-\frac{1}{2})} = 10$$

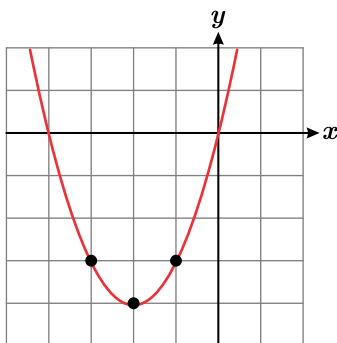
جایگذاری در تابع سود

$$\rightarrow \text{سود ماکزیمم} = (-\frac{1}{2} \times 10 \times 10) + (10 \times 10) - 40 = 10$$

$$y = x^2 + 4x$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2 \rightarrow y = (-2)^2 + 4(-2) = 4 - 8 = -4 \quad s(-2, -4)$$

x	-3	-2	-1
y	-3	-4	-3



پارامتر را با توجه به کل جامعه آماری و آماره را با استفاده از نمونه تصادفی به دست می‌آوریم: (۶۵)

$$\text{آماره خودروهای هیبریدی} = \frac{\text{تعداد خودروهای هیبریدی در نمونه}}{\text{تعداد کل خودروهای نمونه}} = \frac{3}{8}$$

$$\text{پارامتر خودروهای هیبریدی} = \frac{\text{تعداد خودروهای هیبریدی در جامعه}}{\text{تعداد کل خودروهای جامعه}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

کارت‌های ۱ تا ۳۶ را روی کارت‌های جداگانه نوشته و از بین آنها دو تا را بدون جایگزین برمی‌داریم تا اعداد تکراری نباشند. (۶۶)

یا دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم حاصل ضرب اعداد روی دو تاس از ۱ تا ۳۶ است. پس از پرتاب دو تاس حاصل ضرب اعداد رو شده را به دست می‌آوریم تا عدد اول نمونه به دست آید با تکرار این آزمایش عدد بعدی را به دست می‌آوریم (البته در این روش ممکن است عدد تکراری به دست آید، پس در صورت تکرار آزمایش را تا وقتی که عدد



غیرتکراری به دست نیامده تکرار می‌کنیم.)

۶۸ ابتدا باید مجموع کل داده‌ها را محاسبه کنیم، برای این کار ابتدا مجموع ۴ داده و سپس مجموع ۶ داده را محاسبه کرده و با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{مجموع ۴ داده} &= ۴ \times \text{میانگین ۴} = ۴ \times ۷ = ۲۸ \\ \text{مجموع ۶ داده} &= ۶ \times \text{میانگین ۶} = ۶ \times ۲ = ۱۲ \end{aligned} \right\} \Rightarrow ۲۸ + ۱۲ = ۴۰ = \text{مجموع کل داده‌ها}$$

$$\Rightarrow \text{میانگین کل داده‌ها} = \frac{۴۰}{۱۰} = ۴$$

۶۹ با کمی دقت متوجه می‌شویم داده‌های جدید از حاصل ضرب داده‌های قدیم در ۴ به علاوه ۲ به دست آمده است، بنابراین:

$$۱۰ = -۱۲ + ۲ = ۴ \times (-۳) + ۲ = ۲ + \text{میانگین اولیه} = \text{میانگین جدید}$$

۷۰ فرض می‌کنیم میانگین داده‌ها $\bar{x}$ باشد، در این صورت با اضافه کردن $\bar{x}$ به همه داده‌ها داریم:

$$\bar{x} + ۱۵, \bar{x} + ۹, \bar{x} + ۱, \bar{x} + ۳, \bar{x} + ۷, \bar{x} + ۱۳$$

تعداد داده‌ها زوج است، پس میانه برابر میانگین دو داده وسطی است، لذا داریم:

$$\text{میانه} = \frac{-۳ + \bar{x} + (-۱) + \bar{x}}{۲} \xrightarrow{\text{میانه}=۱۳} ۱۳ = \frac{۲\bar{x} - ۴}{۲} \Rightarrow ۲\bar{x} - ۴ = ۲۶ \Rightarrow ۲\bar{x} = ۳۰ \Rightarrow \bar{x} = ۱۵$$

۷۱ طبق رابطه میانگین، ابتدا میانگین را در حالت اول به دست می‌آوریم:

$$x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, x_4 + 3$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + 1 + x_3 + 2 + x_4 + 3}{۴} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ۶ = ۴\bar{x}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۴\bar{x} - ۶ \quad (۱)$$

