

فدایا!

تو را سپاس می‌گوییم که در مسیری که در راه تو گام برمی‌دارم

آنها که باید مرا یاری کنند، سد راهم می‌شوند.

آنهايي که باید بنوازند، سیلی می‌زنند.

آنهايي که باید در مقابل دشمن پشتیبانمان باشند، پیش از دشمن حمله

میکنند و ...

تا در هر لحظه از حرکت به سوی تو از هر تکیه‌گاهی جز تو بی بهره باشم.

دکتر علی شریعتی

فهرست

- فصل ۱: الکترواستاتیک ۵
- فصل ۲: میدان الکتریکی ۱۵
- فصل ۳: قانون گاوس ۳۱
- فصل ۴: پتانسیل الکتریکی ۳۹
- فصل ۵: خازن‌ها و دی‌الکتریک‌ها ۵۳
- فصل ۶: جریان و مقاومت ۶۵
- فصل ۷: مدارهای جریان مستقیم ۷۳

فصل ۸: میدان مغناطیسی ۸۹

فصل ۹: تولید میدان مغناطیسی ۱۰۱

فصل ۱۰: القای مغناطیسی ۱۱۳

فصل ۱۱: القا و مواد مغناطیسی ۱۲۳

فصل ۱۲: مدارهای جریان متناوب ۱۳۳

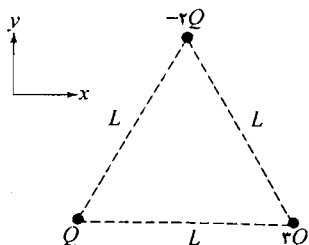
فصل ۱۳: معادلات ماکسول، امواج الکترومغناطیسی ۱۴۷

فصل ۱۴: نورشناسی هندسی ۱۵۷

فصل ۱۵: نورشناسی موجی ۱۷۳

مسائل

(۱) مطابق شکل زیر، سه بار نقطه‌ای در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی، قرار دارند. فرض کنید:



$L = 3 \text{ cm}$ و $Q = 2 \mu\text{C}$ است. نیروی برآیند وارد بر بار:

الف) $3Q$ ب) $-2Q$ را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

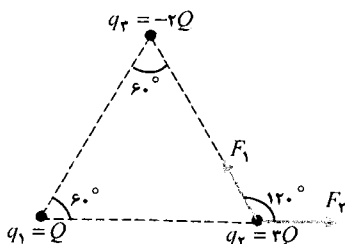
$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = L = 3 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$F_1 = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow F_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 2 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow$$

$$F_1 = 240 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow F_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 3 \times 2 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow$$

$$F_2 = 120 \text{ N}$$



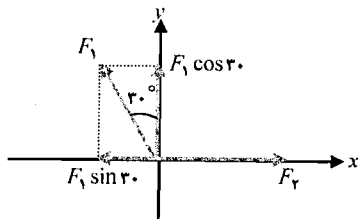
با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_x = F_2 - F_1 \sin 30^\circ \\ F_y = F_1 \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 120 - 240 \times \sin 30^\circ \\ F_y = 240 \times \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

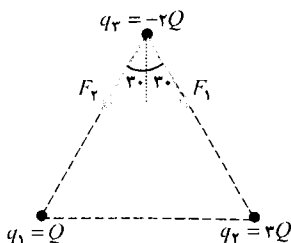
$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 208 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = 208 \hat{j}$$

اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{0 + (208)^2} \Rightarrow F = 208 \text{ N}$$



فصل ۱



ب) با استفاده از قانون کولن می توان نوشت:

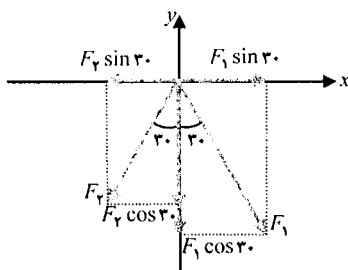
$$F_1 = \frac{kq_2q_3}{r^2} \Rightarrow F_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 2 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow$$

$$F_1 = 240 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{kq_1q_3}{r^2} \Rightarrow F_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 2 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow$$

$$F_2 = 80 \text{ N}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:



$$\begin{cases} F_x = F_1 \sin 30 - F_2 \sin 30 \\ F_y = -F_1 \cos 30 - F_2 \cos 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_x = 240 \times \sin 30 - 80 \times \sin 30 \\ F_y = -240 \times \cos 30 - 80 \times \cos 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_x = 80 \text{ N} \\ F_y = -277 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = 80 \hat{i} - 277 \hat{j}$$

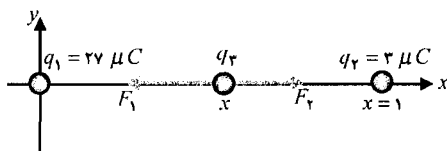
اندازه ی نیروی برآیند:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{(80)^2 + (-277)^2} \Rightarrow F = 288.3 \text{ N}$$

۲) بار نقطه ای $q_1 = 27 \mu\text{C}$ در $x = 0$ و بار نقطه ای $q_2 = 3 \mu\text{C}$ در $x = 1 \text{ m}$ قرار دارد. الف) در چه نقطه ای (به جز بی نهایت) نیروی برآیند وارد بر بار نقطه ای سوم برابر صفر می شود؟ ب) قسمت الف را برای حالتی، تکرار کنید که $q_2 = -3 \mu\text{C}$ باشد.

حل:

الف) برای بارهای هم نام، محل نیروی صفر روی خط وصل بین دو بار و نزدیک بار کوچک تر است.



$$F_1 = \frac{kq_1q_3}{r^2} \Rightarrow F_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 27 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{x^2} \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{243 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6}}{x^2}$$

$$F_2 = \frac{kq_2q_3}{r^2} \Rightarrow F_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{(1-x)^2} \Rightarrow F_2 = \frac{27 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6}}{(1-x)^2}$$

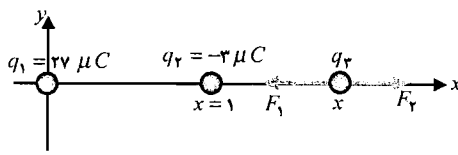
توجه کنید بار q_3 هر علامتی که داشته باشد نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای q_1 و q_2 در خلاف جهت یکدیگر هستند پس:

$$F = F_2 - F_1 \Rightarrow F = \frac{27 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6}}{(1-x)^2} - \frac{243 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6}}{x^2}$$

برآیند نیروهای وارد بر بار سوم برابر صفر است:

$$F = 0 \Rightarrow \frac{27 \times 10^{-9} \times q_r}{(1-x)^2} = \frac{243 \times 10^{-9} \times q_r}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{9}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3 - 3x \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = 0.75 \text{ m}$$

ب) برای بارهای غیرهمنام، محل نیروی صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچک تر است.



$$F_1 = \frac{kq_1q_r}{r^2} \Rightarrow F_1 = \frac{9 \times 10^{-9} \times 27 \times 10^{-9} \times q_r}{x^2} \Rightarrow F_1 = \frac{243 \times 10^{-9} \times q_r}{x^2}$$

$$F_r = \frac{kq_rq_r}{r^2} \Rightarrow F_r = \frac{9 \times 10^{-9} \times 3 \times 10^{-9} \times q_r}{(x-1)^2} \Rightarrow F_r = \frac{27 \times 10^{-9} \times q_r}{(x-1)^2}$$

توجه کنید بار q_r هر علامتی که داشته باشد نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای q_1 و q_2 در خلاف جهت یکدیگر هستند پس:

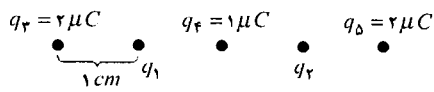
$$F = F_r - F_1 \Rightarrow F = \frac{27 \times 10^{-9} \times q_r}{(x-1)^2} - \frac{243 \times 10^{-9} \times q_r}{x^2}$$

برآیند نیروهای وارد بر بار سوم برابر صفر است:

$$F = 0 \Rightarrow \frac{27 \times 10^{-9} \times q_r}{(x-1)^2} = \frac{243 \times 10^{-9} \times q_r}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{9}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3x - 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 1.5 \text{ m}$$

۳) در شکل زیر، پنج بار نقطه‌ای بر روی خط راستی، قرار دارند و فاصله بین بارها 1 cm است. به ازای چه مقادیری از q_1 و q_2 ، نیروی برآیند وارد بر هر یک از بارهای دیگر برابر صفر می‌شود؟

حل:



$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 1 \times 10^{-2} \text{ m} \\ r = 1 \text{ cm} \end{cases}$$

نیروهای وارد بر بار q_r : با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{1r} = \frac{kq_1q_r}{r^2} \Rightarrow F_{1r} = \frac{9 \times 10^{-9} \times q_1 \times 2 \times 10^{-9}}{(1 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{1r} = 18 \times 10^{-9} q_1$$

$$F_{2r} = \frac{kq_2q_r}{r^2} \Rightarrow F_{2r} = \frac{9 \times 10^{-9} \times 1 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^{-9}}{(2 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{2r} = 45 \text{ N}$$

$$F_{3r} = \frac{kq_3q_r}{r^2} \Rightarrow F_{3r} = \frac{9 \times 10^{-9} \times q_r \times 2 \times 10^{-9}}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{3r} = 2 \times 10^{-9} q_r$$

$$F_{4r} = \frac{kq_4q_r}{r^2} \Rightarrow F_{4r} = \frac{9 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^{-9}}{(4 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{4r} = 22.5 \text{ N}$$

فصل ۱

برآیند نیروهای وارد بر بار q_r برابر صفر است:

$$F = F_{1r} + F_{2r} + F_{r1} + F_{r2} \Rightarrow 0 = 18 \times 10^{-9} q_1 + 2 \times 10^{-9} q_r + 45 + 22/5 \Rightarrow$$

$$18 \times 10^{-9} q_1 + 2 \times 10^{-9} q_r = -67/5 \Rightarrow 18 q_1 + 2 q_r = -6/75 \times 10^{-6} \quad (1)$$

نیروهای وارد بر بار q_5 : با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{r5} = \frac{kq_r q_5}{r^2} \Rightarrow F_{r5} = \frac{9 \times 10^{-9} \times q_r \times 2 \times 10^{-6}}{(1 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{r5} = 18 \times 10^{-9} q_r$$

$$F_{55} = \frac{kq_r q_5}{r^2} \Rightarrow F_{55} = \frac{9 \times 10^{-9} \times 1 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{55} = 45 \text{ N}$$

$$F_{15} = \frac{kq_1 q_5}{r^2} \Rightarrow F_{15} = \frac{9 \times 10^{-9} \times q_1 \times 2 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{15} = 2 \times 10^{-9} q_1$$

$$F_{r5} = \frac{kq_r q_5}{r^2} \Rightarrow F_{r5} = \frac{9 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{(4 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{r5} = 22/5 \text{ N}$$

برآیند نیروهای وارد بر بار q_5 برابر صفر است:

$$F = F_{15} + F_{r5} + F_{r5} + F_{55} \Rightarrow 0 = 2 \times 10^{-9} q_1 + 18 \times 10^{-9} q_r + 22/5 + 45 \Rightarrow$$

$$2 \times 10^{-9} q_1 + 18 \times 10^{-9} q_r = -67/5 \Rightarrow 2 q_1 + 18 q_r = -6/75 \times 10^{-6} \quad (2)$$

با حل همزمان روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 18 q_1 + 2 q_r = -6/75 \times 10^{-6} \\ 2 q_1 + 18 q_r = -6/75 \times 10^{-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 q_1 + 2 q_r = -6/75 \times 10^{-6} \\ -18 q_1 - 162 q_r = 60/75 \times 10^{-6} \end{cases} \Rightarrow -160 q_r = 54 \times 10^{-6} \Rightarrow$$

$$q_r = -\frac{27}{80} \times 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow q_r = -\frac{27}{80} \mu\text{C}$$

با جاگذاری q_r در معادله (۱) می‌توان نوشت:

$$18 q_1 + 2 q_r = -6/75 \times 10^{-6} \Rightarrow 18 q_1 + 2 \times \left(-\frac{27}{80} \times 10^{-6}\right) = -6/75 \times 10^{-6} \Rightarrow$$

$$q_1 = -\frac{27}{80} \times 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow q_1 = -\frac{27}{80} \mu\text{C}$$

(۴) فرض کنید بتوانیم الکترون‌ها و پرتون‌های g ۱ هیدروژن را از هم جدا کنیم و آن‌ها را بر روی کره‌های زمین و ماه قرار دهیم در این حالت، نیروی جاذبه‌ی الکتروستاتیکی بین زمین و ماه را با نیروی گرانشی زمین و ماه، مقایسه کنید. (تعداد اتم‌های g ۱ هیدروژن برابر عدد آووگادرو N_A و هر اتم هیدروژن دارای یک پرتون و یک الکترون است.)

حل: جرم زمین $kg \ 5/98 \times 10^{24}$ و جرم ماه $kg \ 7/35 \times 10^{22}$ است.

با استفاده از تعریف بار الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} q_1 = +ne \\ q_2 = -ne \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = +6/0.2 \times 10^{-22} \times 1/6 \times 10^{-19} \\ q_2 = -6/0.2 \times 10^{-22} \times 1/6 \times 10^{-19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = +9/63 \times 10^{-4} \text{ C} \\ q_2 = -9/63 \times 10^{-4} \text{ C} \end{cases}$$

با استفاده از قانون کولن و قانون گرانش می توان نوشت:

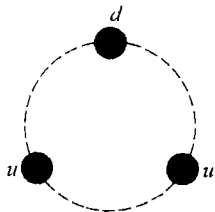
$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{kq_1q_2}{r^2}}{\frac{GM_em_m}{r^2}} \Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{kq_1q_2}{GM_em_m} \Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{9 \times 10^9 \times 9/63 \times 10^{-4} \times 9/63 \times 10^{-4}}{6/67 \times 10^{-11} \times 5/98 \times 10^{-24} \times 7/25 \times 10^{-22}} \Rightarrow$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 2/8 \times 10^{-18}$$

(۵) در مدل کوارکی ذرات بنیادی، فرض می شود هر پرتون از دو کوارک بالا u و بار (هر کدام) $\frac{2e}{3}$ و

یک کوارک پایین d و بار $-\frac{e}{3}$ تشکیل شده است. فرض کنید مطابق شکل زیر، کوارکها به فاصله های

مساوی روی دایره ای به شعاع $m \times 10^{-15} / 2$ قرار دارند. اندازه ی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر کوارک را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{1/2 \times 10^{-15}} \Rightarrow x = 1/4 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$r = 2x \Rightarrow r = 2 \times 1/4 \times 10^{-15} \Rightarrow r = 1/2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$q_1 = -\frac{e}{3}$$

با استفاده از قانون کولن می توان نوشت:

$$F_{r1} = \frac{kq_2q_1}{r^2} \Rightarrow$$

$$F_{r1} = \frac{9 \times 10^9 \times \frac{2}{3} \times 1/6 \times 10^{-19} \times \frac{1}{3} \times 1/6 \times 10^{-19}}{(1/2 \times 10^{-15})^2} \Rightarrow$$

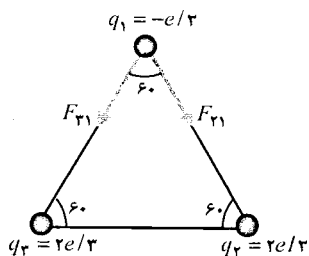
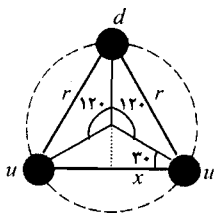
$$F_{r1} = 11/5 \text{ N}$$

$$F_{r1} = \frac{kq_2q_1}{r^2} \Rightarrow$$

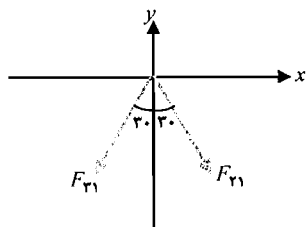
$$F_{r1} = \frac{9 \times 10^9 \times \frac{2}{3} \times 1/6 \times 10^{-19} \times \frac{1}{3} \times 1/6 \times 10^{-19}}{(1/2 \times 10^{-15})^2} \Rightarrow$$

$$F_{r1} = 11/5 \text{ N}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:



فصل ۱



$$\begin{cases} F_x = F_{r1} \sin 30^\circ - F_{r1} \sin 30^\circ \\ F_y = -F_{r1} \cos 30^\circ - F_{r1} \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 11/5 \times \sin 30^\circ - 11/5 \times \sin 30^\circ \\ F_y = -11/5 \times \cos 30^\circ - 11/5 \times \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = -2.0 \text{ N} \end{cases}$$

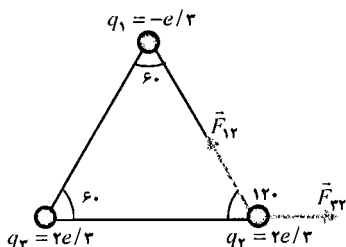
$$\vec{F} = -2.0 \hat{j}$$

اندازه‌ی نیروی برآیند:

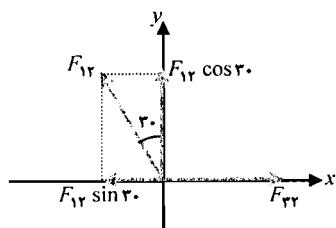
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{0^2 + (-2.0)^2} \Rightarrow F = 2.0 \text{ N}$$

$$q_r = \frac{2e}{3}$$

با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:



$$F_{1r} = \frac{kq_1q_r}{r^2} \Rightarrow F_{1r} = \frac{9 \times 10^9 \times \frac{1}{3} \times 1/6 \times 10^{-19} \times \frac{2}{3} \times 1/6 \times 10^{-19}}{(2/1 \times 10^{-15})^2} \Rightarrow F_{1r} = 11/5 \text{ N}$$



$$F_{rr} = \frac{kq_rq_r}{r^2} \Rightarrow F_{rr} = \frac{9 \times 10^9 \times \frac{2}{3} \times 1/6 \times 10^{-19} \times \frac{2}{3} \times 1/6 \times 10^{-19}}{(2/1 \times 10^{-15})^2} \Rightarrow F_{rr} = 23/4 \text{ N}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_x = F_{rr} - F_{1r} \sin 30^\circ \\ F_y = F_{1r} \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 23/4 - 11/5 \times \sin 30^\circ \\ F_y = 11/5 \times \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 17/65 \text{ N} \\ F_y = 10/10 \text{ N} \end{cases}$$

$$\vec{F} = 17/65 \hat{i} + 10/10 \hat{j}$$

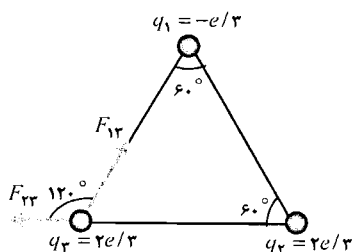
اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{(17/65)^2 + (10/10)^2} \Rightarrow F = 2.0/3 \text{ N}$$

$$q_r = \frac{2e}{3}$$

با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{1r} = \frac{kq_1q_r}{r^2} \Rightarrow F_{1r} = \frac{9 \times 10^9 \times \frac{1}{3} \times 1/6 \times 10^{-19} \times \frac{2}{3} \times 1/6 \times 10^{-19}}{(2/1 \times 10^{-15})^2} \Rightarrow F_{1r} = 11/5 \text{ N}$$



$$F_{12} = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow$$

$$F_{12} = \frac{9 \times 10^{-9} \times \frac{2}{3} \times 10^{-19} \times \frac{1}{6} \times 10^{-19}}{\left(\frac{2}{3} \times 10^{-10}\right)^2} \Rightarrow$$

$$F_{12} = 23/4 \text{ N}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

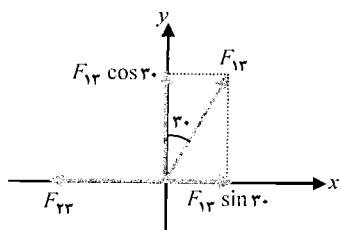
$$\begin{cases} F_x = F_{12} \sin 30^\circ - F_{21} \\ F_y = F_{12} \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 11/5 \times \sin 30^\circ - 23/4 \\ F_y = 11/5 \times \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = -17/65 \text{ N} \\ F_y = 10/5 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -17/65 \hat{i} + 10/5 \hat{j}$$

اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{(-17/65)^2 + (10/5)^2} \Rightarrow$$

$$F = 20/3 \text{ N}$$



۶) سه بار نقطه‌ای q_1 ، q_2 ، q_3 بر روی سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 10 cm قرار دارند. نیروهای بین بارها: (جاذبه) $F_{12} = 5/4 \text{ N}$ ، (دافعه) $F_{13} = 15 \text{ N}$ و (جاذبه) $F_{23} = 9 \text{ N}$ هستند. اگر q_1 منفی باشد q_2 و q_3 را به دست آورید.

حل:

نیروی بین دو بار q_1 و q_2 دافعه است پس q_2 نیز دارای بار منفی است.

نیروی بین دو بار q_1 و q_3 جاذبه است پس q_3 دارای بار مثبت است.

با توجه به شکل و با استفاده از قانون کولن می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 10 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 0.1 \text{ m} \\ r = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$F_{12} = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow 15 = \frac{9 \times 10^9 \times q_1 \times q_2}{(0.1)^2} \Rightarrow$$

$$15 \times 10^{-2} = 9 \times 10^9 \times q_1q_2 \Rightarrow 1/67 \times 10^{-11} = q_1q_2 \quad (1)$$

$$F_{13} = \frac{kq_1q_3}{r^2} \Rightarrow 5/4 = \frac{9 \times 10^9 \times q_1 \times q_3}{(0.1)^2} \Rightarrow$$

$$5/4 \times 10^{-2} = 9 \times 10^9 \times q_1q_3 \Rightarrow 0.6 \times 10^{-11} = q_1q_3 \quad (2)$$

$$F_{23} = \frac{kq_2q_3}{r^2} \Rightarrow 9 = \frac{9 \times 10^9 \times q_2 \times q_3}{(0.1)^2} \Rightarrow 9 \times 10^{-2} = 9 \times 10^9 \times q_2q_3 \Rightarrow 1 \times 10^{-11} = q_2q_3 \quad (3)$$

با تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) برهم می توان نوشت:

فصل ۱

$$\frac{q_1 q_T}{q_1 q_T} = \frac{1/67 \times 10^{-11}}{0.6 \times 10^{-11}} \Rightarrow \frac{q_T}{q_T} = 2/8 \Rightarrow q_T = 2/8 q_T \quad (۴)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۴) در رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$1 \times 10^{-11} = q_T \times 2/8 q_T \Rightarrow q_T^2 = 3/6 \times 10^{-12} \Rightarrow q_T = 1/9 \times 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow q_T = +1/9 \mu\text{C}$$

با جاگذاری مقدار q_T در رابطه‌ی (۴) می‌توان نوشت:

$$q_T = 2/8 q_T \Rightarrow q_T = 2/8 \times 1/9 \Rightarrow q_T = -5/27 \mu\text{C}$$

با جاگذاری مقدار q_T در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$1/67 \times 10^{-11} = q_1 q_T \Rightarrow 1/67 \times 10^{-11} = q_1 \times 5/27 \times 10^{-6} \Rightarrow q_1 = 3/16 \times 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow$$

$$q_1 = -3/16 \mu\text{C}$$

(۷) بار نقطه‌ای $-Q$ در $(0, -a)$ و بار نقطه‌ای $+Q$ در $(0, a)$ قرار دارند. الف) نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q را در $(x, 0)$ به دست آورید. ب) در چه نقطه‌ای مقدار این نیرو به بیشینه می‌رسد؟

حل:

الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow \sin \theta = \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

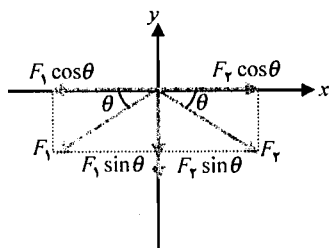
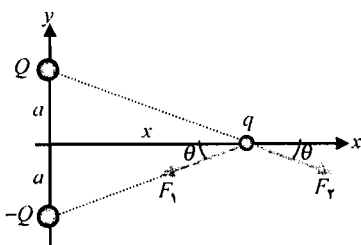
با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{kqQ}{r^2} \\ F_T = \frac{kqQ}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{kqQ}{x^2 + a^2} \\ F_T = \frac{kqQ}{x^2 + a^2} \end{cases} \Rightarrow F_1 = F_T = \frac{kqQ}{x^2 + a^2}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_x = -F_1 \cos \theta + F_T \cos \theta \\ F_y = -F_1 \sin \theta - F_T \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{kqQ}{(x^2 + a^2)} \times \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{kqQ}{(x^2 + a^2)} \times \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \\ F_y = -\frac{kqQ}{(x^2 + a^2)} \times \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{kqQ}{(x^2 + a^2)} \times \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = \frac{-2kqQa}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{2kqQa}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{j}$$



(ب) در نقطه‌ای نیرو بیشینه می‌شود که: $\frac{dF}{dx} = 0$

$$\frac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{2kqQa}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{6kqQax}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow 6kqQax = 0 \Rightarrow x = 0$$

۸) بار Q را طوری به دو قسمت q و $(Q - q)$ تقسیم کرده‌ایم که نیروی بین آن‌ها در فاصله‌ی معلوم، به بیشینه مقدار می‌رسد. q را به دست آورید. (راهنمایی: شرط این که تابعی بیشینه شود چیست؟ حل: با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F = \frac{kq(Q - q)}{r^2} \Rightarrow F = \frac{k(qQ - q^2)}{r^2}$$

برای این که نیرو بیشینه شود باید: $\frac{dF}{dq} = 0$

$$\frac{dF}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dq} \left[\frac{k(qQ - q^2)}{r^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{k(Q - 2q)}{r^2} = 0 \Rightarrow (Q - 2q) = 0 \Rightarrow Q = 2q \Rightarrow q = \frac{Q}{2}$$

پس اگر بار Q را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم نیروی بین دو قسمت بیشینه می‌شود.

۹) دو گلوله‌ی مسی ۱۰ گرمی به فاصله‌ی ۱۰ cm از هم قرار دارند. الف) برای این که گلوله‌ها با نیروی N یکدیگر را دفع کنند از هر یک از آن‌ها باید چند الکترون گرفت؟ ب) جواب قسمت الف چه کسری از کل الکترون‌های هر گلوله است؟ (راهنمایی: تعداد اتم‌های موجود در g $\frac{63}{5}$ مس برابر عدد آووگادرو و هر اتم مس دارای ۲۹ الکترون است.)
حل:

الف) M عدد جرمی مس و N تعداد اتم‌های موجود در g ۱۰ مس است.

$$\begin{cases} n = \frac{m}{M} \\ n = \frac{N}{N_A} \end{cases} \Rightarrow \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{N}{6.02 \times 10^{23}} = \frac{10}{63.5} \Rightarrow N = 9.5 \times 10^{22} \text{ atom}$$

n تعداد الکترون‌های موجود در هر گلوله برابر است با:

$$n = 29N \Rightarrow n = 29 \times 9.5 \times 10^{22} \Rightarrow n = 2.76 \times 10^{24} \text{ electron}$$

دو گلوله، مشابه هستند پس بار یکسانی دارند. با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 10 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 10 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 0.1 \text{ m}$$

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow 10 = \frac{9 \times 10^9 \times q \times q}{(0.1)^2} \Rightarrow q^2 = 11.1 \times 10^{-12} \Rightarrow q = 3.3 \times 10^{-6} \text{ C}$$

فصل ۱

q کولن بار باید از هر گلوله گرفته شود. می‌دانیم بار هر الکترون $C \ 1/6 \times 10^{-19}$ است پس:

$$\frac{3/3 \times 10^{-6} \ C}{1/6 \times 10^{-19} \ C} = \frac{n'}{1} \Rightarrow n' = 2/0.8 \times 10^{13} \ \text{electron}$$

(ب)

$$\frac{n'}{n} = \frac{2/0.8 \times 10^{13}}{2/76 \times 10^{13}} \Rightarrow \frac{n'}{n} = 7/57 \times 10^{-12}$$

مسائل

میدان الکتریکی

(۱) به بار نقطه‌ای $q_1 = 3/2 \text{ nC}$ ، نیروی $\vec{F} = 8 \times 10^{-6} \hat{i} \text{ N}$ وارد می‌شود. الف) شدت میدان الکتریکی خارجی را به دست آورید. ب) نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $q_2 = -6/4 \text{ nC}$ در همان نقطه چه قدر است؟

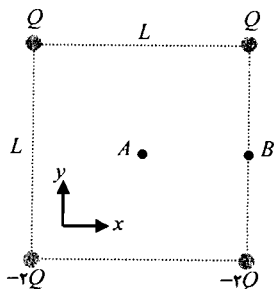
حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

الف)

$$\vec{F} = q \vec{E} \Rightarrow 8 \times 10^{-6} \hat{i} = 3/2 \times 10^{-9} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = 2500 \hat{i}$$

ب)

$$\vec{F} = q \vec{E} \Rightarrow \vec{F} = -6/4 \times 10^{-9} \times 2500 \hat{i} \Rightarrow \vec{F} = -1/6 \times 10^{-5} \hat{i}$$



(۲) مطابق شکل مقابل، چهار بار نقطه‌ای در چهار گوشه‌ی مربعی به ضلع L قرار دارند. شدت میدان الکتریکی را الف) در مرکز مربع، نقطه‌ی A ب) در نقطه‌ی B به دست آورید.

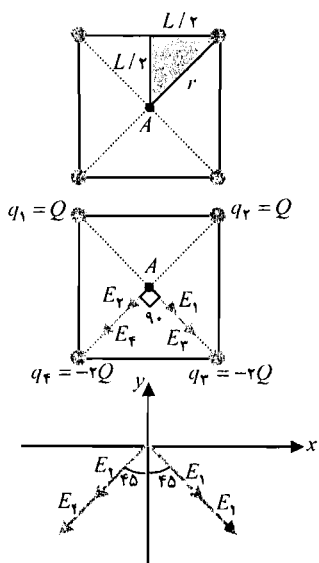
حل:

الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$r^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{2}$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

فصل ۲



$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_1 = \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_2 = \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2}$$

$$E_3 = \frac{kq_3}{r^2} \Rightarrow E_3 = \frac{k \times (\sqrt{2}Q)}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_3 = \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2}$$

$$E_4 = \frac{kq_4}{r^2} \Rightarrow E_4 = \frac{k \times (\sqrt{2}Q)}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_4 = \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2}$$

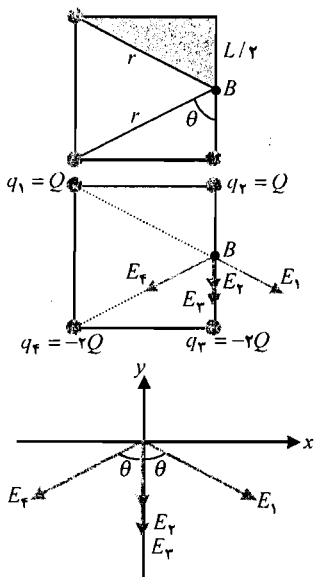
با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\begin{cases} E_x = E_1 \sin \phi + E_2 \sin \phi - E_3 \sin \phi - E_4 \sin \phi \\ E_y = -E_1 \cos \phi - E_2 \cos \phi - E_3 \cos \phi - E_4 \cos \phi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = \sin \phi \times \left[\frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} + \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} - \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} - \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} \right] \\ E_y = -\cos \phi \times \left[\frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} + \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} + \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} + \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\cos \phi \times \frac{4\sqrt{2}kQ}{L^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\cos \phi \times 1.2 \times 9 \times 10^{-9} \frac{Q}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\sqrt{2} \times 1.2 \times 10^{-9} \frac{Q}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -\sqrt{2} \times 1.2 \times 10^{-9} \frac{Q}{L^2} \hat{j}$$

(ب) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می توان نوشت:



$$r^2 = \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 + L^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{2} + L^2 \Rightarrow r^2 = \frac{5}{2}L^2$$

$$\tan \theta = \frac{L}{\frac{L}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = 63.4^\circ$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می توان نوشت:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ}{\frac{5}{2}L^2} \Rightarrow E_1 = \frac{\sqrt{2}kQ}{5L^2}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ}{\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow E_2 = \frac{\sqrt{2}kQ}{L^2}$$

$$E_3 = \frac{kq_3}{r^2} \Rightarrow E_3 = \frac{k \times (\sqrt{2}Q)}{\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow E_3 = \frac{2kQ}{L^2}$$

$$E_r = \frac{kq_r}{r^2} \Rightarrow E_r = \frac{k \times (rQ)}{\frac{\Delta}{\epsilon} L^2} \Rightarrow E_r = \frac{\lambda k Q}{\Delta L^2}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\begin{cases} E_x = E_1 \sin \theta - E_r \sin \theta \\ E_y = -E_1 \cos \theta - E_r - E_r - E_r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{\epsilon k Q}{\Delta L^2} \times \sin \epsilon r / \epsilon - \frac{\lambda k Q}{\Delta L^2} \times \sin \epsilon r / \epsilon \\ E_y = -\frac{\epsilon k Q}{\Delta L^2} \times \cos \epsilon r / \epsilon - \frac{\epsilon k Q}{L^2} - \frac{\lambda k Q}{L^2} - \frac{\lambda k Q}{\Delta L^2} \times \cos \epsilon r / \epsilon \end{cases} \Rightarrow$$

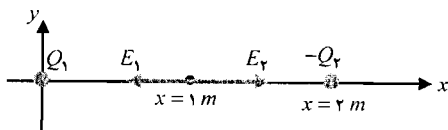
$$\begin{cases} E_x = \frac{\epsilon k Q}{\Delta L^2} \times \sin \epsilon r / \epsilon (1 - \epsilon) \\ E_y = -\frac{\epsilon k Q}{L^2} \left(\frac{1}{\Delta} \times \cos \epsilon r / \epsilon + 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{\Delta} \times \cos \epsilon r / \epsilon \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -0.72 \frac{kQ}{L^2} \\ E_y = -1.3/2 \frac{kQ}{L^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = -0.72 \times 9 \times 10^9 \frac{Q}{L^2} \\ E_y = -1.3/2 \times 9 \times 10^9 \frac{Q}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -6/48 \times 10^9 \frac{Q}{L^2} \\ E_y = -118/8 \times 10^9 \frac{Q}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = (-6/48 \hat{i} - 118/8 \hat{j}) \times 10^9 \frac{Q}{L^2}$$

۳) بار الکتریکی نقطه‌ای Q_1 در مبدأ و $-Q_2$ در $x=2$ m قرار دارند. در $x=1$ m، شدت میدان الکتریکی $\frac{10}{8} \hat{i} \frac{N}{C}$ و در $x=3$ m، شدت میدان الکتریکی $-\frac{10}{8} \hat{i} \frac{N}{C}$ است. مقادیر Q_1 و Q_2 را به دست آورید.

حل:

میدان الکتریکی در $x=1$ m: با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می توان نوشت:



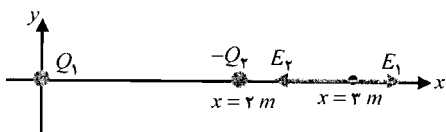
$$E_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ_1}{1^2} \Rightarrow E_1 = kQ_1$$

$$E_r = \frac{kQ_r}{r^2} \Rightarrow E_r = \frac{kQ_r}{1^2} \Rightarrow E_r = kQ_r$$

میدان برآیند در این نقطه برابر است با:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_r \Rightarrow 10/8 \hat{i} = kQ_1 \hat{i} + kQ_r \hat{i} \Rightarrow 10/8 = 9 \times 10^9 (Q_1 + Q_r) \Rightarrow Q_1 + Q_r = 1/2 \times 10^{-9} \quad (1)$$

میدان الکتریکی در $x=3$ m: با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می توان نوشت:



$$E_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ_1}{3^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ_1}{9}$$

$$E_r = \frac{kQ_r}{r^2} \Rightarrow E_r = \frac{kQ_r}{1^2} \Rightarrow E_r = kQ_r$$

فصل ۲

میدان برآیند در این نقطه برابر است با:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow -\cdot/\lambda \hat{i} = \frac{kQ_1}{r} \hat{i} - kQ_2 \hat{i} \Rightarrow -\cdot/\lambda = 9 \times 10^9 \left(\frac{Q_1}{r} - Q_2 \right) \Rightarrow$$

$$-\cdot/\lambda \times 10^{-9} = Q_1 - 9Q_2 \quad (2)$$

با حل همزمان روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = 1/2 \times 10^{-9} \\ Q_1 - 9Q_2 = -\cdot/\lambda \times 10^{-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9Q_1 + 9Q_2 = 10 \cdot/\lambda \times 10^{-9} \\ Q_1 - 9Q_2 = -\cdot/\lambda \times 10^{-9} \end{cases} \Rightarrow 10Q_1 = 10 \times 10^{-9} \Rightarrow$$

$$Q_1 = 1/0 \times 10^{-9} \text{ C} \Rightarrow Q_1 = 1/0 \text{ nC}$$

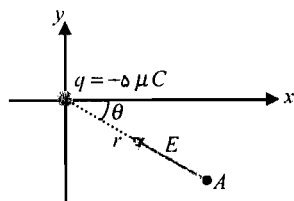
با جاگذاری مقدار Q_1 در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$Q_1 + Q_2 = 1/2 \times 10^{-9} \Rightarrow 1/0 \times 10^{-9} + Q_2 = 1/2 \times 10^{-9} \Rightarrow Q_2 = \cdot/2 \times 10^{-9} \text{ C} \Rightarrow Q_2 = \cdot/2 \text{ nC}$$

(۴) بار نقطه‌ای $5 \mu\text{C}$ در مبدا دستگاه مختصات، قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در نقاط: الف) $(2 \text{ m}, -1 \text{ m})$ ب) $(-2 \text{ m}, 3 \text{ m})$ به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:



$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = 2^2 + (-1)^2 \Rightarrow r^2 = 5$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan \theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = 26/5^\circ$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

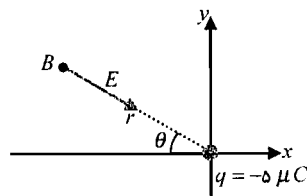
$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow E = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{5} \Rightarrow E = 9 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_x = -E \cos \theta \\ E_y = E \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -9 \times 10^3 \times \cos 26/5^\circ \\ E_y = 9 \times 10^3 \times \sin 26/5^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = -8 \cdot 54 \frac{\text{N}}{\text{C}} \\ E_y = 4 \cdot 16 \frac{\text{N}}{\text{C}} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -8 \cdot 54 \hat{i} + 4 \cdot 16 \hat{j}$$

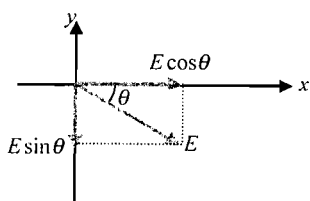
ب) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:



$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = (-2)^2 + 3^2 \Rightarrow r^2 = 13$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{-2} \Rightarrow \theta = 56/3^\circ$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow E = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{1^2} \Rightarrow E = 3/46 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\begin{cases} E_x = E \cos \theta \\ E_y = -E \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 3/46 \times 10^3 \times \cos 56^\circ / 3 \\ E_y = -3/46 \times 10^3 \times \sin 56^\circ / 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = 1920 \frac{N}{C} \\ E_y = -2878 \frac{N}{C} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = 1920 \hat{i} - 2878 \hat{j}$$

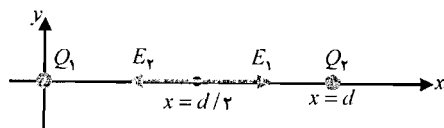
۵) بار نقطه‌ای Q_1 در $x = 0$ و بار نقطه‌ای Q_2 در $x = d$ قرار دارند. در هر یک از حالت‌های زیر، رابطه بین بارها را طوری به دست آورید تا شدت میدان الکتریکی برآیند در این نقاط برابر صفر شود: الف)

در نقطه‌ی $x = \frac{d}{2}$ ب) در نقطه‌ی $x = 2d$ ج) در نقطه‌ی $x = -\frac{d}{2}$

حل:

الف) برای بارهای همنام، محل میدان صفر روی خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچکتر است.

با توجه به شکل و با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می توان نوشت:



$$E_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow E_1 = \frac{4kQ_1}{d^2}$$

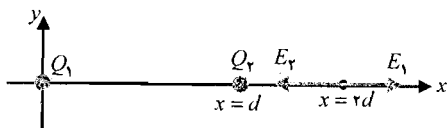
$$E_2 = \frac{kQ_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ_2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow E_2 = \frac{4kQ_2}{d^2}$$

میدان برآیند برابر صفر است پس:

$$E = E_1 - E_2 \Rightarrow 0 = E_1 - E_2 \Rightarrow \frac{4kQ_1}{d^2} - \frac{4kQ_2}{d^2} = 0 \Rightarrow Q_1 = Q_2$$

ب) برای بارهای غیرهمنام، محل میدان صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچکتر است.

با توجه به شکل و با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می توان نوشت:



$$E_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ_1}{(2d)^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ_1}{4d^2}$$

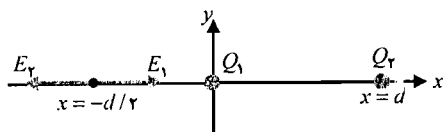
$$E_2 = \frac{kQ_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ_2}{(d)^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ_2}{d^2}$$

میدان برآیند برابر صفر است پس:

$$E = E_1 - E_2 \Rightarrow 0 = E_1 - E_2 \Rightarrow \frac{kQ_1}{4d^2} - \frac{kQ_2}{d^2} = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{4} = Q_2 \Rightarrow Q_1 = 4Q_2$$

فصل ۲

چون میدان در خارج فاصله‌ی بین دو بار صفر شده پس بارها غیرهمنام هستند پس: $Q_1 = -4Q_2$ (ج) برای بارهای غیرهمنام، محل میدان صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچکتر است. با توجه به شکل وبا استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E_1 = \frac{kQ_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow E_1 = \frac{4kQ_1}{d^2}$$

$$E_2 = \frac{kQ_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ_2}{\left(\frac{d}{2} + d\right)^2} \Rightarrow E_2 = \frac{4kQ_2}{9d^2}$$

میدان برآیند برابر صفر است پس:

$$E = E_1 - E_2 \Rightarrow 0 = E_1 - E_2 \Rightarrow \frac{4kQ_1}{d^2} - \frac{4kQ_2}{9d^2} = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{1}{9}Q_2$$

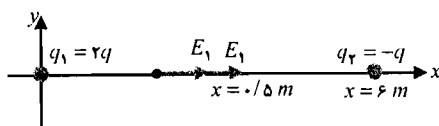
چون میدان در خارج فاصله‌ی بین دو بار صفر شده پس بارها غیرهمنام هستند پس: $Q_1 = -\frac{1}{9}Q_2$

۶) بار نقطه‌ای $2q$ در $x=0$ و بار نقطه‌ای $-q$ در $x=6$ m قرار دارند. الف) شدت میدان را به صورت تابعی از x در بازه‌ی m -0.5 تا 0.5 به دست آورید. ب) در چه نقطه یا نقاطی، $E=0$ می‌شود؟ (ج) میدان الکتریکی را بر حسب x رسم کنید.

حل:

الف)

در بازه‌ی $0 \leq x \leq 0.5$: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



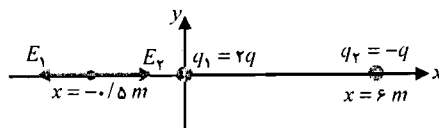
$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{k \times 2q}{x^2} \Rightarrow E_1 = \frac{2kq}{x^2}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{k \times q}{(6-x)^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kq}{(6-x)^2}$$

میدان برآیند در این بازه برابر است با:

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow E = \frac{2kq}{x^2} + \frac{kq}{(6-x)^2}$$

در بازه‌ی $-0.5 \leq x \leq 0$: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{k \times 2q}{x^2} \Rightarrow E_1 = \frac{2kq}{x^2}$$

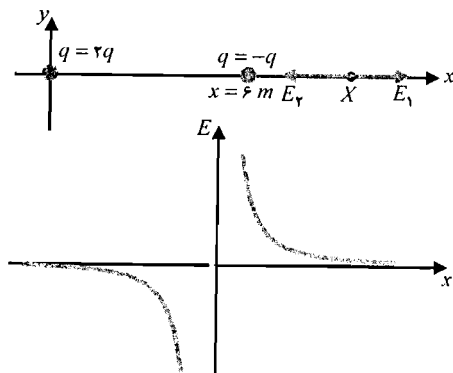
$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{k \times q}{(6-x)^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kq}{(6-x)^2}$$

میدان برآیند در این بازه برابر است با:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_r \Rightarrow E = -\frac{2kq}{x^2} + \frac{kq}{(\epsilon-x)^2}$$

پس برای بازه‌ی $-0.5 \leq x \leq 0.5$ می‌توان نوشت:

$$E = \begin{cases} -\frac{2kq}{x^2} + \frac{kq}{(\epsilon-x)^2} & -0.5 \leq x \leq 0 \\ \frac{2kq}{x^2} + \frac{kq}{(\epsilon-x)^2} & 0 \leq x \leq +0.5 \end{cases}$$

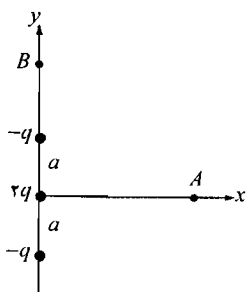


(ب) برای بارهای غیر همنام، محل میدان صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچک‌تر است.

$$E_1 - E_r = 0 \Rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} - \frac{kq_r}{r_r^2} = 0 \Rightarrow \frac{k \times 2q}{X^2} = \frac{kq}{(X-\epsilon)^2} \Rightarrow \frac{2}{X^2} = \frac{1}{(X-\epsilon)^2} \Rightarrow \frac{1/4}{X} = \frac{1}{X-\epsilon} \Rightarrow 1/4 X - 1/4 = X \Rightarrow X = 21 \text{ m}$$

(ج)

(۷) مجموعه‌ای از بارها را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. چنین آرایشی را چهار قطبی الکتریکی می‌نامند. شدت میدان الکتریکی را: (الف) در نقطه‌ی $A(x, 0)$ (ب) در نقطه‌ی $B(0, y)$ به دست آورید.



(ج) نشان دهید برای نقاط $r \gg a$ در هر دو حالت: $E \propto \frac{1}{r^4}$

است. r فاصله‌ی نقاط مورد نظر از مبدا است. (راهنمایی: از بسط

دو جمله‌ای $(1+z)^n = 1+nz$ برای مقادیر کوچک z استفاده کنید).

حل:

(الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

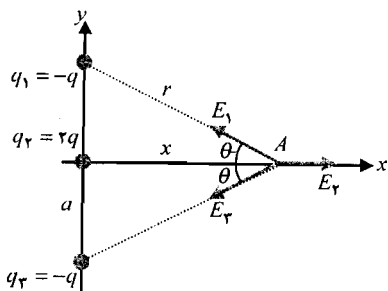
$$\sin \theta = \frac{a}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

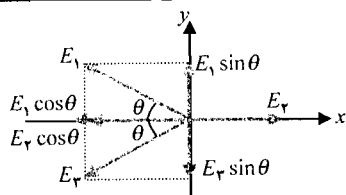
با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kq}{x^2 + a^2}$$

$$E_r = \frac{kq_r}{r^2} \Rightarrow E_r = \frac{k \times 2q}{x^2} \Rightarrow E_r = \frac{2kq}{x^2}$$



فصل ۲



$$E_r = \frac{kq_r}{r^r} \Rightarrow E_r = \frac{kq}{x^r + a^r}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

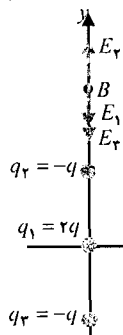
$$\begin{cases} E_x = E_r - E_1 \cos \theta - E_r \cos \theta \\ E_y = E_1 \sin \theta - E_r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{r k q}{x^r} - \frac{k q}{x^r + a^r} \times \frac{x}{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}} - \frac{k q}{x^r + a^r} \times \frac{x}{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}} \\ E_y = \frac{k q}{x^r + a^r} \times \frac{a}{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}} - \frac{k q}{x^r + a^r} \times \frac{a}{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{r k q}{x^r} - \frac{k q x}{(x^r + a^r)^{\frac{r}{r}}} - \frac{k q x}{(x^r + a^r)^{\frac{r}{r}}} \\ E_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{r k q}{x^r} - \frac{r k q x}{(x^r + a^r)^{\frac{r}{r}}} \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{r k q}{x^r} \left[1 - \left(1 + \frac{a^r}{x^r} \right)^{-\frac{r}{r}} \right] \\ E_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \frac{r k q}{x^r} \left[1 - \left(1 + \frac{a^r}{x^r} \right)^{-\frac{r}{r}} \right] \hat{i}$$

(ب) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می توان نوشت:



$$E_1 = \frac{kq_1}{r^r} \Rightarrow E_1 = \frac{kq}{(y-a)^r}$$

$$E_r = \frac{kq_r}{r^r} \Rightarrow E_r = \frac{r k q}{y^r}$$

$$E_r = \frac{kq_r}{r^r} \Rightarrow E_r = \frac{kq}{(y+a)^r}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_r + \vec{E}_r \Rightarrow \vec{E} = -\frac{kq}{(y-a)^r} \hat{j} + \frac{r k q}{y^r} \hat{j} - \frac{kq}{(y+a)^r} \hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = kq \left[-\frac{1}{(y-a)^r} + \frac{r}{y^r} - \frac{1}{(y+a)^r} \right] \hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = kq \left[\frac{-y^r(y+a)^r + r(y-a)^r(y+a)^r - y^r(y-a)^r}{y^r(y-a)^r(y+a)^r} \right] \hat{j} \Rightarrow \vec{E} = r k q a^r \frac{(a^r - r y^r)}{y^r(y^r - a^r)^r} \hat{j}$$

(ج) در قسمت الف اگر $x \gg a$ باشد می توان نوشت:

$$E = \frac{\tau kq}{x^{\tau}} \left[1 - \left(1 - \frac{\tau a^{\tau}}{\tau x^{\tau}} \right) \right] \Rightarrow E = \frac{\tau kq}{x^{\tau}} \left(1 - 1 + \frac{\tau a^{\tau}}{\tau x^{\tau}} \right) \Rightarrow E = \frac{\tau kqa^{\tau}}{x^{\tau}} \Rightarrow E \propto \frac{1}{x^{\tau}}$$

در قسمت ب اگر $a \gg y$ باشد می توان از a^{τ} در برابر y^{τ} صرف نظر کرد:

$$E = \tau kqa^{\tau} \left(\frac{-\tau y^{\tau}}{y^{\tau} \times y^{\tau}} \right) \Rightarrow E = \frac{-\tau kqa^{\tau}}{y^{\tau}} \Rightarrow E \propto \frac{1}{y^{\tau}}$$

حرکت بارها

۸) الکترونی را از حال سکون در میدان یکنواختی به شدت $\frac{N}{C}$ 10^5 شتاب دادیم. الف) چه مدتی طول

می کشد تا سرعت الکترون به $c/10$ برسد؟ سرعت نور $\frac{m}{s} c = 3 \times 10^8$ است. ب) در این مدت، الکترون

چه مسافتی می پیماید؟ ج) انرژی جنبشی نهایی آن چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از قانون دوم نیوتن و تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می توان نوشت:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = qE \end{cases} \Rightarrow ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \Rightarrow a = \frac{1/6 \times 10^{-19} \times 10^5}{9/11 \times 10^{-31}} \Rightarrow a = 1/7 \times 10^{16} \frac{m}{s^2}$$

با استفاده از رابطه ی سرعت - زمان می توان نوشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0/1 \times 3 \times 10^8 = 1/7 \times 10^{16} \times t + 0 \Rightarrow t = 1/71 \times 10^{-9} s \Rightarrow t = 1/71 ns$$

ب) با استفاده از رابطه ی مکان - زمان می توان نوشت:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \times 1/7 \times 10^{16} \times (1/71 \times 10^{-9})^2 + 0 + 0 \Rightarrow x = 0/256 \Rightarrow$$

$$x = 2/56 cm$$

ج) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می توان نوشت:

$$K_f = \frac{1}{2} mv_f^2 \Rightarrow K_f = \frac{1}{2} \times 9/11 \times 10^{-31} \times (0/1 \times 3 \times 10^8)^2 \Rightarrow K_f = 4/1 \times 10^{-16} J$$

۹) وقتی میدان الکتریکی در هوای معمولی به حدود $\frac{N}{C}$ 3×10^6 برسد مولکول های هوا سریعاً یونیزه

شده و تولید جرقه می شود. اگر چنین میدانی، برقرار باشد الف) مدت زمانی را به دست آورید که لازم

است تا الکترونی از حال سکون به انرژی جنبشی J 4×10^{-19} برسد و با ضربه ی خود یکی از

الکترون های مولکول را از آن جدا کند؟ ب) الکترون چه مسافتی را می پیماید؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می توان نوشت:

فصل ۲

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow 4 \times 10^{-19} = \frac{1}{2} \times 9/11 \times 10^{-31} \times v_f^2 \Rightarrow v_f^2 = 0/88 \times 10^{12} \Rightarrow v_f = 9/4 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن و نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می توان نوشت:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = qE \end{cases} \Rightarrow ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \Rightarrow a = \frac{1/6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^6}{9/11 \times 10^{-31}} \Rightarrow a = 5/3 \times 10^{17} \frac{m}{s^2}$$

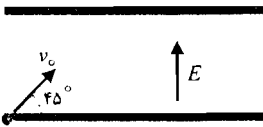
با استفاده از رابطه‌ی سرعت - زمان می توان نوشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 9/4 \times 10^5 = 5/3 \times 10^{17} \times t + 0 \Rightarrow t = 1/78 \times 10^{-12} s$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی مکان - زمان می توان نوشت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \times 5/3 \times 10^{17} \times (1/78 \times 10^{-12})^2 + 0 + 0 \Rightarrow x = 8/33 \times 10^{-7} m$$

(۱۰) مطابق شکل زیر، الکترونی را با سرعت v_0 تحت زاویه‌ی 45° نسبت به افق از سطح پایینی صفحات موازی، شلیک می‌کنیم. فاصله بین صفحات 2 cm و طول آن‌ها را بسیار زیاد فرض کنید. بیشینه مقدار v_0 چه قدر باشد تا الکترون به صفحه‌ی بالایی برخورد نکند؟ میدان الکتریکی



$$E = 10^3 \frac{N}{C} \text{ است.}$$

حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی

خارجی می توان نوشت:

$$F = qE \Rightarrow F = 1/6 \times 10^{-19} \times 10^3 \Rightarrow F = 1/6 \times 10^{-16} N$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

$$F = ma \Rightarrow 1/6 \times 10^{-16} = 9/11 \times 10^{-31} \times a \Rightarrow a = -1/7 \times 10^{14} \frac{m}{s^2}$$

علامت منفی، نشان دهنده‌ی حرکت کند شونده است.

