

اقتصاد سنجی

فصل ششم: مدل‌های رگرسیون با روابط غیر خطی

گروه اقتصاد

دانشگاه الزهرا

حمید کردبچه

Hamidkurdbackeh@yahoo.com

هدف فصل

در این فصل با جنبه‌های از روابط غیر خطی بین متغیرها در مدل‌های رگرسیون
تخمین و تفسیر نتایج آنها آشنا می‌شویم
سرفصل مطالب:

- مدل‌های لگاریتمی **Logarithm model**
- مدل‌های غیرخطی **Polynomial model**
- متغیرها مجازی **Dummy variables**
- اثرات متقابل **Interaction effects**

منابع فصل

هیل فصل 7 و گجراتی 15

مدلهای لگاریتمی

مدل لگاریتم مضاعف Double – log model

تصور کنید که رابطه X و Y بصورت زیر باشد:

$$Y_i = \alpha_o X_i^{\beta_1} e^{u_i}$$

این مدل، با تبدیل لگاریتمی به مدل خطی تبدیل می شود.

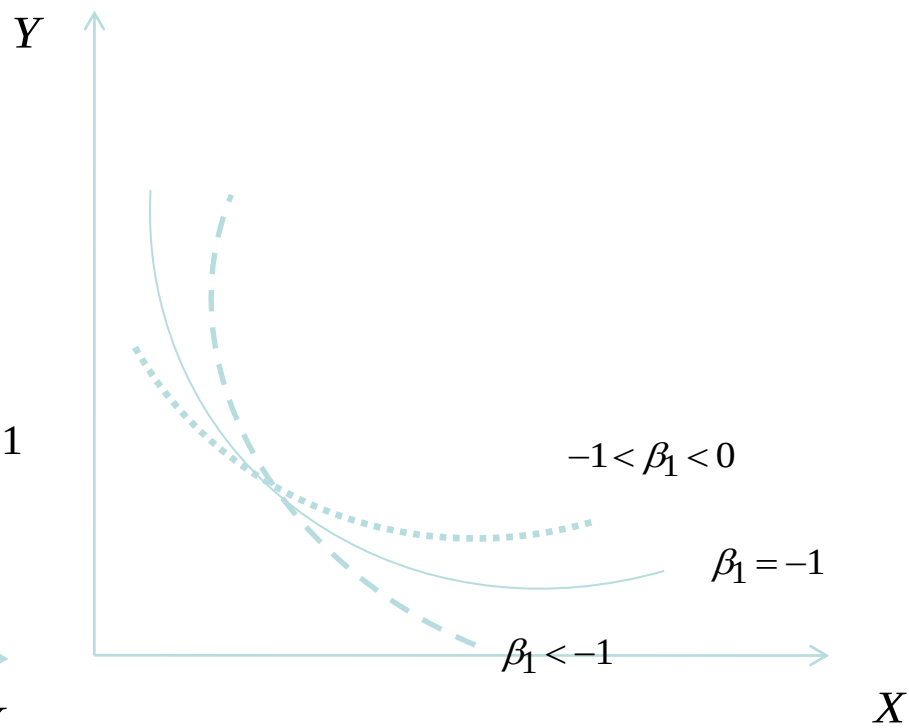
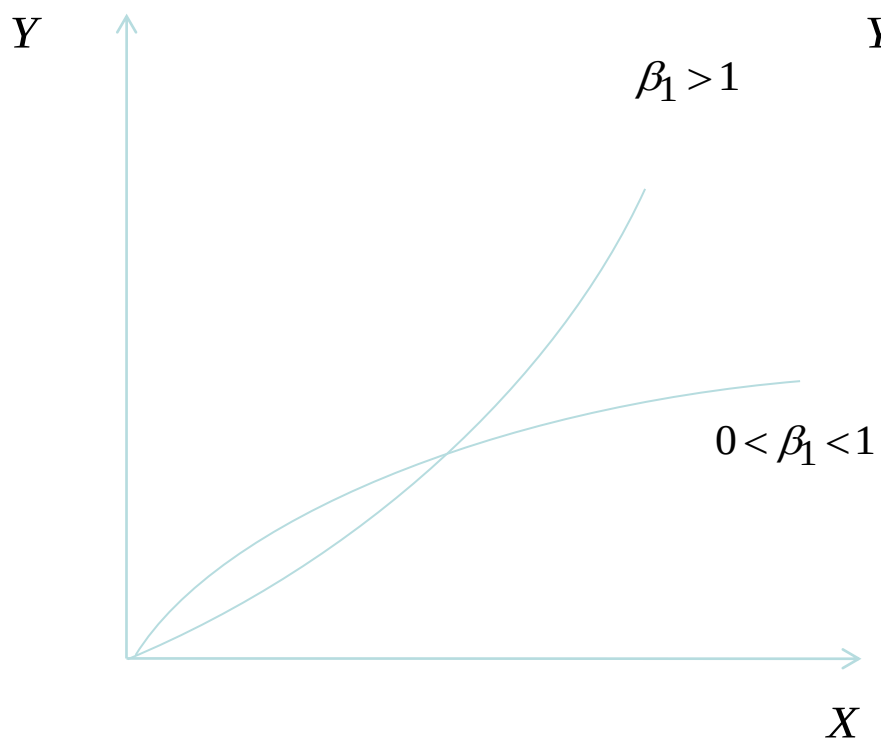
$$\ln Y_i = \beta_o + \beta_1 \ln(x_i) + u_i$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\beta_1 = \frac{d \ln Y_i}{d \ln X_i}$$