در حالت دوم برای میانگین داده‌ها داریم:

$$\bar{x}' = \frac{۲x_1 + ۲x_2 + ۱ + ۲x_3 + ۲ + ۲x_4 + ۳}{۴} = \frac{۲(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + ۶}{۴}$$

$$\bar{x}' = \frac{۲(۴\bar{x} - ۶) + ۶}{۴} = \frac{۸\bar{x} - ۱۲ + ۶}{۴} = \frac{۸\bar{x} - ۶}{۴} = ۲\bar{x} - \frac{۳}{۲}$$

۷۲

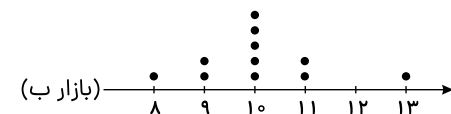
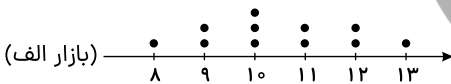
$$\bar{x} = \frac{۴۰ + ۶۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۵۰ + ۳۰۰ + ۵۰۰}{۱ + ۱ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱} = \frac{۱۲۵۰}{۸} = ۱۵۶,۲۵$$

خیر زیرا در این جدول داده دور افتاده (۵۰۰) وجود دارد، میانه (معیار گرایش به مرکز) برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسبتر است.

۷۳ با کمی دقت متوجه می‌شویم: $\frac{\text{داده‌های اولیه} + ۲}{۵} = \text{داده‌های ثانویه}$ ، بنابراین:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{\bar{x}_{\text{قدیم}} + ۲}{۵} = \frac{۸ + ۲}{۵} = ۲$$

۷۴ الف) داده‌ها را روی دو محور اعداد مشخص می‌کنیم.



(بازار ب) متمرکزتر کار کرده است هرچند پراکندگی داده‌ها به نظر یکسان است.

(ب) دامنه تغییرات اختلاف بین بزرگترین داده و کوچکترین داده است، بنابراین در هر دو بازار $۱۳ - ۸ = ۵$ دامنه تغییرات است.

(پ) خیر، در این حالت دامنه تغییرات پراکندگی را یکسان نشان می‌دهد.

(ت) با تعیین دامنه میان چارکی دو بازار می‌توان به این سؤال بهتر پاسخ داد.

با مرتب کردن داده‌های دو بازار و تعیین چارک‌ها و دامنه میان چارکی داریم:

$$\begin{array}{l} \text{بازار الف)} \quad ۸, ۹, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳ \quad IQR = ۱۲ - ۹ = ۳ \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad Q_1 \quad \quad \quad \text{میانه} \quad \quad \quad Q_3 \end{array}$$

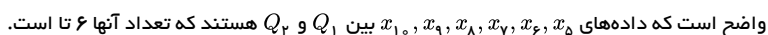
$$\begin{array}{l} \text{بازار ب)} \quad ۸, ۹, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۳ \quad IQR = ۱۱ - ۹ = ۲ \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad Q_1 \quad \quad \quad \text{میانه} \quad \quad \quad Q_3 \end{array}$$

با توجه به دو دامنه چارکی بازار «ب» پراکندگی کمتری دارد؛ بنابراین خرید از این بازار را ترجیح می‌دهیم.

(ث) خیر فقط با داشتن دامنه تغییرات نمی‌توان تصمیم‌گیری درستی انجام داد.

۷۵ چون مقدار داده‌ها را در اختیار نداریم، خودمان آنها را به صورت $x_1, x_2, \dots, x_{14}$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad Q_1 \quad \quad \quad \text{میانه} \quad \quad \quad Q_3 \end{array}$$



V9



چون میانگین دو داده ۲۱ و ۱۹ برابر ۲۰ است با حذف آنها میانگین داده‌های باقی‌مانده تغییری نمی‌کند. بنابراین:

YΛ

۷۹

۷۹ کافی است انحراف استاندارد هر کدام را به دست آوریم. فروشگاهی که انحراف معیار کمتری دارد برای خرید مناسبتر است.

از فروشگاه A خرید می‌کنم چون بر اکنندگی کمتری دارد.

Λο

۸۱ الف) چون محور عمودی نام‌گذاری نشده است، نمی‌توان تعین کرد نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد.