در راستای قائم با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان می توان نوشت:

$$v_{y}^2 - v_{0y}^2 = 2a\Delta y \Rightarrow 0 - v_{0y}^2 = 2 \times (-1/7 \times 10^{14}) \times (2 \times 10^{-2}) \Rightarrow -v_{0y}^2 = -6/8 \times 10^{12} \Rightarrow$$

$$v_{0y}^2 = 6/8 \times 10^{12} \Rightarrow v_{0y} = 2/61 \times 10^6 \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta \Rightarrow 2/61 \times 10^6 = v_0 \times \sin 45 \Rightarrow v_0 = 3/70 \times 10^6 \frac{m}{s}$$

توزیع بار پیوسته

(۱) بار نقطه‌ای $q = 2 \mu C$ در فاصله‌ی $d = 20 \text{ cm}$ از صفحه‌ی نامتناهی باردار با چگالی سطحی

یکنواخت $\sigma = 20 \frac{\mu C}{m^2}$ قرار دارد. الف) نیروی وارد بر بار نقطه‌ای چه قدر است؟ ب) در چه نقطه (یا

نقاطی) شدت میدان برآیند برابر صفر می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از صفحه‌ی باردار می‌توان نوشت:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{20 \times 10^{-6}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \Rightarrow E = 1.13 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

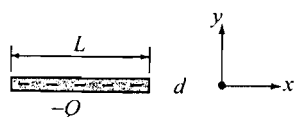
$$F = qE \Rightarrow F = 2 \times 10^{-6} \times 1.13 \times 10^6 \Rightarrow F = 2.26 \text{ N}$$

ب) در نقطه‌ای که میدان صفر است میدان ناشی از بار نقطه‌ای و میدان ناشی از صفحه‌ی باردار، یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$E = E_p - E_C \Rightarrow E_p - E_C = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{kq}{r^2} = 0 \Rightarrow 1.13 \times 10^6 - \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6}}{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$1.13 \times 10^6 \times r^2 = 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \Rightarrow r^2 = 1.58 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 1.26 \times 10^{-1} \text{ m} \Rightarrow r = 12.6 \text{ cm}$$

میدان ناشی از صفحه‌ی باردار نامتناهی، میدانی یکنواخت است و به فاصله از صفحه بستگی ندارد.

۱۲) مطابق شکل زیر، دو میله به طول L را به طور یکنواخت با بارهای مخالف، باردار کرده‌ایم وآن‌ها را به فاصله‌ی d از مبدأ در امتداد محورهای x و y قرار داده‌ایم. شدت میدان در مبدأ چه قدراست؟ فرض کنید: $Q = 0.2 \mu C$ ، $L = 5 \text{ cm}$ و $d = 1 \text{ cm}$ است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از میله باردار در امتداد محور داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ d = 1 \text{ cm} \\ L = 5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \times 10^{-2} \text{ m} \\ L = 5 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

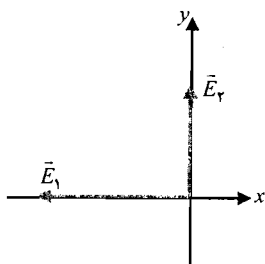
$$E_1 = \frac{kQ_1}{a(a+L)} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ}{d(d+L)} \Rightarrow$$

$$E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 0.2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-2} \times (1 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-2})} \Rightarrow E_1 = 3 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

$$E_2 = \frac{kQ_2}{a(a+L)} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ}{d(d+L)} \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 0.2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-2} \times (1 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-2})} \Rightarrow E_2 = 3 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

میدان برآیند:



$$\begin{cases} E_x = -E_1 \\ E_y = E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -3 \times 10^6 \frac{N}{C} \\ E_y = 3 \times 10^6 \frac{N}{C} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -3 \times 10^6 \hat{i} + 3 \times 10^6 \hat{j}$$

فصل ۲

دو قطبی

۱۳) گشتاور دو قطبی مولکول آب $Cm = 6/2 \times 10^{-30}$ است. نیروی وارد بر یونی به بار $+e$ در فاصله 0.5 nm از مولکول آب را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) در راستای p ب) در راستای عمود بر p (از تقریب میدان دور استفاده کنید).
حل:

الف) میدان ناشی از دو قطبی الکتریکی در فاصله r از مرکز دوقطبی در امتداد محور: $E = \frac{2kpr}{(r^2 - a^2)^2}$ است. در نقاط دور از دوقطبی $r \gg a$ است پس می توان از a^2 در مقابل r^2 صرف نظر کرد.

$$E = \frac{2kpr}{(r^2)^2} \Rightarrow E = \frac{2kp}{r^3}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \\ r = 0.5 \text{ nm} \end{cases} \Rightarrow r = 0.5 \times 10^{-9} \Rightarrow r = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$E = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 6/2 \times 10^{-30}}{(5 \times 10^{-10})^2} \Rightarrow E = 9 \times 10^8 \frac{N}{C}$$

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می توان نوشت:

$$F = qE \Rightarrow F = 1/6 \times 10^{-19} \times 9 \times 10^8 \Rightarrow F = 1/44 \times 10^{-11} \text{ N}$$

ب) میدان ناشی از دوقطبی الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز دوقطبی در راستای عمود بر آن، برابر

$$E = \frac{kp}{r^3} \text{ است با: } (r^2 + a^2)^2$$

در نقاط دور از دوقطبی $r \gg a$ است پس می توان از a^2 در مقابل r^2 صرف نظر کرد.

$$E = \frac{kp}{r^3} \Rightarrow E = \frac{kp}{r^3} \Rightarrow E = \frac{9 \times 10^9 \times 6/2 \times 10^{-30}}{(5 \times 10^{-10})^2} \Rightarrow E = 4/5 \times 10^8 \frac{N}{C}$$

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می توان نوشت:

$$F = qE \Rightarrow F = 1/6 \times 10^{-19} \times 4/5 \times 10^8 \Rightarrow F = 7/2 \times 10^{-11} \text{ N}$$

مسائل تکمیلی

۱۴) دو قطبی با گشتاور دو قطبی p همجهت با محور x به صورت $\vec{p} = p \hat{i}$ است. دو قطبی را در

میدان غیر یکنواخت $\vec{E} = \frac{C}{x} \hat{i}$ قرار می دهیم نیروی وارد بر دو قطبی را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل الکتریکی می توان نوشت:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \Rightarrow U = -p \hat{i} \cdot \frac{C}{x} \hat{i} \Rightarrow U = -\frac{Cp}{x}$$

با استفاده از تعریف نیرو می‌توان نوشت:

$$F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow F = -\frac{d}{dx} \left(-\frac{Cp}{x} \right) \Rightarrow F = \frac{Cp}{x^2} \Rightarrow \vec{F} = \frac{Cp}{x^2} \hat{i}$$

۱۵) نشان دهید شدت میدان در نقطه‌ای به فاصله‌ی y روی عمود منصف میله‌ی باردار یکنواختی به

طول L (شکل زیر) از رابطه‌ی: $E = \frac{\tau k Q}{y(L^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ به دست می‌آید. الف) اگر $L \gg y$ باشد این

عبارت به چه صورتی درمی‌آید؟ ب) اگر $L \ll y$ باشد این عبارت به چه صورتی درمی‌آید؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از توزیع بار خطی داریم:

$$E = \int dE \Rightarrow E = \int \frac{k dq}{r^2} \Rightarrow E = \int \frac{k \lambda dx}{r^2}$$

با توجه به شکل $E_x = 0$ است زیرا هر عنصر بار واقع در طرف چپ دارای عنصر متناظری در طرف راست می‌باشد. پس E فقط در جهت y می‌باشد و داریم:

$$E = \int dE_y \Rightarrow E = \int dE \cos \theta \Rightarrow E = \int \frac{k \lambda dx}{r^2} \cdot \cos \theta \Rightarrow$$

$$E = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} \frac{k \lambda dx}{x^2 + y^2} \times \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$E = \tau \int_{x=0}^{x=\frac{L}{2}} \frac{k \lambda y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx \Rightarrow E = \tau k \lambda y \int_{x=0}^{x=\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

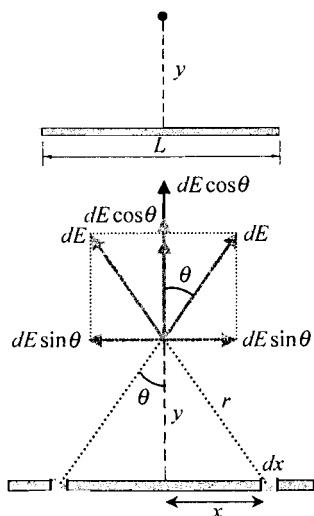
برای حل این انتگرال از تعویض متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = y \tan \theta \Rightarrow dx = y(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$$E = \tau k \lambda y \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{y(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{[y^2 \tan^2 \theta + y^2]^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E = \tau k \lambda y^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{[y^2 (1 + \tan^2 \theta)]^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$E = \tau k \lambda y^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{y^{\frac{3}{2}} (1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E = \frac{\tau k \lambda}{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

می‌دانیم که: $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ است پس:



فصل ۲

$$E = \frac{\tau k \lambda}{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow E = \frac{\tau k \lambda}{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \Rightarrow E = \frac{\tau k \lambda}{y} \sin \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\tau k \lambda}{y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

با توجه به شکل بالا، θ_1 کوچکترین مقدار زاویه θ برابر صفر است و θ_2 بزرگترین مقدار زاویه θ در حالتی است که المان طول را در انتهای پایایی میله انتخاب می‌کنیم پس:

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \sin 0 \\ \sin \theta_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta_1 = 0 \\ \sin \theta_2 = \frac{\frac{L}{\tau}}{\sqrt{\left(\frac{L}{\tau}\right)^2 + y^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta_1 = 0 \\ \sin \theta_2 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + \tau^2 y^2}} \end{cases}$$

با جاگذاری در رابطه‌ی میدان می‌توان نوشت:

$$E = \frac{\tau k \lambda}{y} \left(\frac{L}{(L^2 + \tau^2 y^2)^{\frac{1}{2}}} - 0 \right) \Rightarrow E = \frac{\tau k \lambda L}{y (L^2 + \tau^2 y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E = \frac{\tau k Q}{y (L^2 + \tau^2 y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$Q = \lambda L$ ، کل بار توزیع شده در میله است پس:

الف) اگر $L \gg y$ باشد می‌توان از L^2 در مقابل $\tau^2 y^2$ صرف‌نظر کرد پس:

$$E = \frac{\tau k Q}{y (\tau^2 y^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow E = \frac{kQ}{y^2}$$

ب) اگر $L \ll y$ باشد می‌توان از $\tau^2 y^2$ در مقابل L^2 صرف‌نظر کرد پس:

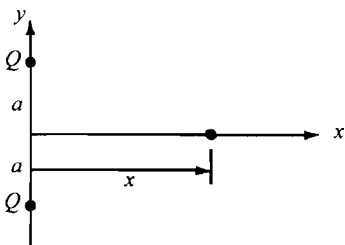
$$E = \frac{\tau k Q}{y (L^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow E = \frac{\tau k Q}{y L}$$

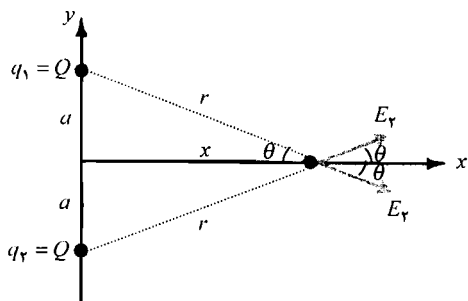
۱۶) مطابق شکل زیر، دو بار مساوی روی محور y ها قرار دارند. الف) شدت میدان را در نقطه‌ی

$(x, 0)$ به دست آورید. ب) در $x \gg a$ ، تابع $E(x)$ به چه صورتی درمی‌آید؟ ج) بیشینه مقدار این تابع در چه نقطه‌ی است؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin \theta = \frac{a}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$





$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

الف) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ}{(x^2 + a^2)}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r'^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ}{(x^2 + a^2)}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_x = E_1 \cos \theta + E_2 \cos \theta \\ E_y = E_1 \sin \theta - E_2 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \times \left[\frac{kQ}{(x^2 + a^2)} + \frac{kQ}{(x^2 + a^2)} \right] \\ E_y = \frac{a}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \times \left[\frac{kQ}{(x^2 + a^2)} - \frac{kQ}{(x^2 + a^2)} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{2kQx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2kQx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

ب) اگر $a \gg x$ باشد می‌توان از a^2 در مقابل x^2 صرف نظر کرد پس:

$$E = \frac{2kQx}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E = \frac{2kQ}{x^2}$$

ج) در نقطه‌ای که: $\frac{dE}{dx} = 0$ باشد میدان بیشینه می‌شود:

$$\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{2kQx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \Rightarrow 2kQ \left[\frac{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \times 2x \times x}{(x^2 + a^2)^3} \right] = 0 \Rightarrow$$

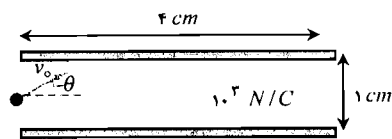
$$(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow (x^2 + a^2) - 3x^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

۱۷) مطابق شکل زیر، الکترونی با سرعت اولیه‌ی $\frac{m}{s} \times 10^6$ را به فاصله‌ی یکسان از دو

صفحه‌ی افقی با طول 4 cm شلیک کرده‌ایم. به ازای چه زاویه‌ی، الکترون از وسط دو صفحه خارج

خواهد شد؟

فصل ۲



حل: با استفاده از قانون دوم نیوتن و نیروی وارد بر

بار در میدان الکتریکی خارجی می توان نوشت:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = qE \end{cases} \Rightarrow ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \Rightarrow$$

$$a = \frac{1/6 \times 10^{-19} \times 1.0^2}{9/11 \times 10^{-31}} \Rightarrow a = 1/7 \times 10^{14} \frac{m}{s^2}$$

چون نقطه‌ی فرود هم سطح با نقطه‌ی پرتاب است می توان از رابطه‌ی برد پرتابه استفاده کرد.

$$\begin{cases} 1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m} \\ R = 4\text{ cm} \end{cases} \Rightarrow R = 4 \times 10^{-2}\text{ m}$$

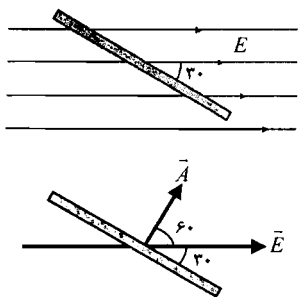
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{a} \Rightarrow 4 \times 10^{-2} = \frac{(3 \times 10^6)^2 \times \sin 2\theta}{1/7 \times 10^{14}} \Rightarrow \sin 2\theta = 0.76 \Rightarrow 2\theta = 49/5 \Rightarrow \theta = 24/8^\circ$$

مسائل

شار الکتریکی

۱) مطابق شکل زیر، قرصی به شعاع 12 cm را در نظر بگیرید. اگر صفحه‌ی قرص با میدان الکتریکی

یکنواخت $\vec{E} = 450 \hat{i} \frac{\text{N}}{\text{C}}$ زاویه‌ی 30° بسازد شار عبوری از آن چه قدر است؟



حل: سطح قرص به شکل دایره است پس مساحت آن برابر است با:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 12 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 1/2 \times 10^{-1} \text{ m} \\ r = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times (1/2 \times 10^{-1})^2 \Rightarrow A = 4/5 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

با استفاده از تعریف شار الکتریکی می‌توان نوشت:

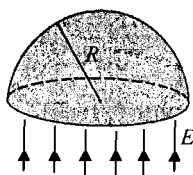
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \Rightarrow \Phi_E = EA \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Phi_E = 450 \times 4/5 \times 10^{-2} \times \cos 60^\circ \Rightarrow \Phi_E = 10/2 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$$

۲) مطابق شکل زیر، نیم‌کره‌ای به شعاع R را طوری در میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} قرار می‌دهیم که

محور مرکزی آن، موازی میدان الکتریکی باشد. شار

عبوری از نیم‌کره چه قدر است؟



حل: شار عبوری از سطح برجسته‌ی نیم‌کره برابر صفر است

زیرا هر المان روی سطح به طور متقارن در طرف دیگر هم

وجود دارد و اثر هم را خنثی می‌کنند. پس شار خالص عبوری

از نیم‌کره فقط از قاعده‌ی آن می‌گذرد یعنی:

فصل ۳

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \Rightarrow \Phi_E = EA \cos \theta \Rightarrow \Phi_E = E \times \pi R^2 \times \cos 0 \Rightarrow \Phi_E = \pi R^2 E$$

قانون گاوس و اجسام رسانا

۳) بار الکتریکی $60 \mu C$ در مرکز مکعبی به ضلع 10 cm قرار دارد. الف) کل شار عبوری از مکعب چه قدر است؟ ب) شار عبوری از هر وجه مکعب چه قدر است؟ اگر بار در مرکز مکعب قرار نداشت آیا پاسخ قسمت‌های الف و ب، تغییر می‌کرد؟

حل:

الف) با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_E = \frac{60 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} \Rightarrow \Phi_E = 6.78 \times 10^6 \frac{N m^2}{C}$$

ب) چون مکعب ۶ وجه دارد پس شار عبوری از هر وجه $\frac{1}{6}$ کل شار عبوری از مکعب است.

$$\Phi'_E = \frac{1}{6} \Phi_E \Rightarrow \Phi'_E = \frac{1}{6} \times 6.78 \times 10^6 \Rightarrow \Phi'_E = 1.13 \times 10^6 \frac{N m^2}{C}$$

ج) در قسمت الف چون سطح، بسته است پس شار عبوری، مستقل از مکان قرار گرفتن بار در داخل سطح است ولی در قسمت ب، شار عبوری از هر سطح به فاصله‌ی عمودی بار از هر وجه وابسته است.

۴) جسم رسانای کروی به شعاع 8 cm و چگالی بار سطحی یکنواخت $0.1 \frac{nC}{m^2}$ را در نظر بگیرید.میدان الکتریکی را: الف) در سطح کره ب) در فاصله‌ی 10 cm از مرکز به دست آورید.حل: Q بار روی سطح کره برابر است با:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ R = 8 \text{ cm} \\ r = 10 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 8 \times 10^{-2} \text{ m} \\ r = 10 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C} \\ \sigma = 0.1 \frac{nC}{m^2} \end{cases} \Rightarrow \sigma = 0.1 \times 10^{-9} \Rightarrow \sigma = 1 \times 10^{-10} \frac{C}{m^2}$$

$$Q = \sigma A \Rightarrow Q = \sigma \times 4\pi R^2 \Rightarrow Q = 1 \times 10^{-10} \times 4 \times 3.14 \times (8 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow Q = 8.04 \times 10^{-12} \text{ C}$$

اگر سطح گاوس را در سطح کره در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، بار سطحی کره خواهد بود.

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \Rightarrow E = \frac{8.04 \times 10^{-12}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (8 \times 10^{-2})^2}$$

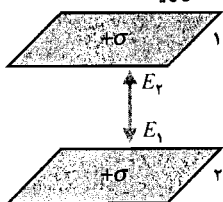
$$E = 11/3 \frac{N}{C}$$

ب) اگر سطح گاوس را در $r > R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، بار سطحی کره خواهد بود. با استفاده از قانون گاوس می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{8/04 \times 10^{-12}}{4 \times \pi \times 14 \times 8/85 \times 10^{-12} \times (10 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow E = 7/23 \frac{N}{C}$$

۵) دو صفحه‌ی باردار نامتناهی و موازی با چگالی سطحی بار یکسان σ را در نظر بگیرید. میدان را: الف) در ناحیه‌ی بین دو صفحه ب) در نواحی خارج دو صفحه به دست آورید.



حل: میدان ناشی از صفحات باردار نامتناهی به صورت: $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ است.

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \\ E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

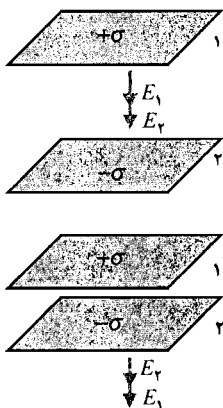
الف) با توجه به شکل، میدان‌ها در خلاف جهت یکدیگر هستند پس:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_2 - E_1 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

ب) با توجه به شکل، میدان‌ها هم جهت هستند پس:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_1 + E_2 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

۶) دو صفحه‌ی رسانای نامتناهی به موازات هم قرار دارند. اندازه‌ی چگالی سطحی بار این صفحات با هم مساوی و علامتشان مخالف هم $\pm\sigma$ است. میدان الکتریکی برآیند را: الف) در فاصله‌ی بین صفحات ب) در نواحی خارج صفحات به دست آورید.



حل: میدان ناشی از صفحات باردار نامتناهی به صورت: $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ است.

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \\ E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

الف) با توجه به شکل، میدان‌ها هم جهت هستند پس:

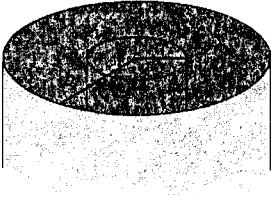
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_1 + E_2 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ب) با توجه به شکل، میدان‌ها در خلاف جهت هستند پس:

فصل ۳

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_r \Rightarrow E = E_1 - E_r \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

۷) مطابق شکل زیر، کابل هم محور راست و بلندی را طوری در نظر بگیرید که سیم داخلی آن به شعاع a دارای چگالی سطحی بار σ_1 و پوسته‌ی خارجی آن به شعاع b دارای چگالی سطحی بار σ_r باشد. چه رابطه‌ی بین σ_1 و σ_r برقرار باشد تا شدت میدان الکتریکی برآیند در خارج کابل ($r > b$) برابر صفر شود؟



حل: اگر سطح گاوس را در: $r > b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، مجموع بارهای روی سطح دو استوانه است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r l = \frac{Q_1 + Q_r}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

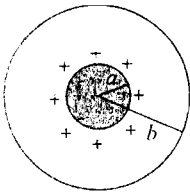
$$E \times 2\pi \epsilon_0 r l = \sigma_1 A_1 + \sigma_r A_r \Rightarrow$$

$$E \times 2\pi \epsilon_0 r l = \sigma_1 2\pi a l + \sigma_r 2\pi b l \Rightarrow E \times \epsilon_0 r = \sigma_1 a + \sigma_r b$$

در محل $E = 0$ می‌توان نوشت:

$$E = 0 \Rightarrow \sigma_1 a + \sigma_r b = 0 \Rightarrow \sigma_r b = -\sigma_1 a \Rightarrow \sigma_r = -\frac{a}{b} \sigma_1$$

۸) مطابق شکل زیر، گلوله‌ی فلزی باردار مثبت به شعاع a در مرکز پوسته‌ای فلزی به شعاع b قرار دارد. این کره‌ها دارای بارهای مساوی با علامت مخالف $\pm Q$ هستند. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله‌ی r (از مرکز): الف) در ناحیه‌ی $a < r < b$ (ب) در ناحیه‌ی $r > b$ به دست آورید. حل:



الف) اگر سطح گاوس را در: $a < r < b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح برابر بار سطحی کره به شعاع a می‌شود. با استفاده از قانون گاوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_a}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$$

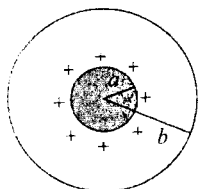
ب) اگر سطح گاوس را در: $r > b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح برابر مجموع بارهای سطحی دو کره، خواهد بود. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_a + Q_b}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q - Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = 0$$

۹) مطابق شکل زیر، گلوله‌ی فلزی باردار مثبتی به شعاع a در مرکز پوسته‌ای فلزی به شعاع b قرار دارد. رابطه‌ی بین چگالی‌های سطحی چگونه باشد تا در ناحیه‌ی $r > R$ ، میدان برابر صفر شود؟

حل: اگر سطح گاوس را در: $r > b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، مجموع بارهای روی سطح کره و

پوسته خواهد بود. با استفاده از قانون گاوس می توان نوشت:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_a + Q_b}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E \times 4\pi \epsilon_0 r^2 = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b \Rightarrow$$

$$E \times 4\pi \epsilon_0 r^2 = \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 \Rightarrow E \times \epsilon_0 r^2 = \sigma_a a^2 + \sigma_b b^2$$

برای مکان $E = 0$ می توان نوشت:

$$E = 0 \Rightarrow \sigma_a a^2 + \sigma_b b^2 = 0 \Rightarrow \sigma_a a^2 = -\sigma_b b^2 \Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_b} = -\frac{b^2}{a^2}$$

مسائل تکمیلی

۱۰) کره‌ی نارسانا به شعاع R را با چگالی بار یکنواخت ρ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی r از مرکز: الف) در حالت $r < R$ ب) در حالت $r > R$ به دست آورید. به ازای $r = R$ آیا دو جواب با هم سازگار هستند؟

حل:

الف) اگر سطح گاوس را در: $r < b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل ضرب حجم انتخابی در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گاوس می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

ب) اگر سطح گاوس را در: $r > b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار حجمی درون کره است. با استفاده از قانون گاوس می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف برای $r = R$ می توان نوشت:

$$r = R \Rightarrow E = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت ب برای $r = R$ می توان نوشت:

$$r = R \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R^2} \Rightarrow E = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$

پس نتایج هر دو قسمت روی سطح کره یکسان هستند.

۱۱) پوسته‌ی کره‌ی رسانایی با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 با چگالی‌های بار σ در سطح

فصل ۳

داخلی و $-\sigma$ در سطح خارجی در نظر بگیرید. الف) درباره‌ی درون کاواک چه می‌توان گفت؟ ب) بار خالص روی پوسته چه قدر است؟ ج) میدان الکتریکی را در خارج پوسته به دست آورید. حل:

الف) چون پوسته رسانا است پس در مرکز پوسته، بار با چگالی سطحی $-\sigma$ قرار دارد که بار با چگالی سطحی $+\sigma$ را روی سطح داخلی القا می‌کند و بار با چگالی سطحی $+\sigma$ روی سطح داخلی پوسته، باعث القای بار با چگالی سطحی $-\sigma$ روی سطح خارجی می‌شود.

Q بار درون کاواک برابر است با:

$$Q = \sigma_1 A_1 \Rightarrow Q = (-\sigma) \times 4\pi R_1^2 \Rightarrow Q = -4\pi \sigma R_1^2$$

ب) Q_{net} بار خالص روی پوسته برابر است با:

$$Q_{net} = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \Rightarrow Q_{net} = \sigma \times 4\pi R_1^2 + (-\sigma) \times 4\pi R_2^2 \Rightarrow$$

$$Q_{net} = -4\pi \sigma (R_2^2 - R_1^2)$$

ج) اگر سطح گاوس را در: $r > R_2$ در نظر بگیریم:

$$Q_{net} = -\sigma A_1 + \sigma A_1 - \sigma A \Rightarrow Q_{net} = -\sigma A$$

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{net}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \times (-\sigma) \times 4\pi R_2^2 \Rightarrow E = -\frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0 r^2}$$

۱۲) استوانه‌ی بسیار بلندی به شعاع R و توزیع بار یکنواخت با چگالی ρ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی شعاعی r از مرکز: الف) در حالت $r < R$ ب) در حالت $r > R$ به دست آورید. در $r = R$ ، نتایج با هم سازگار هستند؟ حل:

الف) اگر سطح گاوس را در: $r < R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل ضرب حجم انتخابی در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \times \pi r^2 l \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

ب) اگر سطح گاوس را در: $r > R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار حجمی درون استوانه است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \times \pi R^2 l \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف برای $r = R$ می‌توان نوشت:

$$r = R \Rightarrow E = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت ب برای $r = R$ می‌توان نوشت:

$$r = R \Rightarrow E = \frac{\rho R^r}{\epsilon_0 R} \Rightarrow E = \frac{\rho R}{\epsilon_0}$$

پس نتایج هر دو قسمت روی سطح استوانه یکسان هستند.

۱۳) اتم هیدروژن را به صورت مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای مثبت e در مرکز و کره‌ی باردار یکنواختی به شعاع R و بار کل $-e$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله‌ی شعاعی r از هسته به دست آورید.

حل: برای بار مثبت در مرکز کره، با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$E_1 = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{ke}{r^2}$$

برای توزیع بار منفی، با استفاده از تعریف چگالی حجمی بار می‌توان نوشت:

$$q = \rho V \Rightarrow -e = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{-3e}{4\pi R^3} \quad (1)$$

اگر سطح گاوس را در: $r < b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل ضرب حجم انتخابی در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \times \rho \Rightarrow E_r = \frac{\rho r}{\epsilon_0} \quad (2)$$

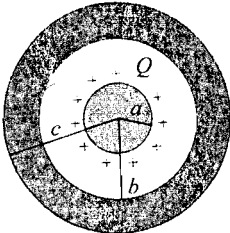
با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$E_r = \frac{-3e}{4\pi R^3} \times \frac{r}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{-er}{\pi \epsilon_0 R^3} \Rightarrow E_r = \frac{-ker}{R^3}$$

میدان برآیند برابر است با:

$$E = E_1 + E_r \Rightarrow E = \frac{ke}{r^2} + \left(\frac{-ker}{R^3} \right) \Rightarrow E = ke \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right)$$

۱۴) مطابق شکل زیر، کره‌ای فلزی به شعاع a و بار $+Q$ را در مرکز پوسته‌ی فلزی ضخیم و بدون بار با شعاع داخلی b و شعاع خارجی c در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در نواحی زیر به دست آورید: الف) در ناحیه‌ی $a < r < b$ ب) در ناحیه‌ی $r > c$



حل:

الف) اگر سطح گاوس را در: $a < r < b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار سطحی کره به شعاع a است.

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

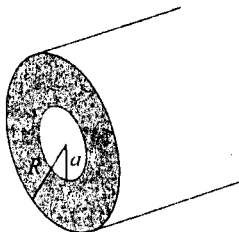
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$$

فصل ۳

ب) اگر سطح گaus را در: $r > c$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار سطحی کره به شعاع a است. با استفاده از قانون گaus می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$$

۱۵) مطابق شکل زیر، استوانه‌ای بسیار بلندی به شعاع R با سوراخی به شعاع a در امتداد محور مرکزی در نظر بگیرید. این استوانه به طور یکنواخت با چگالی ρ باردار شده است. میدان الکتریکی را در نواحی زیر به دست آورید: الف) در ناحیه‌ی $a < r < R$ ب) در ناحیه‌ی $r > R$:
حل:



الف) اگر سطح گaus را در: $a < r < R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل ضرب حجم انتخابی دارای بار در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گaus می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \times \pi (r^2 - a^2) l \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho (r^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r} \Rightarrow E = \frac{\rho (r - \frac{a^2}{r})}{2\epsilon_0}$$

ب) اگر سطح گaus را در: $r > R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل ضرب حجم انتخابی دارای بار در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گaus می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \times \pi (R^2 - a^2) l \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho (R^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r} \Rightarrow E = \frac{\rho \left(\frac{R^2}{r} - \frac{a^2}{r} \right)}{2\epsilon_0}$$

در این مساله توجه کنید که حجم $\pi a^2 l$ دارای بار نیست و باید از حجم‌های انتخابی کم شود.

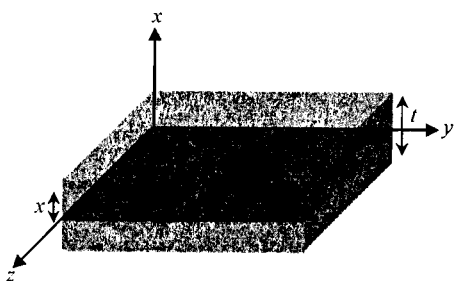
۱۶) تیغه‌ای نارسانا و نامحدود به ضخامت t و چگالی بار یکنواخت ρ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله (از صفحه‌ی تقارن مرکزی آن) به دست آورید.

حل: چگالی حجمی بار به صورت غیریکنواخت در راستای x توزیع شده است. با استفاده از تعریف چگالی حجمی بار می توان نوشت:

$$Q = \int \rho dV \Rightarrow Q = \int \rho A dx \Rightarrow Q = \rho Ax$$

با استفاده از قانون گaus می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{\rho Ax}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$



مسائل

پتانسیل

۱) رعد و برق می‌تواند بار الکتریکی C ۳۰ را از اختلاف پتانسیل V 10^8 عبور دهد. الف) انرژی این فرآیند چه قدر است؟ نتیجه را بر حسب الکترون ولت بیان کنید. ب) با استفاده از این انرژی، یک لامپ W ۶۰ را چه مدت می‌توان روشن نگه داشت؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow U - U_0 = q(V - V_0) \Rightarrow U - 0 = 30 \times (10^8 - 0) \Rightarrow U = 3 \times 10^9 \text{ J}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ eV} = 1/6 \times 10^{-19} \text{ J} \\ U = 3 \times 10^9 \text{ J} \end{cases} \Rightarrow U = \frac{3 \times 10^9}{1/6 \times 10^{-19}} \Rightarrow U = 1/88 \times 10^{28} \text{ eV}$$

ب) با استفاده از تعاریف انرژی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta U = q\Delta V \\ W_{ext} = q\Delta V \end{cases} \Rightarrow \Delta U = W_{ext} \Rightarrow W_{ext} = 3 \times 10^9 \text{ J}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow 60 = \frac{3 \times 10^9}{t} \Rightarrow t = 5 \times 10^7 \text{ s}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ y} = 86400 \text{ s} \\ t = 5 \times 10^7 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5 \times 10^7}{86400} \Rightarrow t = 1/58 \text{ y}$$

۲) میدان الکتریکی $\vec{E} = (2x\hat{i} - 3y^2\hat{j}) \frac{N}{C}$ را در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل بین نقاط A در محل

فصل ۴

حل: با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی داریم:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} (\cancel{r}x \hat{i} - \cancel{r}y \hat{j}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} (\cancel{r}x dx - \cancel{r}y dy) \Rightarrow V_B - V_A = -\int_{x_A}^{x_B} \cancel{r}x dx + \int_{y_A}^{y_B} \cancel{r}y dy \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = -\cancel{r}x \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2 + \cancel{r}y \left. \frac{y^2}{2} \right|_{-2}^1 \Rightarrow V_B - V_A = -[\cancel{r}^2 - \cancel{r}^2] + [\cancel{r}^2 - (-\cancel{r})^2] \Rightarrow V_B - V_A = 6 \text{ V}$$

پتانسیل و انرژی پتانسیل در میدان یکنواخت

۳) اگر الکترونی را در میدانی یکنواخت از حال سکون به حرکت درآوریم اختلاف پتانسیل لازم را برای رسیدن به سرعت‌های زیر به دست آورید:

الف) $\frac{m}{s}$ (۳۳۰ (سرعت صوت) ب) $\frac{km}{s}$ (۱۱/۲ (سرعت فرار از زمین) ج) $0.1c$ (۱۰٪ سرعت نور) : حل:

الف) با استفاده از پایداری انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow \Delta K = -(q\Delta V) \Rightarrow \Delta K = -(-e\Delta V) \Rightarrow \Delta K = e\Delta V \Rightarrow K - K_0 = e\Delta V \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = e\Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{mv^2}{2e} \Rightarrow \Delta V = \frac{9/11 \times 10^{-31} \times (330)^2}{2 \times 1.6 \times 10^{-19}} \Rightarrow \Delta V = 3/10 \times 10^{-7} \text{ V}$$

ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \\ v = 11/2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow v = 11/2 \times 10^3 \Rightarrow v = 1/12 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta V = \frac{mv^2}{2e} \Rightarrow \Delta V = \frac{9/11 \times 10^{-31} \times (1/12 \times 10^4)^2}{2 \times 1.6 \times 10^{-19}} \Rightarrow \Delta V = 3/57 \times 10^{-4} \text{ V}$$

ج) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\Delta V = \frac{mv^2}{2e} \Rightarrow \Delta V = \frac{9/11 \times 10^{-31} \times (0.1 \times 3 \times 10^8)^2}{2 \times 1.6 \times 10^{-19}} \Rightarrow \Delta V = 2/56 \times 10^2 \text{ V}$$

۴) دو صفحه‌ی رسانای بزرگ و موازی را با بارهای مساوی و با علامت مخالف در فاصله‌ی 5 cm از

هم در نظر بگیرید. اگر نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $8 \mu C$ در فاصله‌ی بین دو صفحه به صورت:

$$\hat{i} \times 10^{-2} \times \frac{2}{4} \text{ باشد اختلاف پتانسیل بین دو صفحه چه قدر است؟}$$

حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \mu C = 10^{-6} C \\ q = 8 \mu C \end{cases} \Rightarrow q = 8 \times 10^{-6} C$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \frac{2}{4} \times 10^{-2} \hat{i} = 8 \times 10^{-6} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = 3 \times 10^3 \hat{i}$$

با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ d = 5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow d = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta V = Ed \Rightarrow \Delta V = 3 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-2} \Rightarrow \Delta V = 150 \text{ V}$$

(۵) در هوای صاف و در سطح زمین، میدان الکتریکی یکنواختی به شدت $120 \frac{V}{m}$ در جهت قائم به

طرف پایین، وجود دارد. اختلاف پتانسیل بین زمین و هر یک از نقاط زیر را به دست آورید: الف)

نقطه‌ای در بالای سر شخصی به قد $m/8$ ب) نقطه‌ای روی برج سرز به ارتفاع $m/433$

حل:

الف) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت می‌توان نوشت:

$$\Delta V = Ed \Rightarrow \Delta V = 120 \times 1/8 \Rightarrow \Delta V = 216 \text{ V}$$

ب) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت می‌توان نوشت:

$$\Delta V = Ed \Rightarrow \Delta V = 120 \times 433 \Rightarrow \Delta V = 51960 \text{ V}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ V} = 10^{-3} \text{ kV} \\ \Delta V = 51960 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow \Delta V = 51960 \times 10^{-3} \Rightarrow \Delta V \cong 52 \text{ kV}$$

(۶) ذره‌ی باردار به جرم $2 \times 10^{-27} \text{ g}$ و بار $15 \mu C$ را در نظر بگیرید. وقتی تغییر پتانسیل این ذره

6000 V باشد و سرعتش از صفر به $400 \frac{m}{s}$ افزایش یابد کار لازم برای جابه‌جایی چه قدر است؟

حل: با استفاده از قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

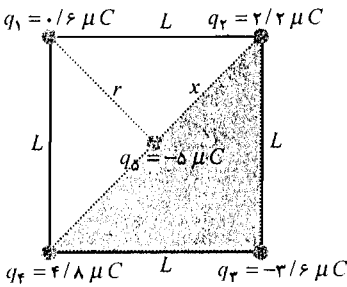
$$\begin{cases} 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg} \\ m = 2 \times 10^{-27} \text{ g} \end{cases} \Rightarrow m = 2 \times 10^{-27} \times 10^{-3} \Rightarrow m = 2 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

$$W_{ext} = \Delta K \Rightarrow W_{ext} = \left(\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \right) \Rightarrow W_{ext} = \left[\frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-30} \times (400)^2 - 0 \right] \Rightarrow W_{ext} = 1/6 \text{ J}$$

توجه کنید که چون سرعت ثابت نیست نمی‌توان از رابطه‌ی $W_{ext} = q\Delta V$ استفاده کرد.

پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای

۷) چهار ذره‌ی نقطه‌ای با بارهای $0.6 \mu C$ ، $2/2 \mu C$ ، $3/6 \mu C$ و $4/8 \mu C$ در چهار گوشه‌ی مربعی به ضلع 10 cm قرار دارند. برای این که بار $5 \mu C$ را از بی‌نهایت به مرکز این مربع بیاوریم چه قدر کار خارجی لازم است؟ (فرض کنید سرعت حرکت بار $5 \mu C$ ثابت است). مفهوم علامت جواب حاصله چیست؟



حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$x^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow x^2 = 2L^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}L$$

$$r = \frac{x}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}L \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10 \Rightarrow r = 7.1 \text{ cm}$$

پتانسیل در مرکز مربع، از جمع جبری پتانسیل هر یک از بارها در این نقطه به دست می‌آید. با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 7.1 \times 10^{-2} \text{ m} \\ r = 7.1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \mu C = 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow q_1 = 0.6 \times 10^{-6} \text{ C} \\ q_1 = 0.6 \mu C \end{cases}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \Rightarrow V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3} + \frac{kq_4}{r_4} \Rightarrow V = \frac{k}{r}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \Rightarrow$$

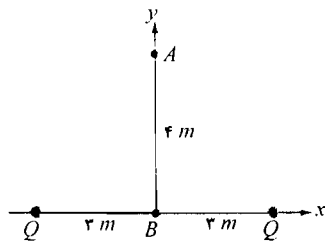
$$V = \frac{9 \times 10^9}{7.1 \times 10^{-2}} (0.6 \times 10^{-6} + 2/2 \times 10^{-6} - 3/6 \times 10^{-6} + 4/8 \times 10^{-6}) \Rightarrow V = 5/0.4 \times 10^5 \text{ V}$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$W_{ext} = q\Delta V \Rightarrow W_{ext} = q(V - V_\infty) \Rightarrow W_{ext} = -5 \times 10^{-6} \times (5/0.4 \times 10^5 - 0) \Rightarrow W_{ext} = -2/55 \text{ J}$$

نیروی وارد بر بار در خلاف جهت جابه‌جایی است پس کار انجام شده منفی است.

۸) مطابق شکل مقابل، دو ذره‌ی نقطه‌ای با بارهای مساوی Q قرار دارند. مختصات نقاط A و B به ترتیب $(0, 4 \text{ m})$ و $(0, 0)$ است. الف) اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ را به دست آورید. ب) اگر بار نقطه‌ای $-q$ به جرم $3 \times 10^{-8} \text{ kg}$ آزادانه از حال سکون از نقطه‌ی A رها شود سرعت آن در نقطه‌ی B چه قدر می‌شود؟ فرض کنید $q = Q = 5 \mu C$ است.



حل:

پتانسیل الکتریکی - مسائل

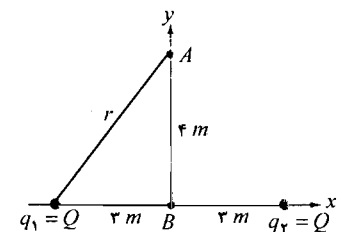
الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ m}$$

پتانسیل نقطه‌ی A:

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} 1 \mu C = 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow Q = 5 \times 10^{-6} \text{ C} \\ Q = 5 \mu C \end{cases}$$



$$V_A = V_1 + V_2 \Rightarrow V_A = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} \Rightarrow V_A = \frac{kQ}{r} + \frac{kQ}{r} \Rightarrow V_A = \frac{2kQ}{r} \Rightarrow V_A = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{5}$$

$$V_A = 1/8 \times 10^4 \text{ V}$$

پتانسیل نقطه‌ی B:

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V_B = V_1 + V_2 \Rightarrow V_B = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} \Rightarrow V_B = \frac{kQ}{r} + \frac{kQ}{r} \Rightarrow V_B = \frac{2kQ}{r} \Rightarrow V_B = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{3}$$

$$V_B = 3 \times 10^4 \text{ V}$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی A و B برابر است با:

$$V_B - V_A = 3 \times 10^4 - 1/8 \times 10^4 \Rightarrow V_B - V_A = 1/2 \times 10^4 \text{ V}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ V} = 10^{-3} \text{ kV} \\ V_B - V_A = 1/2 \times 10^4 \text{ V} \Rightarrow V_B - V_A = 1/2 \times 10^4 \times 10^{-3} \Rightarrow V_B - V_A = 12 \text{ kV} \end{cases}$$

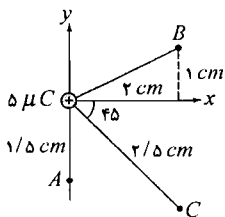
ب) با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی و تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta K + \Delta U = 0 \\ \Delta U = q\Delta V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta K = -\Delta U \\ \Delta U = q\Delta V \end{cases} \Rightarrow \Delta K = -q\Delta V \Rightarrow K_B - K_A = -q(V_B - V_A) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -(-q) \times (V_B - V_A) \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-8} \times v_B^2 - 0 = 5 \times 10^{-6} \times 1/2 \times 10^4 \Rightarrow$$

$$v_B^2 = 4 \times 10^6 \Rightarrow v_B = 2 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km} \\ v_B = 2 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_B = 2 \times 10^3 \times 10^{-3} \Rightarrow v_B = 2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{cases}$$



۹) مطابق شکل مقابل، بار نقطه‌ای $5 \mu C$ را در مبدأ در نظر بگیرید. پتانسیل را در هر یک از نقاط زیر به دست آورید: الف)

A (ب) B (ج) C

حل:

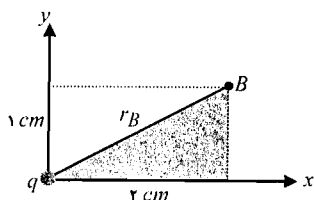
فصل ۴

الف) با استفاده از تعریف پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} \mu C = 10^{-6} C \Rightarrow q = 5 \times 10^{-6} C \\ q = 5 \mu C \\ \begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r_A = 1/5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r_A = 1/5 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

$$V_A = \frac{kq}{r_A} \Rightarrow V_A = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{1/5 \times 10^{-2}} \Rightarrow V_A = 3 \times 10^6 V$$

$$\begin{cases} 1 V = 10^{-6} MV \\ V_A = 3 \times 10^6 V \end{cases} \Rightarrow V_A = 3 \times 10^6 \times 10^{-6} \Rightarrow V_A = 3 MV$$



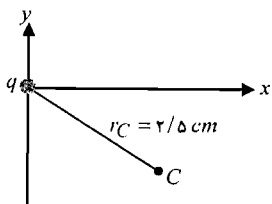
ب) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$r_B^2 = x_B^2 + y_B^2 \Rightarrow r_B^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow r_B^2 = 5 \Rightarrow r_B = 2/24 \text{ cm}$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r_B = 2/24 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r_B = 2/24 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$V_B = \frac{kq}{r_B} \Rightarrow V_B = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{2/24 \times 10^{-2}} \Rightarrow V_B = 2/01 \times 10^6 V \Rightarrow V_B = 2/01 MV$$



ج) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r_C = 2/5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r_C = 2/5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

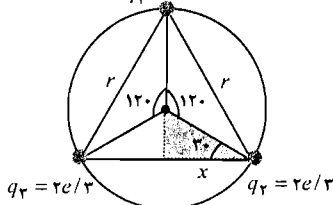
$$V_C = \frac{kq}{r_C} \Rightarrow V_C = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{2/5 \times 10^{-2}} \Rightarrow V_C = 1/80 \times 10^6 V$$

۱۰) طبق مدل کواریکی فیزیک ذرات بنیادی، هر پروتون از دو کواریک بالا u هر کدام با بار $+\frac{2}{3}e$ و یک

کواریک پایین d با بار $-\frac{e}{3}$ تشکیل شده است. اگر کواریک‌ها به فاصله‌ی مساوی از هم بر روی دایره‌ای

به شعاع $m \times 10^{-15} / 2$ قرار داشته باشند انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی کل چه قدر می‌شود؟

$$q_1 = -e/3$$



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{1/2 \times 10^{-15}} \Rightarrow x = 1/04 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$r = 2x \Rightarrow r = 2 \times 1/04 \times 10^{-15} \Rightarrow r = 2/1 \times 10^{-15} \text{ m}$$

انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی کل از جمع جبری انرژی پتانسیل

بین هر زوج بار به دست می‌آید. با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی می‌توان نوشت:

$$U = U_{1r} + U_{1r} + U_{2r} \Rightarrow U = \frac{kq_1q_2}{r} + \frac{kq_1q_3}{r} + \frac{kq_2q_3}{r} \Rightarrow U = \frac{k}{r}(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3) \Rightarrow$$

$$U = \frac{k}{r} \left[\left(-\frac{e}{3}\right) \times \left(\frac{2e}{3}\right) + \left(-\frac{e}{3}\right) \times \left(\frac{2e}{3}\right) + \left(\frac{2e}{3}\right) \times \left(\frac{2e}{3}\right) \right] \Rightarrow U = \frac{ke^2}{r} \left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) \Rightarrow U = 0$$

۱۱) فرض کنید هسته‌ی اورانیم با بار $+92e$ به طور خودبه‌خود، شکافته شده و به دو پاره‌ی شکافت با بارهای مساوی تقسیم می‌شود. ابتدا این پاره‌ها به فاصله‌ی $m = 7/4 \times 10^{-15}$ از هم و در حال سکون، قرار دارند. الف) انرژی پتانسیل اولیه چه قدر است؟ ب) انرژی جنبشی نهایی پاره‌ها را هنگامی به دست آورید که فاصله‌ی آن‌ها خیلی زیاد می‌شود. ج) اگر 30% انرژی جنبشی این پاره‌های شکافت در رآکتور هسته‌ای، قابل استفاده باشد برای تولید توان 1 MW چند هسته در هر ثانیه باید شکافته شود؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل می‌توان نوشت:

$$q_1 = q_2 = \frac{Q}{2} \Rightarrow q_1 = q_2 = \frac{92e}{2} \Rightarrow q_1 = q_2 = 46e \Rightarrow q_1 = q_2 = 46 \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow$$

$$q_1 = q_2 = 7/4 \times 10^{-18} \text{ C}$$

$$U_0 = \frac{kq_1q_2}{r} \Rightarrow U_0 = \frac{9 \times 10^9 \times 7/4 \times 10^{-18} \times 7/4 \times 10^{-18}}{7/4 \times 10^{-15}} \Rightarrow U_0 = 6/59 \times 10^{-11} \text{ J}$$

ب) با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow K - K_0 = -(U - U_0) \Rightarrow K - 0 = -(0 - 6/59 \times 10^{-11}) \Rightarrow K = 6/59 \times 10^{-11} \text{ J}$$

توجه کنید که وقتی فاصله‌ی بارها از یکدیگر خیلی زیاد است انرژی پتانسیل برابر صفر است.

ج) K' انرژی قابل استفاده از شکافت هسته‌ای:

$$K' = K \times 30\% \Rightarrow K' = \frac{30}{100} \times 6/59 \times 10^{-11} \Rightarrow K' = 1/97 \times 10^{-11} \text{ J}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W} \Rightarrow P = 1 \times 10^6 \text{ W} \\ P = 1 \text{ MW} \end{cases}$$

$$P = \frac{U}{t} \Rightarrow 1 \times 10^6 = \frac{U}{1} \Rightarrow U = 1 \times 10^6 \text{ J}$$

n تعداد هسته‌هایی که باید در هر ثانیه شکافته شود:

$$n = \frac{U}{K'} \Rightarrow n = \frac{1 \times 10^6}{1/97 \times 10^{-11}} \Rightarrow n = 5/06 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

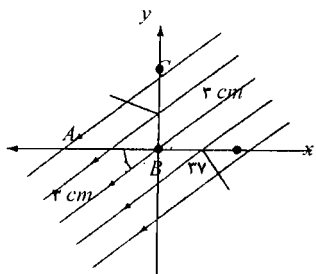
۱۲) مطابق شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواختی به شدت $400 \frac{V}{m}$ با محور x زاویه‌ی 37° می‌سازد.