چنین مدلی مدل کشش ثابت (constant elasticity) نامیده می شود.

مقادیر محتمل برای β_1



مدل لگاریتمی - خطی (Log-Linear or Log-Level)

این مدل در واقع معرف رابطه زیر است:

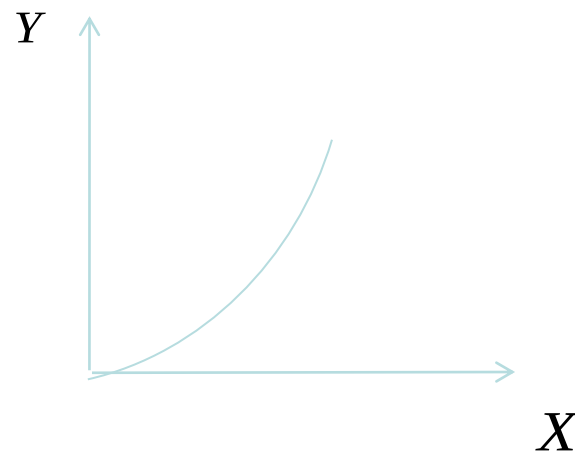
$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + U_i$$

در این صورت :

$$Y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i}$$

$$\beta_1 = \frac{d \ln Y}{dx} = \frac{Y}{x} \frac{\text{تغییر نسب}}{\text{تغییر مطلق}}$$

$$\beta_1 = \frac{dY}{dX} = \beta_1 Y$$



مثال: معادله دستمزد

$$\ln w_i = 9.23 + 0.306 \text{ educ.}$$

$$\Delta \ln W = \hat{\beta}_1 \Delta \text{educ}$$

$$\% \Delta \ln Y = 100(\hat{\beta}_1) \Delta x$$

یعنی با یک واحد افزایش educ ، مقدار W به اندازه $100\hat{\beta}_1 = 30.6$ یا 30.6% درصد افزایش می یابد.

مقدار دقیق تغییر Y نسبت به تغییر X از رابطه زیر به دست می آید:

$$\% \Delta W = 100[\exp(\hat{\beta}_1) - 1]$$

$$\% \Delta W = 100(\exp(0.306) - 1) = 35.8$$

تخمین $\hat{Y}$ در مدل لگاریتم خطی

ارزش تخمین زده شده (Fitted value) در مدل لگاریتمی - خطی $\ln \hat{Y}$ است در حالیکه ما به دنبال $\hat{Y}$ هستیم.

چگونه می توان $\hat{Y}$ را به دست آورند.