است و با توجه به نمودار حتی بدون نگاه کردن به عددها، می‌توان تشخیص داد میانگین وزن کدو تنبل‌های باغ آرش دو برابر میانگین وزن کدو تنبل‌های باغ تقی و چهار برابر وزن کدو تنبل‌های باغ علی است.

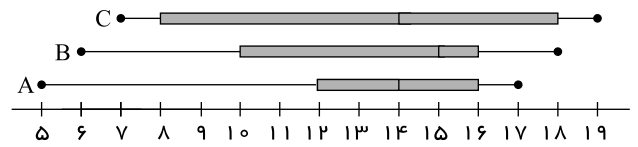
(ب) در این صورت میزان محصول باغ آرش را تقریباً سه برابر میزان محصول باغ علی نشان می‌دهد. - باغ آرش بسیار سنگین‌تر از کدو تنبل‌های باغ علی هستند.

(ت) باید از واحدهای بزرگتری استفاده کنیم. - همان‌طور که دیده می‌شود، از واحدهای بزرگتری استفاده شده است و با این مقیاس تفاوت‌ها کمتر به چشم می‌آید.

ث) خبر زیر را در این شکل‌ها نسبت از تفاع‌ها به درستی با چشم دیده نمی‌شود. - بر ای علی از تصویر یک کدو تنبل استفاده می‌کنیم. بر ای تقی دو کدو تنبل هم‌اندازه با کدو تنبل

علی و برای آرش چهار کدو تنبل استفاده می‌کنیم. در باسن نمودار هم معر فی می‌کنیم که هر دو کدو تنبل ۱۰ کیلوگرم است. - بله، تأثیر دارد.

۸۲ الف. در هر باشگاه داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، سپس چارک‌ها را مشخص می‌کنیم:



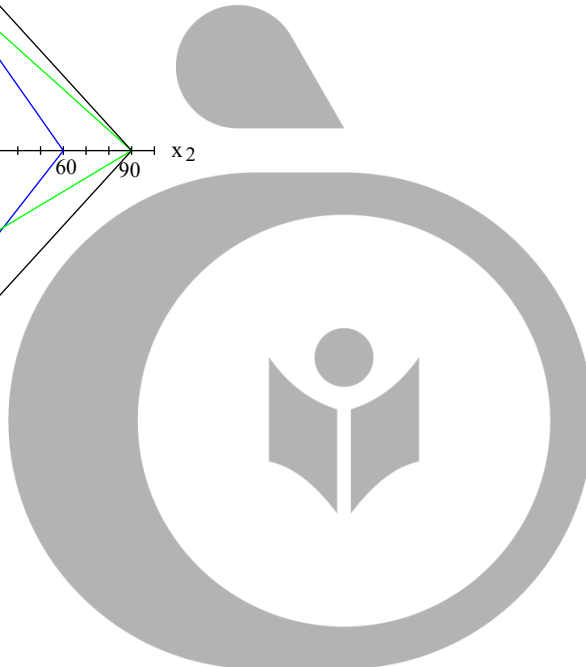
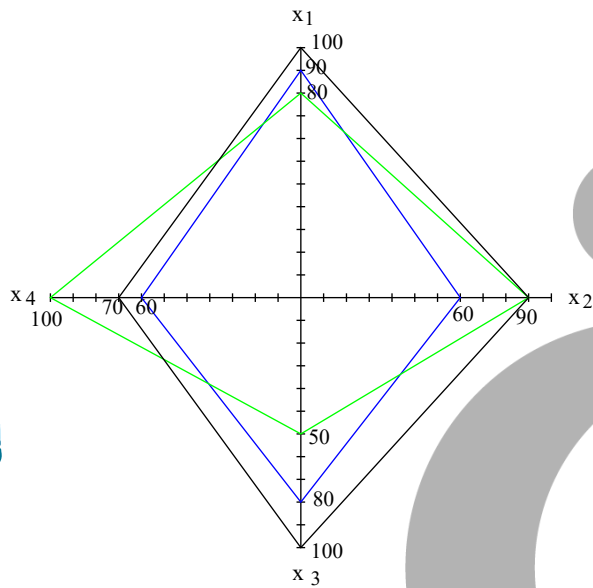
A	۵, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷
	↓ ↓
	Q_1 میانه Q_3
B	۶, ۱۰, ۱۱, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۸
	↓ ↓
	Q_1 میانه Q_3
C	۷, ۸, ۸, ۱۴, ۱۵, ۱۸, ۱۹
	↓ ↓
	Q_1 میانه Q_3

ب. مد: ۱۵

۸۳ با توجه به آنکه پیشینه هر متغیر داده نشده فرض می‌کنیم پیشینه در هر متغیر ۱۰۰ باشد، پس اعداد واقعی همان اعداد روی محور هستند.