فصل ۴

اختلاف پتانسیل‌های: الف) $V_B - V_A$ ب) $V_B - V_C$ را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی داریم:



$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta S_{AB} = 3 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \Delta S_{AB} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$V_B - V_A = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{S}_{AB} \Rightarrow V_B - V_A = -E \Delta S_{AB} \cos \theta \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = -400 \times 3 \times 10^{-2} \cos 37 \Rightarrow V_B - V_A = -9/57 \text{ V}$$

ب) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta S_{BC} = 3 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \Delta S_{BC} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$V_B - V_C = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{S}_{BC} \Rightarrow V_B - V_C = -E \Delta S_{BC} \cos \theta \Rightarrow$$

$$V_B - V_C = -400 \times 3 \times 10^{-2} \cos(90 - 37) \Rightarrow V_B - V_C = -7/23 \text{ V}$$

۱۳) نقطه‌ای را به فاصله‌ی m از بار 1 nC در نظر بگیرید. در راستای شعاعی در چه فواصلی از

نقطه‌ی m پتانسیل: الف) 1 V بیشتر ب) 1 V کمتر است؟

حل:

الف)

در شعاع m ۱: با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C} \\ q = 2 \text{ nC} \end{cases} \Rightarrow q = 2 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{1} \Rightarrow V = 18 \text{ V}$$

در شعاع r_1 : پتانسیل 1 V بالاتر از پتانسیل در شعاع: $r = 1 \text{ m}$ است.

$$V_1 = V + 1 \Rightarrow V_1 = 18 + 1 \Rightarrow V_1 = 19 \text{ V}$$

$$V_1 = \frac{kq}{r_1} \Rightarrow 19 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{r_1} \Rightarrow r_1 = 0/947 \text{ m}$$

Δr_1 فاصله‌ی شعاعی پتانسیل: 18 V و 19 V است:

$$\Delta r_1 = r - r_1 \Rightarrow \Delta r_1 = 1 - 0/947 \Rightarrow \Delta r_1 = 0/0526 \text{ m} \Rightarrow \Delta r_1 = 5/26 \text{ cm}$$

ب) در شعاع r_2 : پتانسیل 1 V پایین‌تر از پتانسیل در شعاع: $r = 1 \text{ m}$ است.

$$V_2 = V - 1 \Rightarrow V_2 = 18 - 1 \Rightarrow V_2 = 17 \text{ V}$$

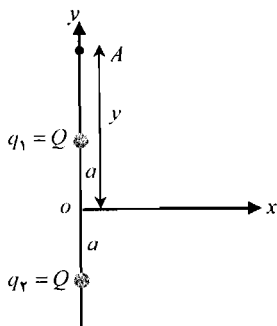
$$V_2 = \frac{kq}{r_2} \Rightarrow 17 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{r_2} \Rightarrow r_2 = 1/0588 \text{ m}$$

Δr_p فاصله شعاعی پتانسیل: V_{18} و V_{17} است:

$$\Delta r_p = r_p - r \Rightarrow \Delta r_p = 1/0.588 - 1 \Rightarrow \Delta r_p = 0.588 \text{ m} \Rightarrow \Delta r_p = 5/88 \text{ cm}$$

میدان الکتریکی مشتق از پتانسیل

(۱۴) دو بار مثبت مساوی Q به ترتیب در نقاط $(0, a)$ و $(0, -a)$ قرار دارند. الف) وقتی $y > a$ است پتانسیل $V(y)$ را در نقطه $(0, y)$ به دست آورید. ب) با استفاده از $V(y)$ میدان الکتریکی را در راستای محور y ها به دست آورید.



حل:

الف) با توجه به شکل و با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V_A = V_1 + V_2 \Rightarrow V_A = \frac{kq}{r_1} + \frac{kq}{r_2} \Rightarrow V_A = \frac{kQ}{y-a} + \frac{kQ}{y+a} \Rightarrow V_A = \frac{(y+a)kQ + (y-a)kQ}{(y-a)(y+a)} \Rightarrow V_A = \frac{2kQy}{y^2 - a^2}$$

ب) با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

چون پتانسیل در نقطه A فقط تابع y است پس:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} \Rightarrow E = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2kQy}{(y^2 - a^2)} \right] \Rightarrow E = (-2kQ) \times \left[\frac{1 \times (y^2 - a^2) - 2y \times y}{(y^2 - a^2)^2} \right] \Rightarrow$$

$$E = (-2kQ) \times \left[\frac{-a^2 - y^2}{(y^2 - a^2)^2} \right] \Rightarrow E = \frac{2kQ(a^2 + y^2)}{(y^2 - a^2)^2}$$

(۱۵) در مثال ۴-۵ پتانسیل را روی محور قرصی به دست آوریم که به طور یکنواخت، باردار شده است. با استفاده از این عبارت، شدت میدان الکتریکی را در امتداد محور مرکزی قرص به دست آورید.

حل: پتانسیل روی محور قرصی که به طور یکنواخت باردار شده برابر است با:

$$V = 2\pi k\sigma \left[(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y \right]$$

با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

چون پتانسیل روی محور قرص، فقط تابع y (فاصله از مرکز قرص) است پس:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} \Rightarrow E = -\frac{\partial}{\partial y} \left[2\pi k\sigma \left[(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y \right] \right] \Rightarrow E = -2\pi k\sigma \left[\frac{1}{2} (a^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2y - 1 \right] \Rightarrow$$

فصل ۴

$$E = 2\pi k\sigma \left[1 - \frac{y}{(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

بارهای گسترده

۱۶) پروتون را به صورت کره‌ای به شعاع $m \cdot 10^{-15}$ که به طور یکنواخت باردار شده فرض کنید. پتانسیل را در هر یک از نقاط زیر به دست آورید: الف) در سطح پروتون (ب) در محل استقرار الکترون در اتم هیدروژن (یعنی در فاصله $m \cdot 5/3 \times 10^{-11}$ ج) اگر پروتون را به صورت پوسته‌ی کروی در نظر بگیریم چه تغییری در نتایج ایجاد می‌شود؟

حل: بار پروتون برابر بار الکترون یعنی: $C \cdot 1/6 \times 10^{-19}$ است.

الف) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{9 \times 10^9 \times 1/6 \times 10^{-19}}{10^{-15}} \Rightarrow V = 1/44 \times 10^6 \text{ V}$$

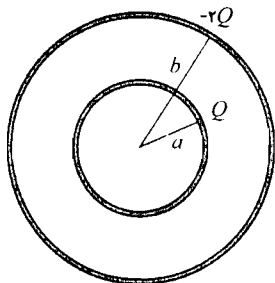
ب) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{9 \times 10^9 \times 1/6 \times 10^{-19}}{5/3 \times 10^{-11}} \Rightarrow V = 27/2 \text{ V}$$

ج) نتایج تغییری نمی‌کنند زیرا تفاوتی ندارد که بار در کل کره توزیع شده باشد و یا در سطح آن.

رساناها

۱۷) دو پوسته‌ی فلزی کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b را در نظر بگیرید. پوسته‌ی داخلی به شعاع a دارای بار Q و پوسته‌ی خارجی دارای بار $-2Q$ است. نمودار تغییرات V و E را بر حسب r (فاصله از مرکز) رسم کنید.



حل:

برای $r < a$: چون پوسته به شعاع $r = a$ فلزی است پس: $E = 0$
چون میدان مشتق پتانسیل است و میدان در این ناحیه صفر است پس پتانسیل برابر مقدار ثابت زیر است:

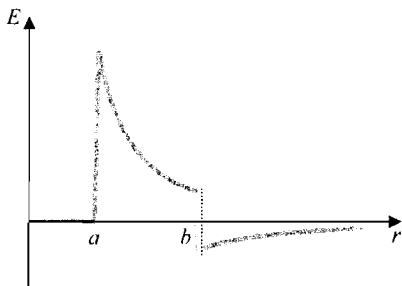
$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{kQ}{a} - \frac{2kQ}{b}$$

برای $a < r < b$: با استفاده از قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$$

با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow \partial V = -E \partial r \Rightarrow V = -\int E dr \Rightarrow V = -\int_a^r \frac{r' kQ}{a r'^2} dr' \Rightarrow V = -kQ \left(-\frac{1}{r} \right)_a^r \Rightarrow$$



$$V = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow V = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{a}$$

برای $r > b$: Q_{net} بار خالص در این بازه برابر است با:

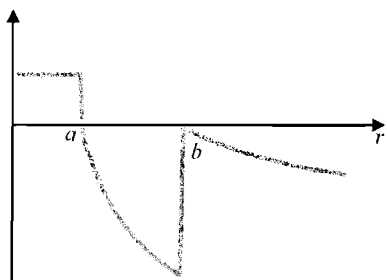
$$Q_{net} = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_{net} = Q + (-2Q) \Rightarrow Q_{net} = -Q$$

با استفاده از قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times \pi r^2 = \frac{-Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{-kQ}{r^2}$$

با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow \partial V = -E \partial r \Rightarrow V = -\int E dr \Rightarrow$$



$$V = -\int_b^r \frac{r' kQ}{r'^2} dr' \Rightarrow V = -kQ \left(-\frac{1}{r} \right)_b^r \Rightarrow$$

$$V = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow V = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{b}$$

مسائل تکمیلی

۱۸) فرض کنید یک هسته‌ی اورانیوم (با بار $92e$ و جرم $238u$) از حال سکون در اثر واپاشی به یک هسته‌ی توریم (به بار $90e$ و جرم $234u$) و یک ذره‌ی آلفا (به بار $+2e$ و جرم $4u$) تبدیل می‌شود. درست پس از واپاشی، ذرات ساکن و به فاصله‌ی $m \times 10^{-15} \times 7/4$ از هم قرار دارند. انرژی جنبشی هر یک از ذرات حاصل از واپاشی را وقتی به دست آورید که فاصله‌ی آن‌ها بی‌نهایت می‌شود. توریم را ساکن در نظر نگیرید.

حل: با استفاده از پایستگی تکانه‌ی خطی می‌توان نوشت:

$$\vec{p} = \vec{p}' \Rightarrow 0 = p_{Th} + p_{\alpha} \Rightarrow m_{Th} v_{Th} + m_{\alpha} v_{\alpha} = 0 \Rightarrow m_{Th} v_{Th} = -m_{\alpha} v_{\alpha} \Rightarrow$$

$$234 u v_{Th} = -4 u v_{\alpha} \Rightarrow v_{Th} = -1/59 \times 10^{-2} v_{\alpha} \quad (1)$$

با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1u = 1/661 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ m_{Th} = 234 u \\ m_{\alpha} = 4 u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{Th} = 234 \times 1/661 \times 10^{-27} \\ m_{\alpha} = 4 \times 1/661 \times 10^{-27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{Th} = 3/89 \times 10^{-25} \text{ kg} \\ m_{\alpha} = 6/66 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow 0 + \frac{kq_{Th}q_{\alpha}}{r} = \frac{1}{2} m_{Th} v_{Th}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + 0 \Rightarrow$$

فصل ۴

$$\frac{9 \times 10^9 \times 90 \times 10^{-19} \times 1/6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-19}}{7/4 \times 10^{-15}} = \frac{1}{2} \times 3/89 \times 10^{-25} \times (-1/71 \times 10^{-2} v_{\alpha}^2)^2 + \frac{1}{2} \times 6/64 \times 10^{-27} \times v_{\alpha}^2 \Rightarrow$$

$$5/6 \times 10^{-12} = 5/69 \times 10^{-29} v_{\alpha}^2 + 3/32 \times 10^{-27} v_{\alpha}^2 \Rightarrow v_{\alpha}^2 = 1/66 \times 10^{15} \Rightarrow v_{\alpha} = 4/0.7 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$v_{Th} = -1/71 \times 10^{-2} \times 4/0.7 \times 10^7 \Rightarrow v_{Th} = -6/96 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$K_{Th} = \frac{1}{2} m_{Th} v_{Th}^2 \Rightarrow K_{Th} = \frac{1}{2} \times 3/89 \times 10^{-25} \times (-6/96 \times 10^5)^2 \Rightarrow K_{Th} = 9/4 \times 10^{-14} \text{ J}$$

$$K_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \Rightarrow K_{\alpha} = \frac{1}{2} \times 6/64 \times 10^{-27} \times (4/0.7 \times 10^7)^2 \Rightarrow K_{\alpha} = 5/5 \times 10^{-12} \text{ J}$$

(۱۹) مطابق شکل زیر، کره‌ی فلزی به شعاع R_1 دارای بار Q_1 ، داخل پوسته‌ی کره‌ی رسانایی به شعاع R_2 و بار $-Q_2$ قرار دارد. الف) پتانسیل کره‌ی داخلی V_1 ب) پتانسیل کره‌ی بیرونی V_2 ج) اختلاف پتانسیل $V_1 - V_2$ را به دست آورید. د) در چه صورت: $V_1 = V_2$ است؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$V_1 = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} \Rightarrow V_1 = \frac{k \times Q_1}{R_1} + \frac{k \times (-Q_2)}{R_2} \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} - \frac{kQ_2}{R_2} \Rightarrow V_1 = k \left(\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_2}{R_2} \right)$$

ب) بار خالص روی کره به شعاع R_2 برابر است با:

$$Q = q_1 + q_2 \Rightarrow Q = Q_1 + (-Q_2) \Rightarrow Q = Q_1 - Q_2$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$V_2 = \frac{kQ}{r} \Rightarrow V_2 = \frac{k(Q_1 - Q_2)}{R_2} \Rightarrow V_2 = k \left(\frac{Q_1}{R_2} - \frac{Q_2}{R_2} \right)$$

ج)

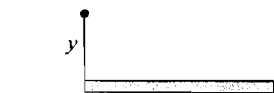
$$V_1 - V_2 = k \left(\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_2}{R_2} \right) - k \left(\frac{Q_1}{R_2} - \frac{Q_2}{R_2} \right) \Rightarrow V_1 - V_2 = k \left(\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_1}{R_2} \right) \Rightarrow V_1 - V_2 = kQ_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

د) $V_1 = V_2$ یعنی پتانسیل داخل پوسته‌ی کره‌ی در تمامی نقاط ثابت باشد و این زمانی رخ می‌دهد که داخل پوسته‌ی کره‌ی توزیع بار یا بار نقطه‌ای وجود نداشته باشد یعنی $Q_1 = 0$ باشد.

(۲۰) مطابق شکل زیر، میله‌ای به طول L و چگالی بار خطی یکنواخت λ را در راستای محور x ها در

نظر بگیرید. پتانسیل را در فاصله‌ی y از یک طرف آن در راستای عمود بر میله به دست آورید.

حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:



$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از توزیع بار داریم:

$$V = \int \frac{k dq}{r} \Rightarrow V = \int \frac{k \lambda dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow V = k \lambda \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال فوق از جدول‌های انتگرالی استفاده می‌کنیم.

$$V = k \lambda \ln \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right] \Big|_0^L \Rightarrow$$

$$V = k \lambda \left[\ln(L + \sqrt{L^2 + y^2}) - \ln(0 + \sqrt{0 + y^2}) \right] \Rightarrow$$

$$V = k \lambda \left[\ln(L + \sqrt{L^2 + y^2}) - \ln y \right] \Rightarrow V = k \lambda \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + y^2}}{y} \Rightarrow V = k \lambda \ln \frac{L + L \sqrt{1 + \frac{y^2}{L^2}}}{y}$$

(۲۱) کره‌ای نارسانا به شعاع R را در نظر بگیرید که بار Q به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده

است. نشان دهید که انرژی پتانسیل این کره عبارت است از: $U = \frac{3kQ^2}{5R}$

حل: q بار توزیع شده در شعاع r برابر است با:

$$q = \rho V \Rightarrow q = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow q = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \Rightarrow dq = \frac{4}{3} \pi \rho \times 3r^2 dr \Rightarrow dq = 4\pi \rho r^2 dr$$

پتانسیل در شعاع r برابر است با:

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{k \times \frac{4}{3} \pi \rho r^3}{r} \Rightarrow V = \frac{4}{3} k \pi \rho r^2$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل، برای توزیع بار یکنواخت می‌توان نوشت:

$$U = \int V dq \Rightarrow U = \int \frac{4}{3} k \pi \rho r^2 \times 4\pi \rho r^2 dr \Rightarrow U = \frac{16}{3} k \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr \Rightarrow U = \frac{16}{3} k \pi^2 \rho^2 \frac{r^5}{5} \Big|_0^R$$

$$U = \frac{16}{15} k \pi^2 \rho^2 R^5$$

Q کل بار توزیع شده در کره برابر است با:

$$Q = \rho V \Rightarrow Q = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow Q = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

با جاگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی انرژی پتانسیل می‌توان نوشت:

فصل ۴

$$U = \frac{16}{15} k\pi^r \times \left(\frac{rQ}{r\pi R^r} \right)^r \times R^5 \Rightarrow U = \frac{r k Q^r}{5R}$$

(۲۲) پتانسیل ناشی از یک دو قطبی در فواصل بسیار دور را می‌توان به صورت: $V = \frac{k\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2}$ نوشت. با

استفاده از $E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$ (که $s = x$ یا $s = y$ است) نشان دهید اگر گشتاور دو قطبی در جهت مثبت

$$\text{محور } x \text{ ها باشد داریم: } E_x = \frac{kp(rx^r - y^r)}{r^5} \text{ و } E_y = \frac{rkpxy}{r^5}$$

حل:

$$\bar{r} = x \hat{i} + y \hat{j} \Rightarrow r^r = \bar{r} \cdot \bar{r} = x^r + y^r \Rightarrow r = (x^r + y^r)^{\frac{1}{r}}$$

$$V = \frac{k\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^r} \Rightarrow V = \frac{k(p \hat{i}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j})}{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}}} \Rightarrow V = \frac{kpx}{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}}}$$

با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \Rightarrow$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kpx}{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}}} \right] \Rightarrow E_x = -kp \left[\frac{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}} - \frac{r}{r}(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} \times rx \times x}{(x^r + y^r)^r} \right] \Rightarrow$$

$$E_x = -kp \times \frac{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}} - rx^r (x^r + y^r)^{\frac{1}{r}}}{(x^r + y^r)^r} \Rightarrow E_x = -kp(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} \times \frac{(x^r + y^r) - rx^r}{(x^r + y^r)^r}$$

$$E_x = -kp \frac{x^r + y^r - rx^r}{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}}} \Rightarrow E_x = \frac{-kp(-rx^r + y^r)}{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}}} \Rightarrow E_x = \frac{kp(rx^r - y^r)}{r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow E_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{kpx}{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}}} \right] \Rightarrow E_y = -kpx \left[\frac{-\frac{r}{r}(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} \times ry}{(x^r + y^r)^r} \right] \Rightarrow$$

$$E_y = rkpx \times \frac{y}{(x^r + y^r)^{\frac{r}{r}}} \Rightarrow E_y = \frac{rkpxy}{r^5}$$

مسائل

ظرفیت

۱) فرض کنید کره‌ی رسانایی در فاصله‌ی 50 km از سطح زمین، کره‌ی زمین (شعاع 6400 km) را احاطه کرده و در فاصله‌ی بین آن‌ها میدان الکتریکی ثابت $\frac{N}{C}$ در جهت قائم به طرف پایین، برقرار است. الف) چگالی سطحی بار سطح زمین چه قدر است؟ ب) ظرفیت این سیستم چه قدر است؟ ج) جواب قسمت ب را با ظرفیت زمین (به صورت کره‌ی منزوی) مقایسه کنید.

حل:

الف) با استفاده از قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{A\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow 100 = \frac{\sigma}{8.85 \times 10^{-12}} \Rightarrow \sigma = 8.85 \times 10^{-10} \frac{C}{m^2}$$

ب) ظرفیت خازن کره‌ی برابر است با:

$$\begin{cases} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \\ R_1 = 6400 \text{ km} \\ R_2 = (6400 + 50) \text{ km} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 6400 \times 10^3 \\ R_2 = 6450 \times 10^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 6/40 \times 10^6 \text{ m} \\ R_2 = 6/45 \times 10^6 \text{ m} \end{cases}$$

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = 4 \times 3/14 \times \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 6/40 \times 10^6 \times 6/45 \times 10^6}{6/45 \times 10^6 - 6/40 \times 10^6} \Rightarrow$$

$$C = 91/7 \times 10^{-2} \text{ F}$$

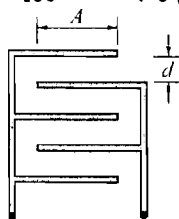
ج) ظرفیت کره‌ی منزوی برابر است با:

$$C' = 4\pi \epsilon_0 R \Rightarrow C' = 4 \times 3/14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6/40 \times 10^6 \Rightarrow C' = 712 \times 10^{-6} \text{ F}$$

پس ظرفیت در حالت قبل خیلی بیشتر از حالتی است که زمین را به صورت کره‌ی منزوی در نظر بگیریم.

فصل ۵

۲) مطابق شکل زیر، خازنی متشکل از دو مجموعه صفحات را در نظر بگیرید. فاصله‌ی میان صفحات و مساحت موثر صفحات در شکل نشان داده شده است. ظرفیت این سیستم را به دست آورید.



حل: مطابق شکل صفحات همنام خازن‌ها به یکدیگر متصل هستند. پس خازن‌ها با یکدیگر موازی هستند.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_{eq} = \frac{4\epsilon_0 A}{d}$$

۳) پس از انتقال 10^{12} الکترون از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر خازنی، اختلاف پتانسیل بین دو صفحه‌ی 20 V است. ظرفیت آن چه قدر است؟

حل: q بار روی هر صفحه‌ی خازن برابر است با:

$$q = 10^{12} e \Rightarrow q = 10^{12} \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow q = 1.6 \times 10^{-7} \text{ C}$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{1.6 \times 10^{-7}}{20} \Rightarrow C = 8 \times 10^{-9} \text{ F} \Rightarrow C = 8 \text{ nF}$$

۴) خازنی به ظرفیت $C_1 = 4 \mu\text{F}$ را به باتری 20 V وصل می‌کنیم. باتری را از مدار جدا کرده و خازن $C_2 = 6 \mu\text{F}$ را به جای آن، قرار می‌دهیم. بار نهایی و اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن‌ها را به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow 4 = \frac{Q_0}{20} \Rightarrow Q_0 = 80 \mu\text{C}$$

خازن‌ها به طور موازی قرار گرفته‌اند پس دارای اختلاف پتانسیل یکسانی هستند.

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_0 = C_1 V + C_2 V \Rightarrow 80 = V(4 + 6) \Rightarrow 80 = 10V \Rightarrow V = 8\text{ V}$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$Q_1 = C_1 V \Rightarrow Q_1 = 4 \times 8 \Rightarrow Q_1 = 32 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 V \Rightarrow Q_2 = 6 \times 8 \Rightarrow Q_2 = 48 \mu\text{C}$$

۵) خازنی کروی از یک کره‌ی داخلی به شعاع 3 cm و پوسته‌ی خارجی به شعاع 11 cm تشکیل شده است. الف) ظرفیت خازن چه قدر است؟ ب) برای این که اختلاف پتانسیل به 5 V برسد چند الکترون را از یک کره به کره‌ی دیگر منتقل کنیم؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف ظرفیت خازن کروی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ R_1 = 3 \text{ cm} \\ R_2 = 11 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 3 \times 10^{-2} \text{ m} \\ R_2 = 11 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = \frac{4 \times 3 / 14 \times 8 / 85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^{-2} \times 11 \times 10^{-2}}{11 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}} \Rightarrow C = 4 / 58 \times 10^{-12} \text{ F}$$

(ب) با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow 4 / 58 \times 10^{-12} = \frac{Q}{5} \Rightarrow Q = 23 \times 10^{-12} \text{ C}$$

با استفاده از تعریف بار الکتریکی می‌توان نوشت:

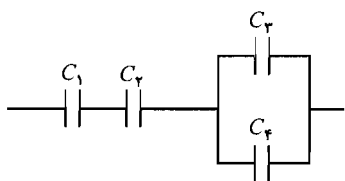
$$Q = ne \Rightarrow 23 \times 10^{-12} = n \times 1 / 6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = 1 / 43 \times 10^8$$

به هم بستن متوالی و متوازی

(۶) چهار خازن $10 \mu\text{F}$ را طوری با هم در مدار قرار دهید تا ظرفیت معادل آن‌ها: الف) $4 \mu\text{F}$ باشد. $2 / 5 \mu\text{F}$

حل:

الف) اگر چهار خازن به صورت زیر در مدار قرار گیرند:



C ظرفیت معادل دو خازن C_1 و C_2 :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{5} \Rightarrow C = 5 \mu\text{F}$$

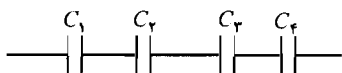
C' ظرفیت معادل دو خازن C_3 و C_4 :

$$C' = C_3 + C_4 \Rightarrow C' = 10 + 10 \Rightarrow C' = 20 \mu\text{F}$$

دو خازن C و C' با یکدیگر متوالی هستند پس:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{4}{20} + \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{5}{20} \Rightarrow C_{eq} = 4 \mu\text{F}$$

(ب) اگر چهار خازن به صورت زیر در مدار قرار گیرند.



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{4}{10} \Rightarrow C_{eq} = 2 / 5 \mu\text{F}$$

(۷) دو خازن $C_1 = 2 \mu\text{F}$ و $C_2 = 4 \mu\text{F}$ را به طور متوالی به باتری 18 V وصل می‌کنیم. باتری را از مدار جدا کرده و سپس صفحات همنام آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم. بار نهایی و اختلاف پتانسیل هر یک از خازن‌ها را به دست آورید.

فصل ۵

حل:

قبل از جدا کردن باتری: خازن‌ها به صورت متوالی در مدار قرار دارند.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{3}{4} \Rightarrow C_{eq} = 1/33 \mu F$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{V_{eq}} \Rightarrow 1/33 = \frac{Q_{eq}}{18} \Rightarrow Q_{eq} = 24 \mu C$$

خازن‌ها متوالی هستند پس دارای بار یکسانی هستند.

$$Q_1 = Q_2 = Q_{eq} \Rightarrow Q_1 = Q_2 = 24 \mu C$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow 2 = \frac{24}{V_1} \Rightarrow V_1 = 12 V$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow 4 = \frac{24}{V_2} \Rightarrow V_2 = 6 V$$

پس از جدا کردن باتری: صفحات همنام را به یکدیگر وصل کردیم:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = (C_1 + C_2) V \Rightarrow 2 \times 12 + 4 \times 6 = (2 + 4) \times V \Rightarrow 48 = 6V \Rightarrow V = 8 V$$

خازن‌ها موازی هستند پس دارای اختلاف پتانسیل یکسانی هستند:

$$V'_1 = V'_2 = V_{eq} \Rightarrow V'_1 = V'_2 = 8 V$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q'_1}{V'_1} \Rightarrow 2 = \frac{Q'_1}{8} \Rightarrow Q'_1 = 16 \mu C$$

$$C_2 = \frac{Q'_2}{V'_2} \Rightarrow 4 = \frac{Q'_2}{8} \Rightarrow Q'_2 = 32 \mu C$$

۸) خازن $C_1 = 3 \mu F$ با اختلاف پتانسیل $12 V$ و خازن $C_2 = 5 \mu F$ با اختلاف پتانسیل $10 V$ را در نظر بگیرید. بار نهایی و اختلاف پتانسیل خازن‌ها را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) صفحات همنام به هم وصل شوند. ب) صفحات غیر همنام به هم وصل شوند.

حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow 3 = \frac{Q_1}{12} \Rightarrow Q_1 = 36 \mu C$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow 5 = \frac{Q_2}{10} \Rightarrow Q_2 = 50 \mu C$$

الف) وقتی صفحات همنام دو خازن باردار را به هم وصل کنیم:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = (C_1 + C_2) V \Rightarrow 3 \times 12 + 5 \times 10 = (3 + 5) \times V \Rightarrow 86 = 8V \Rightarrow V = 10.75 V$$

خازن‌ها موازی هستند پس: $V_1 = V_2 = V$ است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q'_1}{V_1} \Rightarrow 3 = \frac{Q'_1}{10/75} \Rightarrow Q'_1 = 32/25 \mu C$$

$$C_2 = \frac{Q'_2}{V_2} \Rightarrow 5 = \frac{Q'_2}{10/75} \Rightarrow Q'_2 = 53/75 \mu C$$

(ب) وقتی صفحات غیرهمنام دو خازن باردار را به هم وصل کنیم:

$$|C_1 V_1 - C_2 V_2| = (C_1 + C_2) V \Rightarrow |3 \times 12 - 5 \times 10| = (3 + 5) \times V \Rightarrow 14 = 8V \Rightarrow V = 1/75 V$$

خازن‌ها موازی هستند پس: $V_1 = V_2 = V$ است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q'_1}{V_1} \Rightarrow 3 = \frac{Q'_1}{1/75} \Rightarrow Q'_1 = 5/25 \mu C$$

$$C_2 = \frac{Q'_2}{V_2} \Rightarrow 5 = \frac{Q'_2}{1/75} \Rightarrow Q'_2 = 8/75 \mu C$$

انرژی و چگالی انرژی

(۹) خازنی مسطحی با مساحت 40 cm^2 و فاصله بین صفحات $2/5 \text{ mm}$ را در نظر بگیرید. این خازن را به باتری 24 V وصل می‌کنیم. الف) ظرفیت (ب) انرژی ذخیره شده (ج) میدان الکتریکی (د) چگالی انرژی میدان الکتریکی را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف ظرفیت خازن سطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \Rightarrow A = 40 \times 10^{-4} \Rightarrow A = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ A = 40 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow d = 2/5 \times 10^{-3} \text{ mm} \\ d = 2/5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = 8/85 \times 10^{-12} \times \frac{4 \times 10^{-3}}{2/5 \times 10^{-3}} \Rightarrow C = 14/2 \times 10^{-12} \text{ F}$$

(ب) با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times 14/2 \times 10^{-12} \times (24)^2 \Rightarrow U = 4/08 \times 10^{-9} \text{ J}$$

(ج) با استفاده از رابطه‌ی میدان یکنواخت در فاصله‌ی بین صفحات خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow E = \frac{24}{2/5 \times 10^{-3}} \Rightarrow E = 9/6 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

(د) با استفاده از تعریف چگالی میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

فصل ۵

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \times 8/85 \times 10^{-12} \times (9/6 \times 10^2)^2 \Rightarrow u = 40.8 \times 10^{-6} \frac{J}{m^3}$$

۱۰) دو خازن $C_1 = 2 \mu F$ و $C_2 = 5 \mu F$ را به طور متوالی به باتری $20 V$ وصل می‌کنیم. باتری را از مدار جدا کرده و صفحات همنام را به هم وصل می‌کنیم. انرژی‌های اولیه و نهایی هر خازن را به دست آورید.

حل:

قبل از جدا کردن باتری، خازن‌ها به طور متوالی وصل شده‌اند:

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \\ C_1 = 2 \mu F \\ C_2 = 5 \mu F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \times 10^{-6} F \\ C_2 = 5 \times 10^{-6} F \end{cases}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} + \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{7}{10 \times 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq} = 1/43 \times 10^{-6} F$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{V_{eq}} \Rightarrow 1/43 \times 10^{-6} = \frac{Q_{eq}}{20} \Rightarrow Q_{eq} = 28/6 \times 10^{-6} C$$

خازن‌ها به طور متوالی وصل شده‌اند پس دارای بار یکسانی هستند.

$$Q_{eq} = Q_1 = Q_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2 = 28/6 \times 10^{-6} C$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow 2 \times 10^{-6} = \frac{28/6 \times 10^{-6}}{V_1} \Rightarrow V_1 = 14/3 V$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow 5 \times 10^{-6} = \frac{28/6 \times 10^{-6}}{V_2} \Rightarrow V_2 = 5/72 V$$

با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U_1 = \frac{Q_1^2}{2C_1} \Rightarrow U_1 = \frac{(28/6 \times 10^{-6})^2}{2 \times 2 \times 10^{-6}} \Rightarrow U_1 = 20.4 \times 10^{-6} J$$

$$U_2 = \frac{Q_2^2}{2C_2} \Rightarrow U_2 = \frac{(28/6 \times 10^{-6})^2}{2 \times 5 \times 10^{-6}} \Rightarrow U_2 = 81/8 \times 10^{-6} J$$

پس از جدا کردن باتری، صفحات همنام به هم وصل شده‌اند:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = (C_1 + C_2) V \Rightarrow 2 \times 10^{-6} \times 14/3 + 5 \times 10^{-6} \times 5/72 = (2 \times 10^{-6} + 5 \times 10^{-6}) \times V \Rightarrow 57/2 \times 10^{-6} = 7 \times 10^{-6} \times V \Rightarrow V = 8/2 V$$

خازن‌ها به طور موازی وصل شده‌اند پس دارای اختلاف پتانسیل یکسانی هستند:

$$V_{eq} = V_1' = V_2' \Rightarrow V_1' = V_2' = 8/2 V$$

با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U'_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1'^2 \Rightarrow U'_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-6} \times (8/2)^2 \Rightarrow U'_1 = 64 / 2 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$U'_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2'^2 \Rightarrow U'_2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-6} \times (8/2)^2 \Rightarrow U'_2 = 168 \times 10^{-6} \text{ J}$$

(۱) خازن باردار مسطح با فاصله‌ی بین صفحات d به باتری با اختلاف پتانسیل V وصل است. پس از جدا کردن باتری، صفحات خازن را از هم دور می‌کنیم تا فاصله‌ی بین آن‌ها $2d$ شود. تغییر هر یک از کمیت‌های زیر را به دست آورید: الف) اختلاف پتانسیل ب) بار هر صفحه ج) انرژی ذخیره شده حل:

الف) اگر خازنی به باتری وصل شود و سپس باتری جدا شود و تغییری در ساختار خازن دهیم بار آن ثابت می‌ماند ولی ظرفیت و اختلاف پتانسیل آن، تغییر می‌کند.

قبل از جدا کردن باتری با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{Q}{V_1} \Rightarrow V_1 = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

پس از جدا کردن باتری با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow \epsilon_0 \frac{A}{2d} = \frac{Q}{V_2} \Rightarrow V_2 = \frac{2Qd}{\epsilon_0 A}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{2Qd}{\epsilon_0 A}}{\frac{Qd}{\epsilon_0 A}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 2$$

پس پتانسیل، دو برابر می‌شود.

ب) پس از جدا کردن باتری، بار روی صفحات خازن تغییری نمی‌کند: $Q_1 = Q_2$

ج) با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1'^2 \\ U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \times \epsilon_0 \frac{A}{d} \times \left(\frac{Qd}{\epsilon_0 A} \right)^2 \\ U_2 = \frac{1}{2} \times \epsilon_0 \frac{A}{2d} \times \left(\frac{2Qd}{\epsilon_0 A} \right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A}}{\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A}} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = 2 \\ U_2 = \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = 2 \end{cases}$$

پس انرژی ذخیره شده در خازن، دو برابر می‌شود.

(۱۲) فاصله‌ی بین صفحات خازن مسطح 1 mm است. به‌ازای چه اختلاف پتانسیلی، چگالی انرژی آن

$$\frac{J}{m^3} \text{ } 1/8 \times 10^{-4} \text{ می‌شود؟}$$

حل: با استفاده از تعریف چگالی انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

فصل ۵

$$u = \frac{1}{\gamma} \epsilon_0 E^2 \Rightarrow 1/8 \times 10^{-2} = \frac{1}{\gamma} \times 8/85 \times 10^{-12} \times E^2 \Rightarrow E^2 = 40/7 \times 10^6 \Rightarrow E = 6/38 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

با استفاده از رابطه‌ی میدان یکنواخت در فاصله‌ی بین صفحات خازن تخت می‌توان نوشت:

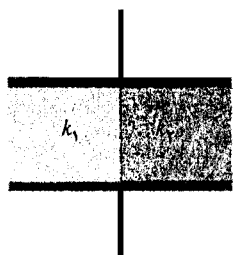
$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 1 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow 6/38 \times 10^3 = \frac{V}{1 \times 10^{-3}} \Rightarrow V = 6/38 \text{ V}$$

دی‌الکتریک‌ها

۱۳) مطابق شکل زیر، فاصله بین صفحات خازن مسطحی را با دو دی‌الکتریک هم اندازه، پر کرده‌ایم. ظرفیت نهایی خازن را بر حسب k_1 ، k_2 و C_0 به دست آورید؟ (C_0 ظرفیت خازن در حالت خالی بودن فاصله‌ی بین صفحات است).

حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:



$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\begin{cases} C_1 = k_1 \epsilon_0 \frac{A_1}{d_1} \\ C_2 = k_2 \epsilon_0 \frac{A_2}{d_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = k_1 \epsilon_0 \frac{A}{2d} \\ C_2 = k_2 \epsilon_0 \frac{A}{2d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = k_1 \epsilon_0 \frac{A}{2d} \\ C_2 = k_2 \epsilon_0 \frac{A}{2d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{k_1 C_0}{2} \\ C_2 = \frac{k_2 C_0}{2} \end{cases}$$

دو خازن با هم موازی هستند پس:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{eq} = \frac{k_1 C_0}{2} + \frac{k_2 C_0}{2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{k_1 + k_2}{2} C_0$$

۱۴) ظرفیت خازن مسطحی با ورقه‌ای از میکا به عنوان دی‌الکتریک 50 pF است. اگر فاصله بین صفحات 1 mm (باشد الف) مساحت هر صفحه ب) بیشینه ولتاژ قابل استفاده را به دست آورید.

حل:

الف) ضریب دی‌الکتریک میکا برابر ۶ است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 1 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F} \\ C = 50 \text{ pF} \end{cases} \Rightarrow C = 50 \times 10^{-12} \Rightarrow C = 5 \times 10^{-11} \text{ F}$$

$$C = k \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow 5 \times 10^{-11} = 6 \times 8/85 \times 10^{-12} \times \frac{A}{1 \times 10^{-3}} \Rightarrow A = 9/4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

ب) با توجه به این که استقامت دی‌الکتریک میکا $E_D = 150 \times 10^6 \frac{V}{m}$ است پس:

$$E_D = \frac{V_D}{d} \Rightarrow 150 \times 10^6 = \frac{V_D}{1 \times 10^{-2}} \Rightarrow V_D = 1.5 \times 10^4 \text{ V}$$

مسائل تکمیلی

۱۵) خازن مسطحی با صفحه‌هایی به مساحت A و فاصله‌ی d را در نظر بگیرید. این خازن به باتری با اختلاف پتانسیل V متصل است. تیغه‌ای فلزی به ضخامت l ($l < d$) به موازات صفحه‌ها در وسط فاصله بین آن‌ها قرار دارد. می‌خواهیم پس از جدا کردن باتری از مدار، تیغه‌ی فلزی را برداریم. برای

این منظور چه قدر کار لازم است؟



حل:

قبل از خارج کردن تیغه‌ی فلزی:

اگر به جای دی‌الکتریک، تیغه‌ی فلزی بین صفحات قرار گیرد فقط فاصله‌ی بین صفحات کاهش می‌یابد که مستقل از محل قرار گرفتن تیغه‌ی فلزی است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{(d-l)}$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow \frac{\epsilon_0 A}{(d-l)} = \frac{Q_1}{V} \Rightarrow Q_1 = \frac{\epsilon_0 AV}{(d-l)} \quad (1)$$

بعد از خارج کردن تیغه‌ی فلزی با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

اگر خازنی به باتری وصل شود و سپس جدا شود و تغییری در ساختار آن دهیم بار خازن ثابت می‌ماند ولی

ظرفیت و اختلاف پتانسیل آن، تغییر می‌کند یعنی: $Q_1 = Q_2$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{Q_1}{V_2} \Rightarrow V_2 = \frac{Q_1 d}{\epsilon_0 A}$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$V_2 = \frac{\epsilon_0 AV}{(d-l)} \times \frac{d}{\epsilon_0 A} \Rightarrow V_2 = \frac{Vd}{(d-l)}$$

با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن، برای هر یک از خازن‌ها می‌توان نوشت:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 A}{(d-l)} \times V^2 \Rightarrow U_1 = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2(d-l)}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 A}{d} \times \left[\frac{Vd}{(d-l)} \right]^2 \Rightarrow U_2 = \frac{\epsilon_0 AV^2 d}{2(d-l)^2}$$

فصل ۵

کار لازم برای خارج کردن تیغه‌ی فلزی برابر تغییر انرژی خازن است پس:

$$W = \Delta U \Rightarrow W = U_f - U_i \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0 AV^2 d}{2(d-l)^2} - \frac{\epsilon_0 AV^2}{2(d-l)} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2(d-l)} \left[\frac{d}{d-l} - 1 \right] \Rightarrow$$

$$W = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2(d-l)} \left[\frac{d - (d-l)}{d-l} \right] \Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 AV^2}{(d-l)}$$

۱۶) خازن مسطحی با صفحاتی به مساحت A و فاصله‌ی d را در نظر بگیرید. بار ذخیره شده روی صفحه‌ها $\pm Q$ است. پس از جدا کردن باتری، نیروی بین صفحات چه قدر است؟ این نیرو جاذبه است یا دافعه؟ (راهنمایی: از رابطه‌ی $F_x = -\frac{dU}{dx}$ استفاده کنید.)
حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{x}$$

x فاصله‌ی متغیر بین صفحات خازن است. با استفاده از رابطه‌ی انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow U = \frac{Q^2}{2 \times \frac{\epsilon_0 A}{x}} \Rightarrow U = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A}$$

dW کار لازم برای افزایش فاصله‌ی میان صفحات خازن مسطح از x به $x + dx$ است.

$$dW = U_f - U_i \Rightarrow F dx = U_f - U_i \Rightarrow F dx = \frac{Q^2 (x + dx)}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A} \Rightarrow$$

$$F dx = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A} + \frac{Q^2 dx}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A} \Rightarrow F dx = \frac{Q^2 dx}{2\epsilon_0 A} \Rightarrow F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$$

چون صفحات خازن به طور غیر همنام باردار می‌شوند پس نیروی بین این دو صفحه از نوع نیروی جاذبه است.

۱۷) خازن مسطحی با ظرفیت C را به وسیله‌ی باتری با اختلاف پتانسیل V باردار می‌کنیم. در حالی که باتری به مدار وصل است فاصله بین صفحات خازن را با دی‌الکتریک k کاملاً پر می‌کنیم. انرژی ذخیره شده در خازن را به دست آورید.

حل:

قبل از وارد شدن دی‌الکتریک: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (1)$$

با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 A}{d} \times V^2 \Rightarrow U = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2d}$$

بعد از وارد کردن دی‌الکتریک: اگر خازنی به باتری وصل باشد و باتری جدا نشود و تغییری در ساختار خازن

دهیم اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت می‌ماند ولی ظرفیت و بار تغییر می‌کند یعنی: $V' = V$
با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C' = k\epsilon_0 \frac{A}{d}$$

با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

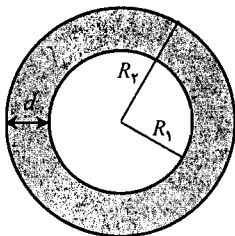
$$U' = \frac{1}{2} C' V'^2 \Rightarrow U' = \frac{1}{2} \times k\epsilon_0 \frac{A}{d} \times V'^2 \Rightarrow U' = \frac{k\epsilon_0 A V'^2}{2d}$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی فوق با رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت: $U' = k \left(\frac{C V'^2}{2} \right)$

(۱۸) خازن کروی متشکل از کره‌های هم‌مرکز با شعاع‌های R_1 و R_2 را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید وقتی $R_2 \ll R_1$ باشد ظرفیت این خازن به صورت ظرفیت خازن مسطح درمی‌آید. ب) نشان دهید در حالت حدی، ظرفیت خازن کروی به صورت ظرفیت کره‌ی منزوی درمی‌آید.

حل:

الف) با توجه به شکل: $d = R_2 - R_1$ است و از آنجا که $R_2 \gg R_1$ است پس می‌توان شعاع متوسطی را برای این خازن تعریف کرد:



$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} \Rightarrow A = 4\pi R^2$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن کروی می‌توان نوشت:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

رابطه‌ی به دست آمده مشابه ظرفیت خازن مسطح است.

ب) در حالت حدی R_2 به سمت بی‌نهایت میل می‌کند پس می‌توان از R_1 در مقابل R_2 چشم‌پوشی کرد.

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R_1$$

رابطه‌ی به دست آمده مشابه ظرفیت یک کره‌ی منزوی است.

(۱۹) تیغی دی‌الکتریک با ثابت k را در فاصله‌ی بین صفحات خازن مسطحی قرار می‌دهیم. نشان دهید رابطه بین چگالی بارهای مقید روی دی‌الکتریک σ_b و چگالی سطحی بارهای آزاد روی صفحات خازن σ_f به صورت: $\sigma_b = \frac{k-1}{k} \sigma_f$ است.

حل: برای خازن بدون دی‌الکتریک، میدان ناشی از صفحات باردار به صورت: $E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$ است.

فصل ۵

برای خازن دارای دی‌الکتریک، میدان ناشی از صفحات باردار به صورت: $E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\epsilon_0}$ است.

$$E = \frac{E_0}{k} \Rightarrow \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_f}{k} \Rightarrow \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_f}{k\epsilon_0} \Rightarrow k\sigma_f - k\sigma_b = \sigma_f \Rightarrow k\sigma_f - \sigma_f = k\sigma_b \Rightarrow$$

$$\sigma_f(k-1) = k\sigma_b \Rightarrow \sigma_b = \frac{k-1}{k}\sigma_f$$

مسائل

جریان و چگالی جریان

(۱) جریان 200 mA از سیم نقره‌ای به شعاع 0.8 mm عبور می‌کند. الف) سرعت سوق الکترون‌ها (ب) میدان الکتریکی داخل سیم را به دست آورید. چگالی الکترون‌های آزاد را $5/8 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ فرض کنید.

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} 1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A} \\ I = 200 \text{ mA} \end{cases} \Rightarrow I = 200 \times 10^{-3} \Rightarrow I = 2 \times 10^{-1} \text{ A}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ r = 0.8 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow r = 0.8 \times 10^{-3} \Rightarrow r = 8 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times (8 \times 10^{-4})^2 \Rightarrow A = 2/0.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

با استفاده از تعریف شدت جریان می‌توان نوشت:

$$I = n A q v_d \Rightarrow 2 \times 10^{-1} = 5/8 \times 10^{28} \times 2/0.1 \times 10^{-6} \times 1/6 \times 10^{-19} \times v_d \Rightarrow v_d = 1/0.7 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) با استفاده از تعریف چگالی جریان و میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} J = \frac{E}{\rho} \\ J = \frac{I}{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{I}{A} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow \frac{2 \times 10^{-1}}{2/0.1 \times 10^{-6}} = \frac{E}{1/5 \times 10^{-8}} \Rightarrow E = 1/49 \times 10^{-2} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

(۲) در استارت موتور اتومبیلی، جریان عبوری از کابل مسی به شعاع 0.3 cm برابر A است. الف) چگالی جریان آن (ب) میدان الکتریکی داخل سیم را به دست آورید.

فصل ۶

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 0.3 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 0.3 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14 \times (3 \times 10^{-3})^2 \Rightarrow A = 2.83 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

با استفاده از تعریف چگالی جریان می توان نوشت:

$$J = \frac{I}{A} \Rightarrow J = \frac{10}{2.83 \times 10^{-5}} \Rightarrow J = 3.53 \times 10^6 \frac{A}{m^2}$$

ب) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی می توان نوشت:

$$J = \frac{E}{\rho} \Rightarrow 3.53 \times 10^6 = \frac{E}{1.7 \times 10^{-8}} \Rightarrow E = 6.0 \times 10^{-2} \frac{V}{m}$$

۳) اگر جریان عبوری از سیمی بر حسب آمپر به صورت: $I = 2t^2 - 3t + 5$ تغییر کند مقدار بار الکتریکی را به دست آورید که در بازه‌ی زمانی $t = 2$ s تا $t = 5$ s از هر مقطع سیم، عبور می‌کند.

حل: با استفاده از تعریف شدت جریان می توان نوشت:

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I dt \Rightarrow Q = \int I dt \Rightarrow Q = \int (2t^2 - 3t + 5) dt \Rightarrow$$

$$Q = \int 2t^2 dt - \int 3t dt + \int 5 dt \Rightarrow Q = 2 \times \frac{t^3}{3} \Big|_{t=2}^{t=5} - 3 \times \frac{t^2}{2} \Big|_{t=2}^{t=5} + 5 \times t \Big|_{t=2}^{t=5}$$

$$Q = \frac{2}{3} \times (5^3 - 2^3) - \frac{3}{2} \times (5^2 - 2^2) + 5 \times (5 - 2) \Rightarrow Q = 61/3 \text{ C}$$

مقاومت

۴) لوله‌ی استوانه‌ای به طول l ، شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با مقاومت ویژه‌ی ρ را در نظر

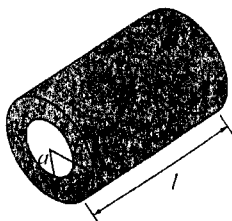
بگیرید. مقاومت بین دو سر آن چه قدر است؟

حل: A سطح مقطع لوله برابر است با:

$$A = \pi b^2 - \pi a^2 \Rightarrow A = \pi(b^2 - a^2)$$

با استفاده از تعریف مقاومت می توان نوشت:

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow R = \rho \frac{l}{\pi(b^2 - a^2)}$$



۵) از بستن متوالی مقاومت کربنی و مقاومتی از جنس نیکروم، مقاومت معادلی به دست آمده که مقدار آن، مستقل از دما است. چند درصد مقاومت معادل، ناشی از مقاومت کربنی است؟

جریان و مقاومت - مسائل

حل: با استفاده از تعریف مقاومت می توان نوشت:

$$R_1 = R_{1_0} (1 + \alpha_1 \Delta T) \quad \text{و} \quad R_2 = R_{2_0} (1 + \alpha_2 \Delta T)$$

از به هم بستن متوالی مقاومت ها، مقاومت معادلی به دست می آید که برابر حاصل جمع نکت تک آن ها است.

$$R = R_1 + R_2 \Rightarrow R = R_{1_0} (1 + \alpha_1 \Delta T) + R_{2_0} (1 + \alpha_2 \Delta T) \Rightarrow R = R_{1_0} + R_{1_0} \alpha_1 \Delta T + R_{2_0} + R_{2_0} \alpha_2 \Delta T$$

مقاومت معادل، مستقل از دما است پس: $\frac{dR}{dT} = 0$

$$\frac{dR}{dT} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dT} (R_{1_0} + R_{1_0} \alpha_1 \Delta T + R_{2_0} + R_{2_0} \alpha_2 \Delta T) = 0 \Rightarrow 0 + R_{1_0} \alpha_1 + 0 + R_{2_0} \alpha_2 = 0 \Rightarrow$$

$$R_{2_0} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} R_{1_0} \quad (1)$$

مقاومت معادل مستقل از دما است پس:

$$R = R_0 \Rightarrow R = R_{1_0} + R_{2_0}$$

کسر مقاومت کربنی در مقاومت کل:

$$\frac{R_{1_0}}{R} \times 100 = \frac{R_{1_0}}{R_{1_0} + R_{2_0}} \times 100$$

با استفاده از رابطه ی (۱) می توان نوشت:

$$\frac{R_{1_0}}{R_{1_0} + R_{2_0}} \times 100 = \frac{R_{1_0}}{R_{1_0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} R_{1_0}} \times 100 \Rightarrow \frac{R_{1_0}}{R_{1_0} + R_{2_0}} \times 100 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times 100 \Rightarrow$$

$$\frac{R_{1_0}}{R_{1_0} + R_{2_0}} \times 100 = \frac{1}{1 - \left(\frac{-0.5 \times 10^{-3}}{0.4 \times 10^{-3}} \right)} \times 100 \Rightarrow \frac{R_{1_0}}{R_{1_0} + R_{2_0}} \times 100 = 44 / 44 \%$$

۶) در دمای $20^\circ C$ ، مقاومت یک سیم مسی 1Ω است. در چه دمایی، مقاومت آن (الف) ۱۰٪ افزایش

ب) ۱۰٪ کاهش می یابد؟

حل:

(الف)

$$R = R_0 + \frac{1}{100} R_0 \Rightarrow R = 1/1 R_0 \Rightarrow R = 1/1 \times 1 \Rightarrow R = 1/1 \Omega$$

با استفاده از تعریف مقاومت می توان نوشت:

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta T) \Rightarrow 1/1 = 1 \times (1 + 3/9 \times 10^{-3} \times \Delta T) \Rightarrow 0/1 = 3/9 \times 10^{-3} \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta T = 25/6^\circ C \Rightarrow T - T_0 = 25/6 \Rightarrow T - 20 = 25/6 \Rightarrow T = 45/6^\circ C$$

ب)

$$R = R_0 - \frac{1}{100} R_0 \Rightarrow R = 0/9 R_0 \Rightarrow R = 0/9 \times 1 \Rightarrow R = 0/9 \Omega$$

فصل ۶

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T) \Rightarrow 0.9 = 1 \times (1 + 3/9 \times 10^{-2} \times \Delta T) \Rightarrow -0.1 = 3/9 \times 10^{-2} \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta T = -25/6 \text{ } ^\circ\text{C} \Rightarrow T - T_0 = -25/6 \Rightarrow T - 20 = -25/6 \Rightarrow T = -5/6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

علامت منفی، نشان‌دهنده‌ی کاهش دما است.