• روش اول: آنتی لگاریتم.

$$\begin{aligned}\hat{Y}_n &= \exp(\ln Y) \\ &= \exp(b_1 + b_2 X)\end{aligned}$$

• روش دوم: محاسبه $\hat{Y}$ اصلاح شد.

با استفاده از خصوصیات توزیع نرمال - لگاریتمی می توان نشان داد که یک روش بهتر برای محاسبه $\hat{Y}$ برای حالتی که $n > 30$ باشد عبارت است از :

$$\hat{Y}_e = \exp(b_1 + b_2 x + \frac{\hat{\sigma}^2}{2})$$

$$\hat{Y}_c = \hat{Y}_n \exp(\frac{\hat{\sigma}^2}{2})$$

مثال ۲ یک مدل رشد

-فرض کنید به دلیل پیشرفت تکنولوژی بازده تولید گندم (تن در هکتار) با یک نرخ رشد ثابت سالانه افزایش می یابد.

- فرض کنید برای سال t داشته باشیم.

$$Yield_t = (1 + g)Yield_{t-1}$$

$$Yield_t = (1 + g)^t Yield_0$$

با جایگزینی خواهیم داشت:

$$\ln(Yield_t) = \ln(Yield_0) + t \ln(1 + g)$$

$$= \beta_0 + \beta_1 t$$

که یک مدل لگاریتم - خطی است.

تخمین مدل

$$\ln(Yield_t) = 0.3434 + 0.0178t$$
$$(0.0549 \quad 0.0021)$$

مادامیکه x کوچک باشد $\ln(1 + x) = x$ بنابراین خواهیم داشت:.

$$b_1 = \ln(1 + \hat{g}) = 0.0178 \Rightarrow \hat{g} = 0.0178$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln(x)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta_1 \frac{1}{X}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X / X} = \beta_1$$

$$\frac{\Delta Y}{100 \left(\frac{\Delta X}{X} \right)} = \frac{\beta_1}{100}$$

بنابراین با ۱٪ تغییر X ، Y به مقدار $\frac{\beta_1}{100}$ واحد تغییر می کند.

مثال: تخمین یک مدل خطی - لگاریتمی برای رابطه بین ستانده و نهاده نیروی کار که انتظار داریم مثبت و کاهنده باشد. به شرح زیر است:

$$\hat{Output} = 100 + 700 \ln(labor)$$

یک درصد افزایش در نیروی کار ستانده را ۷ واحد افزایش می دهد.

زیرا :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta \ln(X)} = \frac{\frac{\Delta Y}{\Delta X}}{\frac{X}{X}} = 700$$
$$\frac{\Delta Y}{100 \frac{\Delta X}{X}} = \frac{700}{100} = 7$$

این رابطه صعودی و کاهنده است (چرا؟)

مدل وارون Reciprocal Model

در مواردی که یک درصد افزایش معین مقدار تغییر مطلق معینی در متغیر تابع ایجاد نماید یکی از گزینه ها برای فرم تبعی تابع وارون است.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + u_i$$

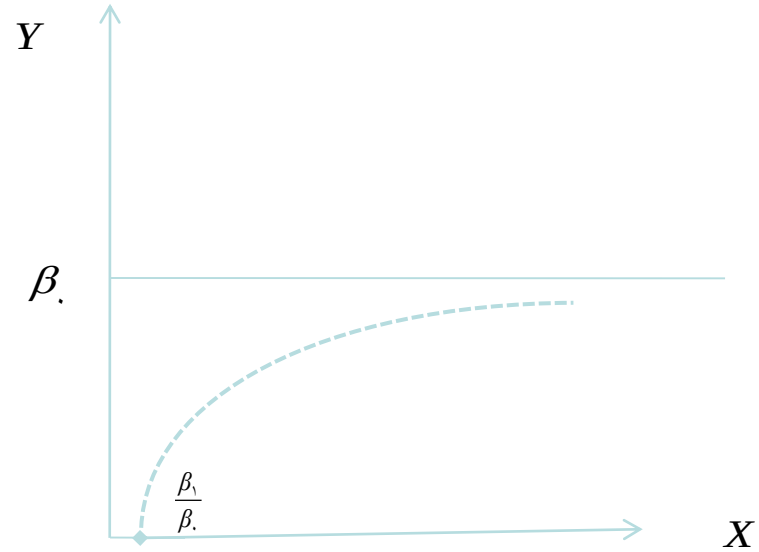
به عنوان مثال در رابطه بین مخارج مواد غذایی و درآمد بجای فرم خطی - لگاریتمی می توان از فرم وارون استفاده نمود.