سینا (رنگ آبی)

رامین (رنگ سبز)

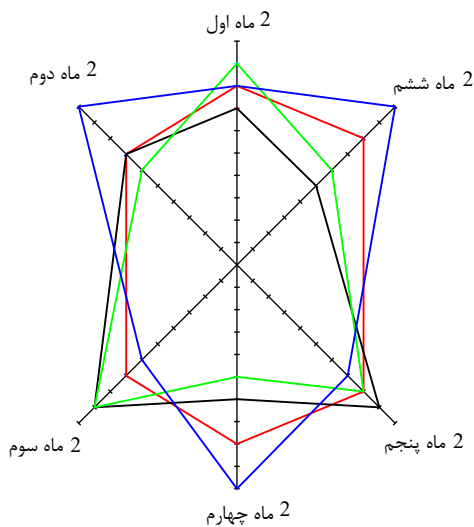


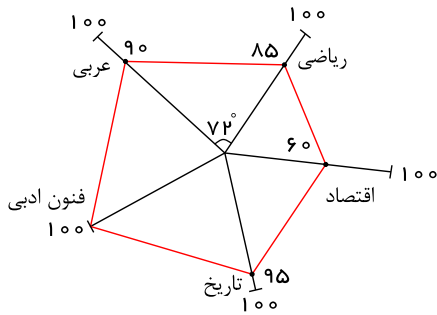
۸۴ نگار با رنگ آبی مشخص شده است.

نگین با رنگ سبز مشخص شده است.

مژده با رنگ مشکی مشخص شده است.

نسیم با رنگ قرمز مشخص شده است.

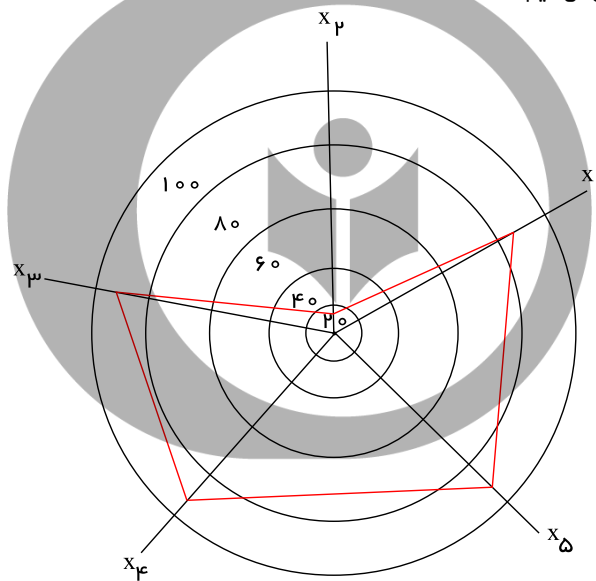




پاسخ: ۵ تا متغیر داریم، پس: $\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
از طرفی با توجه به رابطه $100 = \frac{\text{مقدار واقعی}}{\text{بیشینه}} \times 100$ مقدار متغیر داریم:

نام درس	نمره درس	نمره بیشینه	
ریاضی	۱۷	۲۰	۸۵
عربی	۱۸	۲۰	۹۰
فنون ادبی	۲۰	۲۰	۱۰۰
تاریخ	۱۹	۲۰	۹۵
اقتصاد	۱۲	۲۰	۶۰

۸۶ برای رسم نمودار، ابتدا ۵ نیم‌خط که زاویه آنها $72^\circ = \frac{360^\circ}{5}$ است را رسم کرده و هر نیم‌خط معرف $x_1, x_2, \dots, x_5$ است، با انتخاب یک کشور روی این نیم‌خط، تقسیم‌بندی با توجه به مقیاس را انجام داده مثلاً روی نیم‌خط فاصله‌های ۲۰ و ۴۰ و ۶۰ و ۸۰ و ۱۰۰ را انتخاب کرده و اعداد داده‌شده را روی آن مشخص می‌کنیم. برای نمونه، نمودار ایران را رسم می‌کنیم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم.