قانون اهم و توان

۷) یک خط انتقال برق به طول 200 km ، مقاومت $10 \text{ } \Omega$ و جریان A 1200 را در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه به فاصله‌ی m 200 چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \Rightarrow l = 200 \times 10^3 \Rightarrow l = 2 \times 10^5 \text{ m} \\ l = 200 \text{ km} \end{cases}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow 10 = \frac{\rho}{A} \times 2 \times 10^5 \Rightarrow \frac{\rho}{A} = 5 \times 10^{-5}$$

در کل طول خط انتقال برق ثابت است. با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R' = \rho \frac{l'}{A} \Rightarrow R' = 5 \times 10^{-5} \times 200 \Rightarrow R' = 1 \times 10^{-2} \text{ } \Omega$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R' = \frac{V}{I} \Rightarrow 1 \times 10^{-2} = \frac{V}{1200} \Rightarrow V = 12 \text{ V}$$

۸) باتری اتومبیلی با مشخصات 12 V و 80 Ah را در نظر بگیرید. الف) مقدار بار قابل استفاده از آن چه قدر است؟ ب) اگر اختلاف پتانسیل، ثابت باشد برای چه مدت می‌توان از آن 25 W برق گرفت؟
حل:

الف) با استفاده از تعریف شدت جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \Rightarrow t = 1 \times 3600 \Rightarrow t = 3600 \text{ s} \\ t = 1 \text{ s} \end{cases}$$

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow 80 = \frac{Q}{3600} \Rightarrow Q = 2/88 \times 10^5 \text{ C}$$

ب) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = VI \Rightarrow P = V \frac{Q}{t} \Rightarrow 25 = 12 \times \frac{2/88 \times 10^5}{t} \Rightarrow t = 1/38 \times 10^5 \text{ s}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \Rightarrow t = 1/38 \times 10^5 \times \frac{1}{3600} \Rightarrow t = 38/4 \text{ h} \\ t = 1/38 \times 10^5 \text{ s} \end{cases}$$

۹) بلندگویی با مقاومت 8Ω و توان 30 mW با استفاده از باتری 9 V ، تغذیه می‌شود. در هر دقیقه از قطب منفی باتری چند الکترون، خارج می‌شود؟
حل: با استفاده از تعریف توان داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ W} \\ P = 30 \text{ mW} \end{cases} \Rightarrow P = 30 \times 10^{-3} \Rightarrow P = 3 \times 10^{-2} \text{ W}$$

$$P = RI^2 \Rightarrow 30 \times 10^{-3} = 8 \times I^2 \Rightarrow I^2 = 37/5 \times 10^{-4} \Rightarrow I = 6/12 \times 10^{-2} \text{ A}$$

با استفاده از تعریف شدت جریان و بار الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \\ t = 1 \text{ min} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \times 60 \Rightarrow t = 60 \text{ s}$$

$$\begin{cases} I = \frac{Q}{t} \\ Q = ne \end{cases} \Rightarrow I = \frac{ne}{t} \Rightarrow 6/12 \times 10^{-2} = \frac{n \times 1/6 \times 10^{-19}}{60} \Rightarrow n = 2/3 \times 10^{19}$$

۱۰) لوله‌ی شیشه‌ای به شعاع 1 cm و طول 20 cm محتوی آب را در نظر بگیرید. برای این که در مدت 4 min ، آب را 30°C گرم کنیم چه اختلاف پتانسیلی، لازم است؟ مقاومت ویژه آب را $10^{-2} \Omega \text{ m}$ فرض کنید.

حل: با استفاده از تعریف چگالی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 1 \text{ cm} \\ l = 20 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \times 10^{-2} \\ l = 20 \times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0/01 \text{ m} \\ l = 0/2 \text{ m} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{m}{\pi r^2 l} \Rightarrow 1000 = \frac{m}{3/14 \times (0/01)^2 \times 0/2} \Rightarrow m = 6/28 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی گرمایی و گرمای تولیدی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \\ t = 4 \text{ min} \end{cases} \Rightarrow t = 4 \times 60 \Rightarrow t = 240 \text{ s}$$

$$Q = W \Rightarrow mc\Delta\theta = \frac{V^2}{R} t \Rightarrow mc\Delta\theta = \frac{V^2}{\frac{\rho l}{A}} t \Rightarrow V^2 = \frac{\rho l mc\Delta\theta}{At} \Rightarrow V^2 = \frac{\rho l mc\Delta\theta}{\pi r^2 t}$$

$$V^2 = \frac{10^{-2} \times 0/2 \times 6/28 \times 10^{-2} \times 4200 \times 30}{3/14 \times (0/01)^2 \times 240} \Rightarrow V^2 = 210 \Rightarrow V = 14/5 \text{ V}$$

مسائل تکمیلی

۱۱) نیکروم، آلیاژی است که از آن در آبگرمکنی به عنوان مولد گرما استفاده شده که با ولتاژ 120 V کار می‌کند. در دمای 20°C ، مقاومت این مولد 16Ω است. الف) اگر شعاع سیم 1 mm باشد طول

فصل ۶

سیم مولد گرما چه قدر است؟ (ب) در دمای $200^\circ C$ ، جریان عبوری از مولد چه قدر است؟

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow r = 1 \times 10^{-3} \text{ m} \\ r = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times (1 \times 10^{-3})^2 \Rightarrow A = 3/14 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

با استفاده از تعریف مقاومت می توان نوشت:

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow 16 = 1/2 \times 10^{-6} \times \frac{l}{3/14 \times 10^{-6}} \Rightarrow l = 41/9 \text{ m}$$

ب) با استفاده از تعریف مقاومت می توان نوشت:

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T) \Rightarrow R = 16 \times [1 + 0/4 \times 10^{-2} \times (200 - 20)] \Rightarrow R = 17/15 \Omega$$

با استفاده از قانون اهم می توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 17/15 = \frac{120}{I} \Rightarrow I = 7/10 \text{ A}$$

۱۲) لوله ای استوانه ای به طول L ، شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و مقاومت ویژه ρ را در نظر بگیرید. اگر جریان به طور شعاعی از سطح داخلی به طرف سطح خارجی در حرکت باشد الف) نشان

دهید مقاومت از رابطه ی: $R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$ به دست می آید. ب) مقاومت یک رشته ی کربنی با ابعاد

$L = 30 \text{ cm}$ و $b = 3 \text{ cm}$ ، $a = 0/4 \text{ cm}$ را به دست آورید. (راهنمایی: از معادله ی $J = \frac{E}{\rho}$ استفاده

کنید و توجه داشته باشید $E_r = -\frac{dV}{dr}$ است.)

حل:

الف) با استفاده از تعریف مقاومت و خازن می توان نوشت:

$$\begin{cases} R = \rho \frac{l}{A} \\ C = \epsilon \frac{A}{l} \end{cases} \Rightarrow RC = \rho \frac{l}{A} \times \epsilon \frac{A}{l} \Rightarrow RC = \rho \epsilon \quad (1)$$

در فصل قبل ظرفیت خازن استوانه ای را به صورت: $C = \frac{2\pi \epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}$ محاسبه کردیم. با جاگذاری در رابطه ی (۱)

می توان نوشت:

$$R \times \frac{2\pi \epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} = \rho \epsilon \Rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi L} = \ln \frac{b}{a}$$

توجه کنید در روابط فوق، L طول لوله‌ی استوانه‌ای شکل و $l = b - a$ ، اختلاف شعاع داخلی و خارجی است.
 (ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ a = 0.4 \text{ cm} \\ b = 3 \text{ cm} \\ L = 30 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.4 \times 10^{-2} \\ b = 3 \times 10^{-2} \\ L = 30 \times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \times 10^{-3} \text{ m} \\ b = 3 \times 10^{-2} \text{ m} \\ L = 3 \times 10^{-1} \text{ m} \end{cases}$$

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow R = \frac{3/5 \times 10^{-5}}{2 \times 3 / 14 \times 3 \times 10^{-1}} \times \ln \frac{3 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-3}} \Rightarrow R = 37 / 4 \times 10^{-6} \Omega$$

۱۳) قرص نارسانایی به شعاع a و چگالی بار سطحی یکنواخت σ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور قائم عبوری از مرکز آن می‌چرخد. شدت جریان عبوری از صفحه‌ی عمود بر سطح قرص چه قدر است؟ (راهنمایی: ابتدا جریان ناشی از حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr را به دست آورید.)

حل: با استفاده از تعریف چگالی سطحی بار می‌توان نوشت:

$$dq = \sigma dS \Rightarrow dq = \sigma r dr d\theta$$

I_r جریان ناشی از حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr :

$$I_r = \frac{dq}{dt} \Rightarrow I_r = \sigma r dr \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow I_r = \sigma \omega r dr$$

I کل جریان:

$$I = \sum I_r \Rightarrow I = \int_0^a \sigma \omega r dr \Rightarrow I = \sigma \omega \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^a \Rightarrow I = \frac{\sigma \omega a^2}{2}$$

۱۴) دو سیم فولادی و مسی، هر یک به طول 40 m و شعاع 1 mm را از یک سر به هم وصل کرده و به دو سر آزاد آن‌ها اختلاف پتانسیل 10 V را اعمال می‌کنیم. الف) توان اتلافی هر یک از سیم‌ها ب) میدان الکتریکی در هر یک از آن‌ها را به دست آورید.

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ r = 1 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow r = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times (1 \times 10^{-3})^2 \Rightarrow A = 3/14 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R_1 = \rho_1 \frac{l}{A} \Rightarrow R_1 = 40 \times 10^{-8} \times \frac{40}{3/14 \times 10^{-6}} \Rightarrow R_1 = 5/10 \Omega$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{l}{A} \Rightarrow R_2 = 1/2 \times 10^{-8} \times \frac{40}{3/14 \times 10^{-6}} \Rightarrow R_2 = 0/22 \Omega$$

فصل ۶

چون مقاومت‌ها به صورت متوالی در مدار، قرار گرفته‌اند مقاومت معادل برابر مجموع آن‌ها است.

$$R = R_1 + R_2 \Rightarrow R = 5/10 + 0/22 \Rightarrow R = 5/22 \Omega$$

برای مقاومت معادل با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 5/22 = \frac{10}{I} \Rightarrow I = 1/88 \text{ A}$$

چون مقاومت‌ها به صورت متوالی در مدار قرار گرفته‌اند پس شدت جریان عبوری از آن‌ها یکسان است.

$$I = I_1 = I_2 \Rightarrow I_1 = I_2 = 1/88 \text{ A}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_1 = R_1 I_1^2 \Rightarrow P_1 = 5/10 \times (1/88)^2 \Rightarrow P_1 = 18 \text{ W}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 \Rightarrow P_2 = 0/22 \times (1/88)^2 \Rightarrow P_2 = 0/77 \text{ W}$$

ب) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی و چگالی جریان می‌توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \frac{E}{\rho} \\ J = \frac{I}{A} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{I}{A} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow E = \frac{\rho I}{A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_1 = \frac{\rho_1 I_1}{A_1} \\ E_2 = \frac{\rho_2 I_2}{A_2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = \frac{40 \times 10^{-8} \times 1/88}{3/14 \times 10^{-6}} \\ E_2 = \frac{1/2 \times 10^{-8} \times 1/88}{3/14 \times 10^{-6}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_1 = 0/24 \frac{V}{m} \\ E_2 = 1/02 \times 10^{-2} \frac{V}{m} \end{array} \right.$$

مسائل

نیروی محرکه‌ی الکتریکی emf

(۱) باتری با نیروی محرکه‌ی \mathcal{E} و مقاومت داخلی r را به مقاومت خارجی R وصل کرده‌ایم. وقتی که $R = 4 \Omega$ است اختلاف پتانسیل دو سر آن $V = 9/5$ و وقتی که $R = 6 \Omega$ است اختلاف پتانسیل دو سر $V = 10$ می‌شود. \mathcal{E} و r را به دست آورید.

حل:

حالت اول: با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 4 = \frac{9/5}{I} \Rightarrow I = 2/375 \text{ A}$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت خارجی R برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری است.

با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل دو سر باتری می‌توان نوشت:

$$V = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow 9/5 = \mathcal{E} - 2/375 \times r \Rightarrow \mathcal{E} - 2/375 r = 9/5 \quad (1)$$

حالت دوم: به طور مشابه با حالت اول می‌توان نوشت:

$$R' = \frac{V'}{I'} \Rightarrow 6 = \frac{10}{I'} \Rightarrow I' = 1/667 \text{ A}$$

$$V' = \mathcal{E} - I'r = 10 = \mathcal{E} - 1/667 \times r \Rightarrow \mathcal{E} - 1/667 r = 10 \quad (2)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \mathcal{E} - 2/375 r = 9/5 \\ \mathcal{E} - 1/667 r = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\mathcal{E} + 2/375 r = -9/5 \\ \mathcal{E} - 1/667 r = 10 \end{cases} \Rightarrow 0/708 r = 0/5 \Rightarrow r = 0/706 \Omega$$

با جاگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\mathcal{E} - 2/375 \times 0/706 = 9/5 \Rightarrow \mathcal{E} = 11/2 \text{ V}$$

فصل ۷

۲) توان مصرفی در یک مقاومت خارجی 4Ω ، هنگام اتصال به باتری 16 V برابر 50 W است. الف) مقاومت داخلی باتری را به دست آورید. ب) به ازای چه مقداری از مقاومت خارجی، توان مصرفی به 100 W می‌رسد؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = \frac{I^2 R}{R} \Rightarrow 50 = \frac{I^2 R}{4} \Rightarrow I^2 R = 200 \Rightarrow I = 14/14 \text{ V}$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 4 = \frac{14/14}{I} \Rightarrow I = 3/54 \text{ A}$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت خارجی، برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری است.

با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل دو سر باتری می‌توان نوشت:

$$V = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow 14/14 = 16 - 3/54 \times r \Rightarrow r = 0/525 \Omega$$

ب) با استفاده از تعریف توان و رابطه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر باتری می‌توان نوشت:

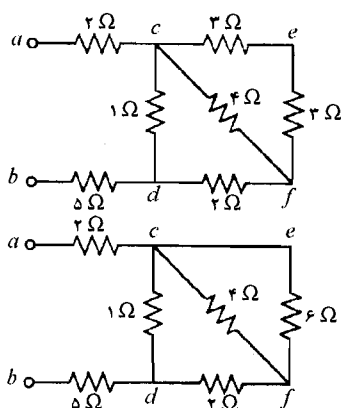
$$\begin{cases} P = VI \\ V = \mathcal{E} - Ir \end{cases} \Rightarrow P = (\mathcal{E} - Ir) \times I \Rightarrow P = \mathcal{E}I - rI^2 \Rightarrow 100 = 16 \times I - 0/525 \times I^2 \Rightarrow$$

$$0/525 I^2 - 16I + 100 = 0 \Rightarrow I = \frac{16 \pm \sqrt{(16)^2 - 4 \times 0/525 \times 100}}{2 \times 0/525} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 8/78 \text{ A} \\ I_2 = 21/7 \text{ A} \end{cases}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = RI^2 \Rightarrow \begin{cases} 100 = R_1 \times (8/78)^2 \\ 100 = R_2 \times (21/7)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 1/297 \Omega \\ R_2 = 0/212 \Omega \end{cases}$$

قاعده‌های کیرشهف، همبندی‌های متوالی و موازی



۳) الف) مقاومت معادل مجموعه مقاومت‌های شکل زیر را به دست آورید. ب) وقتی که به دو سر a و b ، اختلاف پتانسیل 10 V را وصل می‌کنیم اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت 4Ω چه قدر می‌شود؟

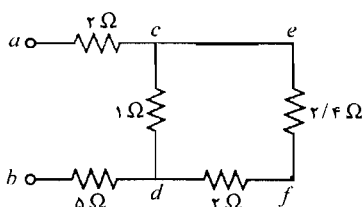
حل:

الف)

شاخه‌ی cef :

دو مقاومت، متوالی هستند.

$$R_{cef} = 2 + 2 \Rightarrow R_{cef} = 4 \Omega$$



حلقه‌ی cef:

دو مقاومت، موازی هستند.

$$\frac{1}{R'_{cef}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \Rightarrow R'_{cef} = 2/4 \Omega$$

شاخه‌ی cefd:

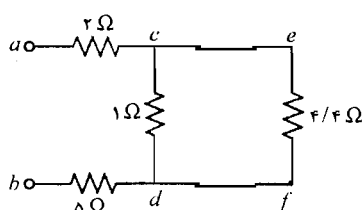
دو مقاومت، متوالی هستند.

$$R_{cefd} = 2/4 + 2 \Rightarrow R_{cefd} = 4/4 \Omega$$

حلقه‌ی cefd:

دو مقاومت، موازی هستند.

$$\frac{1}{R'_{cefd}} = \frac{1}{4/4} + \frac{1}{1} \Rightarrow R'_{cefd} = 0.82 \Omega$$



کل مجموعه:

سه مقاومت، متوالی هستند:

$$R = 2 + 0.82 + 5 \Rightarrow R = 7/82 \Omega$$

(ب) با استفاده از قانون اهم برای کل مدار می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 7/82 = \frac{10}{I} \Rightarrow I = 1/28 \text{ A}$$

مقاومت‌های 2Ω ، 0.82Ω و 5Ω متوالی هستند پس شدت جریان در آن‌ها یکسان و برابر $1/28 \text{ A}$ است.برای محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت 0.82Ω با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 0.82 = \frac{V}{1/28} \Rightarrow V = 1/0.5 \text{ A}$$

مقاومت 0.82Ω معادل دو مقاومت 1Ω و $4/4 \Omega$ است که به صورت موازی قرار گرفته‌اند. پس اختلافپتانسیل دو سر این مقاومت‌ها یکسان و برابر $1/0.5 \text{ V}$ است.برای محاسبه‌ی شدت جریان در مقاومت $4/4 \Omega$ ، با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 4/4 = \frac{1/0.5}{I} \Rightarrow I = 0.24 \text{ A}$$

مقاومت $4/4 \Omega$ معادل دو مقاومت $2/4 \Omega$ و 2Ω است که به صورت متوالی قرار گرفته‌اند. پس شدتجریان در این مقاومت‌ها یکسان و برابر 0.24 A است.برای محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $2/4 \Omega$ ، با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 2/4 = \frac{V}{0.24} \Rightarrow V = 0.576 \text{ V}$$

مقاومت $2/4 \Omega$ معادل دو مقاومت 6Ω و 4Ω است که به صورت موازی قرار گرفته‌اند. پس اختلافپتانسیل دو سر این مقاومت‌ها یکسان و برابر 0.576 V است.

فصل ۷

۴) کمترین تعداد مقاومتهای لازم چه قدر باشد تا گستره‌ی مقاومتهای 1Ω تا 10Ω به صورت

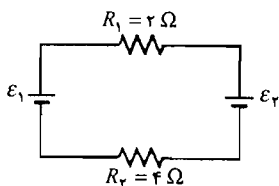
مضربهای صحیح، ایجاد شود. این مجموعه مقادیر یکتا است؟

حل: با استفاده از مقاومتهای $1 \Omega, 2 \Omega, 3 \Omega$ و 4Ω می‌توان این کار را انجام داد:

$$\begin{array}{lll} 4+1=5 & 4+3=7 & 4+3+2=9 \\ 4+2=6 & 4+3+1=8 & 4+3+2+1=10 \end{array}$$

این جواب، یکتا نیست زیرا می‌توان با استفاده از مقاومتهای $1 \Omega, 2 \Omega, 3 \Omega$ و 6Ω این کار را انجام داد.

۵) مطابق شکل زیر، دو باتری ایده‌آل را به طور متوالی به دو مقاومت بسته‌ایم. الف) جریان عبوری



از مدار ب) توان مصرفی هر مقاومت ج) توان خروجی هر

باتری را به دست آورید. فرض کنید $\epsilon_1 = 9V$ و

$\epsilon_2 = 6V$ است.

حل:

الف) با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-IR_1 - \epsilon_2 - IR_2 + \epsilon_1 = 0 \Rightarrow -I \times 2 - 6 - I \times 4 + 9 = 0 \Rightarrow 3 = 6I \Rightarrow I = 0.5 A$$

ب) با استفاده از تعریف توان داریم:

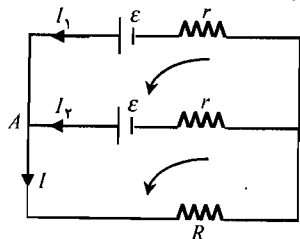
$$P = RI^2 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = R_1 I^2 \\ P_2 = R_2 I^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 2 \times (0.5)^2 \\ P_2 = 4 \times (0.5)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 0.5 W \\ P_2 = 1 W \end{cases}$$

ج) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = VI \Rightarrow P = \epsilon I \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \epsilon_1 I \\ P_2 = \epsilon_2 I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 9 \times 0.5 \\ P_2 = 6 \times 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 4.5 W \\ P_2 = 3 W \end{cases}$$

با توجه به شکل باتری ϵ_2 مصرف کننده است پس توان آن منفی است یعنی: $P_2 = -3 W$

۶) دو باتری با نیروی محرکه‌ی یکسان ϵ و مقاومت داخلی یکسان r را به طور موازی به مقاومت R



بسته‌ایم. به‌ازای چه مقداری از R ، توان اتلافی به بیشینه

مقدار می‌رسد؟

حل: با توجه به شکل و با استفاده از قانون جریان برای نقطه‌ی A

می‌توان نوشت:

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

در حلقه‌ی بالایی با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_1 r + \epsilon - \epsilon + I_2 r = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 \quad (2)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$I = I_1 + I_1 \Rightarrow I = 2I_1 \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$$

در حلقه‌ی پایینی، با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_1 r + \varepsilon - IR = 0 \Rightarrow -\frac{I}{r} r + \varepsilon - IR = 0 \Rightarrow \varepsilon = I \left(\frac{r}{r} + R \right) \Rightarrow \varepsilon = \frac{I}{r} (r + rR) \Rightarrow I = \frac{r\varepsilon}{r + rR}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = RI^r \Rightarrow P = R \times \left(\frac{r\varepsilon}{r + rR} \right)^r \Rightarrow P = \frac{rR\varepsilon^r}{(r + rR)^r}$$

وقتی $\frac{dP}{dR}$ برابر صفر شود اتلاف توان، بیشینه می‌شود:

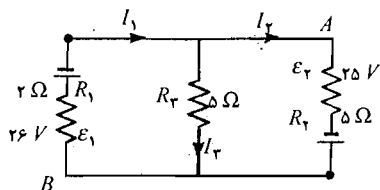
$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dR} \left[\frac{rR\varepsilon^r}{(r + rR)^r} \right] = 0 \Rightarrow r\varepsilon^r \left[\frac{(r + rR)^r - r \times r (r + rR) \times R}{(r + rR)^{2r}} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$r\varepsilon^r \left[\frac{(r + rR) - rR}{(r + rR)^r} \right] = 0 \Rightarrow r + rR - rR = 0 \Rightarrow r = rR \Rightarrow R = \frac{r}{r}$$

(۷) در مدار شکل مقابل: الف) جریان و اختلاف پتانسیل هر

مقاومت را به دست آورید. ب) اختلاف پتانسیل $V_A - V_B$ را به دست آورید.

حل:



الف) در نقطه‌ی C با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_r = I_1 + I_r \quad (1)$$

در حلقه‌ی $CEBD$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} -I_1 R_1 + \varepsilon_1 + I_r R_r &= 0 \Rightarrow -I_1 \times 2 + 26 + I_r \times 5 = 0 \Rightarrow \\ -2I_1 + 5I_r &= -26 \end{aligned} \quad (2)$$

در حلقه‌ی $ACDF$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_r R_r - I_r R_r - \varepsilon_r = 0 \Rightarrow -I_r \times 5 - I_r \times 5 - 25 = 0 \Rightarrow -5I_r - 5I_r = 25 \quad (3)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$-5I_r - 5(I_1 + I_r) = 25 \Rightarrow -5I_r - 5I_1 - 5I_r = 25 \Rightarrow -5I_1 - 10I_r = 25 \quad (4)$$

با استفاده از روابط (۲) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -2I_1 + 5I_r = -26 \\ -5I_1 - 10I_r = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4I_1 + 10I_r = -52 \\ -5I_1 - 10I_r = 25 \end{cases} \Rightarrow -9I_1 = -27 \Rightarrow I_1 = 3 \text{ A}$$

با جاگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$-2 \times 3 + 5I_r = -26 \Rightarrow 5I_r = -20 \Rightarrow I_r = -4 \text{ A}$$

علامت منفی جریان، نشان می‌دهد که جهت جریان I_r برعکس انتخاب شده است پس: $I_r = 4 \text{ A}$

با جاگذاری مقادیر I_1 و I_r در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$I_r = 3 + 4 \Rightarrow I_r = 7 \text{ A}$$

برای هر مقاومت با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

فصل ۷

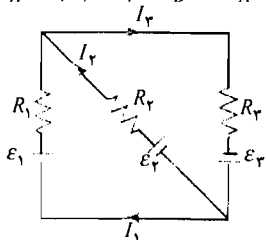
$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow r = \frac{V_1}{3} \Rightarrow V_1 = 6 V$$

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} \Rightarrow 5 = \frac{V_2}{4} \Rightarrow V_2 = 20 V$$

$$R_3 = \frac{V_3}{I_3} \Rightarrow 5 = \frac{V_3}{7} \Rightarrow V_3 = 35 V$$

(ب)

$$V_A - I_1 R_1 + \varepsilon_1 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = I_1 R_1 - \varepsilon_1 \Rightarrow V_A - V_B = 3 \times 2 - 26 \Rightarrow V_A - V_B = -20 V$$



(۸) در مدار شکل مقابل، جریان عبوری از هر مقاومت و اختلاف

پتانسیل دو سر هر یک از آن‌ها را به دست آورید. فرض کنید:

$$\varepsilon_3 = 5 V \text{ و } \varepsilon_2 = 7 V, \varepsilon_1 = 12 V, R_3 = R_2 = 3 \Omega, R_1 = 4 \Omega$$

حل: در نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_3 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = I_3 - I_1 \quad (1)$$

در حلقه‌ی ABC با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_3 R_3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 - I_2 R_2 = 0 \Rightarrow -I_3 \times 3 + 5 + 7 - I_2 \times 3 = 0 \Rightarrow$$

$$-3I_3 - 3I_2 = -12 \quad (2)$$

در حلقه‌ی ABCD با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_3 R_3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0 \Rightarrow -I_3 \times 3 + 5 + 12 - I_1 \times 4 = 0 \Rightarrow$$

$$-4I_1 - 3I_3 = -17 \quad (3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$-3(I_3 - I_1) - 3I_3 = -12 \Rightarrow -3I_3 + 3I_1 - 3I_3 = -12 \Rightarrow 3I_1 - 6I_3 = -12 \quad (4)$$

با استفاده از روابط (۳) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -4I_1 - 3I_3 = -17 \\ 3I_1 - 6I_3 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8I_1 + 6I_3 = 34 \\ 3I_1 - 6I_3 = -12 \end{cases} \Rightarrow 11I_1 = 22 \Rightarrow I_1 = 2 A$$

با جایگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$-4 \times 2 - 3I_3 = -17 \Rightarrow -3I_3 = -9 \Rightarrow I_3 = 3 A$$

با جایگذاری مقادیر I_1 و I_3 در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت: $I_2 = 3 - 2 = 1 A$

برای هر مقاومت با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow r = \frac{V_1}{2} \Rightarrow V_1 = 8 V$$

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} \Rightarrow r = \frac{V_2}{1} \Rightarrow V_2 = 3 V$$

$$R_3 = \frac{V_3}{I_3} \Rightarrow r = \frac{V_3}{3} \Rightarrow V_3 = 9 V$$

۹) در مدار شکل زیر، مقادیر آمپرسنج و ولتسنج به ترتیب $6/0 A$ و $14 V$ است. نیروی محرکه \mathcal{E} و مقاومت R را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل و با استفاده از قانون جریان در نقطه B می توان نوشت:

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow 6 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

در حلقه $BCDE$ با استفاده از قانون ولتاژ می توان نوشت:

$$+16 + 12 - I_2 \times R - 4 \times I_1 = 0 \Rightarrow \\ 16 + 12 - I_2 R - 4 \times 6 = 0 \Rightarrow 4 - I_2 R = 0 \quad (2)$$

با توجه به شکل و نحوه ی قرار گرفتن ولتسنج داریم:

$$\mathcal{E} - 2 \times I_2 = V \Rightarrow \mathcal{E} - 2I_2 = 14 \quad (3)$$

در حلقه $ACDF$ با استفاده از قانون ولتاژ می توان نوشت:

$$+16 - 2 \times I_2 + \mathcal{E} - 2 \times I_2 - 4 \times I_1 = 0 \Rightarrow \\ 16 - 2I_2 + \mathcal{E} - 2I_2 - 4 \times 6 = 0 \Rightarrow \\ 16 - 2I_2 + \mathcal{E} - 2I_2 - 24 = 0$$

با جاگذاری رابطه (3) در رابطه ی فوق می توان نوشت:

$$16 - 2I_2 + 14 - 24 = 0 \Rightarrow 6 - 2I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 3 A$$

با جاگذاری رابطه ی فوق در رابطه (1) می توان نوشت:

$$6 = I_2 + I_3 \Rightarrow 6 = I_2 + 2 \Rightarrow I_2 = 4 A$$

با جاگذاری رابطه ی فوق در رابطه (2) می توان نوشت:

$$4 - 4 \times R = 0 \Rightarrow R = 1 \Omega$$

با جاگذاری مقدار I_2 در رابطه (3) می توان نوشت:

$$\mathcal{E} - 2 \times 2 = 14 \Rightarrow \mathcal{E} = 18 V$$

۱۰) توان مصرفی در مقاومت های R_1 و R_2 هنگامی که به طور موازی در مدار قرار می گیرند چهار برابر توانی است که در همبندی متوالی. با چشمه ی ایده آل یکسان به مصرف می رسد. در صورتی که $R_1 = 2 \Omega$ باشد R_2 چه قدر است؟

حل:

به هم بستن متوالی مقاومت ها:

$$R = R_1 + R_2$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_1 = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \Rightarrow P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

به هم بستن موازی مقاومت ها:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

فصل ۷

با استفاده از تعریف توان می توان نوشت:

$$P_T = \frac{V_T^2}{R'} \Rightarrow P_T = \frac{\varepsilon^2}{R'} \Rightarrow P_T = \frac{\varepsilon^2}{\frac{R_1 R_T}{R_1 + R_T}} \Rightarrow P_T = \frac{\varepsilon^2 (R_1 + R_T)}{R_1 R_T}$$

توان حالت موازی ۴ برابر توان حالت متوالی است:

$$P_T = 4P_1 \Rightarrow \frac{\varepsilon^2 (R_1 + R_T)}{R_1 R_T} = 4 \times \frac{\varepsilon^2}{R_1 + R_T} \Rightarrow 4R_1 R_T = (R_1 + R_T)^2 \Rightarrow$$

$$R_1^2 + 2R_1 R_T + R_T^2 - 4R_1 R_T = 0 \Rightarrow R_1^2 - 2R_1 R_T + R_T^2 = 0 \Rightarrow (R_1 - R_T)^2 = 0 \Rightarrow R_1 - R_T = 0$$

$$R_1 = 2 \Omega \Rightarrow 2 - R_T = 0 \Rightarrow R_T = 2 \Omega$$

(۱۱) در مدار زیر: الف) با استفاده از چه نیروی محرکه‌ای، توان مصرفی در R_T به W می‌رسد؟ ب)

توان اتلافی در مقاومت‌های دیگر چه قدر است؟ فرض کنید: $R_1 = 2 \Omega$ ، $R_T = 4 \Omega$ و $R_T = 2 \Omega$

حل:

الف) برای مقاومت R_T با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_T = \frac{V_T^2}{R_T} \Rightarrow 6 = \frac{V_T^2}{2} \Rightarrow V_T^2 = 12 \Rightarrow V_T = 3/46 \text{ V}$$

با استفاده از قانون اهم می توان نوشت:

$$R_T = \frac{V_T}{I_T} \Rightarrow 2 = \frac{3/46}{I_T} \Rightarrow I_T = 1/73 \text{ A}$$

در نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می توان نوشت:

$$I_1 = I_T + I_T \quad (1)$$

با توجه به شکل، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_T برابر

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_T است. با استفاده از قانون اهم

می توان نوشت:

$$R_T = \frac{V_T}{I_T} \Rightarrow 4 = \frac{3/46}{I_T} \Rightarrow I_T = 0/1866 \text{ A}$$

با جاگذاری مقادیر I_T و I_T در رابطه‌ی (۱) می توان نوشت:

$$I_1 = 0/1866 + 1/73 \Rightarrow I_1 = 2/60 \text{ A}$$

در حلقه‌ی بالایی، با استفاده از قانون ولتاژ می توان نوشت:

$$-I_1 R_1 + \varepsilon - I_T R_T = 0 \Rightarrow -2/60 \times 2 + \varepsilon - 0/1866 \times 4 = 0 \Rightarrow \varepsilon = 8/66 \text{ V}$$

ب) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_T = R_T I_T^2 \Rightarrow P_T = 4 \times (0/1866)^2 \Rightarrow P_T = 3 \text{ W}$$

$$P_1 = R_1 I_1^2 \Rightarrow P_1 = 2 \times (2/60)^2 \Rightarrow P_1 = 13/5 \text{ W}$$

مدارهای RC

۱۲) در یک مدار شارژ کنندهی RC می‌دانیم $R = 10^4 \Omega$ است. اگر بار ذخیره شدهی خازن در مدت $t = 2$ s از صفر به ۹۰٪ مقدار نهایی‌اش برسد ظرفیت C چه قدر است؟
حل: هنگام پر شدن خازن با استفاده از روابط مدار RC می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \tau = RC \\ Q = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \frac{90}{100} Q_0 = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \Rightarrow \frac{9}{10} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{10} \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln \frac{1}{10} \\ \frac{t}{RC} = \ln 10 \Rightarrow \frac{2}{10^4 C} = \ln 10 \Rightarrow C = 8/68 \times 10^{-5} F \end{cases}$$

۱۳) در یک مدار تخلیه کنندهی RC، $R = 2/5 \times 10^4 \Omega$ و $C = 40 \mu F$ است. اختلاف پتانسیل اولیهی دو سر خازن برابر $V = 25$ است. الف) بار خازن و جریان عبوری از مقاومت را پس از یک ثابت زمانی به دست آورید ب) انرژی ذخیره شده در خازن پس از یک ثابت زمانی چه قدر است؟ ج) توان اتلافی مقاومت در لحظهی $t = 0/5$ د) آهنگ توان اتلافی خازن در لحظهی $t = 0/5$ چه قدر است؟
حل:

الف) با استفاده از روابط مدار RC، هنگام تخلیهی خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \Rightarrow C = 40 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 4 \times 10^{-5} F \\ C = 40 \mu F \end{cases}$$

$$\tau = RC \Rightarrow \tau = 2/5 \times 10^4 \times 4 \times 10^{-5} \Rightarrow \tau = 1 \text{ s}$$

$$Q_0 = C\varepsilon \Rightarrow Q_0 = 4 \times 10^{-5} \times 25 \Rightarrow Q_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ C}$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I_0 = \frac{25}{2/5 \times 10^4} \Rightarrow I_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ A}$$

در لحظهی $t = \tau = 1$ s:

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow Q = 1 \times 10^{-2} \times e^{-1} \Rightarrow Q = 1 \times 10^{-2} \times e^{-1} \Rightarrow Q = 3/7 \times 10^{-2} \text{ C}$$

$$\begin{cases} 1 C = 10^2 \text{ mC} \\ Q = 3/7 \times 10^{-2} \text{ C} \end{cases} \Rightarrow Q = 3/7 \times 10^{-2} \times 10^2 \Rightarrow Q = 0/37 \text{ mC}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow I = 1 \times 10^{-2} e^{-1} \Rightarrow I = 1 \times 10^{-2} \times e^{-1} \Rightarrow I = 3/7 \times 10^{-2} \text{ A}$$

$$\begin{cases} 1 A = 10^3 \text{ mA} \\ I = 3/7 \times 10^{-2} \text{ A} \end{cases} \Rightarrow I = 3/7 \times 10^{-2} \times 10^3 \Rightarrow I = 0/37 \text{ mA}$$

ب) با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow U = \frac{(3/7 \times 10^{-2})^2}{2 \times 4 \times 10^{-5}} \Rightarrow U = 1/71 \times 10^{-3} \text{ J}$$

فصل ۷

ج) در لحظه‌ی $t = 0.5$ s:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow I = 1 \times 10^{-2} \times e^{-\frac{0.5}{1}} \Rightarrow I = 1 \times 10^{-2} \times e^{-0.5} \Rightarrow I = 6/1 \times 10^{-2} \text{ A}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = RI^2 \Rightarrow P = 2/5 \times 10^{-2} \times (6/1 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow P = 9/3 \times 10^{-2} \text{ W}$$

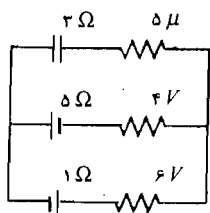
د)

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow U = \frac{Q_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{2C}$$

$$P = \frac{dU}{dt} \Rightarrow P = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{2C} \right) \Rightarrow P = \frac{Q_0^2}{2C} \times \frac{-2}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$t = 0.5 \text{ s} \Rightarrow P = \frac{(1 \times 10^{-2})^2}{2 \times 4 \times 10^{-6}} \times \frac{-2}{1} \times e^{-\frac{2 \times 0.5}{1}} \Rightarrow P = -9/3 \times 10^{-2} \text{ W}$$

علامت منفی توان، نشان‌دهنده‌ی مصرف توان در خازن است.



۱۴) مدار زیر را در حالت پایا در نظر بگیرید. الف) جریان عبوری از هر مقاومت را به دست آورید. ب) بار خازن را به دست آورید.

حل:

الف) چون مدار در حالت پایا است پس مدار جریان عبوری به صورت زیر است. با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$+6 - I \times 1 - I \times 5 + 4 = 0 \Rightarrow 10 - 6I = 0 \Rightarrow I = \frac{5}{3} \text{ A}$$

از مقاومت 3Ω جریانی عبور نمی‌کند.

ب) چون خازن به صورت موازی در مدار قرار گرفته پس اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با:

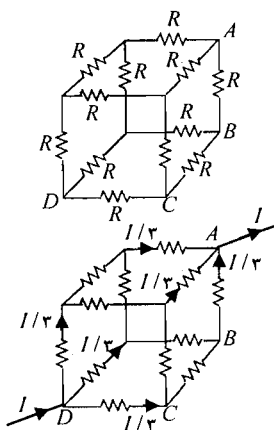
$$\mathcal{E} - IR = V \Rightarrow 6 - \frac{5}{3} \times 1 = V \Rightarrow V = 4/3 \text{ V}$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} \\ C = 5 \mu\text{F} \end{cases} \Rightarrow C = 5 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow 5 \times 10^{-6} = \frac{Q}{4/3} \Rightarrow Q = 21/7 \times 10^{-6} \text{ C}$$

مسائل تکمیلی



۱۵) مطابق شکل مقابل، دوازده مقاومت یکسان را در مداری مکعبی قرار داده‌ایم. مقاومت معادل بین نقاط A و D را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$V_{AD} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} \Rightarrow$$

$$V_{AD} = (R \times \frac{I}{3}) + (R \times \frac{I}{6}) + (R \times \frac{I}{3}) \Rightarrow V_{AD} = \frac{5}{6} RI$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

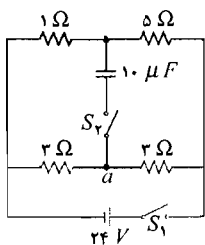
$$R_{AD} = \frac{V_{AD}}{I_{AD}} \Rightarrow R_{AD} = \frac{\frac{5}{6} RI}{I} \Rightarrow R_{AD} = \frac{5}{6} R$$

۱۶) یک خازن مسطح را با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک k و مقاومت ویژه ρ پر کرده‌ایم. نشان دهید اگر پس از شارژ خازن، باتری از مدار، خارج شود بار خازن با ثابت زمانی $\tau = \epsilon_0 k \rho$ کاهش می‌یابد.

حل: چون این خازن دارای دی‌الکتریک است پس ظرفیت $C = k\epsilon_0 \frac{A}{d}$ برای آن تعریف می‌شود. از طرفی برای

آن مقاومت $R = \rho \frac{d}{A}$ نیز تعریف می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی ثابت زمانی می‌توان نوشت:

$$\tau = RC \Rightarrow \tau = (k\epsilon_0 \frac{A}{d}) \times (\rho \frac{d}{A}) \Rightarrow \tau = k\epsilon_0 \rho$$



۱۷) در مدار شکل مقابل، کلید S_1 در ابتدا بسته و کلید S_2 باز است. الف) اختلاف پتانسیل $V_a - V_b$ چه قدر است؟ ب) پس از بسته شدن S_2 ، $V_a - V_b$ چه قدر می‌شود؟ ج) S_1 را باز کرده و S_2 را بسته نگه می‌داریم ثابت زمانی تخلیه‌ی خازن چه قدر است؟ حل:

الف) در این حالت مدار به صورت شکل مقابل است.

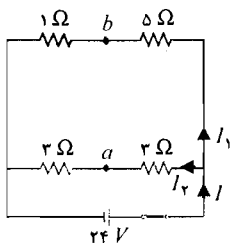
مقاومت‌های 5Ω و 1Ω متوالی هستند پس:

$$R = 1 + 5 \Rightarrow R = 6 \Omega$$

مقاومت‌های 3Ω و 3Ω متوالی هستند پس:

$$R' = 3 + 3 \Rightarrow R' = 6 \Omega$$

مقاومت‌های R و R' موازی هستند پس:



فصل ۷

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow R_{eq} = 3 \Omega$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_{eq} = \frac{V}{I} \Rightarrow 3 = \frac{24}{I} \Rightarrow I = 8 \text{ A}$$

با استفاده از قانون جریان در نقطه‌ی A می‌توان نوشت:

$$I - I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 8 \text{ A}$$

مقاومت‌های R و R' موازی هستند پس اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت‌ها یکسان و برابر 24 V است.

برای مقاومت R با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I_1} \Rightarrow 6 = \frac{24}{I_1} \Rightarrow I_1 = 4 \text{ A}$$

برای مقاومت R' با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R' = \frac{V}{I_2} \Rightarrow 6 = \frac{24}{I_2} \Rightarrow I_2 = 4 \text{ A}$$

با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$V_a + 3 \times I_2 - 5 \times I_1 = V_b \Rightarrow V_a - V_b = -3 \times 4 + 5 \times 4 \Rightarrow V_a - V_b = 8 \text{ V}$$

ب) در این حالت مدار به صورت شکل مقابل است.

چون از خازن جریانی عبور نمی‌کند پس اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی a و b تغییر نمی‌کند. پس:

$$V_a - V_b = 8 \text{ V}$$

ج) در این حالت مدار به شکل مقابل است.

مقاومت‌های 5Ω و 3Ω متوالی هستند پس:

$$R = 5 + 3 \Rightarrow R = 8 \Omega$$

مقاومت‌های 1Ω و 3Ω متوالی هستند پس:

$$R' = 3 + 1 \Rightarrow R' = 4 \Omega$$

مقاومت‌های R و R' موازی هستند پس:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \Rightarrow R_{eq} = 2/67 \Omega$$

با استفاده از تعریف ثابت زمانی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} \text{ F} \\ C = 10 \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 10 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$\tau = RC \Rightarrow \tau = 2/67 \times 10 \times 10^{-6} \Rightarrow \tau = 26/7 \times 10^{-6} \text{ s}$$

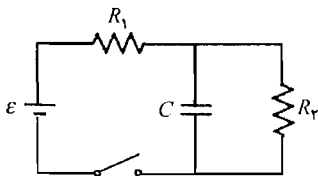
(۱۸) در مدار شکل زیر، کلید را در لحظه‌ی $t=0$ می‌بندیم. الف) در این لحظه، جریان عبوری از

مقاومت‌ها چه قدر است؟ (ب) در $t = \infty$ ، جریان‌ها چه قدر می‌شوند؟ (ج) نشان دهید جریان پر شدن

خازن: $i_C = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$ و $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$ است. (راهنمایی: برای هر حلقه، معادله‌ی حلقه را نوشته و با

استفاده از قاعده‌ی گره، رابطه‌ی جریان‌ها را به دست آورید. معادله‌ی جریان i_C را بنویسید.)

حل:



(الف) در لحظه‌ی $t = 0$ مدار به شکل مقابل است و با استفاده

از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_1 = \frac{V}{I_1} \Rightarrow R_1 = \frac{\varepsilon}{I_1} \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

چون در لحظه‌ی $t = 0$ تمام جریان از خازن می‌گذرد مشابه

این است که به دو سر مقاومت R_2 سیم وصل کرده باشیم. با

این عمل از مقاومت R_2 هیچ جریانی عبور نمی‌کند.

(ب) در لحظه‌ی $t = \infty$ هیچ جریانی از خازن عبور نمی‌کند و

مدار به شکل مقابل است. مقاومت‌ها به صورت متوالی هستند:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{\varepsilon}{I} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

(ج) برای نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_1 = I_C + I_2 \Rightarrow I_2 = I_1 - I_C \quad (1)$$

برای حلقه‌ی ACD با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon - I_1 R_1 - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon - \frac{Q}{C}}{R_1} \quad (2)$$

برای حلقه‌ی ABD با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

با جایگذاری رابطه‌ی (1) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\varepsilon - I_1 R_1 - (I_1 - I_C) R_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon - I_1 (R_1 + R_2) + I_C R_2 = 0$$

با جایگذاری رابطه‌ی (2) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon - \frac{Q}{C}}{R_1} \right) \times (R_1 + R_2) + I_C R_2 = 0 \Rightarrow I_C = -\frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon - \frac{Q}{C}}{R_1 R_2} (R_1 + R_2) \Rightarrow$$

فصل ۷

$$I_C = -\frac{\varepsilon}{R_r} + \frac{\varepsilon C - Q}{R_1 R_r C} (R_1 + R_r) \Rightarrow I_C = \frac{1}{R_1 R_r C} [-\varepsilon R_1 C + (\varepsilon C - Q) \times (R_1 + R_r)] \Rightarrow$$

$$I_C = \frac{1}{R_1 R_r C} [-\varepsilon R_1 C + \varepsilon R_1 C + \varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)] \Rightarrow I_C = \frac{1}{R_1 R_r C} [\varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)]$$

از طرفی می‌دانیم:

$$I_C = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R_1 R_r C} [\varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)] \Rightarrow \frac{dQ}{\varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)} = \frac{dt}{R_1 R_r C} \Rightarrow$$

$$\int_0^Q \frac{dQ}{\varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)} = \int_0^t \frac{dt}{R_1 R_r C} \Rightarrow -\frac{1}{R_1 + R_r} \ln[\varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)] \Big|_0^Q = \frac{t}{R_1 R_r C} \Big|_0^t \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{R_1 + R_r} \{\ln[\varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)] - \ln[\varepsilon R_r C]\} = \frac{t}{R_1 R_r C} \Rightarrow$$

$$\ln \frac{\varepsilon R_r C - Q(R_1 + R_r)}{\varepsilon R_r C} = -\frac{t(R_1 + R_r)}{R_1 R_r C}$$

فرض کنید: $\tau = \frac{R_1 R_r C}{R_1 + R_r}$ است. پس:

$$\ln \left[1 - \frac{Q(R_1 + R_r)}{\varepsilon R_r C} \right] = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow 1 - \frac{Q(R_1 + R_r)}{\varepsilon R_r C} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{Q(R_1 + R_r)}{\varepsilon R_r C} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

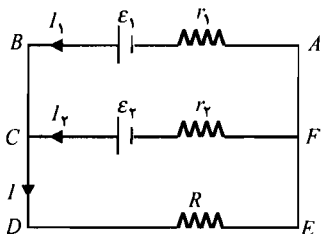
$$Q = \frac{\varepsilon R_r C}{R_1 + R_r} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

با استفاده از تعریف شدت جریان می‌توان نوشت:

$$I_C = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_C = \frac{d}{dt} \left[\frac{\varepsilon R_r C}{R_1 + R_r} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] \Rightarrow I_C = \frac{\varepsilon R_r C}{R_1 + R_r} \times \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow I_C = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

برای محاسبه‌ی رابطه‌ی نهایی به جای τ مقدار آن قرار داده شده است.۱۹) دو باتری با نیروی محرکه‌ی ε_1 و ε_2 و مقاومت داخلی r_1 و r_2 را به طور موازی به هم بسته‌ایم.نشان دهید این دو باتری، معادل یک باتری با نیروی محرکه‌ی ε_{eq} هستند به طوری که:

$$\varepsilon_{eq} = \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

(راهنمایی: باتری‌ها را همراه با مقاومت خارجی R در نظرگرفته و از $\varepsilon_{eq} - I r_{eq} = I R$ استفاده کنید.)حل: در نقطه‌ی C با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = I - I_1 \quad (۱)$$

در حلقه‌ی $ABCF$ با استفاده از قانون ولتاژ داریم:

$$-I_1 r_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I_2 r_2 = 0$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$-I_1 r_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + (I - I_1) r_2 = 0 \Rightarrow -I_1 r_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I r_2 - I_1 r_2 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I r_2}{r_1 + r_2} \quad (2)$$

در حلقه‌ی FCDE با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_2 r_2 + \varepsilon_2 - IR = 0$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

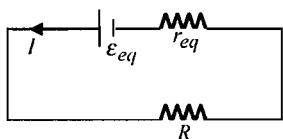
$$-(I - I_1) r_2 + \varepsilon_2 - IR = 0 \Rightarrow -I r_2 + I_1 r_2 + \varepsilon_2 - IR = 0$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$-I r_2 + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I r_2}{r_1 + r_2} \right) r_2 + \varepsilon_2 - IR = 0 \Rightarrow$$

$$-I r_2 (r_1 + r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I r_2) r_2 + \varepsilon_2 (r_1 + r_2) - IR (r_1 + r_2) = 0 \Rightarrow$$

$$-I r_2 r_1 - I r_2^2 + \varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_2 + I r_2^2 + \varepsilon_2 r_1 + \varepsilon_2 r_2 - IR r_1 - IR r_2 = 0 \Rightarrow I = \frac{r_1 \varepsilon_2 + r_2 \varepsilon_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$



دو باتری ε_1 و ε_2 موازی هستند پس مدار به صورت زیر است.

دو مقاومت r_1 و r_2 موازی هستند پس:

$$\frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Rightarrow r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{eq} - I r_{eq} - IR = 0 \Rightarrow \varepsilon_{eq} = I(r_{eq} + R) \Rightarrow \varepsilon_{eq} = \left[\frac{r_1 \varepsilon_2 + r_2 \varepsilon_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \right] \times \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + R \right) \Rightarrow$$

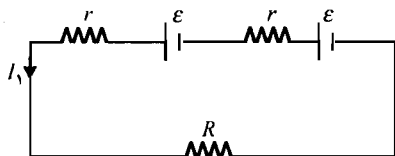
$$\varepsilon_{eq} = \left[\frac{r_1 \varepsilon_2 + r_2 \varepsilon_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \right] \times \left[\frac{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right] \Rightarrow \varepsilon_{eq} = \frac{r_1 \varepsilon_2 + r_2 \varepsilon_1}{r_1 + r_2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{eq} = \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \times \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} \right) \Rightarrow \varepsilon_{eq} = \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1}$$

(۲۰) دو باتری با نیروی محرکه‌ی یکسان ε و مقاومت داخلی یکسان r را به مقاومت خارجی R وصل کرده‌ایم. در هر یک از حالات زیر، برای این که توان مصرفی R به بیشینه مقدار برسد باتری‌ها را

چگونه (متوالی یا موازی) به هم ببندیم: الف) $r < R$ ب) $r > R$

حل:

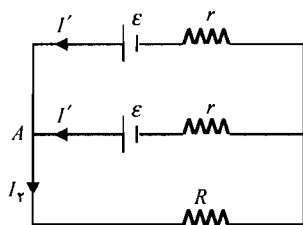


به هم بستن متوالی باتری‌ها:

با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_1 r + \varepsilon - I_1 r + \varepsilon - I_1 R = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{2\varepsilon}{R + 2r} \quad (1)$$

فصل ۷



به هم بستن موازی باتری‌ها:

چون نیروی محرکه و مقاومت داخلی باتری‌ها برابر است از آن‌ها جریان یکسانی عبور می‌کند.

در نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_{\gamma} = I' + I' \Rightarrow I' = \frac{I_{\gamma}}{2}$$

با استفاده از قانون ولتاژ در حلقه‌ی پایینی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon - I'r - I_{\gamma}R = 0 \Rightarrow \varepsilon - \frac{I_{\gamma}}{2}r - I_{\gamma}R = 0 \Rightarrow I_{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\frac{r}{2} + R} \quad (2)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{I_1}{I_{\gamma}} = \frac{\frac{2\varepsilon}{R+2r}}{\frac{\varepsilon}{\frac{r}{2}+R}} \Rightarrow \frac{I_1}{I_{\gamma}} = \frac{2\varepsilon\left(\frac{r}{2}+R\right)}{\varepsilon(R+2r)} \Rightarrow \frac{I_1}{I_{\gamma}} = \frac{r+2R}{R+2r} \quad (3)$$

الف) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = RI^{\gamma}t \Rightarrow \begin{cases} P_1 = RI_1^{\gamma}t \\ P_{\gamma} = RI_{\gamma}^{\gamma}t \end{cases} \quad (4)$$

اگر $r < R$ باشد با استفاده از رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{I_1}{I_{\gamma}} > 1 \Rightarrow I_1 > I_{\gamma} \Rightarrow P_1 > P_{\gamma}$$

پس اگر $r < R$ باشد در صورتی که باتری‌ها را به طور متوالی ببندیم توان بیشتری در مقاومت R مصرف می‌شود.

ب) اگر $r > R$ باشد با استفاده از روابط (۳) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{I_1}{I_{\gamma}} < 1 \Rightarrow I_1 < I_{\gamma} \Rightarrow P_1 < P_{\gamma}$$

پس اگر $r > R$ باشد در صورتی که باتری‌ها را به طور موازی ببندیم توان بیشتری در مقاومت R مصرف می‌شود.

مسائل

نیروی مغناطیسی

(۱) الکترونی با انرژی جنبشی 1 keV به طور عمود بر خطوط میداننی با اندازهی G 50 شلیک شده است. الف) شعاع مسیر ب) شتاب حرکت ج) دورهی تناوب آن را به دست آورید.
حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV} \\ 1 \text{ eV} = 1/6 \times 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow K = 1 \times 10^3 \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow K = 1/6 \times 10^{-16} \text{ J} \\ K = 1 \text{ keV} \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 1/6 \times 10^{-16} = \frac{1}{2} \times 9/11 \times 10^{-31} v^2 \Rightarrow v^2 = 3/5 \times 10^{14} \Rightarrow v = 1/9 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

با استفاده از رابطهی شعاع مدار دایره ای در میدان مغناطیسی می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} \\ B = 50 \text{ G} \end{cases} \Rightarrow B = 50 \times 10^{-4} \Rightarrow B = 5 \times 10^{-3} \text{ T}$$

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow r = \frac{9/11 \times 10^{-31} \times 1/9 \times 10^7}{1/6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-3}} \Rightarrow r = 2/2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

ب) با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک و قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

$$\begin{cases} F = qvB \sin \theta \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow ma = qvB \sin 90 \Rightarrow 9/11 \times 10^{-31} a = 1/6 \times 10^{-19} \times 1/9 \times 10^7 \times 5 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$a = 1/67 \times 10^{16} \frac{m}{s^2}$$

فصل ۸

ج) با استفاده از رابطه‌ی دوره‌ی تناوب مدار دایروی در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow T = \frac{2 \times 3 / 14 \times 9 / 11 \times 10^{-31}}{1 / 6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-2}} \Rightarrow T = 7 / 15 \times 10^{-9} \text{ s}$$

(۲) ذره‌ی باردار مثبتی تحت زاویه‌ی 30° نسبت به محور x در صفحه‌ی xy ، حرکت می‌کند و به آن، نیرویی در جهت $+z$ وارد می‌شود. وقتی این ذره با همان سرعت در جهت محور y حرکت می‌کند به آن، نیرویی با همان اندازه در جهت $-z$ وارد می‌شود. جهت میدان مغناطیسی را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = v \cos 30^\circ \hat{i} + v \sin 30^\circ \hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$$

$$F \hat{k} = q(v \cos 30^\circ \hat{i} + v \sin 30^\circ \hat{j}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \Rightarrow$$

$$F \hat{k} = qv(B_y \cos 30^\circ \hat{k} - B_z \cos 30^\circ \hat{j} - B_x \sin 30^\circ \hat{k} + B_z \sin 30^\circ \hat{i}) \Rightarrow$$

$$\frac{F}{qv} \hat{k} = B_z \sin 30^\circ \hat{i} - B_z \cos 30^\circ \hat{j} + (B_y \cos 30^\circ - B_x \sin 30^\circ) \hat{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_z \sin 30^\circ = 0 \\ B_z \cos 30^\circ = 0 \\ B_y \cos 30^\circ - B_x \sin 30^\circ = \frac{F}{qv} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_z = 0 \\ B_y \cos 30^\circ - B_x \sin 30^\circ = \frac{F}{qv} \end{cases} \quad (1)$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت: $\vec{v} = v \hat{j}$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow -F \hat{k} = qv \hat{j} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) \Rightarrow$$

$$-F \hat{k} = qv(-B_x \hat{k}) \Rightarrow F \hat{k} = qvB_x \hat{k} \Rightarrow B_x = \frac{F}{qv}$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$B_y \cos 30^\circ - \frac{F}{qv} \sin 30^\circ = \frac{F}{qv} \Rightarrow B_y \cos 30^\circ = \frac{2F}{qv} \Rightarrow B_y = \frac{\sqrt{3}F}{qv}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \Rightarrow \vec{B} = \frac{F}{qv} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}F}{qv} \hat{j}$$

جهت میدان:

$$\tan \alpha = \frac{B_y}{B_x} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}F}{\frac{qv}{F}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

α زاویه میدان مغناطیسی از محور x ها است پس زاویه y آن از محور y ها 30° است.

(۳) به الکترون متحرکی در میدان مغناطیسی $\vec{B} = -1/2 \hat{k}$ T ، نیروی $\vec{F} = (-2 \hat{i} + 6 \hat{j}) \times 10^{-12}$ N وارد می‌شود. بردار سرعت آن را در حالت $v_z = 0$ به دست آورید.
حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow (-2 \hat{i} + 6 \hat{j}) \times 10^{-12} = -1/6 \times 10^{-19} \times (v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) \times (-1/2 \hat{k}) \Rightarrow$$

$$-1/0.4 \times 10^{-6} \hat{i} + 3/13 \times 10^{-6} \hat{j} = -v_x \hat{j} + v_y \hat{i}$$

با مساوی قرار دادن طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -v_x = 3/13 \times 10^{-6} \\ v_y = -1/0.4 \times 10^{-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = -3/13 \times 10^{-6} \\ v_y = -1/0.4 \times 10^{-6} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (-3/13 \hat{i} - 1/0.4 \hat{j}) \times 10^{-6}$$

(۴) در یک میدان مغناطیسی به پروتون متحرکی با سرعت $\vec{v} = (2 \hat{i} + 3 \hat{j}) \times 10^6 \frac{m}{s}$ نیروی $\vec{F} = -1/28 \times 10^{-12} \hat{k}$ N وارد می‌شود. وقتی سرعت آن در جهت محور z باشد نیروی وارد بر آن در جهت محور x است. میدان مغناطیسی را به دست آورید.
حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow -1/28 \times 10^{-12} \hat{k} = 1/6 \times 10^{-19} \times (2 \hat{i} + 3 \hat{j}) \times 10^6 \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \Rightarrow$$

$$-0.18 \hat{k} = (2 \hat{i} + 3 \hat{j}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \Rightarrow -0.18 \hat{k} = (2B_y \hat{k} - 2B_z \hat{j} - 3B_x \hat{k} + 3B_z \hat{i}) \Rightarrow$$

$$-0.18 \hat{k} = 3B_z \hat{i} - 2B_z \hat{j} + (2B_y - 3B_x) \hat{k}$$

با مساوی قرار دادن طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 3B_z = 0 \\ -2B_z = 0 \\ 2B_y - 3B_x = -0.18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_z = 0 \\ 2B_y - 3B_x = -0.18 \end{cases} \quad (1)$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F \hat{i} = qv \hat{k} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) \Rightarrow F \hat{i} = qv(B_x \hat{j} - B_y \hat{i}) \Rightarrow F \hat{i} = -qvB_y \hat{i} + qvB_x \hat{j}$$

با مساوی قرار دادن طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

فصل ۸

$$\begin{cases} -qvB_y = F \\ qvB_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_y = -\frac{F}{qv} \\ B_x = 0 \end{cases} \quad (۲)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$B_x = 0 \Rightarrow \tau B_y - \tau \times 0 = -0.1 \Rightarrow B_y = -0.4$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \Rightarrow \vec{B} = 0 - 0.4 \hat{j} + 0 \Rightarrow \vec{B} = -0.4 \hat{j}$$

نیروی وارد بر رسانای حامل جریان

(۵) حلقه‌ی سیمی مثلثی حامل جریان شکل زیر در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}_1 = -B_1 \hat{k}$ قرار دارد.

نیروی وارد بر هر ضلع حلقه را به دست آورید.

حل:

نیروی وارد بر ضلع ۱:

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = I \vec{l}_1 \times \vec{B} \\ \vec{l}_1 = d \hat{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_1 = I \times d \hat{i} \times (-B_1 \hat{k}) \Rightarrow \vec{F}_1 = IdB_1 \hat{j}$$

نیروی وارد بر ضلع ۲:

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_2 = I \vec{l}_2 \times \vec{B} \\ \vec{l}_2 = d \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_2 = I \times d \hat{j} \times (-B_1 \hat{k}) \Rightarrow \vec{F}_2 = -IdB_1 \hat{i}$$

نیروی وارد بر ضلع ۳:

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$l_3^2 = d^2 + d^2 \Rightarrow l_3^2 = 2d^2 \Rightarrow l_3 = \sqrt{2}d$$

$$\vec{l}_3 = -l_3 \sin 45^\circ \hat{i} - l_3 \cos 45^\circ \hat{j} \Rightarrow$$

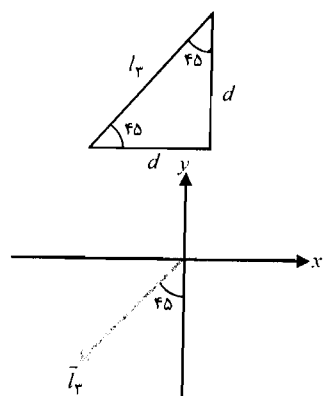
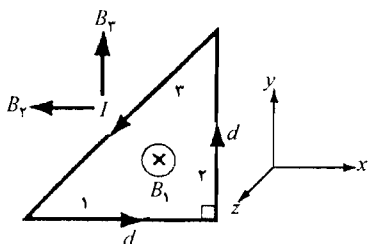
$$\vec{l}_3 = -\sqrt{2}d \times \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} - \sqrt{2}d \times \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \Rightarrow \vec{l}_3 = -d \hat{i} - d \hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان

مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_3 = I \vec{l}_3 \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_3 = I \times (-d \hat{i} - d \hat{j}) \times (-B_1 \hat{k}) \Rightarrow \vec{F}_3 = IdB_1 (\hat{i} - \hat{j})$$

(۶) یک خط انتقال برق حامل جریان $A = ۸۰۰$ از شرق به غرب کشیده شده است. میدان مغناطیسی



زمین برابر $G/8$ است که در جهت رو به شمال و 60° زیر خط افق قرار دارد. نیروی وارد بر هر متر از خط را به دست آورید.

حل: شرق در جهت \hat{j} و شمال در جهت \hat{k} است پس:

$$\vec{I} = -I\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{B} = -B_x \cos 60^\circ \hat{i} + B_z \sin 60^\circ \hat{k}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان می توان نوشت:

$$\begin{cases} G = 10^{-4} \text{ T} \\ B = 0.8 \text{ G} \end{cases} \Rightarrow B = 0.8 \times 10^{-4} \Rightarrow B = 8 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$\vec{F} = I\vec{I} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 8.0 \times (-1 \times \hat{j}) \times (-8 \times 10^{-5} \cos 60^\circ \hat{i} + 8 \times 10^{-5} \sin 60^\circ \hat{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -6/4 \times 10^{-2} \hat{j} \times (-\cos 60^\circ \hat{i} + \sin 60^\circ \hat{k}) \Rightarrow \vec{F} = -6/4 \times 10^{-2} (\sin 60^\circ \hat{i} + \cos 60^\circ \hat{k})$$

پس بردار نیرو در صفحه xz قرار دارد و با محور $-z$ زاویه 60° می سازد.

اندازهی نیرو:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} \Rightarrow F = \sqrt{(-6/4 \times 10^{-2} \sin 60^\circ)^2 + (-6/4 \times 10^{-2} \cos 60^\circ)^2} \Rightarrow F = 6/4 \times 10^{-2} \text{ N}$$

(۷) سیم راستی به طول 45 cm حامل جریان A در راستای محور $+z$ قرار دارد. به این سیم نیروی N در جهت $-x$ وارد می شود در هر یک از جهت های زیر، میدان مغناطیسی را به دست آورید: (الف) در جهت عمود بر سیم (ب) در جهتی که با محور $+z$ زاویه 30° بسازد.

حل:

(الف) با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان می توان نوشت:

$$\begin{cases} cm = 10^{-2} \text{ m} \\ l = 45 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow l = 45 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow -0.5 \hat{i} = 6 \times 45 \times 10^{-2} \hat{k} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

چون سیم در راستای محور z ها قرار دارد و می خواهیم میدان مغناطیسی بر سیم عمود باشد پس: $B_z = 0$ است.

$$-\hat{i} = 54 \hat{k} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) \Rightarrow -\hat{i} = 54 B_x \hat{j} - 54 B_y \hat{i}$$

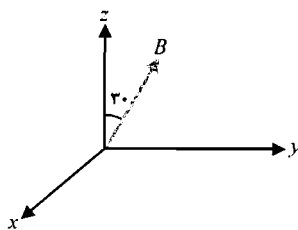
با مقایسه ی طرفین رابطه ی بالا می توان نوشت:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ -1 = -54 B_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 1/54 \times 10^{-2} \text{ T} \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = 1/54 \times 10^{-2} \hat{j}$$

(ب) با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان می توان نوشت:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow -0.5 \hat{i} = 6 \times 45 \times 10^{-2} \hat{k} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \Rightarrow$$

فصل ۸



$$-\hat{i} = \Delta f \hat{k} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \Rightarrow -\hat{i} = \Delta f B_x \hat{j} - \Delta f B_y \hat{i}$$

با مقایسه‌ی طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ -1 = -\Delta f B_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 1 / 85 \times 10^{-2} T \end{cases}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_y = B \sin \varphi \\ B_z = B \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{B_y}{B_z} = \frac{B \sin \varphi}{B \cos \varphi} \Rightarrow \frac{1 / 85 \times 10^{-2}}{B_z} = \tan \varphi \Rightarrow B_z = 3 / 21 \times 10^{-2} T$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \Rightarrow \vec{B} = 1 / 85 \times 10^{-2} \hat{j} + 3 / 21 \times 10^{-2} \hat{k}$$

گشتاور نیروی وارد بر حلقه‌ی جریان

۸) حلقه‌ی مستطیلی به ابعاد $a = 20 \text{ cm}$ و $c = 50 \text{ cm}$ با ۱۶ دور سیم‌پیچ را در نظر بگیرید. حلقه

حول محور z لولا شده و مطابق شکل زیر، صفحه‌ی آن با میدان مغناطیسی $\vec{B} = 0.5 \hat{i} T$ زاویه‌ی 30° می‌سازد. الف) نیروی وارد بر هر ضلع حلقه (ب) گشتاور مغناطیسی حلقه (ج) گشتاور وارد بر

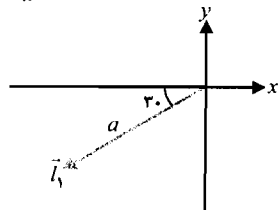
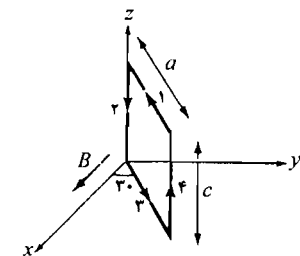
حلقه را به دست آورید. فرض کنید $I = 10 A$ است.

حل:

الف)

نیروی وارد بر ضلع ۱:

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ a = 20 \text{ cm} \\ c = 50 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \times 10^{-2} \\ c = 50 \times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.2 \text{ m} \\ c = 0.5 \text{ m} \end{cases}$$

$$\vec{l}_1 = -a \cos \varphi \hat{i} - a \sin \varphi \hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{l}_1 = -0.2 \times \cos 30^\circ \hat{i} - 0.2 \times \sin 30^\circ \hat{j} \Rightarrow \vec{l}_1 = -0.17 \hat{i} - 0.1 \hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

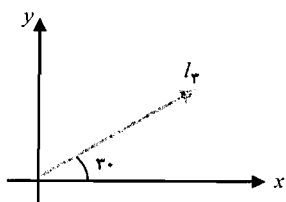
$$\vec{F}_1 = NI \vec{l}_1 \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_1 = 16 \times 10 \times (-0.17 \hat{i} - 0.1 \hat{j}) \times (0.5 \hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_1 = 8 \hat{k}$$

نیروی وارد بر ضلع ۲:

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_2 = NI \vec{l}_2 \times \vec{B} \\ \vec{l}_2 = -c \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_2 = 16 \times 10 \times (-0.5 \hat{k}) \times (0.5 \hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_2 = -4 \hat{j}$$

میدان مغناطیسی - مسائل



نیروی وارد بر ضلع ۳:

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\vec{l}_r = a \cos \alpha \cdot \hat{i} + a \sin \alpha \cdot \hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{l}_r = 0.2 \times \cos 30^\circ \cdot \hat{i} + 0.2 \times \sin 30^\circ \cdot \hat{j} \Rightarrow \vec{l}_r = 0.17 \hat{i} + 0.1 \hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می توان نوشت:

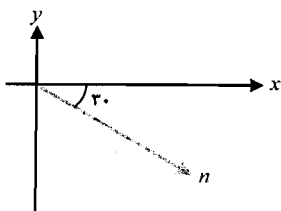
$$\vec{F}_r = NI \vec{l}_r \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_r = 16 \times 10 \times (0.17 \hat{i} + 0.1 \hat{j}) \times (0.5 \hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_r = -8 \hat{k}$$

نیروی وارد بر ضلع ۴:

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_r = NI \vec{l}_r \times \vec{B} \\ \vec{l}_r = c \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_r = 16 \times 10 \times (-0.5 \hat{k}) \times (0.5 \hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_r = 4 \hat{j}$$

ب) برای بردار یکه‌ی عمود بر سطح حلقه، با توجه به شکل می توان نوشت:



$$\hat{n} = \sin \alpha \cdot \hat{i} - \cos \alpha \cdot \hat{j}$$

با استفاده از رابطه‌ی گشتاور دو قطبی مغناطیسی می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ a = 20 \text{ cm} \\ c = 50 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \times 10^{-2} \text{ m} \\ c = 50 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

حلقه به شکل مستطیل است پس:

$$A = ac \Rightarrow A = 20 \times 10^{-2} \times 50 \times 10^{-2} \Rightarrow A = 1 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$\vec{\mu} = NIA \hat{n} \Rightarrow \vec{\mu} = 16 \times 10 \times 1 \times 10^{-1} \times (\sin 30^\circ \hat{i} - \cos 30^\circ \hat{j}) \Rightarrow \vec{\mu} = 8 \hat{i} - 13.8 \hat{j}$$

ج) با استفاده از تعریف گشتاور می توان نوشت:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{\tau} = (8 \hat{i} - 13.8 \hat{j}) \times 0.5 \hat{i} \Rightarrow \vec{\tau} = 6.9 \hat{k}$$

۹) حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع ۴ cm، حامل جریان A = ۲/۸ را در نظر بگیرید. گشتاور مغناطیسی حلقه

در جهت $\hat{n} = 0.6 \hat{i} - 0.8 \hat{j}$ قرار دارد. میدان مغناطیسی: $\vec{B} = 0.2 \hat{i} - 0.4 \hat{k} \text{ T}$ است. الف) گشتاور

نیروی وارد بر حلقه ب) انرژی پتانسیل حلقه را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی گشتاور دو قطبی مغناطیسی می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 4 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

فصل ۸

حلقه به شکل دایره است پس:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi/14 \times (4 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow A = 5/0.2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\vec{\mu} = NIA\hat{n} \Rightarrow \vec{\mu} = 1 \times 2 / 8 \times 5 / 0.2 \times 10^{-2} \times (0.6\hat{i} - 0.8\hat{j}) \Rightarrow \vec{\mu} = (8/43\hat{i} - 11/2\hat{j}) \times 10^{-2}$$

با استفاده از تعریف گشتاور می توان نوشت:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{\tau} = (8/43\hat{i} - 11/2\hat{j}) \times 10^{-2} \times (0.2\hat{i} - 0.4\hat{k}) \Rightarrow \vec{B} = (4/5\hat{i} + 3/4\hat{j} + 2/24\hat{k}) \times 10^{-2}$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل می توان نوشت:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \Rightarrow U = - \left[(8/43\hat{i} - 11/2\hat{j}) \times 10^{-2} \right] \cdot \left[0.2\hat{i} - 0.4\hat{k} \right] \Rightarrow U = -1/7 \times 10^{-2} \text{ J}$$

حرکت ذرات باردار

۱۰) الکترون و پروتون متحرکی را در راستای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت در نظر بگیرید. در هر یک از حالات زیر، نسبت شعاعی مدارهای این دو ذره را به دست آورید: الف) هر دو، سرعت یکسانی دارند. ب) هر دو، انرژی جنبشی یکسان دارند.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی شعاع مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی می توان نوشت:

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \frac{\frac{m_e v_e}{eB}}{\frac{m_p v_p}{eB}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \frac{m_e}{m_p} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \frac{9/11 \times 10^{-31}}{1/67 \times 10^{-27}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = 5/45 \times 10^{-2}$$

(ب)

$$K_e = K_p \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_e^2 = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \Rightarrow \frac{v_e^2}{v_p^2} = \frac{m_p}{m_e} \Rightarrow \frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}$$

با استفاده از رابطه‌ی شعاع مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی می توان نوشت:

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \frac{\frac{m_e v_e}{eB}}{\frac{m_p v_p}{eB}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = \frac{m_e}{m_p} \times \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}$$

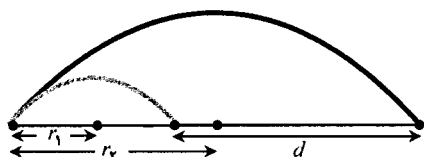
$$\frac{r_e}{r_p} = \frac{9/11 \times 10^{-31}}{1/67 \times 10^{-27}} \times \sqrt{\frac{1/67 \times 10^{-27}}{9/11 \times 10^{-31}}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = 2/22 \times 10^{-2}$$

۱۱) دو ایزوتوپ نئون به جرم‌های $20u$ و $22u$ را در نظر بگیرید. این ایزوتوپ‌ها به صورت یون‌های یک بار مثبت با استفاده از اختلاف پتانسیل 1 kV از حال سکون شتاب داده شده‌اند و سپس به طور

عمود، وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $T/4$ می‌شوند. پس از طی یک نیم‌دایره در طیف‌سنج،

فاصله‌ی آن‌ها از هم چه قدر است؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$d = 2r_2 - 2r_1$$

با استفاده از رابطه‌ی شعاع مسیر ذرات در طیف‌سنج داریم:

$$\begin{cases} 1u = 1/67 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ m_1 = 20u \\ m_2 = 22u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 20 \times 1/67 \times 10^{-27} \\ m_2 = 22 \times 1/67 \times 10^{-27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 3/34 \times 10^{-26} \text{ kg} \\ m_2 = 3/67 \times 10^{-26} \text{ kg} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ kV} = 10^3 \text{ V} \\ V = 1 \text{ kV} \end{cases} \Rightarrow V = 1 \times 10^3 \text{ V}$$

$$r = \sqrt{\frac{2mV}{qB^2}} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{2m_2V}{qB^2}} - 2\sqrt{\frac{2m_1V}{qB^2}} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{2V}{qB^2}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) \Rightarrow$$

$$d = 2 \times \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 10^3}{1/6 \times 10^{-19} \times (0/4)^2}} \times (\sqrt{3/67 \times 10^{-26}} - \sqrt{3/34 \times 10^{-26}}) \Rightarrow d = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(۱۲) الکترونی با سرعت $\vec{v} = 2 \times 10^6 \hat{i} \frac{m}{s}$ وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن ناحیه، میدان الکتریکی

$\vec{E} = -200 \hat{j} \frac{V}{m}$ برقرار است. الف) میدان مغناطیسی لازم برای عدم انحراف الکترون از مسیرش چه

قدر است؟ ب) اگر میدان الکتریکی، خاموش شود شعاع مسیر در میدان مغناطیسی چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف نیروی لورنتس می‌توان نوشت: $F = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

الکترون از مسیرش، منحرف نمی‌شود پس:

$$F = 0 \Rightarrow q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow -200 \hat{j} = -2 \times 10^6 \hat{i} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \Rightarrow$$

$$-200 \hat{j} = -2 \times 10^6 (B_y \hat{k} - B_z \hat{j})$$

با مقایسه‌ی طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_y = 0 \\ -200 = 2 \times 10^6 B_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_y = 0 \\ B_z = -10^{-4} \text{ T} \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = -10^{-4} \hat{k}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی شعاع مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow r = \frac{9/11 \times 10^{-31} \times 2 \times 10^6}{1/6 \times 10^{-19} \times 10^{-4}} \Rightarrow r = 11/4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(۱۳) نواری مسی به ضخامت 25 cm ، حامل جریان A به طور عمود در میدانی مغناطیسی قرار

فصل ۸

دارد و اختلاف پتانسیل هال μV $1/2$ است. اگر چگالی الکترونی m^{-3} $8/5 \times 10^{28}$ باشد مقدار B را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل هال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow t = 0.25 \times 10^{-2} \Rightarrow t = 2/5 \times 10^{-2} \text{ m} \\ t = 0.25 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \mu V = 10^{-6} \text{ V} \Rightarrow V_H = 1/2 \times 10^{-6} \text{ V} \\ V_H = 1/2 \mu V \end{cases}$$

$$V_H = \frac{IB}{nqt} \Rightarrow 1/2 \times 10^{-6} = \frac{10 \times B}{8/5 \times 10^{28} \times 1/6 \times 10^{-19} \times 2/5 \times 10^{-2}} \Rightarrow B = 4/0.8 \text{ T}$$

مسائل تکمیلی

۱۴) دو قطبی با گشتاور مغناطیسی μ را در نظر بگیرید که مرکزش به طور آزادانه روی محور دوران قرار دارد و گشتاور لختی آن حول این محور I است. الف) نشان دهید در اثر جابه‌جایی‌های زاویه‌ای کوچک در میدان مغناطیسی یکنواخت B ، دو قطبی، حرکت هماهنگ ساده را انجام می‌دهد. ب) دوره‌ی نوسان آن چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از تعاریف گشتاور نیرو می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \tau = -I\alpha \\ \tau = \mu \times B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = -I \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \tau = \mu B \sin\theta \end{cases} \Rightarrow -I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mu B \sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu B}{I} \sin\theta = 0$$

برای زوایای کوچک:

$$\sin\theta \cong \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu B}{I} \theta = 0 \quad (1)$$

معادله‌ی فوق شبیه معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ است پس دو قطبی مغناطیسی در اثر جابه‌جایی‌های زاویه‌ای کوچک حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت.

ب) با مقایسه‌ی رابطه‌ی (۱) و معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{k}{m} = \frac{\mu B}{I} \\ \frac{k}{m} = \omega^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\mu B}{I} = \omega^2 \Rightarrow \frac{\mu B}{I} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 I}{\mu B} \Rightarrow T = 2\pi \left(\frac{I}{\mu B}\right)^{1/2}$$

۱۵) شکل زیر، سیم خمیده‌ای را نشان می‌دهد که در میدان مغناطیسی یکنواخت B ، جریان I را از a

به b منتقل می‌کند. نشان دهید نیروی برآیند وارد بر سیم خمیده برابر نیرویی است که بر سیم راست از a به b ، حامل جریان I وارد می‌شود.
حل:



نیروی وارد بر سیم راست:

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر سیم حامل جریان داریم:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = I \times (b-a) \times B \times \sin 90^\circ \Rightarrow F = IB(b-a)$$

نیروی وارد بر سیم خمیده:

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر جز طول سیم حامل جریان می‌توان نوشت:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow dF = IdlB \sin 90^\circ \Rightarrow dF = IBdl \Rightarrow F = \int IBdl \Rightarrow F = IB \int_a^b dl \Rightarrow$$

$$F = IB \Big|_a^b \Rightarrow F = IB(b-a)$$

۱۶) قرصی به شعاع R با چگالی بار یکنواخت $\frac{C}{m^2}$ را در نظر بگیرید. این قرص با سرعت زاویه‌ای ω حول محور مرکزی و عمود بر میدان مغناطیسی B ، دوران می‌کند. الف) گشتاور مغناطیسی آن را به دست آورید. ب) نشان دهید گشتاور وارد بر قرص: $\tau = \frac{1}{4} \sigma \omega \pi BR^2$ است. (راهنمایی: قرص را به حلقه‌هایی با شعاع r و عرض dr ، تقسیم کنید.)

حل: با استفاده از نتیجه‌ی مساله‌ی ۱۳ فصل ۶ برای جریان ناشی از قرص باردار چرخان می‌توان نوشت:

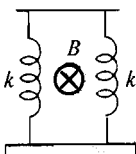
$$I = \frac{\sigma \omega R^2}{2}$$

الف) برای حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr داخل قرص، $d\mu$ برابر است با:

$$d\vec{\mu} = IdA \hat{n} \Rightarrow \mu = \int \frac{\sigma \omega r^2}{2} \times \pi r dr \Rightarrow \mu = \sigma \omega \pi \int_0^R r^3 dr \Rightarrow \mu = \sigma \omega \pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \Rightarrow \mu = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$$

ب) با استفاده از تعریف گشتاور نیرو می‌توان نوشت:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow \tau = \mu B \sin \theta \Rightarrow \tau = \frac{\sigma \omega \pi BR^4}{4}$$



۱۷) مطابق شکل مقابل، میله‌ی فلزی به طول 8 cm و جرم 10 g از دو فنر، آویزان است و فنرها به اندازه‌ی 4 cm ، افزایش طول دارند. وقتی جریان $A = 20$ از میله می‌گذرد میله به اندازه‌ی 1 cm بالا می‌رود. میدان مغناطیسی وارده چه قدر است؟

حل:

فصل ۸



قبل از عبور جریان از میله:

در راستای محور y ها: میله حرکتی ندارد پس: $a_y = 0$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow x = 4 \times 10^{-2} \text{ m} \\ x = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg} \Rightarrow m = 10 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ m = 10 \text{ g} \end{cases}$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F + F - mg = 0 \Rightarrow kx + kx - mg = 0 \Rightarrow 2kx = mg \Rightarrow$$



$$2 \times k \times 4 \times 10^{-2} = 10 \times 10^{-3} \times 9.8 \Rightarrow k = 1/225 \frac{N}{m}$$

پس از عبور جریان:

در راستای محور y ها: میله حرکتی ندارد پس: $a_y = 0$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F_B + F'' + F'' - mg = 0 \Rightarrow$$

$$B \sin 90^\circ + kx' + kx' - mg = 0 \Rightarrow$$

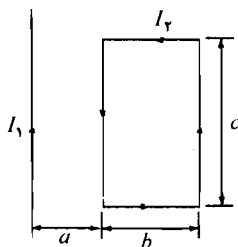
$$B \times 20 \times 10^{-2} \times 1 + 1/225 \times 3 \times 10^{-2} + 1/225 \times 3 \times 10^{-2} - 10 \times 10^{-3} \times 9.8 = 0 \Rightarrow$$

$$1/6 B = 2/45 \times 10^{-2} \Rightarrow B = 1/53 \times 10^{-2} \text{ T}$$

مسائل

میدان مغناطیسی سیم راست بلند

۱) سیم راست بلند و حلقه‌ی مستطیل شکل زیر را در یک صفحه در نظر بگیرید. برآیند نیروی وارد بر حلقه را به دست آورید.



حل: سیم حامل جریان I_1 با دو سیم AD و BC موازی است پس به آن‌ها نیرو وارد می‌کند.

دو سیم AB و DC نیز با یکدیگر موازی‌اند و به هم نیرو وارد می‌کنند. F_1 نیروی دافعه‌ی وارد به سیم AB از طرف سیم حامل جریان I_1 :

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a}$$

F_2 نیروی جاذبه‌ی وارد به سیم BC از طرف سیم حامل جریان I_1 :

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi (a+b)}$$

F_3 نیروی دافعه‌ی وارد بر سیم AB از طرف سیم DC :

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_3 = \frac{\mu_0 I_2 I_2 b}{2\pi c} \Rightarrow F_3 = \frac{\mu_0 I_2^2 b}{2\pi c}$$

F_4 نیروی دافعه‌ی وارد بر سیم DC از طرف سیم AB :

$$F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_4 = \frac{\mu_0 I_2 I_2 b}{2\pi c} \Rightarrow F_4 = \frac{\mu_0 I_2^2 b}{2\pi c}$$

دو نیروی F_3 و F_4 هم اندازه هستند از طرفی مطابق شکل این دو نیرو در خلاف جهت یکدیگر هستند. پس

فصل ۹

اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

F نیروی وارد بر حلقه :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_r \Rightarrow F = F_1 - F_r \Rightarrow F = \frac{\mu_0 I_1 I_r c}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I_1 I_r c}{2\pi (a+b)} \Rightarrow F = \frac{\mu_0 I_1 I_r c}{2\pi} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(a+b)} \right]$$

(۲) دو سیم راست بلند زیر را در نظر بگیرید. الف) شدت میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P به دست آورید. ب) اگر سیم سومی به طول 1 m را در این نقطه، قرار دهیم به طوری که حامل جریان A به 3 طرف خارج صفحه صاف باشد بر واحد طول سیم سوم چه نیرویی وارد خواهد شد؟

حل:

الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m} \\ x = 2\text{ cm} \\ y = 3\text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \times 10^{-2}\text{ m} \\ y = 3 \times 10^{-2}\text{ m} \end{cases}$$

$$r_1 = r_r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r_1 = r_r = \sqrt{(2 \times 10^{-2})^2 + (3 \times 10^{-2})^2}$$

$$r_1 = r_r = 3.61 \times 10^{-2}\text{ m}$$

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_r = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta_1 = \theta_r = 33.7^\circ$$

با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست بلند داریم:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \\ B_r = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{2\pi \times 3.61 \times 10^{-2}} \\ B_r = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 3.61 \times 10^{-2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 = 2.78 \times 10^{-5}\text{ T} \\ B_r = 5.54 \times 10^{-5}\text{ T} \end{cases}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_x = B_1 \cos \theta_1 + B_r \cos \theta_r \\ B_y = B_1 \sin \theta_1 - B_r \sin \theta_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = 2.78 \times 10^{-5} \times \cos 33.7^\circ + 5.54 \times 10^{-5} \times \cos 33.7^\circ \\ B_y = 2.78 \times 10^{-5} \times \sin 33.7^\circ - 5.54 \times 10^{-5} \times \sin 33.7^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = 6.92 \times 10^{-5} \\ B_y = -1.54 \times 10^{-5} \end{cases}$$

\vec{B} میدان مغناطیسی برآیند در نقطه‌ی P :

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \Rightarrow \vec{B} = (6.92 \hat{i} - 1.54 \hat{j}) \times 10^{-5}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی بین سیم‌های حامل جریان می‌توان نوشت: $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$

تولید میدان مغناطیسی - مسائل

در این جا B میدان مغناطیسی ناشی از دو سیم ۱ و ۲ در محل سیم ۳ و I شدت جریان سیم ۳ است.

$$\vec{F} = 3 \times 1 \hat{k} \times (\frac{6}{92} \hat{i} - \frac{1}{54} \hat{j}) \times 10^{-5} \Rightarrow \vec{F} = 20/8 (\hat{k} \times \hat{i}) - 4/62 (\hat{k} \times \hat{j}) \Rightarrow \vec{F} = 4/62 \hat{i} + 20/8 \hat{j}$$

۳) یک خط انتقال جریان مستقیم، ۲۰ متری بالای سطح زمین، کشیده شده و حامل جریان $A = 600$ به طرف شمال است. اگر مولفه افقی میدان مغناطیسی زمین $G = 0.5$ به طرف شمال باشد وقتی قطب‌نما درست زیر خط انتقال باشد جهت عقربه‌ی مغناطیسی در چه جهتی است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم راست می‌توان نوشت:

$$B_w = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow B_w = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 600}{2\pi \times 20} \Rightarrow B_w = 6 \times 10^{-6} \text{ T}$$

با استفاده از قانون دست راست جهت این میدان زیر سیم درست به طرف غرب است.

جهت میدان برآیند:

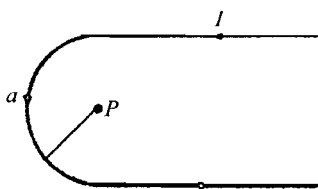
$$\begin{cases} 1 \text{ } G = 10^{-4} \text{ T} \\ B_e = 0.5 \text{ G} \end{cases} \Rightarrow B_e = 0.5 \times 10^{-4} \Rightarrow B_e = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$\tan \alpha = \frac{B_e}{B_w} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5 \times 10^{-5}}{6 \times 10^{-6}} \Rightarrow \tan \alpha = 8/33 \Rightarrow \alpha = 83/2^\circ$$

این زاویه از امتداد غرب است پس زاویه‌ی آن با امتداد شمال $90 - 83/2 = 6/8^\circ$ در جهت غرب شمال است.

قانون بیو - ساوار

۴) سیم بی‌نهایت بلند حامل جریان به شکل زیر است. بخش خمیده، نیم‌دایره‌ای به شعاع a است.



میدان را در نقطه‌ی P به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از حلقه‌ی حامل

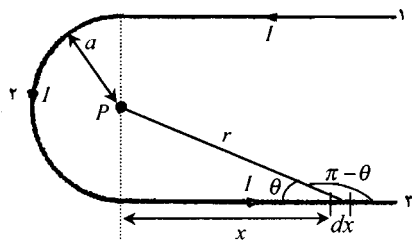
جریان در امتداد محورش می‌توان نوشت:

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{r(a^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I a^2}{r(a^2 + 0)^{3/2}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

رابطه‌ی بالا میدان ناشی از حلقه‌ی حامل جریان در مرکز

آن است چون در این شکل نیم حلقه داریم پس میدان

نصف می‌شود.



$$B_r = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2a} \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی

در نقطه‌ی P عمود بر صفحه‌ی کاغذ به طرف خارج صفحه است.

فصل ۹

با استفاده از قانون بیوساوار برای سیم‌های مستقیم می‌توان نوشت:

$$d\vec{B}_r = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \Rightarrow dB_r = \frac{\mu_0 I dl \sin(\pi - \theta)}{4\pi r^2} \Rightarrow dB_r = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$dB_r = \frac{\mu_0 I dx a}{4\pi r^2} \Rightarrow dB_r = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

با استفاده از جدول انتگرال‌ها، جواب انتگرال بالا برابر $\frac{1}{a^2}$ است پس:

$$B_r = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \times \frac{1}{a^2} \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

$$B_1 = B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \quad \text{می‌توان شکل نوشت:}$$

با استفاده از قانون دست راست جهت میدان‌های B_1 و B_r نیز عمود بر صفحه‌ی کاغذ و به طرف خارج است.

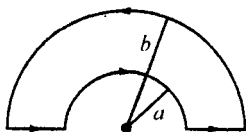
پس هر سه میدان هم جهت هستند.

B میدان برآیند در نقطه‌ی P :

$$B = B_1 + B_r + B_r \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} + \frac{\mu_0 I}{4a} + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4a} \left(\frac{1}{\pi} + 1 + \frac{1}{\pi} \right) \Rightarrow B = \frac{5/14 \times 10^{-7} I}{a}$$

(۵) مطابق شکل زیر، حلقه‌ی جریانی از دو نیم‌دایره‌ی هم مرکز تشکیل شده است. شدت میدان در مرکز

نیم‌دایره‌ها چه قدر است؟



حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از حلقه‌ی

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad \text{جریان در مرکز می‌توان نوشت:}$$

چون در شکل نیم‌حلقه داریم پس:

$$B_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2a} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

$$B_r = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2b} \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 I}{4b}$$

با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از نیم‌حلقه به شعاع a ، عمود بر صفحه به طرف

داخل صفحه و جهت میدان مغناطیسی ناشی از حلقه به شعاع b ، عمود بر صفحه به طرف خارج صفحه است.

با توجه به روابط B_1 و B_r میدان برآیند در جهت میدان بزرگتر، یعنی در جهت B_1 است. پس:

$$B = B_1 - B_r \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4a} - \frac{\mu_0 I}{4b} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

(۶) حلقه‌ی مربعی به ضلع l ، حامل جریان I است. نشان دهید شدت میدان در مرکز آن: $B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$ است.

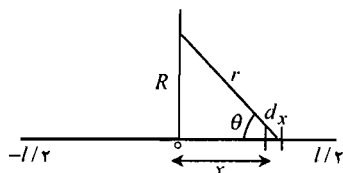
حل: ابتدا میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان به طول l را در نقطه‌ای روی عمود منصف سیم به

فاصله‌ی R از سیم به دست می‌آوریم.

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin \theta = \frac{R}{r} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

با استفاده از قانون بیوساوار می‌توان نوشت:



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \quad (۱)$$

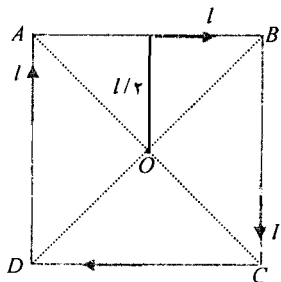
برای سیم AB با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم حامل جریان در نقطه‌ای روی عمود منصف آن داریم:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \times \frac{l}{2} \sqrt{l^2 + 4 \times \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \Rightarrow$$

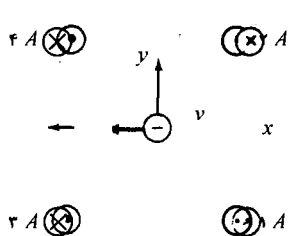
$$B_1 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$$

میدان‌های ناشی از سیم‌های BC ، DC و AD نیز برابر همین مقدار است پس شدت میدان برآیند در نقطه‌ی O برابر است با:

$$B = 4 \times B_1 \Rightarrow B = 4 \times \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l} \Rightarrow B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$$



(۷) مطابق شکل زیر، چهار سیم راست بلند حامل جریان در چهار راس مربعی به ضلع cm ۱۵ قرار دارند. الف) میدان برآیند را در مرکز مربع به دست آورید. ب) نیروی وارد بر الکترون عبوری از مرکز



مربع با سرعت $\hat{i} \frac{m}{s} 10^6 \times 4$ را به دست آورید.

حل:

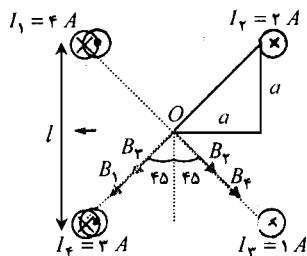
الف) با استفاده از قانون دست راست جهت میدان مغناطیسی

ناشی از هر سیم در نقطه‌ی O را تعیین می‌کنیم.

چون سیم‌ها در چهار راس مربع قرار دارند پس فاصله‌ی آن‌ها

تا مرکز مربع یکسان است.

فصل ۹



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow l = 15 \times 10^{-2} \text{ m} \\ l = 15 \text{ cm} \end{cases}$$

$$r = \sqrt{a^2 + a^2} \Rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} l \Rightarrow$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 15 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 10.6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم حامل جریان داریم:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \Rightarrow B_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4}{2\pi \times 10.6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_1 = 7.5 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \Rightarrow B_2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{2\pi \times 10.6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_2 = 3.7 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3} \Rightarrow B_3 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 10.6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_3 = 1.9 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_4 = \frac{\mu_0 I_4}{2\pi r_4} \Rightarrow B_4 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3}{2\pi \times 10.6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_4 = 5.7 \times 10^{-6} \text{ T}$$

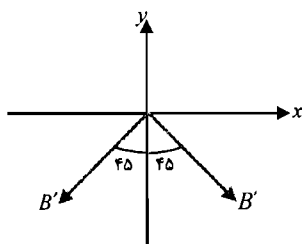
با توجه به شکل، میدان‌های B_1 و B_2 هم راستا و هم جهت هستند پس:

$$B' = B_1 + B_2 \Rightarrow B' = 7.5 \times 10^{-6} + 3.7 \times 10^{-6} \Rightarrow B' = 11.2 \times 10^{-6} \text{ T}$$

با توجه به شکل میدان‌های B_3 و B_4 هم راستا و هم جهت هستند پس:

$$B'' = B_3 + B_4 \Rightarrow B'' = 1.9 \times 10^{-6} + 5.7 \times 10^{-6} \Rightarrow B'' = 7.6 \times 10^{-6} \text{ T}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} B_x = B' \sin 45 - B'' \sin 45 \\ B_y = -B' \cos 45 - B'' \cos 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_x = 11.2 \times 10^{-6} \times \sin 45 - 7.6 \times 10^{-6} \times \sin 45 \\ B_y = -11.2 \times 10^{-6} \times \cos 45 - 7.6 \times 10^{-6} \times \cos 45 \end{cases} \Rightarrow$$

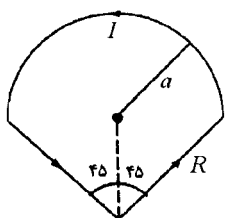
$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -13.3 \times 10^{-6} \Rightarrow \vec{B} = -13.3 \times 10^{-6} \hat{j} \end{cases}$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار متحرک در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = -1.6 \times 10^{-19} \times (4 \times 10^6 \hat{i}) \times (-13.3 \times 10^{-6} \hat{j}) \Rightarrow \vec{F} = 8.5 \times 10^{-18} (\hat{i} \times \hat{j})$$

$$\vec{F} = 8.5 \times 10^{-18} \hat{k}$$

(۸) مطابق شکل زیر، حلقه‌ای متشکل از یک نیم‌دایره و دو شعاع عمود بر هم R شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر جریان I باشد میدان برآیند را در مرکز قسمت دایره‌ای به دست آورید.



حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث در دو مثلث نشان داده شده در شکل می‌توان نوشت:

$$R^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow R^2 = 2a^2 \Rightarrow R = \sqrt{2}a$$

$$\sin \varphi = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

برای سیم‌های AB و BC با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم حامل جریان در نقطه‌ای روی عمود منصف آن (رابطه‌ی

(۱) مسأله‌ی ۶) می‌توان نوشت:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \times x} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \times \frac{a\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

میدان ناشی از سیم‌های AB و BC هم اندازه است پس: $B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از حلقه‌ی حامل جریان در مرکز می‌توان نوشت: $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$

چون در شکل نیم حلقه داریم پس:

$$B_r = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2a} \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

B شدت میدان کل در مرکز حلقه برابر است با:

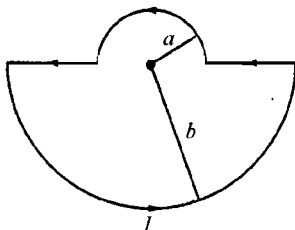
$$B = B_1 + B_r + B_2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{4a} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{a} \mu_0 I$$

(۹) دو حلقه‌ی نیم‌دایره‌ای هم‌مرکز به شعاع‌های a و b را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید (الف) میدان

برآیند را در مرکز به دست آورید. (ب) گشتاور مغناطیسی حلقه چه قدر است؟ فرض کنید: $a = 6 \text{ cm}$

، $b = 18 \text{ cm}$ و $I = 4/5 \text{ A}$ است.

حل:



(الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از حلقه‌ی حامل جریان

در مرکز می‌توان نوشت: $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ a = 6 \text{ cm} \\ b = 18 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \times 10^{-2} \text{ m} \\ b = 18 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

چون در شکل نیم حلقه داریم پس:

فصل ۹

$$B_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2a} \Rightarrow B_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4/5}{4 \times 6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_1 = 2/35 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2b} \Rightarrow B_2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4/5}{4 \times 18 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_2 = 7/85 \times 10^{-6} \text{ T}$$

با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر دو نیم حلقه عمود بر صفحه به طرف خارج صفحه است. پس:

$$B = B_1 + B_2 \Rightarrow B = 2/35 \times 10^{-5} + 7/85 \times 10^{-6} \Rightarrow B = 3/14 \times 10^{-5} \text{ T}$$

(ب) مساحت حلقه برابر است با:

$$A = \left(\frac{1}{2} \times \pi a^2\right) + \left(\frac{1}{2} \times \pi b^2\right) \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2) \Rightarrow A = \frac{3/14}{2} [(6 \times 10^{-2})^2 + (18 \times 10^{-2})^2] \Rightarrow$$

$$A = 5/65 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

با استفاده از رابطه‌ی گشتاور مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\vec{\mu} = NIA\hat{n} \Rightarrow \mu = 1 \times 4/5 \times 5/65 \times 10^{-2} \Rightarrow \mu = 0/254 \text{ Am}^2$$

(۱۰) برای آن که سیم‌لوله‌ای به طول ۲۵ cm، شعاع ۲ cm و جریان A ۱۵ بسازیم به طوری که میدان تولید شده روی محور آن T ۰/۰۲ باشد چند دور سیم روپوش‌دار مسی را دور آن ببیجیم؟ (از اثر انتهای سیم‌لوله، صرف‌نظر کنید.)

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم‌لوله در امتداد محورش می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ l = 25 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow l = 25 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$B = \mu_0 n l \Rightarrow 0/02 = 4\pi \times 10^{-7} \times n \times 15 \Rightarrow n = 1/06 \times 10^3$$

$$n = \frac{N}{l} \Rightarrow 1/06 \times 10^3 = \frac{N}{25 \times 10^{-2}} \Rightarrow N = 265$$

قانون آمپر

(۱۱) مطابق شکل زیر، تیغی فلزی نامتناهی به ضخامت t حامل جگالی جریان یکنواخت J است. (الف)

با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان را در بالا و پایین تیغه به دست آورید. (ب) میدان

مغناطیسی را در فاصله‌ی a از تیغه به دست آورید.

حل:



(الف) با استفاده از قانون دست راست، میدان مغناطیسی ناشی

از تیغه به موازات سطح تیغه است به طوری که در بالای آن

به طرف راست و در پایین آن به طرف چپ است.

ب) فرض کنید عرض نوار x است. با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \int_{\text{بالای تیغه}} B dl \cos 0 + \int_{\text{پایین تیغه}} B dl \cos 0 = \mu_0 J A \Rightarrow Bx + Bx = \mu_0 J x \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J t}{2}$$

(۱۲) سیم راست بلندی با شعاع مقطع 2 mm و جریان $A \ 12$ را در نظر بگیرید که جریان دارای توزیع یکنواخت در مقطع آن است. در چه نقاط داخل و خارج سیم، شدت میدان به 25% مقدار آن در سطح سیم می‌شود؟

حل: با استفاده از قانون آمپر برای $r < R$ می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I' \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2} I \right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (1)$$

با استفاده از قانون آمپر برای $r > R$ می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

برای محاسبه‌ی میدان در سطح سیم می‌توان از هر دو رابطه‌ی بالا استفاده کرد:

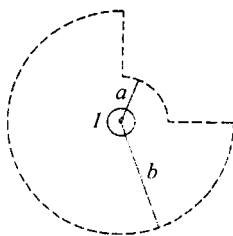
$$r = R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I R}{2\pi R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (3)$$

اگر میدان در نقطه‌ای درون سیم به 25% مقدار آن روی سطح برسد با استفاده از روابط (۱) و (۳) داریم:

$$\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{25}{100} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{4} R$$

اگر میدان در نقطه‌ای بیرون سیم به 25% مقدار آن روی سطح برسد با استفاده از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{25}{100} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{4R} \Rightarrow r = 4R$$



(۱۳) با استفاده از قانون بیو - ساوار برای میدان ناشی از سیم نامتناهی نشان دهید قانون آمپر برای حلقه‌ی شکل مقابل، معتبر است. قسمت‌های دایره‌ای با خطوط شعاعی به هم وصل شده‌اند.

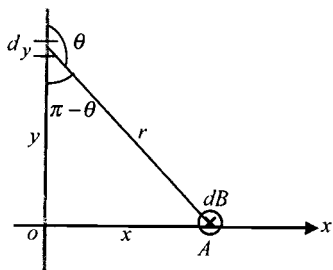
حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

برای نقطه‌ی A با استفاده از قانون بیوساوار می‌توان نوشت:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I dy \sin \theta}{4\pi r^2} \Rightarrow$$



فصل ۹

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dyx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{xdy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (۱)$$

با استفاده از قانون آمپر می توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi x) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (۲)$$

دیده می شود روابط (۱) و (۲) با هم برابرند.

مسائل تکمیلی

۱۴) ذره ای به جرم m و بار q روی مداری دایره ای عمود بر میدان مغناطیسی خارجی B حرکت

می کند. نشان دهید میدان مغناطیسی ناشی از حرکت بار در مرکز مدار: $\frac{\mu_0 q^2 B}{4\pi mR}$ است.