$$Food - EXP = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{Income} + u$$

$$\frac{dY}{dX} = -\beta_1 \frac{1}{Income^2}$$

$$\text{if } \beta_1 < 0 \Rightarrow \frac{dY}{dX} > 0$$

$$\frac{dY}{dX} = \beta_1 \frac{1}{Income} < 0$$



توصیف مثال فوق در قالب مدل خطی - لگاریتمی

$$Food - EXP = \beta_0 + \beta_1 \ln(Income) + u$$

$$\beta_1 \frac{\Delta FE}{\Delta \ln(Income)}$$

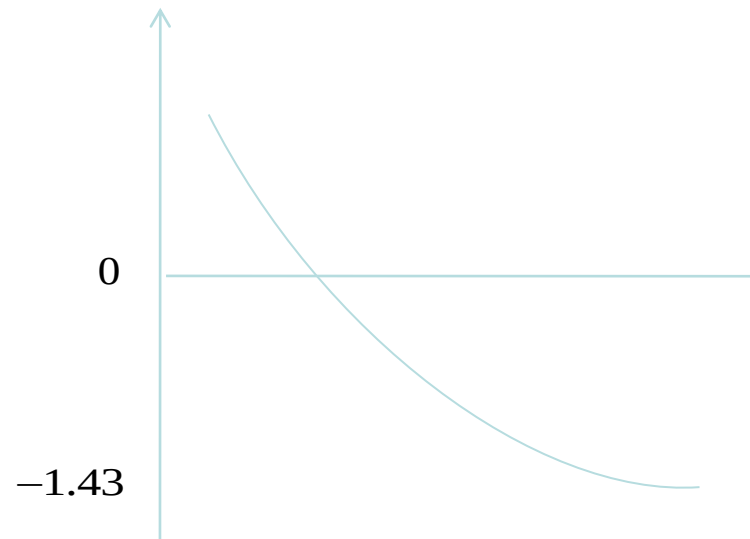
$$\varepsilon = \frac{\beta_1}{Y}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dY} = -\frac{\beta_1}{Y^2}$$

مثال ۲- منحنی فیلیپس

$$W_i = -\frac{1.4282}{(2.0675)} + \frac{8.72}{(2.85)} \frac{1}{Unimp}$$

$$r^2 = 0.3849$$



درصد نرخ بیکاری

مدلهای رگرسیون چند جمله ای (Polynomials)

در مدل‌های اقتصادی با اشکالی از روابط غیرخطی بین متغیرهای اقتصادی برخورد می‌کنیم که به وسیله چند جمله ایها توصیف میشوند. معادلات هزینه، تولید، دستمزد و امثال آن از جمله این روابط هستند.

مثال:

$$TC = \alpha_0 + \alpha_1 Q + \alpha_2 Q^2 + \alpha_3 Q^3 + u$$

$$Sale = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 Adv + \beta_3 adv^2 + u$$

در هریک از این روابط با متغیر بودن شیب مواجه هستیم.

تخمین روابط چند جمله ای

- با استفاده از روش OLS می توان این مدلها را تخمین زد.

- در تخمین مدل هیچ تفاوتی بین Q^2 , Q^3 و متغیرهای توضیحی در مدل رگرسیون وجود ندارد.

- تفاوت در تفسیر نتایج است.

$$Ac = \beta_0 + \beta_1 Q + \beta_2 Q^2 + u$$

مثال ۱:

$$\frac{dE(Ac)}{dQ} = \beta_1 + 2\beta_2 Q$$

ملاحظه می شود که شیب ثابت نیست.