$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{75}{100} \times 100 \approx 75 \\ x_2 &= \frac{23}{245} \times 100 \approx 9 \\ x_3 &= \frac{96}{100} \times 100 = 96 \\ x_4 &= \frac{90}{100} \times 100 = 90 \\ x_5 &= \frac{85}{100} \times 100 = 85 \end{aligned}$$

۸۷

$$\text{عدد روی شعاع سرعت خودرو} = \frac{\text{عدد واقعی سرعت خودرو}}{\text{ماکزیم سرعت تمام خودروها}} \times 100 \Rightarrow 90 = \frac{x}{300} \times 100 \Rightarrow x = 270 \left(\frac{km}{h} \right)$$

$$\text{عدد روی شعاع مصرف بنزین} = \frac{\text{عدد واقعی مصرف بنزین}}{\text{ماکزیم مصرف بنزین تمام خودروها}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{y}{6} \times 100 \Rightarrow y = 3 \text{ (لیتر)}$$

۸۸ برای به‌دست آوردن مجهولات به کمک رابطه $\left[\text{عدد واقعی} = \frac{\text{عدد واقعی}}{\text{بیشینه}} \times 100 \right]$ داریم:

$$x: \text{ عدد روی محور ایمنی} = \frac{\text{ایمنی دنا}}{\text{بیشینه ایمنی}} \times 100 \Rightarrow \text{عدد روی محور ایمنی} = \frac{3}{5} \times 100 = 60$$

$$y: \text{ عدد روی محور سرعت} = \frac{\text{سرعت دنا}}{\text{بیشینه سرعت}} \times 100 \Rightarrow \text{عدد روی محور سرعت} = \frac{360}{480} \times 100 = 75$$

$$z: \text{ عدد روی محور مصرف} = \frac{\text{مصرف دنا}}{\text{بیشینه مصرف}} \times 100 \Rightarrow 75 = \frac{z}{8} \times 100 \Rightarrow z = 6$$

۸۹ برای رسم نمودار راداری ابتدا زاویه بین هر دو شعاع متوالی را به دست می‌آوریم.

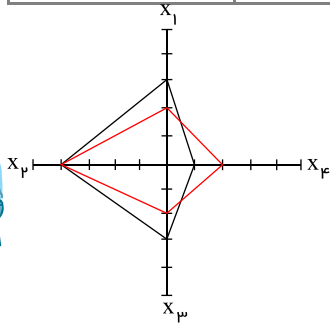


نمودار راداری دارای ۴ شعاع است که زاویه بین هر شعاع 90° است.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

سپس با استفاده از فرمول $100 \times \frac{\text{عدد واقعی}}{\text{بیشینه}}$ = عدد محور، اعداد روی هر محور را به دست آورده، و اعداد مربوط به A را به هم وصل می‌کنیم و همچنین اعداد مربوط به B را نیز به هم وصل می‌کنیم.

مشاهده	A	B	بیشینه	عدد واقعی A	عدد واقعی B
متغیر				بیشینه	بیشینه
x_1	۱۲	۱۸	۳۰	$\frac{۱۲}{۳۰} \times ۱۰۰ = ۴۰$	$\frac{۱۸}{۳۰} \times ۱۰۰ = ۶۰$
x_2	۴۰	۳۰	۵۰	$\frac{۴۰}{۵۰} \times ۱۰۰ = ۸۰$	$\frac{۳۰}{۵۰} \times ۱۰۰ = ۶۰$
x_3	۱۰	۲۰	۲۵	$\frac{۱۰}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۴۰$	$\frac{۲۰}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۸۰$
x_4	۶۰	۱۲	۱۲۰	$\frac{۶۰}{۱۲۰} \times ۱۰۰ = ۵۰$	$\frac{۱۲}{۱۲۰} \times ۱۰۰ = ۱۰$



(۹۰) (در نمودار حبابی جذر متغیر سوم متناسب با شعاع است یا متغیر سوم متناسب با مجذور شعاع است.)