حل: دوره ی تناوب حرکت ذره برابر دوره ی تناوب حرکت سیکلوترونی است. با استفاده از رابطه ی جریان برای یک دوره ی تناوب می توان نوشت:

$$I = \frac{q}{T} \Rightarrow I = \frac{q}{2\pi m} \Rightarrow I = \frac{q^2 B}{2\pi m}$$

حرکت ذره در یک مسیر دایره ای میدانی مشابه میدان ناشی از حلقه ی جریان ایجاد می کند. با استفاده از رابطه ی میدان مغناطیسی ناشی از حلقه ی جریان در مرکز حلقه و با استفاده از رابطه ی فوق می توان نوشت:

$$B' = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow B' = \frac{\mu_0}{2R} \left(\frac{q^2 B}{2\pi m} \right) \Rightarrow B' = \frac{\mu_0 q^2 B}{4\pi mR}$$

که در رابطه ی فوق B ، میدان مغناطیسی خارجی و B' ، میدان مغناطیسی ناشی از حرکت ذره ی باردار است.

۱۵) قرص نارسانایی به شعاع R و چگالی بار سطحی σ با سرعت ω حول محور مرکزی می چرخد.

الف) جریان dl در حلقه ای به عرض dr (ب) میدان مغناطیسی در مرکز حلقه چه قدر است؟ (ج) نشان

دهید میدان مغناطیسی کل در مرکز قرص: $B = \frac{1}{4} \mu_0 \sigma \omega R$ است.

حل:

الف) با استفاده از رابطه ی شدت جریان و سرعت زاویه ای می توان نوشت:

$$dl = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dl = \frac{\sigma dA}{T} \Rightarrow dl = \frac{\sigma 2\pi r dr}{T} \Rightarrow dl = \sigma \omega r dr$$

ب) با استفاده از رابطه ی میدان ناشی از حلقه ی جریان در مرکز حلقه می توان نوشت:

$$dB = \frac{\mu_0 dl}{2r} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2r} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega dr}{2}$$

ج

$$B = \int_0^R dB \Rightarrow B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega}{r} dr \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{r} \Big|_0^R \Rightarrow B = \frac{1}{r} \mu_0 \sigma \omega R$$

۱۶) مطابق شکل زیر، ورقه‌ی فلزی بی‌نهایت بلند به عرض w حامل جریان I است. با تقسیم ورقه به نوارهای بسیار نازک و با استفاده از میدان ناشی از سیم راست بلند نشان دهید میدان مغناطیسی در

$$\text{نقطه‌ی } P: B_P = \frac{\mu_0 I}{\pi w} \tan^{-1} \left(\frac{w}{rD} \right)$$

حل: با استفاده از رابطه‌ی جریان ناشی از سیم راست می‌توان نوشت:

$$dB = \frac{\mu_0 dl}{2\pi r} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \left(\frac{dx}{w} \right)}{D \cos \theta} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi D w} \cos \theta dx$$

$$B = \int dB \cos \theta \Rightarrow B = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi D w} \cos^2 \theta dx \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D w} \int \cos^2 \theta dx$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر می‌توان نوشت:

$$x = D \tan \theta \Rightarrow dx = D(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

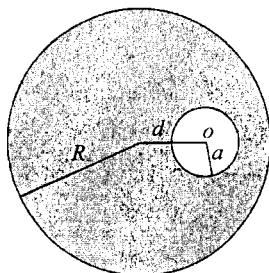
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D w} \int \cos^2 \theta D(1 + \tan^2 \theta) d\theta \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \int_{-\theta}^{\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \theta \Big|_{-\theta}^{\theta} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} [\theta - (-\theta)] \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{\pi w} \theta$$

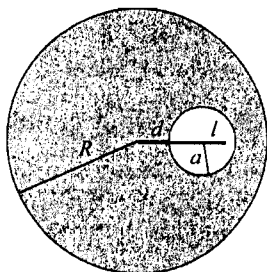
$$\tan \theta = \frac{w}{D} \Rightarrow \tan \theta = \frac{w}{rD} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{w}{rD} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{\pi w} \tan^{-1} \frac{w}{rD}$$

۱۷) سیم راست بلند به شعاع مقطع R را در نظر بگیرید که در امتداد طولش، کاواکی به شعاع a



ایجاد شده است. مطابق شکل مقابل، فاصله بین مراکز سیم و کاواک در هر مقطع d است. جریان عبوری از مقطع یکنواخت است. الف) نشان دهید میدان تولیدی در کاواک، یکنواخت است. ب) اندازه‌ی میدان را به دست آورید. (راهنمایی: از اصل برهم‌نهی، استفاده کنید. میدان حاصل از سیم بدون کاواک را با میدان ناشی از سیمی به مقطع کاواک حامل جریان در جهت مخالف، جمع کنید.)

فصل ۹



حل: اگر فرض کنیم سیم با شعاع R بدون کاواک است برای محاسبه‌ی میدان در فاصله‌ی $r = d + l$ (داخل سیم) با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r^2 I}{R^2} \right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 (d+l) I}{2\pi R^2}$$

اگر فرض کنیم سیمی با شعاع a داریم که جهت جریان در آن، خلاف جهت جریان در سیم بدون کاواک به شعاع R است، برای محاسبه‌ی میدان در فاصله‌ی $r = l$ (داخل سیم)، با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I \Rightarrow B'(2\pi r') = -\mu_0 \left(\frac{r'^2 I}{R^2} \right) \Rightarrow B' = \frac{-\mu_0 r' I}{2\pi R^2}$$

$$r = l \Rightarrow B' = -\frac{\mu_0 l I}{2\pi R^2}$$

علامت منفی، نشان‌دهنده‌ی جهت جریان است.

میدان داخل کاواک از برهم‌نهی این دو میدان حاصل می‌شود. پس:

$$B_T = B + B' \Rightarrow B_T = \frac{\mu_0 (d+l) I}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 l I}{2\pi R^2} \Rightarrow B_T = \frac{\mu_0 d I}{2\pi R^2}$$

از آن جا که d و R مقادیر ثابتی هستند پس میدان درون کاواک یکنواخت است.

مسائل

شار مغناطیسی

(۱) حلقه‌ی مسطحی به ابعاد $12\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ را در نظر بگیرید که در ابتدا عمود بر میدان مغناطیسی $T = 0.2$ است. تغییر شار عبوری از حلقه را وقتی به دست آورید که حلقه، حول محور عمود بر خطوط میدان 120° بچرخد.

حل: با استفاده از مساحت مستطیل می‌توان نوشت:

$$A = ab \Rightarrow A = 12 \times 7 \Rightarrow A = 84\text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} 1\text{ cm}^2 = 10^{-4}\text{ m}^2 \\ A = 84\text{ cm}^2 \end{cases} \Rightarrow A = 84 \times 10^{-4}\text{ m}^2$$

$$\alpha_i = 90 - \theta_i \Rightarrow \alpha_i = 90 - 90 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

$$\alpha_f = 90 - \theta_f \Rightarrow \alpha_f = 90 - (90 - 120) \Rightarrow \alpha_f = 120^\circ$$

با استفاده از رابطه‌ی تغییر شار می‌توان نوشت:

$$\Delta\Phi = BA(\cos\alpha_f - \cos\alpha_i) \Rightarrow \Delta\Phi = 0.2 \times 84 \times 10^{-4} \times (\cos 120 - \cos 0) \Rightarrow \Delta\Phi = 2/52 \times 10^{-2}\text{ Wb}$$

قانون فارادی

(۲) پیچه‌ای با مقاومت $3\ \Omega$ ، مساحت 8 cm^2 و ۲۵ دور سیم‌پیچی را در نظر بگیرید. سطح پیچه عمود بر میدان وابسته به زمان $T = (0.4t - 0.3t^2)$ است. الف) شار عبوری از پیچه را به صورت تابعی از زمان به دست آورد. ب) جریان القایی در لحظه‌ی $t = 1\text{ s}$ چه قدر است؟

فصل ۱۰

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی شار می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \\ A = \lambda \text{ cm}^2 \end{cases} \Rightarrow A = \lambda \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\alpha = 90^\circ - \theta \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 90^\circ \Rightarrow \alpha = 0^\circ$$

$$\Phi = BA \cos \alpha \Rightarrow \Phi = (0.4t - 0.2t^2) \times \lambda \times 10^{-4} \times \cos 0^\circ \Rightarrow \Phi = (3/2t - 2/4t^2) \times 10^{-4}$$

ب) با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -25 \times \frac{d}{dt} [(3/2t - 2/4t^2) \times 10^{-4}] \Rightarrow \mathcal{E} = -25 \times (3/2 - 4/8t) \times 10^{-4} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -8 \times 10^{-2} + 0.125t$$

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow \mathcal{E} = -8 \times 10^{-2} + 0.125 \times 1 \Rightarrow \mathcal{E} = 4 \times 10^{-2} \text{ V}$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$\mathcal{E} = RI \Rightarrow 4 \times 10^{-2} = 3I \Rightarrow I = 1/33 \times 10^{-2} \text{ A}$$

۳) مطابق شکل زیر، میله‌ی فلزی با سرعت $30 \frac{m}{s}$ روی ریل‌های بدون اصطکاک به فاصله‌ی 24 cm از هم، حرکت می‌کند. در ناحیه‌ی مورد آزمایش، میدان مغناطیسی یکنواخت $T/45$ به طور عمود بر صفحه به طرف خارج صفحه است. مقاومت میله $2/7 \Omega$ و مقاومت ریل‌ها قابل اغماض است. هر یک از کمیت‌های زیر را به دست آورید: الف) جریان عبوری از ریل‌ها ب) نیروی مغناطیسی وارد بر میله ج) توان مکانیکی لازم برای حفظ حرکت میله با سرعت ثابت د) توان الکتریکی اتلافی.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان القایی در سیم متحرک داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ l = 24 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow l = 24 \times 10^{-2} \Rightarrow l = 0.24 \text{ cm}$$

$$I = \frac{Blv}{R} \Rightarrow I = \frac{0.45 \times 0.24 \times 30}{2/7} \Rightarrow I = 1/2 \text{ A}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$F = IlB \sin \theta \Rightarrow F = 1/2 \times 0.24 \times 0.45 \times \sin 90^\circ \Rightarrow F = 0.13 \text{ N}$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی توان مکانیکی می‌توان نوشت:

$$P_m = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} \Rightarrow P_m = F_{ext} v \cos \theta \Rightarrow P_m = 0.13 \times 30 \times \cos 0^\circ \Rightarrow P_m = 3/9 \text{ W}$$

د) با استفاده از رابطه‌ی توان الکتریکی اتلافی می‌توان نوشت:

$$P_e = I^2 R \Rightarrow P_e = (1/2)^2 \times 2/7 \Rightarrow P_e = 3/9 \text{ W}$$

۴) پیچ‌های را در نظر بگیرید که شعاعش 5 cm و دارای 20 دور سیم‌پیچ با سیم مسی به قطر 1 mm

است. صفحه‌ی پیچ‌ه‌ی عمود بر میدانی است که با آهنگ $\frac{T}{s}$ تغییر می‌کند. توان اتلافی در پیچ‌ه‌ی چه قدر است؟ مقاومت ویژه‌ی مس برابر $m \times 10^{-8} \Omega$ است.

حل: با استفاده از مساحت دایره می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 5 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 0.05 \text{ m}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14 \times (0.05)^2 \Rightarrow A = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\mathcal{E} = -N \frac{dB}{dt} A \Rightarrow \mathcal{E} = -20 \times 0.2 \times 7.85 \times 10^{-3} \Rightarrow \mathcal{E} = -0.314 \text{ V} \Rightarrow |\mathcal{E}| = 0.314 \text{ V}$$

با استفاده از محیط دایره می‌توان نوشت:

$$l = N 2\pi r \Rightarrow l = 20 \times 2 \times 3.14 \times 0.05 \Rightarrow l = 6.28 \text{ m}$$

با استفاده از مساحت دایره می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 1 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 1 \times 10^{-3} \Rightarrow d = 10^{-3} \text{ m}$$

$$A' = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow A' = 3.14 \times \left(\frac{10^{-3}}{2}\right)^2 \Rightarrow A' = 7.85 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R = \rho \frac{l}{A'} \Rightarrow R = 1.7 \times 10^{-8} \times \frac{6.28}{7.85 \times 10^{-7}} \Rightarrow R = 0.136 \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی توان الکتریکی اتلافی می‌توان نوشت:

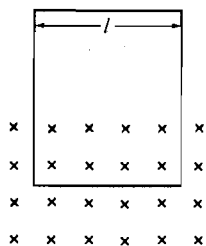
$$P_e = I^2 R \Rightarrow P_e = \frac{|\mathcal{E}|^2}{R} \Rightarrow P_e = \frac{(0.314)^2}{0.136} \Rightarrow P_e = 7.25 \times 10^{-3} \text{ W}$$

(۵) مطابق شکل زیر، حلقه‌ی مستطیل شکلی به عرض l ، مقاومت R و جرم m به طور عمود بر روی

میدان افقی یکنواخت B حرکت می‌کند. الف) نشان دهید سرعت حد حلقه $v_T = \frac{mgR}{(Bl)^2}$ است. ب) نشان

دهید به ازای سرعت v_T ، آهنگ افت انرژی پتانسیل گرانشی برابر توان الکتریکی اتلافی است.

حل:



الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان القایی در سیم متحرک و قانون اهم داریم:

$$|\mathcal{E}| = Bvl \Rightarrow IR = Bvl \Rightarrow I = \frac{Bvl}{R}$$

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر سیم متحرک می‌توان نوشت:

$$F = IlB \sin \theta \Rightarrow F = \frac{Bvl}{R} lB \sin 90^\circ \Rightarrow F = \frac{(Bl)^2}{R} v$$

فصل ۱۰

سرعت حد سیم وقتی است که نیروی وزن حلقه برابر نیروی الکتریکی باشد:

$$F = mg \Rightarrow \frac{(Bl)^2}{R} v_T = mg \Rightarrow v_T = \frac{mgR}{(Bl)^2}$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی آهنگ انرژی الکتریکی اتلافی (توان الکتریکی اتلافی) می‌توان نوشت:

$$P_e = I^2 R \Rightarrow P_e = \left(\frac{Bv_T l}{R} \right)^2 R \Rightarrow P_e = \frac{(Bl)^2}{R} v_T^2 \Rightarrow P_e = \frac{(Bl)^2}{R} \left[\frac{mgR}{(Bl)^2} \right]^2 \Rightarrow P_e = \left(\frac{mg}{Bl} \right)^2 R \quad (1)$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی می‌توان نوشت:

$$U = mgy \Rightarrow \frac{dU}{dt} = mg \frac{dy}{dt} \Rightarrow P_g = mgv_T \Rightarrow P_g = mg \frac{mgR}{(Bl)^2} \Rightarrow P_g = \left(\frac{mg}{Bl} \right)^2 R \quad (2)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱) و (۲) دیده می‌شود: $P_e = P_g$

(۶) میدان مغناطیسی $T = (0.2t - 0.5t^2)$ عمود بر صفحه‌ی بیچه‌ی دایره‌ای به شعاع $1/8$ cm با دور سیم‌پیچ و مقاومت کل $1/5 \Omega$ است. توان اتلافی را در لحظه‌ی $t = 3$ s به دست آورید.

حل: با استفاده از مساحت دایره می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 1/8 \times 10^{-2} \text{ m} \\ r = 1/8 \text{ cm} \end{cases}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times (1/8 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow A = 1/0.2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\mathcal{E} = -N \frac{dB}{dt} A \Rightarrow \mathcal{E} = -25 \times 1/0.2 \times 10^{-2} \times \frac{d(0.2t - 0.5t^2)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -0.255 \times (0.2 - t)$$

$$t = 3 \text{ s} \Rightarrow \mathcal{E} = -0.255 \times (0.2 - 3) \Rightarrow \mathcal{E} = 0.714 \text{ V}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان الکتریکی اتلافی و قانون اهم می‌توان نوشت:

$$P_e = I^2 R \Rightarrow P_e = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 R \Rightarrow P_e = \frac{(0.714)^2}{1/5} \Rightarrow 3/39 \times 10^{-2} \text{ W}$$

مولد

(۷) بیچه‌ای دارای سطح مقطع 40 و 100 دور سیم‌پیچی با مقاومت $4/5 \Omega$ است. بیچه با سرعت 120 rpm حول محور عمود بر میدان مغناطیسی $T = 0.4$ در چرخش است. الف) بیشینه نیروی محرکه‌ی الکتریکی تولیدی (ب) بیشینه‌ی گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر بیچه را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه‌ی نیروی محرکه الکتریکی تولید شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \\ A = 40 \text{ cm}^2 \end{cases} \Rightarrow A = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\begin{cases} 1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} \\ \omega = 120 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \\ 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow \omega = 120 \times \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega = 12 / 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon_0 = NAB\omega \Rightarrow \varepsilon_0 = 100 \times 40 \times 10^{-4} \times 0.04 \times 12 / 6 \Rightarrow \varepsilon_0 = 0.2 \text{ V}$$

(ب) با استفاده از تعریف گشتاور مغناطیسی و قانون اهم می‌توان نوشت:

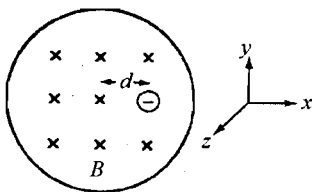
$$\tau = \mu B \sin \theta \Rightarrow \tau = \mu LAB \sin \theta \Rightarrow \tau = N \frac{\varepsilon_0}{R} AB \sin \theta \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = 100 \times \frac{0.2}{4/5} \times 40 \times 10^{-4} \times 0.04 \times \sin 90 \Rightarrow \tau_{\max} = 2 / 1 \times 10^{-2} \text{ Nm}$$

میدان‌های الکتریکی القایی

(۸) مطابق شکل زیر، الکترونی را به فاصله d از محور سیم‌لوله در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی یکناخت درون سیم‌لوله بر حسب زمان به صورت: $B = Ct$ تغییر می‌کند. نیروی الکتریکی وارد بر الکترون را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی می‌توان نوشت:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A \frac{dB}{dt} \Rightarrow E \pi d = -\pi d^2 \frac{d}{dt} (-Ct) \Rightarrow E = \frac{Cd}{2}$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$E = \frac{F}{q} \Rightarrow \frac{Cd}{2} = \frac{F}{e} \Rightarrow F = \frac{eCd}{2}$$

(۹) در سیم‌لوله‌ی بلندی، جریان به صورت: $I(t) = (4 + 6t^2) \text{ A}$ تغییر می‌کند. سیم‌لوله دارای

قطر 2 cm و شعاع $100 \frac{\text{rev}}{\text{m}}$ است. اندازه‌ی میدان الکتریکی القایی را در لحظه‌ی $t = 2 \text{ s}$ در هر یک از

نقاط: الف) 0.5 cm (ب) 4 cm از محور آن به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی و رابطه‌ی میدان الکتریکی سیم‌لوله می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A \frac{dB}{dt} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A \frac{d}{dt} (\mu_0 n I) \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 n A \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 n A \frac{d}{dt} (4 + 6t^2) \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 n A \times 12t \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -12 \mu_0 n A t \quad (1)$$

الف) برای نقاط داخل سیم‌لوله، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 0.5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 0.5 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 5/10 \times 10^{-2} \text{ m}$$

فصل ۱۰

$$E \pi r = -\gamma \mu_0 \pi r^2 n t \Rightarrow E = -\epsilon \mu_0 r n t \Rightarrow E = -6 \times 4 \pi \times 10^{-7} \times 5 / 0 \times 10^{-2} \times 800 \times 2 \Rightarrow$$

$$E = -6 / 0.3 \times 10^{-5} \frac{V}{m}$$

پس اندازه‌ی میدان الکتریکی برابر $6 / 0.3 \times 10^{-5} \frac{V}{m}$ است.

(ب) برای نقاط خارج سیم‌لوله، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ R = 2 \text{ cm} \\ r' = 4 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 2 \times 10^{-2} \text{ m} \\ r' = 4 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

$$E \pi r = -\gamma \mu_0 \pi R^2 n t \Rightarrow E = -\frac{\epsilon \mu_0 R^2 n t}{r} \Rightarrow E = -\frac{6 \times 4 \pi \times 10^{-7} \times (2 \times 10^{-2})^2 \times 800 \times 2}{4 \times 10^{-2}} \Rightarrow$$

$$E = -1 / 2 \times 10^{-4} \frac{V}{m}$$

پس اندازه‌ی میدان الکتریکی برابر $1 / 2 \times 10^{-4} \frac{V}{m}$ است.

نیروی محرکه‌ی الکتریکی حرکتی

(۱۰) هواپیمایی با طول بال‌های m ۴۵ با سرعت $\frac{m}{s}$ ۳۰۰ در منطقه‌ای پرواز می‌کند که مولفه‌ی قائم

میدان زمین G ۰/۶ است. الف) اختلاف پتانسیل بین دو سر بال‌ها چه قدر است؟ (ب) ولت‌سنج داخل هواپیما و متصل به دو سر بال‌ها چه عددی را نشان خواهد داد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل بین دو سر میله‌ی متحرک می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ T} = 10^4 \text{ G} \\ B = 0.6 \text{ G} \end{cases} \Rightarrow B = 0.6 \times \frac{1}{10^4} \Rightarrow B = 6 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$\Delta V = Blv \Rightarrow \Delta V = 6 \times 10^{-5} \times 45 \times 300 \Rightarrow \Delta V = 0.81 \text{ V}$$

(ب) اختلاف پتانسیل محاسبه شده در قسمت الف از نوع اختلاف پتانسیل الکتروستاتیکی است و ولت‌سنج، هیچ عددی را نشان نمی‌دهد.

(۱۱) یک دینام قرصی فاراده (مولد هم قطبی) به شعاع cm ۲۰ را در نظر بگیرید که در میدان مغناطیسی T ۰/۰۸ عمود بر سطح قرص قرار دارد و نیروی محرکه‌ی تولیدی V ۱/۲ است. سرعت زاویه‌ای دوران آن را بر حسب rpm به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القا شده در قرص چرخان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ R = 20 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow R = 20 \times 10^{-2} \Rightarrow R = 0.2 \text{ m}$$

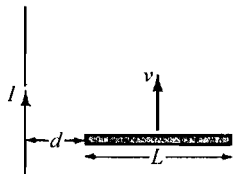
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \omega B R^2 \Rightarrow 1/2 = \frac{1}{2} \omega \times 0.1 \times (0.1)^2 \Rightarrow \omega = 75.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} \\ \omega = 75.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 75.0 \times \frac{60}{2\pi} \Rightarrow \omega = 716 \times 10^3 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \\ 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \end{cases}$$

مسائل تکمیلی

۱۲) مطابق شکل زیر، سیم بلند راست، حامل جریان ثابت I است. میله‌ای به طول l با سرعت v نسبت به سیم در حرکت است. اختلاف پتانسیل بین دو سر میله چه قدر است؟

حل: نیروی محرکه‌ی القایی در سیم متحرک را برای عنصر dr می‌نویسیم:



$$d\varepsilon = Bvdr \Rightarrow d\varepsilon = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} vdr \Rightarrow \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} vdr \Rightarrow$$

$$\varepsilon \Big|_0^{\varepsilon} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln r \Big|_d^{d+l} \Rightarrow \varepsilon - 0 = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} [\ln(L+d) - \ln d] \Rightarrow$$

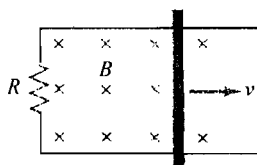
$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{L+d}{d}$$

۱۳) مطابق شکل زیر، میله‌ای فلزی به جرم m و طول l روی ریل‌های بدون اصطکاکی با مقاومت R در حال حرکت است. میدان مغناطیسی یکنواخت، عمود بر صفحه‌ی ریل‌ها است. سرعت اولیه‌ی میله

v_0 است و به میله، هیچ نیروی خارجی، وارد نمی‌شود. (الف) نشان دهید: $v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ است. که در

آن $\tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$ است. (ب) نشان دهید مسافت طی شده قبل از توقف $v_0 \tau$ است. (ج) نشان دهید کل انرژی

الکتریکی اتلافی $\frac{1}{2} mv_0^2$ است.



حل:

(الف) با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر سیم متحرک و رابطه‌ی

جریان القایی در سیم متحرک می‌توان نوشت:

$$F = BIl \sin \theta \Rightarrow ma = B \left(-\frac{Blv}{R} \right) l \sin 90^\circ \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{(Bl)^2}{mR} v$$

علامت منفی، نشان دهنده‌ی قانون لenz است. فرض کنید:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln v \Big|_{v_0}^v = -\frac{1}{\tau} t \Big|_0^t \Rightarrow \ln v - \ln v_0 = -\frac{1}{\tau} (t-0) \Rightarrow$$

فصل ۱۰

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ب) وقتی که میله می‌ایستد: $v = 0$

$$v = 0 \Rightarrow v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = -\infty \Rightarrow t = \infty$$

با استفاده از تعریف سرعت لحظه‌ای می‌توان نوشت:

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow dx = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^{\infty} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt \Rightarrow x \Big|_0^x = v_0 (-\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty}$$

$$x - 0 = -v_0 \tau (0 - 1) \Rightarrow x = v_0 \tau$$

ج) توان الکتریکی اتلافی لحظه‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{dP_e}{dt} = \frac{(Blv)^2}{R} \Rightarrow \frac{dP_e}{dt} = \frac{(Bl)^2}{R} \left(v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 \Rightarrow dP_e = \frac{(Bl)^2}{R} v_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$\int_0^{P_e} dP_e = \int_0^{\infty} \frac{(Bl)^2}{R} v_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \Rightarrow P_e \Big|_0^{P_e} = \frac{(Bl)^2}{R} v_0^2 \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow$$

$$P_e - 0 = -\frac{(Bl)^2}{R} v_0^2 \frac{\tau}{2} (0 - 1) \Rightarrow P_e = \frac{(Bl)^2}{2R} \tau v_0^2 \Rightarrow P_e = \frac{(Bl)^2}{2R} \frac{mR}{(Bl)^2} v_0^2 \Rightarrow P_e = \frac{1}{2} m v_0^2$$

۱۴) نوار رسانایی را در نظر بگیرید که به صورت کش به دور بادکنکی، کشیده شده و صفحه‌ی نوار از مرکز بادکنک می‌گذرد. میدان مغناطیسی یکنواخت $T = 0.4$ بر این صفحه، عمود است. وقتی شعاع بادکنک 6 cm است هوای آن با آهنگ $100 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ خارج می‌شود. نیروی محرک الکتریکی القایی در نوار

چه قدر است؟

حل: بادکنک به شکل کره است پس:

$$\frac{dV}{dt} = -100 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = -100 \Rightarrow 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -100 \Rightarrow 4 \times 3 / 14 \times (6)^2 \times \frac{dr}{dt} = -100 \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = -0.1221 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -2/21 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

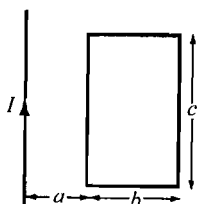
نوار رسانا به شکل دایره است پس:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} (\pi r^2) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2 \times 3 / 14 \times 0.6 \times (-2/21 \times 10^{-2}) \Rightarrow$$

$$\frac{dA}{dt} = -8/33 \times 10^{-2} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

با استفاده از قانون القای فارادی می توان نوشت:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -B \frac{dA}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -0.4 \times (-8/22 \times 10^{-4}) \Rightarrow \varepsilon = 3/22 \times 10^{-4} \text{ V}$$



۱۵) مطابق شکل مقابل، حلقه‌ی مسطح و سیم بلندی را در یک صفحه در نظر بگیرید. جریان عبوری از سیم به صورت: $I = I_0 \sin \omega t$ تغییر می‌کند. نیروی محرکه‌ی الکتریکی القایی در حلقه را به دست آورید. (راهنمایی: ابتدا، شار عبوری از نواری به عرض dx را در فاصله‌ی x از سیم در نظر بگیرید.)

حل: با استفاده از تعریف شار الکتریکی می توان نوشت:

$$d\Phi = BdA \cos \alpha \Rightarrow d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \times c \, dx \times \cos 0 \Rightarrow d\Phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi x} dx \Rightarrow \int_0^{\Phi} d\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I c}{2\pi x} dx$$

$$\Phi \Big|_0^{\Phi} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+b} \Rightarrow \Phi - 0 = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} [\ln(a+b) - \ln a] \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0 c \sin \omega t}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \sin \omega t$$

با استفاده از قانون القای فارادی می توان نوشت:

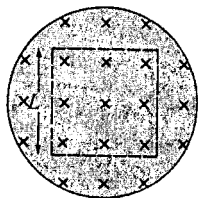
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \sin \omega t \right] \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\mu_0 I_0 c \omega}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \cos \omega t \Rightarrow$$

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 I_0 c \omega}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \cos \omega t$$

۱۶) مطابق شکل زیر، حلقه‌ی مربعی به ضلع L عمود بر میدان یکنواخت سیمولوله، قرار دارد. الف)

نشان دهید در هر نقطه از ضلع مربع، مولفه‌ی میدان الکتریکی القایی در امتداد ضلع $\frac{1}{4} L \frac{dB}{dt}$

است. ب) انتگرال $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ را حول حلقه به دست آورید.



حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی می توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A \frac{dB}{dt} \Rightarrow E \cdot L = -L^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E = -\frac{L}{4} \frac{dB}{dt}$$

پس اندازه‌ی مولفه‌ی میدان الکتریکی القایی برابر $\frac{L}{4} \frac{dB}{dt}$ است.

ب)

فصل ۱۰

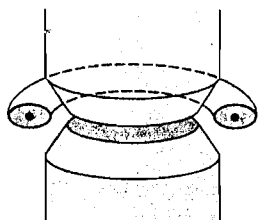
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{L}{r} \frac{dB}{dt} dl \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{L}{r} \frac{dB}{dt} \times \frac{1}{4} L \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = L^2 \frac{dB}{dt}$$

۱۷) باترون، دستگاهی است که در آن با استفاده از میدان الکتریکی القایی، الکترون‌هایی را شتاب می‌دهند که در مسیر دایره‌ای در کاواکی چنبره‌ای شکل در حال حرکت هستند. (شکل زیر) میدان مغناطیسی، یکنواخت نیست و بر حسب زمان هم، تغییر می‌کند. الف) اگر در محل مداری به شعاع r میدان مغناطیسی B_{orb} باشد قانون دوم نیوتن را برای حرکت دایره‌ای الکترون بنویسید. نشان دهید $mv = erB_{orb}$ است. ب) اگر مقدار متوسط میدان در سطح محصور داخل مدار B_{av} باشد ثابت کنید بزرگی میدان الکتریکی القایی: $|E| = \frac{r}{2} \frac{dB_{av}}{dt}$ است. ج) با استفاده از قانون دوم نیوتن به صورت:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \text{ برای نیروی الکتریکی وارد بر الکترون نشان دهید: } B_{orb} = \frac{B_{av}}{2} \text{ است. وقتی چنین}$$

وضعیتی، ایجاد می‌شود با وجود افزایش سرعت الکترون، مدار آن ثابت می‌ماند.

حل:



الف) با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار متحرک و قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

$$F = qvB \sin \theta \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = evB_{orb} \sin 90^\circ \Rightarrow mv = erB_{orb}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A \frac{dB}{dt} \Rightarrow E \sqrt{\pi} r = -\pi r^2 \frac{dB_{av}}{dt} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB_{av}}{dt} \Rightarrow |E| = \frac{r}{2} \frac{dB_{av}}{dt}$$

ج) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی و نتیجه‌ی قسمت ب می‌توان نوشت:

$$E = \frac{F}{q} \Rightarrow F = \frac{r}{2} \frac{dB_{av}}{dt} e \Rightarrow \frac{d(mv)}{dt} = \frac{er}{2} \frac{dB_{av}}{dt} \Rightarrow d(mv) = \frac{er}{2} dB_{av} \Rightarrow$$

$$\int d(mv) = \int dB_{av} \Rightarrow mv = \frac{er}{2} B_{av}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$erB_{orb} = \frac{er}{2} B_{av} \Rightarrow B_{orb} = \frac{B_{av}}{2}$$

مسائل

القا

(۱) سیملوله‌ای با ۵۰۰ دور سیمپیچ و ضریب خود القایی $1/2 \text{ mH}$ را در نظر بگیرید. الف) وقتی جریان 2 A است شار عبوری از هر حلقه را به دست آورید. ب) وقتی جریان با آهنگ $35 \frac{\text{A}}{\text{s}}$ تغییر می‌کند نیروی محرکه‌ی القایی چه قدر است؟
حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی ضریب خودالقایی سیملوله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ L = 1/2 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L = 1/2 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} \Rightarrow 1/2 \times 10^{-3} = \frac{500 \times \Phi}{2} \Rightarrow \Phi = 4/8 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی خودالقایی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -1/2 \times 10^{-3} \times 35 \Rightarrow \varepsilon = -4/2 \times 10^{-2} \text{ V} \Rightarrow |\varepsilon| = 4/2 \times 10^{-2} \text{ V}$$

(۲) وقتی جریان عبوری از القاگری با آهنگ $128 \frac{\text{A}}{\text{s}}$ تغییر می‌کند نیروی محرکه‌ی خود القایی 12 V است. ضریب خودالقایی آن چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی خود القایی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow |\varepsilon| = \left| -L \frac{dI}{dt} \right| \Rightarrow 12 = L \times 128 \Rightarrow L = 9/38 \times 10^{-2} \text{ H}$$

فصل ۱۱

(۳) پیچهای دایره‌ای مسطحی با ۵ دور سیم‌پیچ و شعاع $2/4$ cm، حول سیملوله‌ای به طول 24 cm، 360 دور سیم‌پیچ و شعاع $1/7$ cm قرار دارد. محور پیچه با محور سیملوله، زاویه‌ی 10° می‌سازد.

ضریب القای متقابل آن‌ها چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی سیملوله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ l = 24 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow l = 24 \times 10^{-2} \Rightarrow l = 0.24 \text{ m}$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \Rightarrow B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 360 \times I}{0.24} \Rightarrow B = 1.89 \times 10^{-2} I$$

پیچه به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 2/4 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 2/4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times (2/4 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow A = 1/81 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

با استفاده از تعریف شار مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\Phi = BA \cos \alpha \Rightarrow \Phi = 1/89 \times 10^{-2} I \times 1/81 \times 10^{-3} \times \cos 10^\circ \Rightarrow \Phi = 3/37 \times 10^{-6} I$$

با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N' \Phi}{I} \Rightarrow M = \frac{5 \times 3/37 \times 10^{-6} I}{I} \Rightarrow M = 1/68 \times 10^{-5} \text{ H}$$

(۴) چنبره‌ای با N_1 دور سیم‌پیچی و مقطعی مربعی (شکل ۱۱-۸) را در نظر بگیرید. این چنبره دارای شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و ارتفاع h است. پیچه‌ای با N_2 دور سیم‌پیچ، حول این چنبره قرار دارد. الف) شار عبوری از پیچه (ب) ضریب القای متقابل را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی ضریب خودالقایی و رابطه‌ی ضریب خودالقایی چنبره می‌توان نوشت:

$$L = \frac{N \Phi}{I} \Rightarrow \frac{\mu_0 N_1^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{N_1 \Phi}{I_1} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 N_1 h I_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N_2 \Phi}{I_1} \Rightarrow M = \frac{N_2}{I_1} \times \frac{\mu_0 N_1 h I_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

(۵) دو سیملوله با مشخصات: $L_1 = 20$ mH، $N_1 = 80$ rev، $L_2 = 30$ mH، $N_2 = 120$ rev و

$M = 7$ mH را در نظر بگیرید. فرض کنید در لحظه‌ی معینی، جریان عبوری از پیچه‌ی اول A $2/4$

و با آهنگ $\frac{A}{s}$ ۴ در حال افزایش است. جریان عبوری از پیچه‌ی دوم A $4/5$ و با آهنگ $\frac{A}{s}$ $1/8$ در حال

افزایش است. الف) Φ_{11} (ب) Φ_{12} (ج) Φ_{21} (د) ϵ_{11} (هـ) ϵ_{12} (و) ϵ_{21} را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی ضریب خودالقایی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ L_1 = 20 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L_1 = 20 \times 10^{-3} \Rightarrow L_1 = 0.02 \text{ H}$$

$$N_1 \Phi_{11} = L_1 I_1 \Rightarrow 80 \times \Phi_{11} = 0.02 \times 2 / 4 \Rightarrow 80 \Phi_{11} = 4 / 8 \times 10^{-2} \Rightarrow \Phi_{11} = 6 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ M = 7 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow M = 7 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} \Rightarrow 7 \times 10^{-3} = \frac{80 \times \Phi_{12}}{4/5} \Rightarrow 80 \Phi_{12} = 3/15 \times 10^{-2} \Rightarrow \Phi_{12} = 3/96 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \Rightarrow 7 \times 10^{-3} = \frac{120 \times \Phi_{21}}{2/4} \Rightarrow 120 \Phi_{21} = 1/68 \times 10^{-2} \Rightarrow \Phi_{21} = 1/4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

د) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{11} = -0.02 \times 4 \Rightarrow \varepsilon_{11} = -0.08 \text{ V} \Rightarrow |\varepsilon_{11}| = 0.08 \text{ V}$$

ه) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی در پیچه‌ی ۱ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{12} = -7 \times 10^{-3} \times 1/8 \Rightarrow \varepsilon_{12} = -1/26 \times 10^{-2} \text{ V} \Rightarrow |\varepsilon_{12}| = 1/26 \times 10^{-2} \text{ V}$$

و) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی در پیچه‌ی ۲ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{21} = -7 \times 10^{-3} \times 4 \Rightarrow \varepsilon_{21} = -2/8 \times 10^{-2} \text{ V} \Rightarrow |\varepsilon_{21}| = 2/8 \times 10^{-2} \text{ V}$$

مدارهای RL

۶) در مدار زیر، فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ کلید S_1 بسته و کلید S_2 باز است. الف) جریان در لحظه‌ی

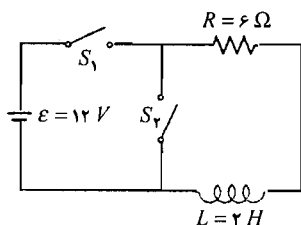
تول می‌کشد تا جریان به ۸۰٪ مقدار نهایی‌اش برسد؟

حل: با استفاده از تعریف ثابت زمانی می‌توان نوشت:

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \tau = \frac{2}{6} \Rightarrow \tau = 0.333 \text{ s}$$

الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان در مدار RL می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \\ t = 50 \text{ ms} \end{cases} \Rightarrow t = 50 \times 10^{-3} \Rightarrow t = 0.05 \text{ s}$$



فصل ۱۱

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow I = \frac{12}{6} \times \left(1 - e^{-\frac{0.05}{0.333}} \right) \Rightarrow I = 0.279 \text{ A}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی می‌توان نوشت:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -L \frac{d}{dt} \left[I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{LI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{L\mathcal{E}}{\tau R} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -\frac{2 \times 12}{0.333 \times 6} e^{-\frac{0.05}{0.333}} \Rightarrow \mathcal{E} = -10.2 \text{ V} \Rightarrow |\mathcal{E}| = 10.2 \text{ V}$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی جریان در مدار RL می‌توان نوشت:

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow \frac{80}{100} I_0 = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.2 \Rightarrow -\frac{t}{0.333} = -1/61 \Rightarrow t = 0.536 \text{ s}$$

۷) پیچ‌های به مقاومت 2Ω و ضریب خودالقایی 40 mH را در نظر بگیرید. جریان عبوری از آن 6 A و با آهنگ 25 A/s تغییر می‌کند. اختلاف پتانسیل دو سر پیچ را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) جریان در حال افزایش باشد. ب) جریان در حال کاهش باشد.

حل: با استفاده از قانون حلقه‌ی کیرشهف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \Rightarrow L = 40 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.04 \text{ H} \\ L = 40 \text{ mH} \end{cases}$$

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - 2 \times 6 - 0.04 \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = 12 + 0.04 \frac{dI}{dt}$$

الف) جریان در حال افزایش است پس:

$$\frac{dI}{dt} = +25 \frac{\text{A}}{\text{s}} \Rightarrow \mathcal{E} = 12 + 0.04 \times (+25) \Rightarrow \mathcal{E} = 13 \text{ V}$$

ب) جریان در حال کاهش است پس:

$$\frac{dI}{dt} = -25 \frac{\text{A}}{\text{s}} \Rightarrow \mathcal{E} = 12 + 0.04 \times (-25) \Rightarrow \mathcal{E} = 11 \text{ V}$$

۸) در یک مدار LR : $L = 120 \text{ mH}$ و $R = 15 \Omega$ است. کلید را در لحظه‌ی $t = 0$ می‌بندیم. الف) چه قدر طول می‌کشد تا جریان به 50% مقدار نهایی‌اش برسد؟ ب) پس از گذشت 5 ثابت زمانی، جریان چند درصد مقدار نهایی است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی جریان در مدار RL می‌توان نوشت:

الف)

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow \frac{50}{100} I_0 = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.5 \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = -0.693 \Rightarrow t = 0.693 \tau$$

القا و مواد مغناطیسی - مسائل

با استفاده از تعریف ثابت زمانی می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ L = 120 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L = 120 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.12 \text{ H}$$

$$t = 0.693 \times \frac{L}{R} \Rightarrow t = 0.693 \times \frac{0.12}{15} \Rightarrow t = 5.55 \times 10^{-3} \text{ s}$$

(ب)

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}} \right) \Rightarrow I = 0.993 I_0 \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 99.3\%$$

۹) سیمولوله‌ای به طول ۱۸ cm و شعاع ۲ cm با یک لایه از سیم مسی به قطر ۱/۰ mm و مقاومت ویژه $1.7 \times 10^{-8} \Omega m$ درست شده است. ثابت زمانی آن را به صورت تخمینی به دست آورید.

حل: تعداد حلقه‌های سیمولوله:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 2 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 2 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 0.02 \text{ m}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 1/0 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 1/0 \times 10^{-3} \Rightarrow d = 0.001 \text{ m}$$

$$N = \frac{l}{d} \Rightarrow \frac{N}{l} = \frac{1}{d} \Rightarrow n = \frac{1}{d}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_0 n^2 A l}{\rho \frac{l}{A'}} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_0 \left(\frac{1}{d}\right)^2 \times \pi r^2 l}{\rho \frac{N^2 \pi r}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_0 \pi r^2 l}{\frac{\rho N^2 r}{d^2}} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_0 \pi r l}{\rho N} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_0 \pi r l}{\rho \frac{1}{d}}$$

$$\tau = \frac{\mu_0 \pi r d}{\rho} \Rightarrow \tau = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2/14 \times 0.02 \times 0.001}{8 \times 10^8 \times 10^{-8}} \Rightarrow \tau = 5/8 \times 10^{-4} \text{ s}$$

انرژی

۱۰) الف) شدت میدان مغناطیسی زمین در مجاورت سطح آن تقریباً ۱ G است. چگالی انرژی مغناطیسی این میدان چه قدر است؟ (ب) سیمولوله‌ای به طول ۱۰ cm ، شعاع ۱ cm و ۱۰۰ rev سیم‌پیچ را در نظر بگیرید. چه جریانی، چگالی انرژی قسمت الف را تولید می‌کند؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی چگالی انرژی میدان مغناطیسی می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} \\ B = 1 \text{ G} \end{cases} \Rightarrow B = 1 \times 10^{-4} \Rightarrow B = 10^{-4} \text{ T}$$

فصل ۱۱

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow u_B = \frac{(10^{-4})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow u_B = 3/98 \times 10^{-2} \frac{J}{m^3}$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی ضرب خودالقایی سیملوله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ l = 10 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow l = 10 \times 10^{-2} \Rightarrow l = 0.1 \text{ m}$$

$$L = \mu_0 n^2 Al \Rightarrow \frac{L}{Al} = \mu_0 n^2 \Rightarrow \frac{L}{Al} = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 \Rightarrow \frac{L}{Al} = 4\pi \times 10^{-7} \times \left(\frac{100}{0.1}\right)^2 \Rightarrow \frac{L}{Al} = 1/256 \frac{H}{m^2}$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی ذخیره شده در القاگر می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow \frac{U}{Al} = \frac{1}{2} \frac{L}{Al} I^2 \Rightarrow u_B = \frac{1}{2} \frac{L}{Al} I^2 \Rightarrow 3/98 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 1/256 I^2 \Rightarrow I = 0.08 \text{ A}$$

(۱۱) در مساله‌ی ۶، در لحظه‌ی $t = 0$ کلید S_1 بسته و کلید S_2 باز است. پس از گذشت ۱ ثابت زمانی:

(الف) توان اتلافی مقاومت (ب) آهنگ ذخیره‌ی انرژی القاگر (ج) توانی تولیدی باتری را به دست آورید.

حل: از داده‌های مساله‌ی ۶ استفاده می‌کنیم:

(الف) با استفاده از رابطه‌ی توان اتلافی در مقاومت می‌توان نوشت:

$$P_R = I^2 R \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow P_R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 R \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow$$

$$P_R = \left(\frac{12}{6}\right)^2 \times 6 \times \left(1 - 2e^{-\frac{\tau}{\tau}} + e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) \Rightarrow P_R = 9/6 \text{ W}$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی آهنگ انرژی ذخیره شده در القاگر می‌توان نوشت:

$$P_L = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow P_L = \frac{(12)^2}{6} \times \left(e^{-\frac{\tau}{\tau}} - e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) \Rightarrow P_L = 5/6 \text{ W}$$

(ج) توان خروجی باتری برابر است با:

$$P = P_R + P_L \Rightarrow P = 9/6 + 5/6 \Rightarrow P = 15/2 \text{ W}$$

(۱۲) مقاومت $R = 5 \Omega$ متوالی با القاگر $L = 40 \text{ mH}$ و باتری $V = 20$ است. کلید را در لحظه‌ی $t = 0$

می‌بندیم. در چه لحظه‌ای، توان اتلافی R برابر آهنگ ذخیره‌ی انرژی در L است؟

حل: با استفاده از روابط توان اتلافی در مقاومت و آهنگ انرژی ذخیره شده در القاگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ L = 40 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L = 40 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.04 \text{ H}$$

$$P_R = P_L \Rightarrow I^2 R \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^{\tau} R \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) = \frac{\mathcal{E}^{\tau}}{R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow 1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$2e^{-\frac{2t}{\tau}} - 3e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 = 0 \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{3+1}{4} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{t}{\tau} = 0 \\ -\frac{t}{\tau} = -0.693 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0.693\tau \end{cases} \\ e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{3-1}{4} \end{cases}$$

$$t = 0.693\tau \Rightarrow t = 0.693 \times \frac{L}{R} \Rightarrow t = 0.693 \times \frac{0.4}{5} \Rightarrow t = 5.54 \times 10^{-2} \text{ s}$$

۱۳) سیملوله‌ای با سطح مقطع A و طول l را در نظر بگیرید. الف) وقتی جریان عبوری از سیملوله I باشد چگالی انرژی درون آن را به دست آورید. ب) با مساوی قرار دادن انرژی کل درون سیملوله با $\frac{1}{2} LI^2$ ، ضریب خودالقایی را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی چگالی انرژی میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$u_B = \frac{B^{\tau}}{2\mu_0} \Rightarrow u_B = \frac{(\mu_0 nI)^{\tau}}{2\mu_0} \Rightarrow u_B = \frac{\mu_0 n^{\tau} I^{\tau}}{2}$$

ب)

$$U = u_B Al \Rightarrow \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 n^{\tau} I^{\tau}}{2} Al \Rightarrow L = \mu_0 n^{\tau} Al$$

نوسان LC

۱۴) خازنی به ظرفیت $C = 10 \mu F$ با بار اولیه‌ی $60 \mu C$ را در نظر بگیرید. این خازن را در لحظه‌ی $t = 0$ به دو سر القاگر $L = 8 \text{ mH}$ وصل می‌کنیم. الف) بسامد نوسان ب) بیشینه جریان عبوری از L چه قدر است؟ ج) چه مدتی لازم است تا برای اولین بار، انرژی L و C مساوی باشد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای طبیعی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \\ C = 10 \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 10 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 10^{-5} F$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} H \\ L = 8 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L = 8 \times 10^{-3} H$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{8 \times 10^{-3} \times 10^{-5}}} \Rightarrow \omega_0 = 3.54 \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_0 = 2\pi f \Rightarrow 3.54 \times 10^4 = 2\pi f \Rightarrow f = 562 \text{ Hz}$$

فصل ۱۱

(ب)

$$\begin{cases} 1 \mu C = 10^{-6} C \\ Q_0 = 60 \mu C \end{cases} \Rightarrow Q_0 = 60 \times 10^{-6} \Rightarrow Q_0 = 6 \times 10^{-5} C$$

$$I_0 = \omega_0 Q_0 \Rightarrow I_0 = 3/53 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-5} \Rightarrow I_0 = 0.212 A$$

(ج) انرژی القاگر برابر انرژی خازن است:

$$U_L = U_C \Rightarrow \frac{1}{2} LI^2 = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow LI^2 = \frac{Q^2}{C} \Rightarrow L(I_0 \sin \omega_0 t)^2 = \frac{(Q_0 \cos \omega_0 t)^2}{C} \Rightarrow$$

$$LI_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q_0^2 \cos^2 \omega_0 t}{C} \Rightarrow L(\omega_0 Q_0)^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q_0^2 \cos^2 \omega_0 t}{C} \Rightarrow \tan^2 \omega_0 t = \frac{1}{LC \omega_0^2} \Rightarrow$$

$$\tan^2 3/53 \times 10^3 t = \frac{1}{8 \times 10^{-2} \times 10^{-5} \times (3/53 \times 10^3)^2} \Rightarrow \tan^2 3/53 \times 10^3 t = 1/0.2 \Rightarrow$$

$$\tan 3/53 \times 10^3 t = 1/0.2 \Rightarrow 3/53 \times 10^3 t = 0.786 \Rightarrow t = 2/23 \times 10^{-3} s$$

(۱۵) ضریب خودالقایی مدار گیرنده‌ی یک دستگاه رادیوی AM برابر ۵ mH است. برای دریافت باند

AM از ۵۵۰ kHz تا ۱۶۰۰ kHz ظرفیت خازن باید در چه گستره‌ای تغییر کند؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای طبیعی می‌توان نوشت:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC \omega_0^2 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{L \omega_0^2} \Rightarrow C = \frac{1}{L(2\pi f)^2}$$

$$\begin{cases} 1 mH = 10^{-3} H \\ L = 5 mH \end{cases} \Rightarrow L = 5 \times 10^{-3} H$$

$$\begin{cases} 1 kHz = 10^3 Hz \\ f = 550 kHz \end{cases} \Rightarrow f = 550 \times 10^3 Hz$$

$$C = \frac{1}{5 \times 10^{-3} \times (2\pi \times 550 \times 10^3)^2} \Rightarrow C = 1/67 \times 10^{-11} F \Rightarrow C = 16/7 pF$$

$$\begin{cases} 1 kHz = 10^3 Hz \\ f = 1600 kHz \end{cases} \Rightarrow f = 1600 \times 10^3 Hz$$

$$C = \frac{1}{5 \times 10^{-3} \times (2\pi \times 1600 \times 10^3)^2} \Rightarrow C = 1/98 \times 10^{-12} F \Rightarrow C = 1/98 pF$$

مسائل تکمیلی

(۱۶) ضریب خودالقایی موثر دو القاگر متصل به هم را در: الف) به هم بستن متوالی (ب) به هم بستن

موازی به دست آورید. از القای متقابل آن‌ها صرف‌نظر کنید.

حل:

الف) در این حالت، جریان‌ها با هم برابر هستند یعنی: $I = I_1 = I_2$ است.

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow LI = L_1 I_1 + L_2 I_2 \Rightarrow LI = L_1 I + L_2 I \Rightarrow L = L_1 + L_2$$

ب) در این حالت، پتانسیل‌ها با هم برابر هستند یعنی: $V = V_1 = V_2$ است.