مثال ۲:

معادله دستمزد $Wage = \beta_0 + \beta_1 Educ + \beta_2 \exp er + \beta_3 \exp er^2 + u$

- در این مدل انتظار داریم با افزایش تجربه دستمزد افزایش و بعد از سنین میانی کاهش یابد.
لذا انتظار داریم $\beta_3 < 0$ و $\beta_2 > 0$ باشد.

- نقطه حداکثر دستمزد $\frac{dE(Wage)}{dExper} = \beta_2 + 2\beta_3 Exper$

$$Exper = -\frac{\beta_2}{2\beta_3} =$$

با استفاده از داده های CPS. Small معادله فوق را تخمین زده و نتیجه زیر را داریم:

$$\hat{W} = -9.82 + .2educ + 0.341exper - 0.0051exper^2$$

$$\left. \frac{dE(Wage)}{dExper} \right|_{Exper = 18} = 0.341 + 2(-0.0051)18 = 0.158$$

مفهوم این رابطه چیست؟

$$Exper = -\frac{\beta_2}{2\beta_3} = -\frac{0.341}{2(-0.0051)} = 33.47$$

مفهوم این عدد چیست؟

متغیرهای مجازی Dummy Variables

- متغیرهای مجازی برای مدل سازی متغیرهای کیفی و صف مشاهدات

- امکان تغییر عرض از مبدا برای برخی مشاهدات

- مثال: اثر عوامل تعیین کننده دستمزد

$$Wage = \beta_0 + \beta_1 Educ + \beta_2 Exper + \varepsilon$$

اثر جنسیت را چگونه می توان ارزیابی کرد.

متغیر مجازی :

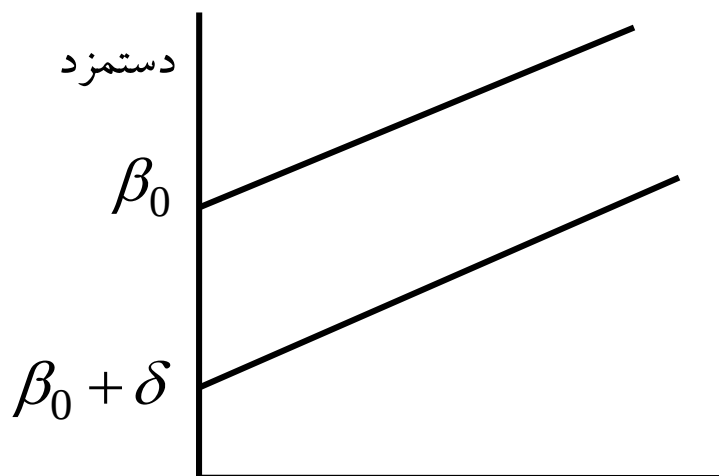
$$Wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \delta Female + u$$

$Female = 1$ زن

$Female = 0$ مرد

$$E(Wage) = \begin{cases} \beta_0 + \delta + \beta_1 educ & Female = 1 \\ \beta_0 + \beta_1 educ & Female = 0 \end{cases}$$

در این مدل گروه مرد به عنوان پایه شناخته می شود.



چرا هر دو صفت (زن و مرد) در مدل لحاظ نمی شود. برای اجتناب از همخطی زیرا :

$$Male + Female = 1$$

مدل رگرسیون با متغیر مجازی برای چند گروه

اثر جنسیت و نژاد بر دستمزد

$$Wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \delta_1 black + \delta_2 Female + u$$

$$Wage \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 educ & white - male \\ \beta_0 + \delta_1 + \beta_1 educ & black - male \\ \beta_0 + \delta_2 + \beta_1 educ & whit - female \\ \beta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta + \beta_1 educ & black - female \end{cases}$$

در این مدل گروه White - male پایه است زیرا اگر همه متغیرهای مجازی صفر باشند.

یعنی مدل اصلی را داشته باشیم مشاهدات ما مرد و سفید هستند.

متغیرهای کیفی دارای گروه بندی

- مدل رگرسیون در حالتی که متغیر کیفی بیش از دو حالت داشته باشد.