$$\begin{aligned} \text{وزن نفر اول} \rightarrow w_1 &= (\sqrt{2})^2 \times a = 2a \\ \text{وزن نفر دوم} \rightarrow w_2 &= 2^2 \times a = 4a \\ \text{وزن نفر سوم} \rightarrow w_3 &= 3^2 \times a = 9a \\ \text{وزن نفر چهارم} \rightarrow w_4 &= (\sqrt{5})^2 \times a = 5a \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{2a + 4a + 9a + 5a}{4} = \frac{20a}{4} = 5a$$

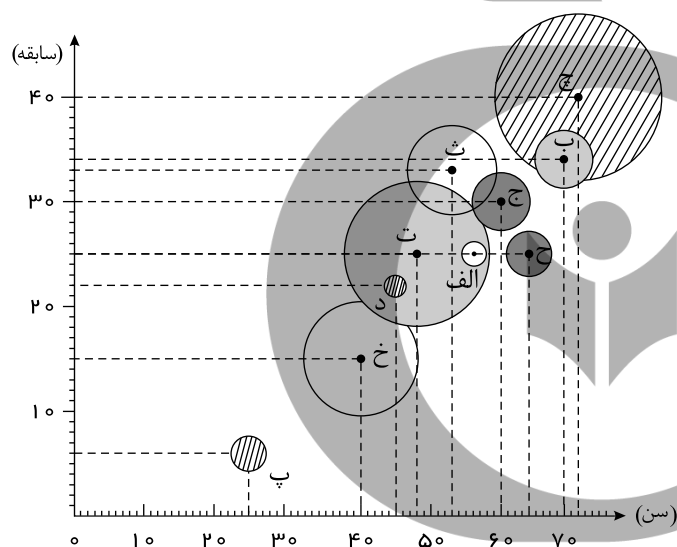
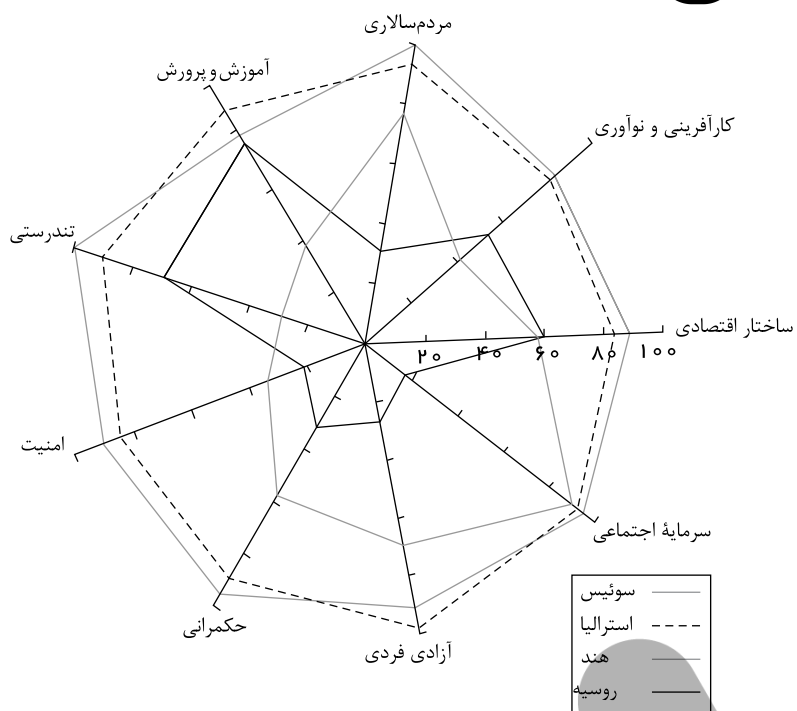
میانگین وزن

بنابراین میانگین وزن آنها به وزن نفر اول برابر است با:

$$\frac{\bar{x}}{w_1} = \frac{5a}{2a} = \frac{5}{2}$$

(۹۱) ۹ تا مورد داریم پس زاویه بین دو شعاع متوالی $360^\circ \div 9 = 40^\circ$ است. براساس شاخص‌ها و طبق نمودار، کشور سوئیس رشد و توسعه بیشتری داشته است.

تذکر: فرض می‌کنیم بیشینه هر متغیر ۱۰۰ باشد، پس عدد واقعی هر متغیر همان عدد روی محور در نمودار راداری است.



درآمد: مساحت حباب‌ها

نوع بیمه: رنگ حباب‌ها:

تأمین اجتماعی: سفید
خوش‌فرما: خاکستری
سلامت: خاکستری تیره
خدمات درمانی: هاشورخورده