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{V}{L} = \frac{V_1}{L_1} + \frac{V_2}{L_2} \Rightarrow \frac{V}{L} = \frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

۱۷) دو سیم بلند موازی به شعاع مقطع a با فاصله بین مراکز d در نظر بگیرید. این سیم‌ها حامل جریان‌های مساوی در جهت‌های مخالف هستند. نشان دهید اگر از شمار درونی سیم‌ها صرف‌نظر شود

ضریب خودالقایی در هر واحد طول: $L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$ است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست می‌توان نوشت:

$$B = B_1 + B_2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-x)} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$

با استفاده از تعریف شار می‌توان نوشت:

$$d\Phi = BdA \Rightarrow d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx \Rightarrow d\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{d-x} \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^\Phi d\Phi = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{d-x} \right) \Rightarrow \Phi \Big|_0^\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\ln x - \ln(d-x) \right] \Big|_a^{d-a} \Rightarrow$$

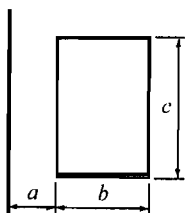
$$\Phi - 0 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{x}{d-x} \Big|_a^{d-a} \Rightarrow \Phi - 0 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\ln \frac{d-a}{d-(d-a)} - \ln \frac{a}{d-a} \right] \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\frac{d-a}{a}}{\frac{a}{d-a}} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a} \right)^2 \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \times 2 \ln \frac{d-a}{a} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

با استفاده از تعریف ضریب خودالقایی می‌توان نوشت:

$$L = \frac{N\Phi}{I} \Rightarrow L = \frac{1}{I} \times \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$l = 1 \text{ m} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \times 1}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \Rightarrow L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$



۱۸) مطابق شکل مقابل، سیم راست بسیار بلند و حلقه‌ای

مستطیلی را در یک صفحه در نظر بگیرید. ضریب القای

متقابل آن‌ها چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از سیم

راست و تعریف شار مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$d\Phi = BdA \Rightarrow d\Phi = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} c dx \Rightarrow d\Phi = \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi x} dx \Rightarrow \int_0^\Phi d\Phi = \int_a^{b+a} \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi x} dx \Rightarrow$$

فصل ۱۱

$$\Phi|_{\infty}^{\Phi_{1r}} = \frac{\mu_0 c I_r}{2\pi} \ln x \Big|_a^{b+a} \Rightarrow \Phi_{1r} - 0 = \frac{\mu_0 c I_r}{2\pi} [\ln(b+a) - \ln a] \Rightarrow \Phi_{1r} = \frac{\mu_0 c I_r}{2\pi} \ln \frac{b+a}{a}$$

با استفاده از تعریف ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N_1 \Phi_{1r}}{I_r} \Rightarrow M = \frac{1}{I_r} \times \frac{\mu_0 c I_r}{2\pi} \ln \frac{b+a}{a} \Rightarrow M = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{b+a}{a}$$

۱۹) نشان دهید در مدار LR همگی انرژی ذخیره شده در القاگر به صورت انرژی گرمایی در مقاومت به مصرف می‌رسد.

حل: آهنگ کاهش انرژی در القاگر

$$\frac{dU}{dt} = LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = LI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{d}{dt} \left(I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = LI_0^2 \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -L \frac{R}{L} I_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -R \left(I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -R I^2$$

علامت منفی، نشان دهندهی کاهش انرژی و $R I^2$ توان مصرفی مقاومت است پس کل انرژی ذخیره شده در القاگر در مقاومت به صورت گرما مصرف می‌شود.

۲۰) دو سیملوله را طوری در نظر بگیرید که یکی داخل دیگری است. در این حالت می‌توان برای هر یک از ضریب‌های L_1 و L_2 یک عبارت و برای ضریب M دو عبارت نوشت. به فرض آن که تمامی

شار ناشی از یک سیملوله از دیگری بگذرد نشان دهید $M = \sqrt{L_1 L_2}$

حل: برای این که کل شار یکی از دیگری عبور کند باید $l_1 = l_2 = l$ و $A_1 = A_2 = A$ باشد.

با استفاده از روابط ضریب خودالقایی و ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} L_1 = \mu_0 n_1^2 A_1 l_1 \\ L_2 = \mu_0 n_2^2 A_2 l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \mu_0 \left(\frac{N_1}{l} \right)^2 A l \\ L_2 = \mu_0 \left(\frac{N_2}{l} \right)^2 A l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \mu_0 N_1^2 \frac{A}{l} \\ L_2 = \mu_0 N_2^2 \frac{A}{l} \end{cases} \quad (1)$$

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} \Rightarrow M = \mu_0 n_2 N_1 A \Rightarrow M = \mu_0 \frac{N_2}{l} N_1 A$$

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \Rightarrow M = \mu_0 n_1 N_2 A \Rightarrow M = \mu_0 \frac{N_1}{l} N_2 A$$

$$M^2 = \left(\mu_0 \frac{N_2}{l} N_1 A \right) \left(\mu_0 \frac{N_1}{l} N_2 A \right) \Rightarrow M^2 = \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 A^2}{l^2} \Rightarrow M^2 = \left(\mu_0 N_1^2 \frac{A}{l} \right) \left(\mu_0 N_2^2 \frac{A}{l} \right) \Rightarrow$$

$$M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$$

مسائل

مقاومت، القاگر و خازن

۱) القاگر $L = 40 \text{ mH}$ را به منبعی با بیشینه اختلاف پتانسیل 120 V و بسامد 60 Hz وصل کرده‌ایم. الف) بیشینه جریان را به دست آورید. ب) اگر بیشینه اختلاف پتانسیل بدون تغییر بماند در چه بسامدی جریان به 30% مقدار قسمت الف می‌رسد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ L = 40 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L = 40 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.04 \text{ H}$$

$$v_{oL} = i_o \omega L \Rightarrow v_{oL} = i_o 2\pi f L \Rightarrow 120 = i_o \times 2 \times 3.14 \times 60 \times 0.04 \Rightarrow i_o = 7/96 \text{ A}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$v_{oL} = i_o' \omega' L \Rightarrow v_{oL} = i_o' 2\pi f' L \Rightarrow 120 = \frac{30}{100} \times 7/96 \times 2 \times 3.14 \times f' \times 0.04 \Rightarrow f' = 200 \text{ Hz}$$

۲) خازنی به ظرفیت $50 \mu\text{F}$ را به منبعی با بسامد 60 Hz و ولتاژ موثر 24 V وصل کرده‌ایم. کمیت‌های: الف) بیشینه بار خازن ب) بیشینه جریان عبوری از سیم‌های رابط را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر خازن می‌توان نوشت:

$$v_C = \frac{v_{oC}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 24 = \frac{v_{oC}}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_{oC} = 33.9 \text{ V}$$

فصل ۱۲

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \\ C = 50 \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 50 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 5 \times 10^{-5} F$$

$$v_{oC} = \frac{q_o}{C} \Rightarrow 33/9 = \frac{q_o}{5 \times 10^{-5}} \Rightarrow q_o = 1/7 \times 10^{-2} C$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$v_{oC} = \frac{i_o}{C\omega} \Rightarrow v_o = \frac{i_o}{C2\pi f} \Rightarrow 33/9 = \frac{i_o}{5 \times 10^{-5} \times 2 \times 3/14 \times 60} \Rightarrow 33/9 = \frac{i_o}{1/9 \times 10^{-2}} \Rightarrow i_o = 0/64 A$$

(۳) خازنی به ظرفیت $108 \mu F$ را به منبعی با بسامد $80 Hz$ و بیشینه اختلاف پتانسیل $V = 24$ وصل کرده‌ایم. الف) بیشینه جریان را به دست آورید. ب) جریان را در لحظه‌ای به دست آورید که اختلاف پتانسیل بیشینه مقدار است. ج) جریان را در لحظه‌ای به دست آورید که اختلاف پتانسیل به نصف بیشینه مقدار مثبت می‌رسد. (دو جواب) د) توان تحویلی به خازن در لحظه‌ی $t = 1 ms$ چه قدر است؟ حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \\ C = 108 \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 108 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 1/08 \times 10^{-4} F$$

$$v_{oC} = \frac{i_o}{C\omega} \Rightarrow v_{oC} = \frac{i_o}{C2\pi f} \Rightarrow 24 = \frac{i_o}{1/08 \times 10^{-4} \times 2 \times 3/14 \times 80} \Rightarrow 24 = \frac{i_o}{5/4 \times 10^{-2}} \Rightarrow i_o = 1/3 A$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$v_C = -v_{oC} \cos \omega t \Rightarrow v_{oC} = -v_{oC} \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = -1 \Rightarrow \omega t = \pi$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$i = i_o \sin \omega t \Rightarrow i = i_o \sin \pi \Rightarrow i = 0$$

(ج) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$v_C = -v_{oC} \cos \omega t \Rightarrow \frac{v_{oC}}{2} = -v_o \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega t = \frac{2\pi}{3} \\ \omega t = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$i = i_o \sin \omega t \Rightarrow \begin{cases} i = 1/3 \times \sin \frac{2\pi}{3} \\ i = 1/3 \times \sin \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 1/13 A \\ i = -1/13 A \end{cases}$$

د) با استفاده از رابطه‌ی توان لحظه‌ای تحویلی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \\ t = 1 \text{ ms} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \times 10^{-3} \Rightarrow t = 10^{-3} \text{ s}$$

$$P = -i_o v_o C \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow P = -i_o v_o C \sin(2\pi f t) \cos(2\pi f t) \Rightarrow$$

$$P = -1/3 \times 24 \times \sin(2 \times 3/14 \times 80 \times 10^{-3}) \times \cos(2 \times 3/14 \times 80 \times 10^{-3}) \Rightarrow P = -13/2 \text{ W}$$

۴) القاگر ایده‌الی با $L = 80 \text{ mH}$ را به منبعی با بیشینه اختلاف پتانسیل $V = 60$ وصل کرده‌ایم. الف) اگر بسامد 50 Hz باشد جریان در لحظه‌ی 2 ms چه قدر است؟ توان لحظه‌ای تحویلی به القاگر در این لحظه چه قدر است؟ ب) در چه بسامدی، بیشینه جریان $A = 1/8$ می‌شود؟
حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ L = 80 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L = 80 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.08 \text{ H}$$

$$v_{oL} = i_o \omega L \Rightarrow v_{oL} = i_o 2\pi f L \Rightarrow 60 = i_o \times 2 \times 3/14 \times 50 \times 0.08 \Rightarrow i_o = 2/4 \text{ A}$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \\ t = 2 \text{ ms} \end{cases} \Rightarrow t = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$i = i_o \sin \omega t \Rightarrow i = i_o \sin(2\pi f t) \Rightarrow i = 2/4 \times \sin(2 \times 3/14 \times 50 \times 2 \times 10^{-3}) \Rightarrow i = 1/4 \text{ A}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان تحویلی می‌توان نوشت:

$$P = i_o v_o L \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow P = i_o v_o L \sin(2\pi f t) \cos(2\pi f t) \Rightarrow$$

$$P = 2/4 \times 60 \times \sin(2 \times 3/14 \times 50 \times 2 \times 10^{-3}) \times \cos(2 \times 3/14 \times 50 \times 2 \times 10^{-3}) \Rightarrow P = 68/4 \text{ W}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$v_{oL} = i'_o \omega' L \Rightarrow v_{oL} = i'_o 2\pi f' L \Rightarrow 60 = 1/8 \times 2 \times 3/14 \times f' \times 0.08 \Rightarrow f' = 66/3 \text{ Hz}$$

مدارهای متوالی RLC ، تشدید

۵) یک مدار متوالی RLC با مشخصات: $R = 50 \Omega$ ، $C = 10 \mu F$ ، منبعی با اختلاف پتانسیل موثر

$V = 60 \text{ V}$ و بسامد $\frac{250}{\pi} \text{ Hz}$ را در نظر بگیرید. اگر بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر R برابر 25 V

باشد مقدار L را به دست آورید. (دو جواب)

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر می‌توان نوشت:

فصل ۱۲

$$V = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow 60 = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_o = 84.9 \text{ V}$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$V_{oR} = i_o R \Rightarrow 25 = i_o \times 50 \Rightarrow i_o = 0.5 \text{ A}$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل در مدار RLC می‌توان نوشت:

$$V_o = i_o Z \Rightarrow 84.9 = 0.5 Z \Rightarrow Z = 169.8 \ \Omega$$

$$\begin{cases} 1 \ \mu F = 10^{-6} \text{ F} \\ C = 10 \ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 10 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 10^{-5} \text{ F}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + \left(L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f} \right)^2 \Rightarrow$$

$$(169.8)^2 = (50)^2 + \left(L \times 2\pi \times \frac{250}{\pi} - \frac{1}{10^{-5} \times 2\pi \times \frac{250}{\pi}} \right)^2 \Rightarrow 2/63 \times 10^4 = (50 \cdot L - 200)^2 \Rightarrow$$

$$50 \cdot L - 200 = \pm 162/3 \Rightarrow \begin{cases} 50 \cdot L - 200 = 162/3 \\ 50 \cdot L - 200 = -162/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 \cdot L = 362/3 \\ 50 \cdot L = 27/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 0.725 \text{ H} \\ L = 0.054 \text{ H} \end{cases}$$

۶) مقاومت $R = 100 \ \Omega$ را به طور متوالی به خازن $25 \ \mu F$ و القاگر، وصل کرده‌ایم. اختلاف پتانسیل

موثر دو سر منبع 240 V و بسامد آن $\frac{800}{\pi} \text{ Hz}$ است. با دانستن $V_R = 80 \text{ V}$ (الف: Z ب) L ج) ϕ

چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر مقاومت می‌توان نوشت:

$$V_R = IR \Rightarrow 80 = I \times 100 \Rightarrow I = 0.8 \text{ A}$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر مدار RLC می‌توان نوشت:

$$V = IZ \Rightarrow 240 = 0.8 \times Z \Rightarrow Z = 300 \ \Omega$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \ \mu F = 10^{-6} \text{ F} \\ C = 25 \ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 25 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + \left(L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f} \right)^2 \Rightarrow$$

$$(300)^2 = (100)^2 + \left(L \times 2\pi \times \frac{800}{\pi} - \frac{1}{25 \times 10^{-6} \times 2\pi \times \frac{800}{\pi}} \right)^2 \Rightarrow 8 \times 10^4 = (1600 \cdot L - 25)^2 \Rightarrow$$

$$1600 \cdot L - 25 = \pm 282 / 8 \Rightarrow \begin{cases} 1600 \cdot L - 25 = 282 / 8 \\ 1600 \cdot L - 25 = -282 / 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1600 \cdot L = 307 / 8 \\ 1600 \cdot L = -257 / 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 0.192 \text{ H} \\ L = -0.161 \text{ H} \end{cases}$$

پس $L = 0.192 \text{ H}$ جواب است.

ج

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f}}{R} \Rightarrow$$

$$\tan \varphi = \frac{0.192 \times 2\pi \times \frac{800}{\pi} - \frac{1}{25 \times 10^{-6} \times 2\pi \times \frac{800}{\pi}}}{100} \Rightarrow \tan \varphi = 2/82 \Rightarrow \varphi = 7.0^\circ$$

۷) مقاومت $R = 10 \Omega$ و القاگر $L = 40 \text{ mH}$ را به طور متوالی به خازنی وصل کرده‌ایم. اختلاف پتانسیل موثر منبع 120 V و بسامد آن 60 Hz است. اختلاف پتانسیل موثر دو سر مقاومت 30 V است. الف) ظرفیت C ب) بسامد طبیعی f_0 را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$V_R = IR \Rightarrow 30 = I \times 10 \Rightarrow I = 3 \text{ A}$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$V = IZ \Rightarrow 120 = 3Z \Rightarrow Z = 40 \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \\ L = 40 \text{ mH} \end{cases} \Rightarrow L = 40 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.04 \text{ H}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + \left(L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f} \right)^2 \Rightarrow$$

$$(40)^2 = (10)^2 + \left(0.04 \times 2 \times 3 / 14 \times 60 - \frac{1}{C \times 2 \times 3 / 14 \times 60} \right)^2 \Rightarrow 1500 = \left(15/1 - \frac{1}{376/8C} \right)^2 \Rightarrow$$

$$15/1 - \frac{1}{376/8C} = \pm 28/7 \Rightarrow \begin{cases} 15/1 - \frac{1}{376/8C} = 28/7 \\ 15/1 - \frac{1}{376/8C} = -28/7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{376/8C} = -23/6 \\ \frac{1}{376/8C} = 53/8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C = -5/5 \times 10^{-2} \text{ F} \\ C = 4/9 \times 10^{-5} \text{ F} \end{cases}$$

فصل ۱۲

پس $C = 4/9 \times 10^{-5} F$ جواب است.

(ب) با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای تشدید می‌توان نوشت:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{.04 \times 4/9 \times 10^{-5}}} \Rightarrow 2 \times 3/14 f_0 = 714/3 \Rightarrow f_0 = 113/7 \text{ Hz}$$

(۸) در یک مدار متوالی RLC : $R = 40 \Omega$ ، $L = 20 \text{ mH}$ و $C = 60 \mu F$ است. در چه بسامدی،

اختلاف پتانسیل، 30° نسبت به جریان، تقدم دارد؟

حل:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \Rightarrow L = 20 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.02 \text{ H} \\ L = 20 \text{ mH} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} \text{ F} \Rightarrow C = 60 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 6 \times 10^{-5} \text{ F} \\ C = 60 \mu F \end{cases}$$

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan 30 = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{40} \Rightarrow L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f} = 23/1 \Rightarrow$$

$$0.02 \times 2 \times 3/14 \times f - \frac{1}{6 \times 10^{-5} \times 2 \times 3/14 \times f} = 23/1 \Rightarrow 0.13 f - \frac{1}{3/8 \times 10^{-4} f} = 23/1 \Rightarrow$$

$$4/9 \times 10^{-5} f^2 - 1 = 8/8 \times 10^{-3} f \Rightarrow 4/9 \times 10^{-5} f^2 - 8/8 \times 10^{-3} f - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$f = \frac{8/8 \times 10^{-3} \pm \sqrt{(8/8 \times 10^{-3})^2 - 4 \times 4/9 \times 10^{-5} \times (-1)}}{2 \times 4/9 \times 10^{-5}} \Rightarrow f = \frac{8/8 \times 10^{-3} \pm 1/7 \times 10^{-2}}{9/8 \times 10^{-5}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f = \frac{8/8 \times 10^{-3} + 1/7 \times 10^{-2}}{9/8 \times 10^{-5}} \\ f = \frac{8/8 \times 10^{-3} - 1/7 \times 10^{-2}}{9/8 \times 10^{-5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 263/3 \text{ Hz} \\ f = -83/7 \text{ Hz} \end{cases}$$

پس $f = 263/3 \text{ Hz}$ جواب است.

(۹) القاگر $L = 3 \text{ mH}$ ، مقاومت $R = 8 \Omega$ و خازن $C = 10 \mu F$ را به طور متوالی به منبعی با اختلاف

پتانسیل موثر 25 V وصل کرده‌ایم. الف) بسامد طبیعی f_0 را به دست آورید. (ب) در چه بسامدهایی،

جریان موثر به 50% مقدار آن در f_0 می‌رسد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای تشدید می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \Rightarrow L = 3 \times 10^{-3} \text{ H} \\ L = 3 \text{ mH} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \Rightarrow C = 10 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 10^{-5} F \\ C = 10 \mu F \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{3 \times 10^{-2} \times 10^{-5}}} \Rightarrow 2\pi f_0 = 5/8 \times 10^2 \Rightarrow f_0 = 919/3 \text{ Hz}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه جریان در مدار تشدید می‌توان نوشت:

$$I_{\max} = \frac{V}{R} \Rightarrow I_{\max} = \frac{25}{8} \Rightarrow I_{\max} = 3/125 \text{ A}$$

$$I = \frac{50}{100} I_{\max} \Rightarrow I = \frac{50}{100} \times 3/125 \Rightarrow I = 1/56 \text{ A}$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر مدار RLC می‌توان نوشت:

$$V = IZ \Rightarrow 25 = 1/56 Z \Rightarrow Z = 16 \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + \left(L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f} \right)^2 \Rightarrow$$

$$(16)^2 = 8^2 + \left(3 \times 10^{-2} \times 2 \times 3/14 f - \frac{1}{10^{-5} \times 2 \times 3/14 f} \right)^2 \Rightarrow$$

$$192 = \left(1/9 \times 10^{-2} f - \frac{1}{6/28 \times 10^{-5} f} \right)^2 \Rightarrow \pm 13/9 = 1/9 \times 10^{-2} f - \frac{1}{6/28 \times 10^{-5} f} \Rightarrow$$

$$1/2 \times 10^{-6} f^2 - 1 = \pm 8/7 \times 10^{-4} f \Rightarrow 1/2 \times 10^{-6} f^2 \mp 8/7 \times 10^{-4} f - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$f = \frac{\pm 8/7 \times 10^{-4} \pm \sqrt{(\mp 8/7 \times 10^{-4})^2 - 4 \times 1/2 \times 10^{-6} \times (-1)}}{2 \times 1/2 \times 10^{-6}} \Rightarrow f = \frac{\pm 8/7 \times 10^{-4} \pm 2/4 \times 10^{-2}}{2/4 \times 10^{-6}}$$

$$f = \frac{+ 8/7 \times 10^{-4} + 2/4 \times 10^{-2}}{2/4 \times 10^{-6}} \Rightarrow f = 1/36 \times 10^2 \text{ Hz}$$

$$f = \frac{+ 8/7 \times 10^{-4} - 2/4 \times 10^{-2}}{2/4 \times 10^{-6}} \Rightarrow f = -637/5 \text{ Hz}$$

$$f = \frac{- 8/7 \times 10^{-4} + 2/4 \times 10^{-2}}{2/4 \times 10^{-6}} \Rightarrow f = 637/5 \text{ Hz}$$

$$f = \frac{- 8/7 \times 10^{-4} - 2/4 \times 10^{-2}}{2/4 \times 10^{-6}} \Rightarrow f = -1/36 \times 10^2 \text{ Hz}$$

پس $f = 1/36 \times 10^2 \text{ Hz}$ و $f = 637/5 \text{ Hz}$ جواب است.

توان در مدار جریان متناوب

۱) در مدار متوالی RLC: $R = 15 \Omega$, $C = 200 \mu F$ و $L = 0/2 \text{ H}$ به منبعی با بسامد $50/\pi \text{ Hz}$ و

فصل ۱۲

بیشینه اختلاف پتانسیل $V = 200$ بسته شده‌اند. الف) X_C ، X_L (ب) زاویه فاز ϕ توان میانگین خروجی منبع (د) ضریب توان را به دست آورید.

حل:

الف)

$$X_L = L\omega \Rightarrow X_L = L2\pi f \Rightarrow X_L = 0.1 \times 2\pi \times \frac{50}{\pi} \Rightarrow X_L = 20 \Omega$$

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \\ C = 200 \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 200 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 2 \times 10^{-4} F$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow X_C = \frac{1}{C2\pi f} \Rightarrow X_C = \frac{1}{2 \times 10^{-4} \times 2\pi \times \frac{50}{\pi}} \Rightarrow X_C = 50 \Omega$$

ب)

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan \phi = \frac{20 - 50}{15} \Rightarrow \tan \phi = -2 \Rightarrow \phi = -63^\circ / 4^\circ$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$v_o = i_o Z \Rightarrow v_o = i_o \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow 200 = i_o \times \sqrt{(15)^2 + (20 - 50)^2} \Rightarrow i_o = 5/96 A$$

با استفاده از رابطه‌ی توان میانگین خروجی منبع می‌توان نوشت:

$$P_{av} = \frac{1}{2} i_o v_o \cos \phi \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2} \times 5/96 \times 200 \times \cos(-63^\circ / 4^\circ) \Rightarrow P_{av} = 267 W$$

د) ضریب توان $\cos(-63^\circ / 4^\circ) = 0.447$ است.

۱۱) مدار متوالی RLC به منبعی با ولتاژ موثر $V = 100$ و بسامد 60 Hz متصل است. مقاومت 24Ω و زاویه‌ی فاز $53^\circ +$ است. توان موثر خروجی منبع را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$v_{oR} = i_o R \Rightarrow v_o \cos \phi = i_o R \Rightarrow \frac{v_o \cos \phi}{\sqrt{2}} = \frac{i_o R}{\sqrt{2}} \Rightarrow V \cos \phi = IR \Rightarrow I = \frac{V \cos \phi}{R}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان موثر داریم:

$$P = IV \cos \phi \Rightarrow P = \frac{V \cos \phi}{R} V \cos \phi \Rightarrow P = \frac{(V \cos \phi)^2}{R} \Rightarrow P = \frac{(100 \cos 53^\circ)^2}{24} \Rightarrow P = 151 W$$

۱۲) نشان دهید توان موثر تحویلی به مدار متوالی RLC را می‌توان به صورت $P = \frac{(V \cos \phi)^2}{R}$

نوشت. V اختلاف پتانسیل موثر منبع است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$v_o R = i_o R \Rightarrow v_o \cos \varphi = i_o R \Rightarrow \frac{v_o \cos \varphi}{\sqrt{2}} = \frac{i_o R}{\sqrt{2}} \Rightarrow V \cos \varphi = I R \Rightarrow I = \frac{V \cos \varphi}{R}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان موثر می‌توان نوشت:

$$P = I V \cos \varphi \Rightarrow P = \frac{V \cos \varphi}{R} V \cos \varphi \Rightarrow P = \frac{(V \cos \varphi)^2}{R}$$

۱۳) در یک مدار متوالی RLC ، جریان لحظه‌ای به صورت $i = 0.6 \sin(320t)$ (برحسب آمپر) است. در این مدار: $R = 24 \Omega$ ، $L = 18 \text{ mH}$ و $C = 70 \mu\text{F}$ است. معادله‌ی اختلاف پتانسیل لحظه‌ای دو سر منبع را بنویسید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \Rightarrow L = 18 \times 10^{-3} \text{ H} \\ L = 18 \text{ mH} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} \Rightarrow C = 70 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 7 \times 10^{-5} \text{ F} \\ C = 70 \mu\text{F} \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow$$

$$Z = \sqrt{(24)^2 + \left(18 \times 10^{-3} \times 320 - \frac{1}{7 \times 10^{-5} \times 320}\right)^2} \Rightarrow Z = 45/7 \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$v_o = i_o Z \Rightarrow v_o = 0.6 \times 45/7 \Rightarrow v_o = 2/74 \text{ V}$$

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{18 \times 10^{-3} \times 320 - \frac{1}{7 \times 10^{-5} \times 320}}{24} \Rightarrow$$

$$\tan \varphi = -1/62 \Rightarrow \varphi = -1/0.2 \text{ rad}$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$v = v_o \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v = 2/74 \sin(320t - 1/0.2)$$

مسائل تکمیلی

۱۴) نشان دهید توان موثر تحویلی به مدار متوالی RLC را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P = \frac{\omega^2 R V^2}{\omega^2 R^2 + (\omega^2 - \omega_o^2)^2 L^2}$$

حل: با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای تشدید می‌توان نوشت:

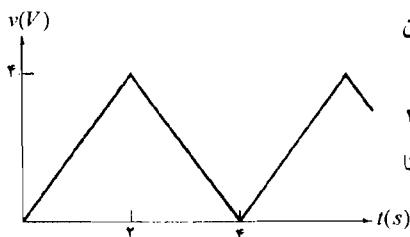
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{1}{C} = L\omega_o^2$$

فصل ۱۲

با استفاده از رابطه‌ی توان موثر تحویلی منبع می‌توان نوشت:

$$P = \frac{V^{\text{r}} R}{R^{\text{r}} + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^{\text{r}}} \Rightarrow P = \frac{V^{\text{r}} R}{R^{\text{r}} + \frac{\left(L\omega^{\text{r}} - \frac{1}{C} \right)^{\text{r}}}{\omega^{\text{r}}}} \Rightarrow P = \frac{\omega^{\text{r}} R V^{\text{r}}}{\omega^{\text{r}} R^{\text{r}} + \left(L\omega^{\text{r}} - \frac{1}{C} \right)^{\text{r}}} \Rightarrow$$

$$P = \frac{\omega^{\text{r}} R V^{\text{r}}}{\omega^{\text{r}} R^{\text{r}} + (L\omega^{\text{r}} - L\omega_0^{\text{r}})^{\text{r}}} \Rightarrow P = \frac{\omega^{\text{r}} R V^{\text{r}}}{\omega^{\text{r}} R^{\text{r}} + (\omega^{\text{r}} - \omega_0^{\text{r}})^{\text{r}} L^{\text{r}}}$$



۱۵) برای تابع شکل مقابل: الف) اختلاف پتانسیل میانگین

ب) اختلاف پتانسیل موثر را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل دیده می‌شود در بازه‌ی صفر تا ۲ s

معادله‌ی پتانسیل به صورت: $v = 2t$ و در بازه‌ی زمانی ۲ s تا

۴ s به صورت: $v = 8 - 2t$ است.

الف)

$$v_{av} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} v dt \Rightarrow v_{av} = \frac{1}{4} \left[\int_0^2 2t dt + \int_2^4 (8 - 2t) dt \right] \Rightarrow$$

$$v_{av} = \frac{1}{4} \left[t^2 \Big|_0^2 + (8t - 2t^2) \Big|_2^4 \right] \Rightarrow v_{av} = \frac{1}{4} \left\{ (2^2 - 0) + [(8 \times 4 - 4^2) - (8 \times 2 - 2^2)] \right\} \Rightarrow$$

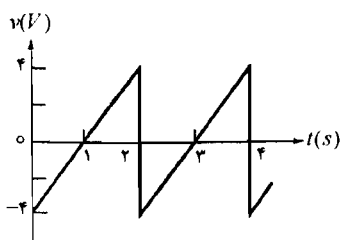
$$v_{av} = \frac{1}{4} \times (4 + 4) \Rightarrow v_{av} = 2V$$

ب)

$$v_{rms}^{\text{r}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} v^{\text{r}} dt \Rightarrow v_{rms}^{\text{r}} = \frac{1}{4} \left[\int_0^2 (2t)^{\text{r}} dt + \int_2^4 (8 - 2t)^{\text{r}} dt \right] \Rightarrow$$

$$v_{rms}^{\text{r}} = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{3} (8 - 2t)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^4 \right] \Rightarrow v_{rms}^{\text{r}} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{3} \times 8 - \frac{1}{6} [(8 - 2 \times 4)^{\frac{3}{2}} - (8 - 2 \times 2)^{\frac{3}{2}}] \right\}$$

$$v_{rms}^{\text{r}} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right) \Rightarrow v_{rms}^{\text{r}} = \frac{16}{3} \Rightarrow v_{rms} = \frac{4}{\sqrt{3}} V$$



۱۶) اختلاف پتانسیل موثر تابع دندانه اره‌ای شکل

مقابل را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل دیده می‌شود در بازه‌ی زمانی صفر

تا ۲ s معادله‌ی پتانسیل به صورت: $v = 4t - 4$ است.

$$v_{rms}^{\text{r}} = \frac{1}{T} \int_0^2 v^{\text{r}} dt \Rightarrow v_{rms}^{\text{r}} = \frac{1}{2} \int_0^2 (4t - 4)^{\text{r}} dt \Rightarrow$$

$$v_{rms}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (4t - 4)^2 \Big|_0^2 \Rightarrow v_{rms}^2 = \frac{1}{24} \times [(4 \times 2 - 4)^2 - (4 \times 0 - 4)^2] \Rightarrow$$

$$v_{rms}^2 = \frac{1}{24} \times (64 + 64) \Rightarrow v_{rms}^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{16}{3}} V$$

۱۷) مدار شکل زیر به عنوان صافی ابتدایی، کار می‌کند. اگر اختلاف پتانسیل ورودی، گستره‌ای از بسامدها باشد اختلاف پتانسیل خروجی شامل بسامدهای زیاد یا کم خواهد بود. نشان دهید:

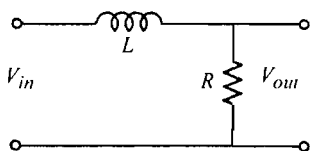
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

فرض کنید $V_{in} = 100$ V rms و $L = 25$ mH ، $R = 10$ Ω

ولتاژ V_{out} را به ازای ولتاژ ورودی با بسامدهای: الف) ۴۰ Hz (ب) ۴۰۰ Hz (ج) ۴۰۰۰ Hz به دست آورید.

این پالایه‌ی ، پالایه‌ی پایین‌گذر است یا بالاگذر؟

حل:



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{I Z_{out}}{I Z_{in}} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - 0)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{(R^2 + X_L^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{(R^2 + X_L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H} \Rightarrow L = 25 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.025 \text{ H} \\ L = 25 \text{ mH} \end{cases}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{[R^2 + L^2 (\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

الف)

$$\frac{V_{out}}{100} = \frac{10}{[(10)^2 + 4 \times (2/14)^2 \times (0.025)^2 \times (40)^2]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow V_{out} = 84/7 \text{ V}$$

ب)

$$\frac{V_{out}}{100} = \frac{10}{[(10)^2 + 4 \times (2/14)^2 \times (0.025)^2 \times (400)^2]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow V_{out} = 15/2 \text{ V}$$

ج)

$$\frac{V_{out}}{100} = \frac{10}{[(10)^2 + 4 \times (2/14)^2 \times (0.025)^2 \times (4000)^2]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow V_{out} = 1/59 \text{ V}$$

فصل ۱۲

بسامدهای پایین از این صافی، عبور می‌کند پس صافی پایین‌گذر است.

۱۸) در یک مدار متوالی RLC ، جریان و ولتاژ ناشی از منبع متناوب به صورت‌های: $i = 4 \sin(377 t)$ و $v = 160 \sin(377 t + \phi)$ است. اگر $R = 12/5 \Omega$ ، $X_C = 52 \Omega$ و $\phi < 0$ باشد L را به دست آورید. حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$v_o = i_o Z \Rightarrow 160 = 4Z \Rightarrow Z = 40 \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow 40 = \sqrt{(12/5)^2 + (X_L - 52)^2} \Rightarrow (40)^2 = (12/5)^2 + (X_L - 52)^2 \Rightarrow (X_L - 52)^2 = 1/44 \times 10^2 \Rightarrow X_L - 52 = \pm 28 \Rightarrow \begin{cases} X_L - 52 = 28 \\ X_L - 52 = -28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_L = 90 \Omega \\ X_L = 14 \Omega \end{cases}$$

با توجه به این که $\phi < 0$ است:

$$\phi < 0 \Rightarrow \tan \phi < 0 \Rightarrow \frac{X_L - X_C}{R} < 0 \Rightarrow X_L - X_C < 0 \Rightarrow X_L < X_C$$

با توجه به رابطه‌ی فوق: $X_L = 14 \Omega$ جواب است.

$$X_L = L\omega \Rightarrow 14 = L \times 377 \Rightarrow L = 3/71 \times 10^{-2} H$$

۱۹) در یک مدار متوالی RLC : $R = 8 \Omega$ ، $L = 40 mH$ ، $C = 20 \mu F$ و $v_o = 100 V$ (بیشینه ولتاژ منبع) و $f = \frac{200}{\pi} Hz$ است. الف) بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر R ، C و L را به دست آورید. ب) بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر مجموعه‌ی R و C را به دست آورید. ج) بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر مجموعه‌ی C و L را به دست آورید. حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 mH = 10^{-3} H \\ L = 40 mH \end{cases} \Rightarrow L = 40 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.04 H$$

$$\begin{cases} 1 \mu F = 10^{-6} F \\ C = 20 \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 20 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 2 \times 10^{-5} F$$

$$v_o = i_o Z \Rightarrow v_o = i_o \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow v_o = i_o \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Rightarrow$$

$$v_o = i_o \sqrt{R^2 + \left(L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f}\right)^2} \Rightarrow$$

$$100 = i_o \sqrt{(\lambda)^2 + \left(\cdot / \cdot 4 \times 2\pi \times \frac{200}{\pi} - \frac{1}{2 \times 10^{-5} \times 2\pi \times \frac{200}{\pi}} \right)^2} \Rightarrow 100 = 109 / 3 i_o \Rightarrow i_o = 0 / 92 \text{ A}$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$v_{oR} = i_o R \Rightarrow v_{oR} = 0 / 9 \times 8 \Rightarrow v_{oR} = 7 / 26 \text{ V}$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$v_o = \frac{i_o}{C\omega} \Rightarrow v_{oC} = \frac{i_o}{C2\pi f} \Rightarrow v_{oC} = \frac{0 / 91}{2 \times 10^{-5} \times 2\pi \times \frac{200}{\pi}} \Rightarrow v_{oC} = 112 / 75 \text{ V}$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$v_{oL} = i_o L\omega \Rightarrow v_{oL} = i_o L2\pi f \Rightarrow v_{oL} = 0 / 91 \times 0 / 4 \times 2\pi \times \frac{200}{\pi} \Rightarrow v_{oL} = 14 / 56 \text{ V}$$

(ب)

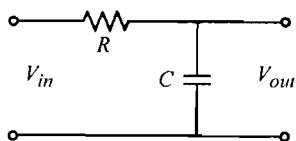
$$v_{oRC} = i_o Z_{RC} \Rightarrow v_{oRC} = i_o \sqrt{R^2 + (-X_C)^2} \Rightarrow v_{oRC} = i_o \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{C\omega} \right)^2} \Rightarrow$$

$$v_{oRC} = i_o \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C2\pi f} \right)^2} \Rightarrow v_{oRC} = 0 / 91 \sqrt{(\lambda)^2 + \left(\frac{1}{2 \times 10^{-5} \times 2\pi \times \frac{200}{\pi}} \right)^2} \Rightarrow v_{oRC} = 114 \text{ V}$$

(ج)

$$v_{oLC} = i_o \sqrt{\omega^2 (X_L - X_C)^2} \Rightarrow v_{oLC} = i_o \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \Rightarrow v_{oLC} = i_o \left| L2\pi f - \frac{1}{C2\pi f} \right| \Rightarrow$$

$$v_{oLC} = 0 / 91 \times \left| \cdot / \cdot 4 \times 2\pi \times \frac{200}{\pi} - \frac{1}{2 \times 10^{-5} \times 2\pi \times \frac{200}{\pi}} \right| \Rightarrow v_{oLC} = 99 / 2 \text{ V}$$



(۲۰) مدار مقابل، پالایه‌ی ساده‌ای را نشان می‌دهد. نشان دهید نسبت ولتاژهای موثر خروجی به ورودی برابر است با:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

حل:

فصل ۱۲

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{I Z_{out}}{I Z_{in}} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + (X_C)^2}} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{C\omega\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

مسائل

جریان جابه‌جایی

۱) خازن مسطحی با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع $2/5 \text{ cm}$ به فاصله‌ی 3 mm را در نظر بگیرید. اگر اختلاف پتانسیل بین تیغه‌ها با آهنگ $\frac{V}{s} \times 10^4 \times 5$ تغییر کند جریان جابه‌جایی چه قدر است؟
 حل: با استفاده از رابطه‌ی ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 2/5 \times 10^{-2} \text{ m} \\ r = 2/5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow d = 3 \times 10^{-3} \text{ m} \\ d = 3 \text{ mm} \end{cases}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \Rightarrow C = 8/85 \times 10^{-12} \times \frac{3/14 \times (2/5 \times 10^{-2})^2}{3 \times 10^{-3}} \Rightarrow C = 5/8 \times 10^{-12} \text{ F}$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان جابه‌جایی و تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_D = \frac{d}{dt}(CV) \Rightarrow I_D = C \frac{dV}{dt} \Rightarrow I_D = 5/8 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^4 \Rightarrow I_D = 2/9 \times 10^{-7} \text{ A}$$

۲) نشان دهید جریان جابه‌جایی خازن مسطح با دی‌الکتریک هوا از رابطه‌ی: $I_D = C \frac{dV}{dt}$ به دست می‌آید. V اختلاف پتانسیل دو سر خازن است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی جریان جابه‌جایی و تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_D = \frac{d}{dt}(CV) \Rightarrow I_D = C \frac{dV}{dt}$$

فصل ۱۳

۳) خازن مسطحی با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع 2 cm به فاصله‌ی 4 mm را در نظر بگیرید. این خازن به منبعی با جریان متناوبی با بسامد 60 Hz و بیشینه اختلاف پتانسیل 120 V وصل است. بیشینه میدان مغناطیسی را در وسط فاصله‌ی بین مرکز و لبه‌ی تیغه‌ها به دست آورید.
حل: با استفاده از رابطه‌ی ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m} \\ r = 1\text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 1 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 0.01\text{ m}$$

$$\begin{cases} 1\text{ mm} = 10^{-3}\text{ m} \\ d = 4\text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 4 \times 10^{-3}\text{ m}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \Rightarrow C = 8/85 \times 10^{-12} \times \frac{3/14 \times (0.01)^2}{4 \times 10^{-3}} \Rightarrow C = 6/95 \times 10^{-13}\text{ F}$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$v_{0C} = \frac{i_0}{C\omega} \Rightarrow v_0 = \frac{i_0}{C2\pi f} \Rightarrow 120 = \frac{i_0}{6/95 \times 10^{-13} \times 2 \times 3/14 \times 60} \Rightarrow i_0 = 3/14 \times 10^{-8}\text{ A}$$

با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I_D) \Rightarrow B2\pi r = \mu_0(i_0 + 0) \Rightarrow$$

$$B \times 2 \times 3/14 \times 0.01 = 4\pi \times 10^{-7} \times 3/14 \times 10^{-8} \Rightarrow B = 6/28 \times 10^{-13}\text{ T}$$

۴) خازن مسطحی با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع 2 cm به فاصله‌ی $2/4\text{ mm}$ را در نظر بگیرید. جریان عبوری از سیم‌های رابط بلند و راست 20 mA است. میدان مغناطیسی را در فواصل شعاعی: الف) 0.5 cm ب) 5 cm از مرکز تیغه‌ها به دست آورید.
حل:

الف) با استفاده از تعریف چگالی جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m} \\ r = 0.5\text{ cm} \\ R = 2\text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0.5 \times 10^{-2}\text{ m} \\ R = 2 \times 10^{-2}\text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\text{ mA} = 10^{-3}\text{ A} \\ I = 20\text{ mA} \end{cases} \Rightarrow I = 20 \times 10^{-3} \Rightarrow I = 0.02\text{ A}$$

$$J = \frac{I}{A} \Rightarrow \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I'}{\pi r^2} \Rightarrow I' = \left(\frac{r}{R}\right)^2 I \Rightarrow I' = \left(\frac{0.5 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}}\right)^2 \times 0.02 \Rightarrow I' = 1/25 \times 10^{-3}\text{ A}$$

با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I' \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I' \Rightarrow B \times 2 \times 3/14 \times 0.5 \times 10^{-2} = 4\pi \times 10^{-7} \times 1/25 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$3/14 \times 10^{-2} B = 1/57 \times 10^{-9} \Rightarrow B = 5 \times 10^{-8}\text{ T}$$

(ب) با استفاده از قانون آمپر می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r' = 5 \times 10^{-2} \text{ m} \\ r' = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B \times 2\pi r' = \mu_0 I \Rightarrow B \times 2 \times \pi \times 5 \times 10^{-2} = 4\pi \times 10^{-7} \times 0.2 \Rightarrow$$

$$0.2 \times 2\pi B = 2/5 \times 10^{-8} \Rightarrow B = 8 \times 10^{-8} \text{ T}$$

موج الکترومغناطیسی

(۵) میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی تختی به صورت زیر است:

$$B_y = 2 \times 10^{-7} \sin(0.5 \times 10^8 x + 1/5 \times 10^{11} t) \text{ T}$$

(الف) طول موج و بسامد این موج چه قدر است؟ (ب) عبارت مربوط به میدان الکتریکی را بنویسید.
حل:

(الف) با استفاده از تعریف عدد موج می توان نوشت:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow 0.5 \times 10^8 = \frac{2 \times \pi \times 14}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1/26 \times 10^{-2} \text{ m}$$

با استفاده از تعریف بسامد زاویه ای می توان نوشت:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow 1/5 \times 10^{11} = 2 \times \pi \times 14 \times f \Rightarrow f = 2/39 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

(ب) با توجه به رابطه ی B_y دیده می شود این موج روی محور x ها حرکت می کند از طرفی E عمود بر B_y است پس E در راستای محور z است:

$$E_z = cB_y \Rightarrow E_z = 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-7} \sin(0.5 \times 10^8 x + 1/5 \times 10^{11} t) \Rightarrow$$

$$E_z = 60 \sin(0.5 \times 10^8 x + 1/5 \times 10^{11} t)$$

انتقال انرژی و بردار پوئین تینگ

(۶) چگالی انرژی میانگین موج الکترومغناطیس سینوسی $\frac{J}{m^3}$ 10^{-7} است. دامنه ی میدان: (الف)

الکتریکی (ب) مغناطیسی را به دست آورید.

حل:

(الف) با استفاده از رابطه ی چگالی انرژی میدان الکتریکی می توان نوشت:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Rightarrow 10^{-7} = \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times E^2 \Rightarrow E^2 = 2/26 \times 10^4 \Rightarrow E = 150/3 \frac{V}{m}$$

(ب) با استفاده از رابطه ی چگالی انرژی میدان مغناطیسی می توان نوشت:

فصل ۱۳

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow 10^{-7} = \frac{B^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow B^2 = 2/51 \times 10^{-12} \Rightarrow B = 5/01 \times 10^{-6} \text{ T}$$

۷) شدت میانگین تابش خورشید در روی زمین (برای همه‌ی طول موج‌ها) $1 \frac{kW}{m^2}$ است. الف) چگالی انرژی میانگین در سطح زمین چه قدر است؟ ب) در مدت h ، انرژی خورشیدی تابشی بر روی سطح زمین را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W} \\ S_{av} = 1 \frac{kW}{m^2} \Rightarrow S_{av} = 1 \times 10^3 \Rightarrow S_{av} = 10^3 \frac{W}{m^2} \\ S_{av} = uc \Rightarrow 10^3 = u \times 3 \times 10^8 \Rightarrow u = 3/3 \times 10^{-6} \frac{J}{m^3} \end{cases}$$

ب) می‌دانیم همواره نصف سطح زمین، مقابل خورشید قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases} 1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \\ t = 1 \text{ h} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \times 3600 \Rightarrow t = 3600 \text{ s}$$

$$S_{av} = \frac{P_{av}}{A} \Rightarrow S_{av} = \frac{E}{t} \Rightarrow 10^3 = \frac{E}{3600} \Rightarrow E = 9/2 \times 10^{10} \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3/14 \times (6/38 \times 10^6)^2$$

۸) در فاصله‌ی 6 m از منبع تکفامی، دامنه‌ی میدان الکتریکی $10 \frac{V}{m}$ است. الف) دامنه‌ی میدان مغناطیسی ب) توان میانگین خروجی از منبع را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$E = cB \Rightarrow 10 = 3 \times 10^8 \times B \Rightarrow B = 3/3 \times 10^{-8} \text{ T}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$S_{av} = \frac{EB}{2\mu_0} \Rightarrow S_{av} = \frac{10 \times 3/3 \times 10^{-8}}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow S_{av} = 0/12 \frac{W}{m^2}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان میانگین می‌توان نوشت:

$$S_{av} = \frac{P_{av}}{4\pi r^2} \Rightarrow 0/12 = \frac{P_{av}}{4 \times 3/14 \times (6)^2} \Rightarrow P_{av} = 60 \text{ W}$$

تکانه و فشار تابش

۹) نیروی تابشی وارد بر تیغه‌ای به مساحت 5 cm^2 ناشی از: الف) لیزر هلیوم - نئون با توان 1 mW ب) لیزر کربن دی اکسید با توان 1 kW را به دست آورید. فرض کنید باریکه‌ی لیزری با سطح مقطع 10 mm^2 ، تابش عمودی داشته و کاملاً جذب می‌شود.
حل: با استفاده از روابط فشار تابش و توان داریم:

$$\begin{cases} \frac{F}{A} = \frac{S}{c} \\ S = \frac{P}{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{A}{c} \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{P}{cA} \Rightarrow F = \frac{P}{c}$$

(الف)

$$\begin{cases} 1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ W} \\ P = 1 \text{ mW} \end{cases} \Rightarrow P = 1 \times 10^{-3} \text{ W}$$

$$F = \frac{1 \times 10^{-3}}{3 \times 10^8} \Rightarrow F = 3/33 \times 10^{-12} \text{ N}$$

(ب)

$$\begin{cases} 1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W} \\ P = 1 \text{ kW} \end{cases} \Rightarrow P = 1 \times 10^3 \text{ W}$$

$$F = \frac{1 \times 10^3}{3 \times 10^8} \Rightarrow F = 3/33 \times 10^{-6} \text{ N}$$

۱۰) دامنه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از منبع نقطه‌ای در فاصله‌ی ۱۰۰ متری، ۰/۱ درصد میدان مغناطیسی زمین (10^{-7} T) است. توان خروجی فرستنده را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} S = \frac{EB}{2\mu_0} \\ E = cB \end{cases} \Rightarrow S = \frac{cB^2}{2\mu_0} \Rightarrow S = \frac{3 \times 10^8 \times (10^{-7})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow S = 1/19 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان داریم:

$$S = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow 1/19 = \frac{P}{4 \times 3/14 \times (100)^2} \Rightarrow P = 1/5 \times 10^5 \text{ W}$$

۱۱) یک گیرنده‌ی FM می‌تواند سیگنال آستانه‌ای با دامنه‌ی $E_0 = 2 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$ را دریافت کند. الف) شدت

این موج الکترومغناطیسی چه قدر است؟ ب) اگر این شدت، ناشی از منبعی نقطه‌ای با توان 10 kW باشد فاصله‌ی گیرنده تا فرستنده چه قدر است؟

فصل ۱۳

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\mu V}{m} = 10^{-6} \frac{V}{m} \\ E = 2 \frac{\mu V}{m} \end{cases} \Rightarrow E = 2 \times 10^{-6} \frac{V}{m}$$

$$\begin{cases} S = \frac{EB}{2\mu_0} \\ E = cB \end{cases} \Rightarrow S = \frac{E^2}{2\mu_0 c} \Rightarrow S = \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8} \Rightarrow S = 5/31 \times 10^{-15} \frac{W}{m^2}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی می‌توان داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W} \\ P = 10 \text{ kW} \end{cases} \Rightarrow P = 10 \times 10^3 \Rightarrow P = 10^4 \text{ W}$$

$$S = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow 5/31 \times 10^{-15} = \frac{10^4}{4 \times 3.14 \times r^2} \Rightarrow 6/67 \times 10^{-14} \times r^2 = 10^4 \Rightarrow$$

$$r^2 = 1/5 \times 10^{17} \Rightarrow r = 3/87 \times 10^8 \text{ m}$$

۱۲) شدت موج الکترومغناطیسی تختی $5 \frac{W}{m^2}$ است. این موج به سطحی کاملاً بازتابنده، می‌تابد. الف) فشار تابش ب) نیروی وارد بر صفحه‌ای به ابعاد $40 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ عمود بر راستای انتشار موج را به دست آورید.

حل: سطح، کاملاً بازتابنده است پس ضریب ۲ در روابط ظاهر می‌شود.

الف) با استفاده از رابطه‌ی فشار تابش می‌توان نوشت:

$$\frac{F}{A} = 2S \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{2 \times 5}{3 \times 10^8} \Rightarrow \frac{F}{A} = 3/33 \times 10^{-8} \frac{N}{m^2}$$

ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ a = 60 \text{ cm} \\ b = 40 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 60 \times 10^{-2} \\ b = 40 \times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0/6 \text{ m} \\ b = 0/4 \text{ m} \end{cases}$$

$$\frac{F}{A} = 3/33 \times 10^{-8} \Rightarrow \frac{F}{0/6 \times 0/4} = 3/33 \times 10^{-8} \Rightarrow F = 8 \times 10^{-9} \text{ N}$$

۱۳) نشان دهید مقدار لحظه‌ای بردار پوینتینگ در فضای آزاد به صورت زیر است:

$$S = \frac{c}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})$$

حل: با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و تعریف بردار پوینتینگ می‌توان نوشت:

معادلات ماکسول، امواج الکترومغناطیسی - مسائل

$$\begin{cases} S = \frac{EB}{\mu_0} \\ E = cB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{cB^2}{\mu_0} \\ S = \frac{E^2}{c\mu_0} \end{cases} \Rightarrow S + S = \frac{E^2}{c\mu_0} + \frac{cB^2}{\mu_0} \Rightarrow 2S = c \left(\frac{E^2}{c^2\mu_0} + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \Rightarrow$$

$$S = \frac{c}{2} \left(\frac{E^2}{\mu_0} \times \epsilon_0 \mu_0 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \Rightarrow S = \frac{c}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

توجه کنید: $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$

مسائل تکمیلی

۱۴) خازنی با تیغه‌های موازی و دایره‌ای به شعاع a و به فاصله‌ی d از یکدیگر در حال پر شدن است. الف) میدان B در لبه‌ی آن (ب) بردار پوئینتینگ در لبه‌ی آن چه قدر است؟ (ج) نشان دهید توان ورودی خازن: $\epsilon_0 \pi da^2 E \left(\frac{dE}{dt} \right)$ است. (از میدان‌های الکتریکی حاشیه‌ای صرف‌نظر کنید).

حل:

الف) با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow B 2\pi a = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (AE) \Rightarrow 2\pi aB = \mu_0 \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} \Rightarrow$$

$$2\pi aB = \mu_0 \epsilon_0 \pi a^2 \frac{dE}{dt} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 a \frac{dE}{dt}$$

ب) با استفاده از تعریف بردار پوئینتینگ می‌توان نوشت:

$$S = \frac{EB}{\mu_0} \Rightarrow S = \frac{E}{\mu_0} \times \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 a \frac{dE}{dt} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \epsilon_0 a E \frac{dE}{dt}$$

ج) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$S = \frac{P}{A} \Rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_0 a E \frac{dE}{dt} = \frac{P}{2\pi ad} \Rightarrow P = \epsilon_0 \pi da^2 E \frac{dE}{dt}$$

۱۵) سیم راستی به طول m و شعاع mm 0.5 را در نظر بگیرید. مقاومت الکتریکی آن Ω 0.8 و اختلاف پتانسیل دو سر آن V 24 است. الف) توان اتلافی در اثر گرم شدن سیم چه قدر است؟ (ب) بردار پوئینتینگ در سطح آن چه قدر است؟ (ج) نشان دهید توان الکترومغناطیسی ورودی سیم برابر با توان اتلافی قسمت الف است.