- مثال: اثر مناطق چهارگانه جغرافیایی بر دستمزد

$$Wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \delta_1 South + \delta_2 West + \delta_3 east + u$$

$$E(Wage) = \begin{cases} \beta_0 + \delta_3 + \beta_3 educ & west \\ \beta_0 + \delta_2 + \beta_2 educ & east \\ \beta_0 + \delta_1 + \beta_2 educ & south \\ \beta_0 + \beta_2 educ & North \end{cases}$$

بنابراین β_0 یا عرض از مبدا مدل دستمزد پایه (بدون آموزش) برای فردی است که در منطقه شمال زندگی می کند.

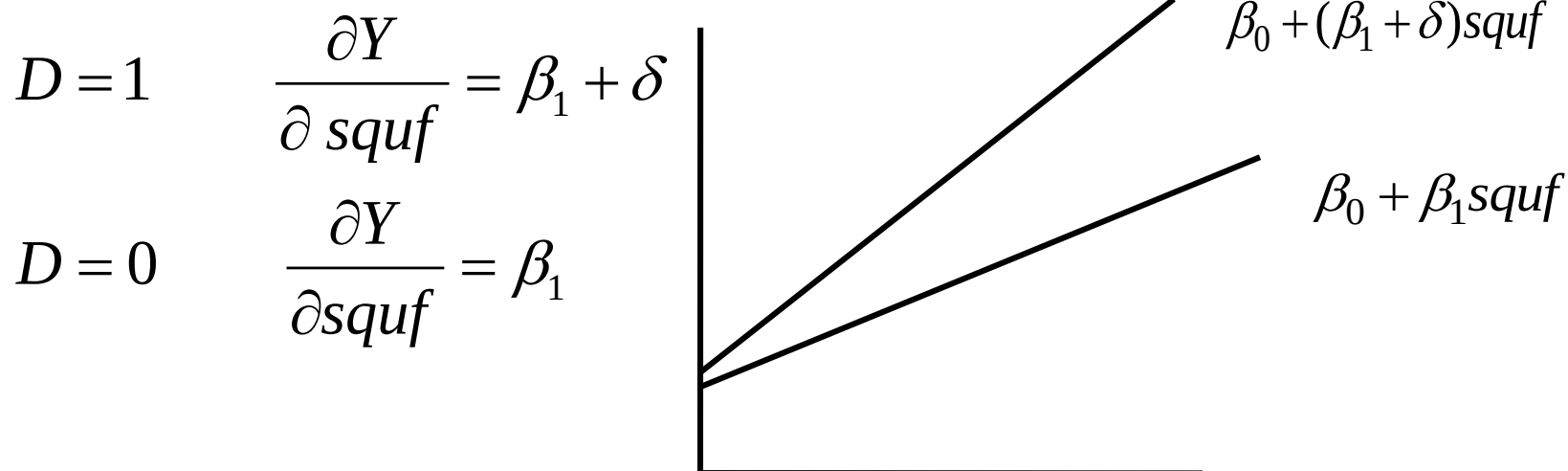
متغیر مجازی شیب

چگونه می توان اثر متغیرهای کیفی را بر رابطه بین یک متغیر توضیحی و متغیر وابسته ملاحظه نمود.

مثال اثر موقعیت بر قیمت مسکن

$$\text{Price} = \beta_0 + \beta_1 \text{Sqf} + \delta(D\text{Sqf}) + u$$

قیمت مسکن علاوه بر اندازه همچنین تحت تاثیر اثر متقابل اندازه و موقعیت نیز است.

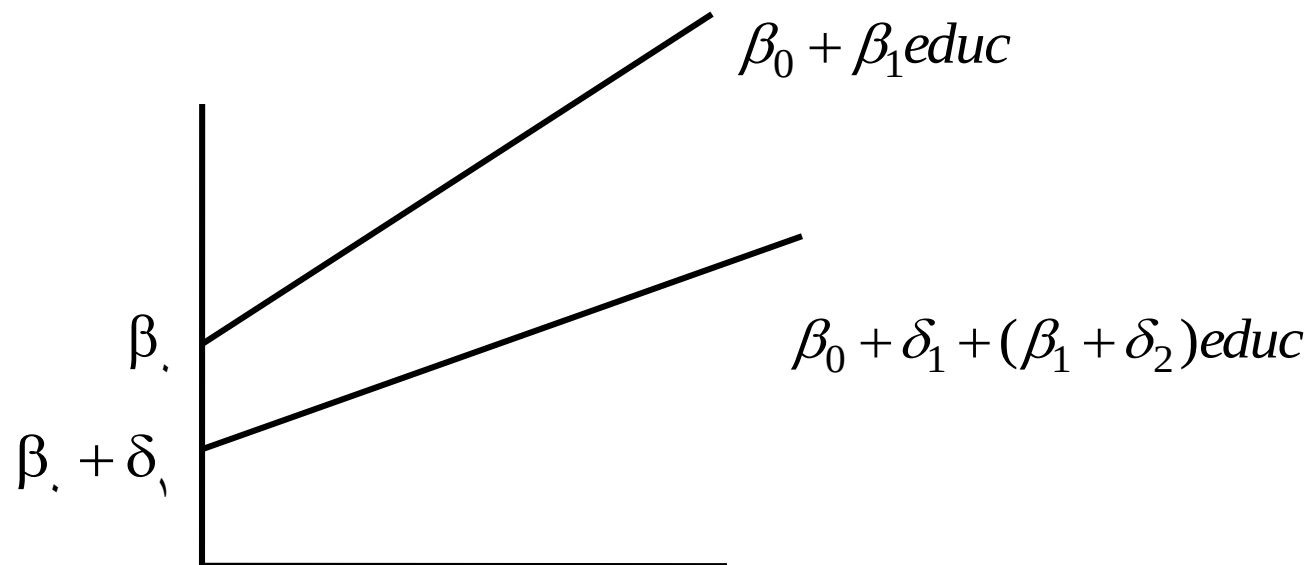


مثال: اگر جنسیت بر حداقل دستمزد و رابطه دستمزد و آموزش تاثیر داشته باشد مدل رگرسیون به صورت زیر خواهد بود.

$$Wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \delta_1 Fmale + \delta_2 Female .educ + u$$

$$E(Wage) \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 educ & Female = 0 \\ \beta_0 + \delta_1 + (\delta_2 + \beta_1)educ & Female = 1 \end{cases}$$

فرض آنست که δ_1 , δ_2 منفی هستند.



آزمون اثر مشترک متغیرهای کیفی

$$H_0 : \delta_1 = \dots = \delta_m = 0$$

$$F = \frac{SSR_R - SSR_u / J}{SSR_u / n - k}$$

$$F > F_c(J, n - k) \Rightarrow$$

H_0 رد می شود

کنترل زمان

با استفاده از متغیرهای مجازی می توان اثر زمان را کنترل نمود.

متغیرهای فصلی

اثر تابستان بر مصرف یک کالا

$$\begin{cases} Sommer = 1 & \text{if } month = Jun, July, Agust \\ & = 0 \quad \text{other wise} \end{cases}$$

مثالها

اثر تعطیلات

اثر وقایع تاریخی

اثر حوادث

اثر بحرانهای اقتصادی

اثر تغییر ساختارها

اثرات متقابل (Interaction effects)

از جمله موارد ماهیت غیرخطی روابط بین متغیرهای اقتصادی به اثرات متقابل بازمیگردد.

مثال: اثر اندازه و تعداد اتاق خواب بر قیمت مسکن

مدل ۱- بدون توجه به اثر متقابل

$$\text{Price} = \beta_0 + \beta_1 \text{squf} + \beta_2 \text{bedroom} + u$$

مدل ۲- با توجه به اثر متقابل

$$\text{Price} = \beta_0 + \beta_1 \text{squf} + \beta_2 \text{bedroom} + \beta_3 \text{squf} \cdot \text{bedroom} + u$$

در مدل دوم قیمت مسکن گذشته از اندازه آن و تعداد اتاقها همچنین تابعی از تناسب اندازه و

تعداد اتاقها است.

$$\frac{\partial \text{price}}{\partial \text{squf}} = \beta_1 + \beta_3 \text{bedroom}$$

$$\frac{\partial \text{price}}{\partial \text{squf}} = \beta_2 + \beta_3 \text{squf}$$