حل:

الف) با استفاده از تعریف توان داریم:

فصل ۱۳

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P = \frac{(24)^2}{. / 8} \Rightarrow P = 720 \text{ W}$$

ب) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می توان نوشت:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow E = \frac{24}{6} \Rightarrow E = 4 \frac{V}{m}$$

با استفاده از قانون آمپر می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow r = . / 5 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 5 \times 10^{-4} \text{ m} \\ r = . / 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 V}{2\pi R} \Rightarrow B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 24}{2\pi \times 5 \times 10^{-4} \times . / 8} \Rightarrow B = . / . 12 \text{ T}$$

با استفاده از تعریف بردار پوینتینگ می توان نوشت:

$$S = \frac{EB}{\mu_0} \Rightarrow S = \frac{4 \times . / . 12}{4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow S = 3 / 82 \times 10^4 \frac{W}{m^2}$$

ج)

$$P_e = SA \Rightarrow P_e = S 2\pi r l \Rightarrow P_e = 3 / 82 \times 10^4 \times 2 \times 3 / 14 \times 5 \times 10^{-4} \times 6 \Rightarrow P_e = 720 \text{ W}$$

پس: $P = P_e$ است.

۱۶) امواج الکترومغناطیس تختی به شدت S عمود بر سطحی صافی می تابند. اگر کسر جذب انرژی تابشی f باشد فشار تابشی چه قدر است؟

حل: برای سطح کاملاً بازتابنده: $\frac{F}{A} = \frac{2S}{c}$ و برای سطح کاملاً جذب کننده: $\frac{F}{A} = \frac{S}{c}$ است پس:

$$P = P_r - P_a \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{2S}{c} - \frac{S}{c} f \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{S}{c} (2 - f)$$

۱۷) پیچه‌ای استوانه‌ای با ۲۵۰ دور سیم‌پیچ به قطر $1/5 \text{ cm}$ را به عنوان آنتن AM به کار می‌بریم. اگر ایستگاه فرستنده‌ای (منبع نقطه‌ای، فرض می‌شود) با توان 10^4 W و بسامد 800 kHz در فاصله‌ی 2 km در حال گسیل امواج باشد بیشینه نیروی محرکه‌ی الکتریکی القایی در آنتن چه قدر است؟ محور پیچه را موازی میدان مغناطیسی در نظر بگیرید.

حل: با استفاده از تعریف توان داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \Rightarrow r = 2 \times 10^3 \text{ m} \\ r = 2 \text{ km} \end{cases}$$

$$S = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow S = \frac{10^4}{4 \times 3 / 14 \times (2 \times 10^3)^2} \Rightarrow S = 1 / 99 \times 10^{-4} \frac{W}{m^2}$$

با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و تعریف بردار پوینتینگ می توان نوشت:

$$\begin{cases} S = \frac{EB}{\mu_0} \\ E = cB \end{cases} \Rightarrow S = \frac{cB^2}{\mu_0} \Rightarrow 1/99 \times 10^{-4} = \frac{3 \times 10^8 B^2}{4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow 2/5 \times 10^{-10} = 3 \times 10^8 B^2 \Rightarrow$$

$$B^2 = 8/33 \times 10^{-19} \Rightarrow B = 9/13 \times 10^{-10} \text{ T}$$

با استفاده از رابطه‌ی پیشینه نیروی محرکه‌ی القایی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ d = 1/5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow d = 1/5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\epsilon_0 = NBA\omega \Rightarrow \epsilon_0 = NB\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi f \Rightarrow$$

$$\epsilon_0 = 250 \times 9/13 \times 10^{-10} \times 3/14 \times \left(\frac{1/5 \times 10^{-2}}{2}\right)^2 \times 2 \times 3/14 \times 8 \times 10^5 \Rightarrow \epsilon_0 = 2/0.2 \times 10^{-2} \text{ V}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ kHz} = 10^3 \text{ Hz} \\ f = 800 \text{ kHz} \end{cases} \Rightarrow f = 800 \times 10^3 \Rightarrow f = 8 \times 10^5 \text{ Hz}$$

۱۸) خازن نشت کننده‌ای با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع $R = 12 \text{ cm}$ ، ظرفیت $5 \mu\text{F}$ و مقاومت موثر $4 \times 10^5 \Omega$ را در نظر بگیرید. در لحظه‌ی $t = 0$ ، اختلاف پتانسیل بین دو تیغه برابر صفر است ولی با آهنگ ثابت $\frac{V}{s}$ ۲۰۰۰ افزایش می‌یابد. الف) جریان جابه‌جایی I_D را به دست آورید. ب) در چه لحظه‌ای جریان جابه‌جایی برابر جریان رسانشی می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان جابه‌جایی و تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_D = \frac{d}{dt}(CV) \Rightarrow I_D = C \frac{dV}{dt} \Rightarrow I_D = 5 \times 10^{-6} \times 2000 \Rightarrow I_D = 0.01 \text{ A}$$

$$\begin{cases} 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} \\ C = 5 \mu\text{F} \end{cases} \Rightarrow C = 5 \times 10^{-6} \text{ F}$$

ب)

$$I = I_D \Rightarrow \frac{V}{R} = I_D \Rightarrow V = RI_D \Rightarrow \frac{V}{t} = RI_D \Rightarrow 2000 = 4 \times 10^5 \times 0.01 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

۱۹) موج الکترومغناطیسی تختی با شدت $\frac{W}{m^2}$ ۲۲۰، عمود بر قرص صافی به شعاع 30 cm می‌تابد. اگر قرص ۶۰٪ تابش فرودی را جذب کند و ۴۰٪ بازتاب کند تکانه‌ی منتقل شده به قرص در مدت 5 min چه قدر است؟

حل: برای سطح کاملاً بازتابنده: $\frac{F}{A} = \frac{2S}{c}$ و برای سطح کاملاً جذب کننده: $\frac{F}{A} = \frac{S}{c}$ است پس:

فصل ۱۳

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 30 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 30 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 0.3 \text{ m}$$

$$P = P_r - P_a \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{vS}{c} - \frac{S}{c} f \Rightarrow \frac{F}{\pi r^2} = \frac{S}{c} (v - f) \Rightarrow$$

$$\frac{F}{\pi \times 10^{-4} \times (0.3)^2} = \frac{220}{3 \times 10^8} \times (3 - \frac{60}{100}) \Rightarrow F = 2/9 \times 10^{-7} \text{ N}$$

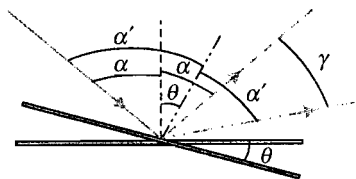
با استفاده از قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \\ \Delta t = 5 \text{ min} \end{cases} \Rightarrow \Delta t = 5 \times 60 \Rightarrow \Delta t = 300 \text{ s}$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow 2/9 \times 10^{-7} = \frac{\Delta P}{300} \Rightarrow \Delta P = 8/7 \times 10^{-5} \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

مسائل

بازتابش



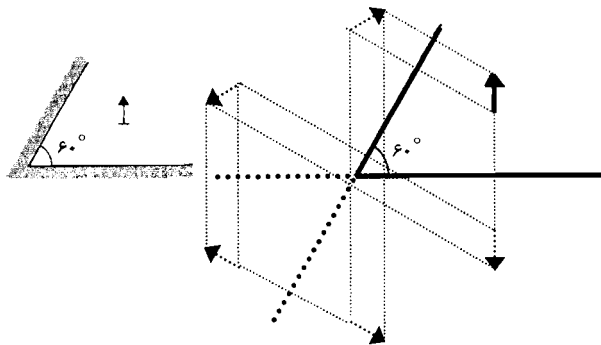
(۱) نشان دهید اگر آینه‌ی تختی به اندازه‌ی θ بچرخد پرتو بازتابشی به اندازه‌ی 2θ می‌چرخد.
حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\alpha' = \alpha + \theta$$

$$\gamma = \alpha' - (\alpha - \theta) \Rightarrow \gamma = \alpha + \theta - \alpha + \theta \Rightarrow \gamma = 2\theta$$

(۲) مطابق شکل زیر، جسمی بین دو آینه، قرار دارد و زاویه بین آن‌ها 60° است. چند تصویر تشکیل می‌شود؟ محل تشکیل تصویرها و جهت آن‌ها را مشخص کنید.

حل:

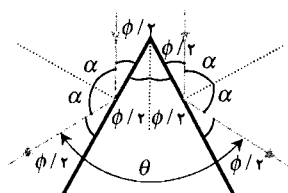
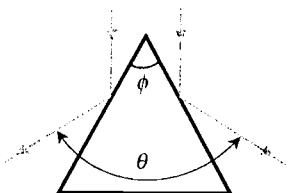


$$\text{تعداد تصاویر} = \frac{360}{60} - 1 = 5$$

(۳) مطابق شکل زیر، باریکه‌ی موازی به منشوری با زاویه‌ی راس ϕ می‌تابد. نشان دهید زاویه‌ی θ بین دو پرتو بازتابیده، دو برابر زاویه‌ی راس است.

حل: شکل مقابل با توجه به قوانین بازتابش رسم شده است. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

فصل ۱۴



$$\theta = \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} \Rightarrow \theta = 2\phi$$

شکست

۴) وقتی پرتو نوری از هوا وارد محیطی با ضریب شکست ۱/۴ می‌شود زاویه‌ی شکست ۳۲° می‌شود. زاویه بین پرتوهای شکست و بازتابش چه قدر است؟

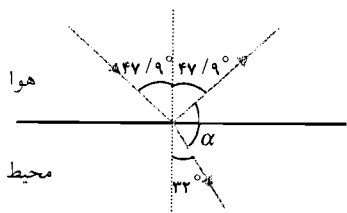
حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin \theta_1 = 1/4 \times \sin 32 \Rightarrow$$

$$\sin \theta_1 = 0.0742 \Rightarrow \theta_1 = 4.26^\circ$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$4.26 + \alpha + 32 = 180 \Rightarrow \alpha = 173.74^\circ$$



۵) در عمق ۳ متری زیر آب (n = ۱/۳۳) غواصی، باریکه‌ی نوری را با زاویه‌ی ۳۰° نسبت به خط قائم به سطح مشترک آب و هوا گسیل می‌کند. شخصی در قایقی نشسته و چشمانش در ۱ m سطح آب قرار دارند. شخص در چه فاصله‌ی افقی از غواص می‌تواند علامت گسیلی را دریافت کند.

حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

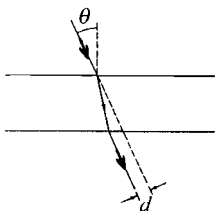
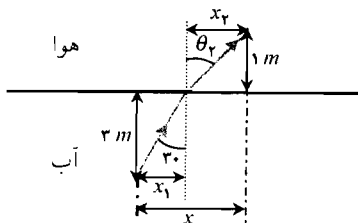
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1/33 \times \sin 30 = 1 \times \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = 0.0665 \Rightarrow \theta_2 = 3.8^\circ$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\tan 30 = \frac{x_1}{3} \Rightarrow x_1 = 3 \times \tan 30 \Rightarrow x_1 = 1.73$$

$$\tan \theta_2 = \frac{x_2}{1} \Rightarrow \tan 3.8 = x_2 \Rightarrow x_2 = 0.066$$

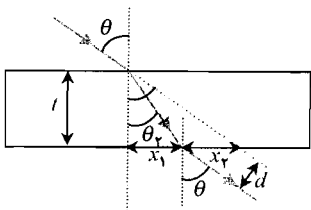
$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = 1.73 + 0.066 \Rightarrow x = 1.796 \text{ m}$$



۶) نشان دهید اگر مطابق شکل مقابل، پرتو نوری با زاویه‌ی تابش کوچک theta به تیغه‌ای شیشه‌ای با ضخامت t و ضریب شکست n بتابد انحراف عرضی پرتو تقریباً

$$d \approx \frac{t \theta (n-1)}{n}$$

است. theta برحسب رادیان است.



حل: با استفاده از قوانین شکست می توان نوشت:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin \theta = n \sin \theta_r \Rightarrow$$

$$\sin \theta_r = \frac{\sin \theta}{n} \Rightarrow \theta_r \cong \frac{\theta}{n}$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\tan \theta_r = \frac{x_1}{t} \Rightarrow x_1 = t \times \tan \theta_r \Rightarrow x_1 \cong t \theta_r \Rightarrow x_1 \cong \frac{t \theta}{n}$$

$$\tan \theta = \frac{x_1 + x_2}{t} \Rightarrow \theta \cong \frac{x_1 + x_2}{t} \Rightarrow t \theta \cong x_1 + x_2 \Rightarrow$$

$$t \theta \cong \frac{t \theta}{n} + x_2 \Rightarrow x_2 \cong t \theta \left(1 - \frac{1}{n} \right) \Rightarrow x_2 \cong \frac{t \theta (n-1)}{n}$$

$$\sin(90^\circ - \theta_r) = \frac{d}{x_2} \Rightarrow \cos \theta_r = \frac{d}{x_2} \Rightarrow 1 \cong \frac{d}{x_2} \Rightarrow d \cong x_2 \Rightarrow d \cong \frac{t \theta (n-1)}{n}$$

توجه: برای زوایای کوچک: $\tan \theta \cong \sin \theta \cong \theta$ و $\cos \theta \cong 1$ است.

بازتابش کلی داخلی

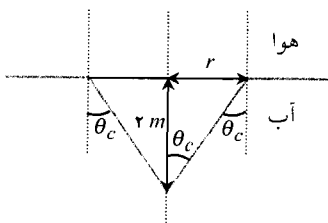
۷) منبع نقطه‌ای نوری در عمق m استخری است. شعاع دایره‌ی روی سطح آب (که نور از آن جا می‌تواند وارد هوا شود) را به دست آورید.

حل: نور، وقتی می‌تواند از آب وارد هوا شود که زاویه‌ی تابش آن

کوچکتر از زاویه‌ی حد شکست باشد. پس:

$$n = \frac{1}{\sin \theta_c} \Rightarrow 1/33 = \frac{1}{\sin \theta_c} \Rightarrow \sin \theta_c = 0.752 \Rightarrow \theta_c = 48.7^\circ$$

$$\tan \theta_c = \frac{r}{m} \Rightarrow \tan 48.7^\circ = \frac{r}{m} \Rightarrow r = 2.28 \text{ m}$$



۸) پرتو نوری که در خلا حرکت می‌کند مطابق شکل زیر، وارد تار بسیار بلندی با ضریب شکست $1/5$

می‌شود. نشان دهید در داخل تار، پرتو با هر زاویه‌ی تابشی، بازتاب کلی پیدا می‌کند.

حل: با استفاده از قوانین شکست می توان نوشت:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin \theta_1 = 1/5 \times \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = 0.67 \sin \theta_1 \quad (1)$$

برای زاویه‌ی حد شکست می توان نوشت:

$$n = \frac{1}{\sin \theta_c} \Rightarrow 1/5 = \frac{1}{\sin \theta_c} \Rightarrow \sin \theta_c = 0.67 \quad (2)$$

با توجه به این که $0 \leq \sin \theta_1 < 1$ است پس همواره: $\sin \theta_2 < \sin \theta_c$ است بنابراین نور با هر زاویه‌ای که بتابد در داخل تار، بازتابش کلی داخلی، رخ می‌دهد.

منشور و پاشیدگی نور

۹) در منشوری با زاویه‌ی راس 60° ، کمینه زاویه‌ی انحراف 41° است. سرعت نور در این منشور چه قدر است؟

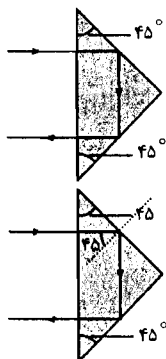
حل: با استفاده از رابطه‌ی ضریب شکست منشور می‌توان نوشت:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\phi + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\frac{\phi}{2}} \Rightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{60 + 41}{2}\right)}{\sin\frac{60}{2}} \Rightarrow n = 1.54$$

با توجه به سرعت نور $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ می‌توان نوشت:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow 1.54 = \frac{3 \times 10^8}{v} \Rightarrow v = 1.95 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

۱۰) الف) کمترین ضریب شکست منشور شکل زیر برای بازتابش کلی چه قدر است؟ ب) همین جواب را وقتی به دست آورید که منشور درون آب باشد.



حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی زاویه‌ی حد شکست می‌توان نوشت:

$$n = \frac{1}{\sin\theta_c} \Rightarrow n = \frac{1}{\sin 45} \Rightarrow n = 1.41$$

ب) ضریب شکست آب 1.33 است. با استفاده از تعریف ضریب شکست نسبی می‌توان نوشت:

$$n = \frac{n'}{n_1} \Rightarrow 1.41 = \frac{n'}{1.33} \Rightarrow n' = 1.87$$

۱۱) پرتوی با زاویه‌ی 45° به منشوری با زاویه‌ی راس 60° و ضریب شکست 1.5 می‌تابد. مسیر این پرتو را رسم کنید. زاویه‌ی انحراف بین پرتو تابشی و پرتو خروجی را به دست آورید.

حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin 45 = 1.5 \times \sin\theta_2 \Rightarrow$$

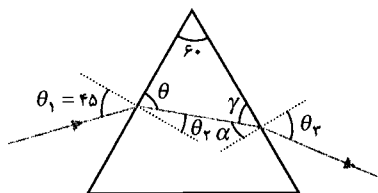
$$\sin\theta_2 = 0.471 \Rightarrow \theta_2 = 28.2^\circ$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\gamma + \theta + 60 = 180 \Rightarrow \gamma + (90 - \theta_2) + 60 = 180 \Rightarrow$$

$$\gamma + 90 - 28.2 + 60 = 180 \Rightarrow \gamma = 58.2^\circ$$

$$\alpha = 90 - \gamma \Rightarrow \alpha = 90 - 58.2 = 31.8^\circ$$



$$n_r \sin \alpha = n_i \sin \theta_r \Rightarrow 1/5 \times \sin 31/8 = 1 \times \sin \theta_r \Rightarrow \sin \theta_r = 0.79 \Rightarrow \theta_r = 52/3^\circ$$

زاویه‌ی انحراف کل برابر مجموع انحراف‌ها در هر شکست است پس:

$$\phi = (\theta_1 - \theta_r) + (\theta_r - \alpha) \Rightarrow \phi = (45 - 28/2) + (52/3 - 31/8) \Rightarrow \phi = 37/3^\circ$$

۱۲) مطابق شکل زیر، پرتوی به صورت مایل به منشوری با ضریب شکست n می‌تابد. نشان دهید

برای این که پرتو خروجی در راستای AC باشد بیشینه

زاویه‌ی α از رابطه‌ی: $\cos \alpha = n \sin(\phi - \theta_c)$ به دست می‌آید.

θ_c زاویه‌ی حد بازتاب کلی است.

حل: وقتی پرتو خروجی روی AC قرار می‌گیرد که زاویه‌ی تابش

برابر زاویه‌ی حد شکست باشد.

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\phi + (90 - \theta_r) + (90 - \theta_c) = 180 \Rightarrow \phi - \theta_r - \theta_c = 0 \Rightarrow$$

$$\theta_r = \phi - \theta_c$$

با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_i \sin \theta_1 = n_r \sin \theta_r \Rightarrow 1 \times \sin(90 - \alpha) = n \sin(\phi - \theta_c) \Rightarrow \cos \alpha = n \sin(\phi - \theta_c)$$

آینه‌های کروی

۱۳) جسمی در فاصله‌ی 60 cm از آینه‌ی کاوی قرار دارد. طول تصویر حقیقی 40% طول جسم است.

شعاع انحنای آینه چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{q}{60} = \frac{0.4 AB}{AB} \Rightarrow \frac{q}{60} = 0.4 \Rightarrow q = 24$$

با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{60} + \frac{1}{24} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{24 + 60}{24 \times 60} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 17/1 \text{ cm}$$

$$f = \frac{R}{2} \Rightarrow 17/1 = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 34/2 \text{ cm}$$

۱۴) در آینه‌ی کوزی به شعاع انحنای 16 cm ، طول تصویر، $\frac{1}{3}$ طول جسم (حقیقی) است. الف) محل

جسم ب) محل تصویر را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

فصل ۱۴

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{\frac{1}{3} AB}{AB} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{p}{3} \quad (1)$$

آینه، کوژ است پس q و f با علامت منفی جاگذاری می‌شوند. با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$f = \frac{R}{2} \Rightarrow f = \frac{16}{2} \Rightarrow f = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{2}{p} = -\frac{1}{8} \Rightarrow p = 16 \text{ cm}$$

(ب) نتیجه‌ی قسمت الف را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$q = \frac{p}{3} \Rightarrow q = \frac{16}{3} \Rightarrow q = 5/33 \text{ cm}$$

(۱۵) جسمی به فاصله‌ی 20 cm از آینه‌ی کاوی، قرار دارد. اگر طول تصویر، 40% بزرگتر از طول جسم باشد فاصله‌های کانونی ممکن را به دست آورید.
حل: طول تصویر 40% بیشتر از طول جسم است پس:

$$A'B' = AB + \frac{40}{100} AB \Rightarrow A'B' = 1/4 AB$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{q}{20} = \frac{1/4 AB}{AB} \Rightarrow \frac{q}{20} = 1/4 \Rightarrow q = 28 \text{ cm}$$

در مورد نوع تصویر، توضیحی داده نشده است پس: q را با علامت \pm جاگذاری می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{20} \pm \frac{1}{28} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{28 \pm 20}{20 \times 28} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{560}{28 \pm 20} \Rightarrow \begin{cases} f = \frac{560}{28 + 20} \\ f = \frac{560}{28 - 20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 11/7 \text{ cm} \\ f = 70 \text{ cm} \end{cases}$$

(۱۶) جسمی کروی به شعاع r در فاصله‌ی بسیار زیاد d از آینه‌ی کاوی به فاصله‌ی کانونی f قرار دارد. الف) نشان دهید شعاع تصویر $\frac{rf}{d}$ است. (ب) فاصله‌ی کانونی آینه‌ی کاو تلسکوپ بازتابشی پالومار $m = 16/8$ است. شعاع تصویر کروی ماه چه قدر است؟ شعاع ماه $m = 1/24 \times 10^6$ است.
حل: شعاع مدار ماه $m = 3/82 \times 10^8$ است.

الف) با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{d-f}{fd} \Rightarrow q = \frac{fd}{d-f}$$

$d \gg f$ است پس:

$$d - f \cong d \Rightarrow q \cong \frac{fd}{d} \Rightarrow q \cong f$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{f}{d} = \frac{A'B'}{r} \Rightarrow A'B' = \frac{rf}{d}$$

(ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می توان نوشت:

$$A'B' = \frac{rf}{d} \Rightarrow A'B' = \frac{1/74 \times 10^6 \times 16/8}{3/82 \times 10^8} \Rightarrow A'B' = 7/65 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow A'B' = 7/65 \text{ cm}$$

عدسی‌های نازک

۱۷) تصویر جسمی به طول ۱ cm در فاصله‌ی ۲ m از عدسی نازکی روی پرده‌ای تشکیل شده و طول تصویر ۵ cm است. الف) محل جسم (ب) فاصله‌ی کانونی عدسی را به دست آورید.
حل:

الف) با استفاده از تعریف بزرگنمایی می توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ A'B' = 5 \text{ cm} \\ AB = 1 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = 5 \times 10^{-2} \\ AB = 1 \times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = 0.05 \text{ m} \\ AB = 0.01 \text{ m} \end{cases}$$

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{2}{p} = \frac{0.05}{0.01} \Rightarrow 5p = 2 \Rightarrow p = 0.4 \text{ m}$$

(ب) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{0.4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{2+0.4}{0.4 \times 2} = \frac{1}{f} \Rightarrow 3 = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 0.33 \text{ m}$$

۱۸) دوربین عکاسی ساده‌ای مجهز به عدسی همگرا با فاصله‌ی کانونی ۵۰ mm است. در هر یک از حالات زیر، فاصله‌ی عدسی را از فیلم عکاسی به دست آورید. جسم در فاصله‌ی: الف) ۲ m (ب) ۰.۵ m باشد.

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-f}{pf} \Rightarrow q = \frac{pf}{p-f}$$

(الف)

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ f = 50 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow f = 50 \times 10^{-3} \Rightarrow f = 0.05 \text{ m}$$

فصل ۱۴

$$q = \frac{2 \times 0.5}{2 - 0.5} \Rightarrow q = 5/13 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow q = 5/13 \text{ cm}$$

(ب)

$$q = \frac{0.5 \times 0.5}{0.5 - 0.5} \Rightarrow q = 5/56 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow q = 5/56 \text{ cm}$$

۱۹) عدسی همگرایی با فاصله‌ی کانونی 20 cm از جسمی، تصویر کوچکتري به طول 40% طول جسم، تشکیل می‌دهد. محل جسم را در حالات: الف) تصویر حقیقی (ب) تصویر مجازی به دست آورید. حل: با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{0.4 \cdot AB}{AB} \Rightarrow \frac{q}{p} = 0.4 \Rightarrow q = 0.4p$$

الف) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{0.4p} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{0.4+1}{0.4p} = \frac{1}{20} \Rightarrow 0.4p = 28 \Rightarrow p = 70 \text{ cm}$$

(ب) تصویر مجازی است پس q با علامت منفی. جاگذاری می‌شود با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها داریم:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{0.4p} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{0.4-1}{0.4p} = \frac{1}{20} \Rightarrow 0.4p = 12 \Rightarrow p = -30 \text{ cm}$$

۲۰) مجموعه‌ای از یک عدسی همگرا ($f_1 = 10 \text{ cm}$) و یک عدسی واگرا ($f_2 = -15 \text{ cm}$) به فاصله‌ی 10 cm از هم در نظر بگیرید. جسمی به فاصله‌ی 20 cm از عدسی اول قرار دارد. محل تشکیل تصویر نهایی را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{20} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{q_1} = \frac{2-1}{20} \Rightarrow \frac{1}{q_1} = \frac{1}{20} \Rightarrow q_1 = 20 \text{ cm}$$

پس این تصویر برای عدسی واگرا به منزله‌ی جسم مجازی در فاصله‌ی

$$p_2 = 20 - 10 = 10 \text{ cm} \text{ است.}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{q_2} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{q_2} = -\frac{1}{15} - \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{-10+15}{15 \times 10} \Rightarrow q_2 = 30 \text{ cm}$$

۲۱) جسمی به فاصله‌ی 40 cm مقابل عدسی همگرایی با فاصله‌ی کانونی 8 cm قرار دارد. عدسی همگرای دیگری با فاصله‌ی کانونی 12 cm در 20 cm پشت عدسی اول قرار دارد. محل تشکیل و بزرگنمایی خطی تصویر نهایی را به دست آورید. نمودار پرتوهای این مجموعه را رسم کنید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{40} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{q_1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{1}{q_1} = \frac{5-1}{40} \Rightarrow \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10} \Rightarrow q_1 = 10 \text{ cm}$$

پس این تصویر برای عدسی دوم به منزله جسم حقیقی در فاصله‌ی

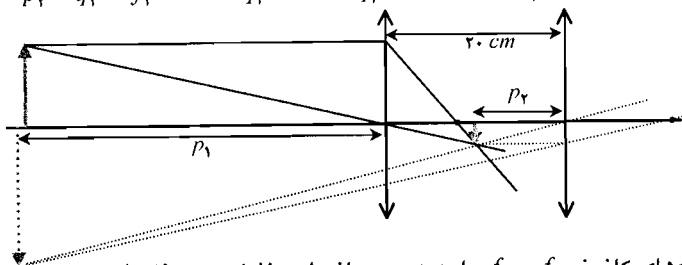
$$p_2 = 20 - 10 = 10 \text{ cm} \text{ است.}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{10-12}{12 \times 10} \Rightarrow q_2 = -60 \text{ cm}$$

با استفاده از تعریف

بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q_2}{p} \Rightarrow m = \frac{-60}{40} \Rightarrow m = -1.5$$



(۲۲) دو عدسی نازک با فاصله‌های کانونی f_1 و f_2 را به هم چسبانده‌ایم. نشان دهید فاصله‌ی کانونی

$$\text{موثر آن‌ها برابر: } f \approx \frac{f_1 f_2}{(f_1 + f_2)} \text{ است.}$$

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p}$$

فاصله‌ی بین عدسی‌ها خیلی کوچک است پس این تصویر برای عدسی دوم به منزله جسم مجازی در

$$\text{فاصله‌ی: } \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p} \text{ است.}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow -\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p}$$

حال فرض کنید دو عدسی به صورت یک عدسی هستند پس:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

ذره‌بین و میکروسکوپ

(۲۳) می‌خواهیم بخش کوچکی از یک مهر به عرض 1 mm را بررسی کنیم. عدسی همگرایی با فاصله‌ی

کانونی 4 cm را در نزدیکی چشم، نگه می‌داریم و تصویری مجازی در فاصله‌ی 40 cm از عدسی

دیده می‌شود. الف) بزرگی تصویر ب) بزرگنمایی زاویه‌ای را به دست آورید.

حل:

الف) تصویر مجازی است پس q با علامت منفی، جاگذاری می‌شود با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها داریم:

فصل ۱۴

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{40} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{4} + \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{10+1}{40} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{11}{40} \Rightarrow p = \frac{40}{11} \text{ cm}$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{40}{\frac{40}{11}} = \frac{A'B'}{1} \Rightarrow A'B' = 11 \text{ mm}$$

(ب) با استفاده از تعریف بزرگنمایی زاویه‌ای ذره‌بین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ p = \frac{40}{11} \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow p = \frac{40}{11} \times 10^{-2} \Rightarrow p = \frac{4}{110} \text{ m}$$

$$M = \frac{0.25}{p} \Rightarrow M = \frac{0.25}{\frac{4}{110}} \Rightarrow M = 6.875$$

(۲۴) فاصله‌ی کانونی یک ذره‌بین ساده ۱۰ cm است. الف) برای استفاده از بیشینه بزرگنمایی زاویه‌ای (برای چشم عادی)، جسم باید در چه فاصله‌ای قرار گیرد؟ (ب) در این حالت اگر طول جسم ۲mm باشد طول تصویر چه قدر است؟

حل:

الف) برای بیشینه بزرگنمایی باید تصویر در فاصله‌ی ۲۵ cm از چشم قرار گیرد.

با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{25} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{10} + \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{25+10}{25 \times 10} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{0.14}{1} \Rightarrow p = 7.14 \text{ cm}$$

(ب) با استفاده از تعریف بزرگنمایی زاویه‌ای ذره‌بین می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{25}{7.14} = \frac{A'B'}{2} \Rightarrow A'B' = 7 \text{ mm}$$

(۲۵) در میکروسکوپی، فاصله‌ی کانونی عدسی جسمی ۸ mm، فاصله‌ی کانونی عدسی چشمی ۳ cm و فاصله‌ی بین دو عدسی ۱۷/۵ cm است. اگر فاصله‌ی تصویر نهایی از عدسی چشمی ۴۰ cm باشد بزرگنمایی زاویه‌ای چه قدر است؟

حل: تصویر نهایی، مجازی است پس q_e با علامت منفی، جاگذاری می‌شود با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p_e} + \frac{1}{q_e} = \frac{1}{f_e} \Rightarrow \frac{1}{p_e} - \frac{1}{40} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{p_e} = \frac{1}{3} + \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{1}{p_e} = \frac{40+3}{40 \times 3} \Rightarrow \frac{1}{p_e} = \frac{43}{120} \Rightarrow p_e = 2.8 \text{ cm}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d = p_e + q_o \Rightarrow 17.5 = 2.8 + q_o \Rightarrow q_o = 14.7 \text{ cm}$$

با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p_o} + \frac{1}{q_o} = \frac{1}{f_o} \Rightarrow \frac{1}{p_o} + \frac{1}{14/7} = \frac{1}{0/8} \Rightarrow \frac{1}{p_o} = \frac{1}{0/8} - \frac{1}{14/7} \Rightarrow \frac{1}{p_o} = \frac{14/7 - 0/8}{14/7 \times 0/8} \Rightarrow p_o = 0/9 \text{ cm}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-1} \text{ cm} \\ f_o = 8 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow f_o = 8 \times 10^{-1} \Rightarrow f_o = 0/8 \text{ cm}$$

با استفاده از رابطه‌ی بزرگنمایی زاویه‌ای میکروسکوپ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ p_e = 2/8 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow p_e = 2/8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$M = \frac{q_o}{p_o} = \frac{0/25}{p_e} \Rightarrow M = \frac{14/7}{0/9} \times \frac{0/25}{2/8 \times 10^{-2}} \Rightarrow M = 145/8$$

تلسکوپ

۲۶) برای چشم در حالت استراحت، بزرگنمایی زاویه‌ای دوربین زمینی (یا گالیله) ۸ است. اگر فاصله‌ی کانونی جسمی ۳۶ cm باشد فاصله‌ی کانونی چشمی چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ می‌توان نوشت:

$$M = -\frac{f_o}{f_e} \Rightarrow 8 = -\frac{36}{f_e} \Rightarrow f_e = -4/5 \text{ cm}$$

۲۷) فاصله‌ی بین عدسی‌های یک دوربین نجومی ۶۵ cm است. اگر تصویر نهایی در بینهایت تشکیل شود و بزرگنمایی زاویه‌ای ۲۵ باشد فاصله‌ی کانونی عدسی‌ها چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ می‌توان نوشت:

$$M = -\frac{f_o}{f_e} \Rightarrow 25 = -\frac{f_o}{f_e} \Rightarrow f_o = -25 f_e \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d = |f_o| + |f_e| \Rightarrow 65 = |-25 f_e| + f_e \Rightarrow 65 = 24 f_e \Rightarrow f_e = 2/5 \text{ cm}$$

با جاگذاری در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$|f_o| = |-25 f_e| \Rightarrow |f_o| = 25 \times 2/5 \Rightarrow |f_o| = 62/5 \text{ cm}$$

۲۸) فاصله‌ی کانونی آینه‌ی ۲۰۰ اینچی تلسکوپ پالومار ۱۶/۸ m است. اگر تصویر تشکیل شده در این تلسکوپ را با چشمی به فاصله‌ی کانونی ۳/۵ cm بررسی کنیم بزرگنمایی تصویر نهایی در بینهایت چه قدر می‌شود؟

حل: با استفاده از تعریف بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ می‌توان نوشت:

فصل ۱۴

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow f_e = 3/5 \times 10^{-2} \text{ m} \\ f_e = 3/5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$M = \frac{f_o}{f_e} \Rightarrow M = \frac{16/8}{3/5 \times 10^{-2}} \Rightarrow M = 480$$

۲۹) تلسکوپ گالیه از یک عدسی همگرا با فاصله‌ی کانونی 24 cm و یک عدسی واگرا با فاصله‌ی کانونی 8 cm به فاصله‌ی 16 cm از هم تشکیل شده و فاصله‌ی جسم از تلسکوپ 12 m است. الف) تصویر نهایی در کجا تشکیل می‌شود؟ ب) برای این که تصویر نهایی در بینهایت تشکیل شود فاصله بین عدسی‌ها چه قدر باشد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm} \Rightarrow p_o = 12 \times 10^2 \text{ cm} \\ p_o = 12 \text{ m} \end{cases}$$

$$\frac{1}{p_o} + \frac{1}{q_o} = \frac{1}{f_o} \Rightarrow \frac{1}{12 \times 10^2} + \frac{1}{q_o} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{24} - \frac{1}{12 \times 10^2} \Rightarrow \frac{1}{q_o} = 0.041 \Rightarrow q_o = 24/5 \text{ cm}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d = p_e + q_o \Rightarrow 16 = p_e + 24/5 \Rightarrow p_e = -8/5 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{p_e} + \frac{1}{q_e} = \frac{1}{f_e} \Rightarrow \frac{1}{-8/5} + \frac{1}{q_e} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{q_e} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8/5} \Rightarrow \frac{1}{q_e} = -7/35 \times 10^{-2} \Rightarrow q_e = -136 \text{ cm}$$

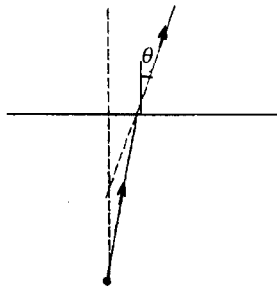
ب) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p_e} + \frac{1}{q_e} = \frac{1}{f_e} \Rightarrow \frac{1}{p_e} + \frac{1}{\infty} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{p_e} = -\frac{1}{8} \Rightarrow p_e = -8 \text{ cm}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d' = p_e + q_o \Rightarrow d' = -8 + 24/5 \Rightarrow d' = 16/5 \text{ cm}$$

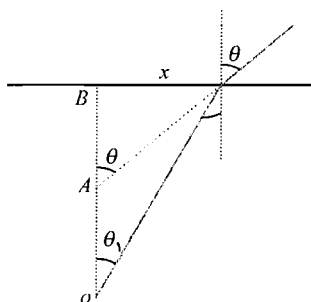
مسائل تکمیلی



۳۰) مطابق شکل مقابل، منبع نقطه‌ای در عمق 10 سانتی‌متری آب استخری، قرار دارد. اگر به این منبع از هوا با زاویه‌ی $\theta = 5^\circ$ نسبت به خط قائم، نگاه کنیم عمق تصویر چه قدر به نظر می‌رسد؟ تصویر را در محل برخورد امتداد پرتو شکست و خط قائم از منبع بر سطح آب در نظر بگیرید.

حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1/33 \sin \theta_1 = 1 \times \sin 5^\circ \Rightarrow$$



$$\sin \theta_1 = 0.0655 \Rightarrow \theta_1 = 3.76^\circ$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

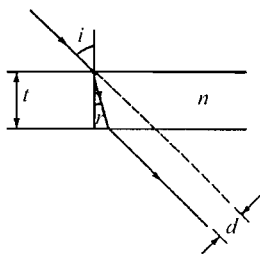
$$\begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{x}{OB} \\ \tan \theta = \frac{x}{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan 3.76^\circ = \frac{x}{10} \\ \tan \delta = \frac{x}{AB} \end{cases} \Rightarrow \frac{\tan 3.76^\circ}{\tan \delta} = \frac{10}{AB} \Rightarrow \frac{0.0655}{10} = \frac{AB}{10} \Rightarrow AB = 0.655 \text{ cm}$$

۳۱) مطابق شکل زیر، پرتو نوری با زاویه تابش i به تیغه‌ای شیشه‌ای با ضخامت t می‌تابد. نشان

دهید جابه‌جایی عرضی d پرتو پس از عبور از تیغه: $d = \frac{t \sin(i-r)}{\cos r}$ است. r زاویه شکست در

تیغه است.

حل: با توجه شکل می توان نوشت:



$$\tan r = \frac{x_1}{t} \Rightarrow \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{x_1}{t} \Rightarrow x_1 = \frac{t \sin r}{\cos r} \quad (1)$$

$$\tan i = \frac{x_1 + x_2}{t} \Rightarrow \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{x_1 + x_2}{t}$$

رابطه‌ی (۱) را در رابطه‌ی فوق، جاگذاری می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 = \frac{t \sin i}{\cos i} \Rightarrow \frac{t \sin r}{\cos r} + x_2 = \frac{t \sin i}{\cos i} \Rightarrow$$

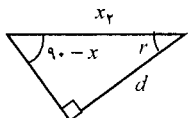
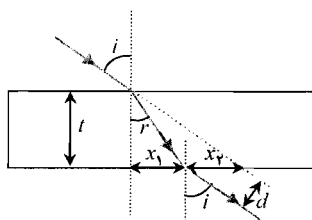
$$x_2 = \frac{t \sin i}{\cos i} - \frac{t \sin r}{\cos r} \Rightarrow x_2 = \frac{t \sin i \cos r - t \sin r \cos i}{\cos i \cos r} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{t(\sin i \cos r - \sin r \cos i)}{\cos i \cos r} \Rightarrow x_2 = \frac{t \sin(i-r)}{\cos i \cos r} \quad (2)$$

$$\sin(90^\circ - r) = \frac{d}{x_2} \Rightarrow \cos r = \frac{d}{x_2} \Rightarrow d = x_2 \cos r$$

رابطه‌ی (۲) را در رابطه‌ی فوق، جاگذاری می‌کنیم:

$$d = \frac{t \sin(i-r)}{\cos i \cos r} \times \cos r \Rightarrow d = \frac{t \sin(i-r)}{\cos i}$$



۳۲) مطابق شکل زیر، پرتو نوری از A می‌تابد و پس از بازتابش از آینه به نقطه‌ی B می‌رسد. طبق

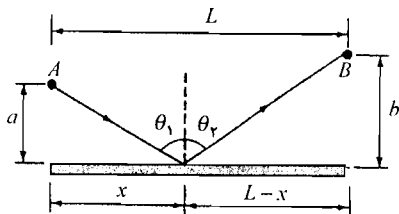
اصل فرما هر پرتو نور، هنگام عبور بین دو نقطه، مسیری را طی می‌کند که زمان لازم برای طی آن

کمینه باشد. الف) نشان دهید زمان لازم: $t = \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{[(L-x)^2 + b^2]^{\frac{1}{2}}}{c}$ است. c سرعت نور

است. ب) با استفاده از $\frac{dt}{dx} = 0$ نشان دهید زاویه تابش برابر زاویه بازتابش است.

فصل ۱۴

حل:



الف) نور با سرعت ثابت، منتشر می شود پس:

$$L = ct \Rightarrow L_1 + L_2 = ct \Rightarrow$$

$$(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}} + [(L-x)^r + b^r]^{\frac{1}{r}} = ct \Rightarrow$$

$$t = \frac{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}}{c} + \frac{[(L-x)^r + b^r]^{\frac{1}{r}}}{c}$$

ب)

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}}{c} + \frac{[(L-x)^r + b^r]^{\frac{1}{r}}}{c} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c} \times \frac{1}{r} \times r x \times (x^r + a^r)^{-\frac{1}{r}} + \frac{1}{c} \times \frac{1}{r} \times r(L-x) \times [(L-x)^r + b^r]^{-\frac{1}{r}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}} + \frac{L-x}{[(L-x)^r + b^r]^{\frac{1}{r}}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{(x^r + a^r)^{\frac{1}{r}}} = -\frac{L-x}{[(L-x)^r + b^r]^{\frac{1}{r}}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^r}{x^r + a^r} = \frac{(L-x)^r}{(L-x)^r + b^r} \Rightarrow x^r(L-x)^r + x^r b^r = x^r(L-x)^r + a^r(L-x)^r \Rightarrow$$

$$x^r b^r = a^r(L-x)^r \Rightarrow xb = a(L-x) \quad (1)$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\tan \theta_1 = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \tan \theta_1$$

$$\tan \theta_r = \frac{L-x}{b} \Rightarrow L-x = b \tan \theta_r$$

روابط فوق را در رابطه‌ی (۱) جایگذاری می کنیم:

$$b \times a \tan \theta_1 = a \times b \tan \theta_r \Rightarrow ab \tan \theta_1 = ab \tan \theta_r \Rightarrow \tan \theta_1 = \tan \theta_r \Rightarrow \theta_1 = \theta_r$$

پس زاویه‌ی بازتابش برابر زاویه‌ی تابش است.

۳۳) جسمی به طول ۲ cm در فاصله‌ی ۲۰ cm عدسی همگرا ($f = 10$ cm) قرار دارد. عدسی همگرا در فاصله‌ی ۱۲ cm جلوی عدسی واگرا ($f = -15$ cm) قرار دارد. محل تصویر نهایی و بزرگنمایی خطی آن را به دست آورید. نمودار پرتوی این مجموعه را رسم کنید.

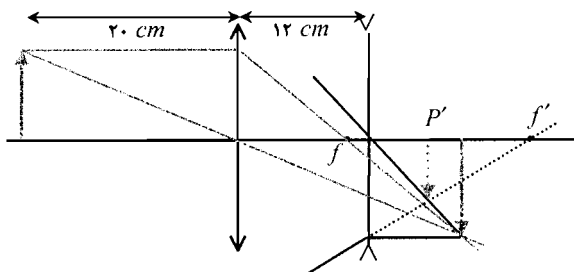
حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{20} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{q} = 0.05 \Rightarrow q = 20 \text{ cm}$$

این تصویر برای عدسی واگرا جسم حقیقی است:

$$p' = 20 - 12 \Rightarrow p' = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{-15} \Rightarrow \frac{1}{q'} = -\frac{1}{15} - \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{q'} = -0.192 \Rightarrow q' = -5/2 \text{ cm}$$



پس فاصله‌ی تصویر از عدسی همگرا:

$$12 + 5/2 = 17/2 \text{ cm}$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی داریم:

$$M = mm' \Rightarrow M = \frac{q}{p} \frac{q'}{p'}$$

$$M = \frac{20}{8} \times \frac{-5/2}{12} \Rightarrow M = -0.65$$

۳۴ منبع نقطه‌ای و پرده‌ای را با فاصله‌ی ثابت D از هم در نظر بگیرید. یک عدسی همگرا با فاصله‌ی کانونی f در بین این دو، قرار دارد. الف) نشان دهید عدسی در دو مکان، تصویر واضحی بر روی پرده تشکیل می‌دهد. ب) نشان دهید فاصله بین این دو مکان عدسی برابر $d = \sqrt{D(D-4f)}$ است.

حل:

الف) فاصله‌ی جسم از عدسی x و فاصله‌ی تصویر از عدسی $D-x$ است. با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{D-x+x}{x(D-x)} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{D}{Dx-x^2} = \frac{1}{f} \Rightarrow Df = Dx - x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - Dx + Df = 0 \Rightarrow x = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \\ x_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \end{cases}$$

با توجه به این که $D > \sqrt{D^2 - 4Df}$ است پس برای x ، دو جواب وجود دارد.

ب)

$$d = x_1 - x_2 \Rightarrow d = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} - \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \Rightarrow d = \sqrt{D^2 - 4Df} \Rightarrow d = \sqrt{D(D-4f)}$$

۳۵ برای دیدن جسمی به طول 4 cm در فاصله‌ی 20 متری از تلسکوپ نجومی، استفاده می‌کنیم که فاصله‌ی کانونی عدسی‌های جسمی و چشمی آن 80 cm و 5 cm است. تصویر نهایی در فاصله‌ی 25 سانتی‌متری عدسی چشمی، تشکیل می‌شود. الف) اندازه‌ی تصویر نهایی را به دست آورید. ب)

فصل ۱۴

بزرگنمایی زاویه‌ای چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \\ p_o = 20 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow p_o = 20 \times 100 \Rightarrow p_o = 2000 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{p_o} + \frac{1}{q_o} = \frac{1}{f_o} \Rightarrow \frac{1}{2000} + \frac{1}{q_o} = \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{q_o} = \frac{1}{80} - \frac{1}{2000} \Rightarrow \frac{1}{q_o} = 0.012 \Rightarrow q_o = 83.3 \text{ cm}$$

تصویر نهایی در تلسکوپ، مجازی است پس q_e با علامت منفی، جاگذاری می‌شود:

$$\frac{1}{p_e} + \frac{1}{q_e} = \frac{1}{f_e} \Rightarrow \frac{1}{p_e} - \frac{1}{25} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{p_e} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{p_e} = 0.24 \Rightarrow p_e = 4.17 \text{ cm}$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m_o = \frac{q_o}{p_o} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{83.3}{2000} = \frac{A'B'}{4} \Rightarrow A'B' = 0.167 \text{ cm}$$

$$m_e = \frac{q_e}{p_e} = \frac{A''B''}{A'B'} \Rightarrow \frac{25}{4.17} = \frac{A''B''}{0.167} \Rightarrow A''B'' = 1.0 \text{ cm}$$

ب)

$$M = \frac{f_o}{p_e} \Rightarrow M = \frac{80}{4.17} \Rightarrow M = 19.2$$

مسائل

تداخل در شکاف

۱) نقش تداخل دو شکاف در آزمایشی بر روی پرده‌ای به فاصله‌ی m ۲ از شکاف‌ها تشکیل شده است. طول موج نور 450 nm است و به طور عمود بر شکاف‌ها می‌تابد. نقطه‌ای به فاصله‌ی $3/2 \text{ mm}$ از مرکز، قرار دارد کمترین فاصله بین شکاف‌ها چه قدر باشد تا این نقطه: الف) کمینه‌ی تداخلی باشد. ب) بیشینه‌ی تداخلی باشد.

حل:

الف) برای کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ } nm = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 450 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 4/5 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 450 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ } mm = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow y_M = 3/2 \times 10^{-3} \text{ m} \\ y_M = 3/2 \text{ mm} \end{cases}$$

$$y_M = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda L}{d} \Rightarrow 3/2 \times 10^{-3} = \frac{(\frac{0}{2} + \frac{1}{2}) \times 4/5 \times 10^{-7} \times 2}{d} \Rightarrow d = 1/41 \times 10^{-4} \text{ m}$$

ب) برای بیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$y_m = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow 3/2 \times 10^{-3} = \frac{1 \times 4/5 \times 10^{-7} \times 2}{d} \Rightarrow d = 2/81 \times 10^{-4} \text{ m}$$

۲) فاصله‌ی دو شکاف باریک $0/2 \text{ mm}$ است. اگر زاویه‌ی چهارمین نوار تاریک از نوار روشن مرکزی $0/7$ باشد طول موج نور چه قدر است؟

فصل ۱۵

حل: برای کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 0.2 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 0.2 \times 10^{-3} \Rightarrow d = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow 2 \times 10^{-4} \sin \theta = (4 + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \lambda = 5/43 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(۳) دو شکاف به فاصله‌ی 0.24 mm از یکدیگر را با نور مرکبی با طول موج‌های 480 nm و 560 nm تحت تابش، قرار می‌دهیم. نقش تداخلی را روی پرده‌ای در فاصله‌ی $1/2 \text{ m}$ از شکاف‌ها بررسی می‌کنیم. فاصله‌ی نخستین جای قرار گرفتن بیشینه‌های مربوط به دو طول موج از بیشینه‌ی مرکزی چه قدر است؟

حل: وقتی بیشینه‌ها بر روی هم، قرار می‌گیرند که: $y_1 = y_2$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 0.24 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 0.24 \times 10^{-3} \Rightarrow d = 2/4 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ \lambda_1 = 480 \text{ nm} \\ \lambda_2 = 560 \text{ nm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 480 \times 10^{-9} \\ \lambda_2 = 560 \times 10^{-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4/8 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda_2 = 5/6 \times 10^{-7} \text{ m} \end{cases}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{m_1 \lambda_1 L}{d} = \frac{m_2 \lambda_2 L}{d} \Rightarrow m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2 \Rightarrow m_1 4/8 \times 10^{-7} = m_2 5/6 \times 10^{-7} \Rightarrow m_2 = \frac{6}{5} m_1$$

m_2 عدد صحیحی است پس اولین مقدار m_2 با ازای $m_1 = 5$ به دست می‌آید:

$$y_1 = \frac{m_1 \lambda_1 L}{d} \Rightarrow y_1 = \frac{5 \times 4/8 \times 10^{-7} \times 1/2}{2/4 \times 10^{-4}} \Rightarrow y_1 = 1/68 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(۴) دو منبع خطی همفاز، میکروموج‌هایی با طول موج 3 cm گسیل می‌کنند. برای این که جدایی زاویه‌ای بین اولین نوار و دومین نوار از یکدیگر (در یک طرف بیشینه‌ی مرکزی) 10° باشد فاصله‌ی بین دو منبع را به دست آورید.

حل: برای بیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ \lambda = 3 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \lambda = 3 \times 10^{-2} \Rightarrow \lambda = 0.3 \text{ m}$$

برای اولین نوار:

$$d \sin \theta = m\lambda \Rightarrow d \sin \theta = 1 \times 0.3 \Rightarrow d \sin \theta = 0.3 \quad (1)$$

برای دومین نوار:

$$d \sin(\theta + 10^\circ) = m'\lambda \Rightarrow d(\sin \theta \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos \theta) = 2 \times 0.3 \quad (2)$$

روابط (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{d \sin \theta}{d(\sin \theta \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos \theta)} = \frac{0.3}{2 \times 0.3} \Rightarrow 2 \sin \theta = \sin \theta \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos \theta \Rightarrow$$

$$r \sin \theta = \left(. / ۹۸۵ + . / ۱۷۴ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \sin \theta \Rightarrow r = . / ۹۸۵ + . / ۱۷۴ \cot \theta \Rightarrow . / ۱۷۴ \cot \theta = ۱ / ۰.۱۵ \Rightarrow$$

$$\cot \theta = ۵ / ۸۳۳ \Rightarrow \theta = ۹ / ۷۳^\circ$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$d \sin ۹ / ۷۳ = . / ۰.۳ \Rightarrow d = . / ۱۷۸ \text{ m}$$

(۵) در یک آزمایش دو شکاف، تیغی شیشه‌ای نازکی، مقابل شکاف بالایی قرار داده شده و باعث تاخیر فاز ۲۷۰° می‌شود. فرض کنید فاصله‌ی شکاف‌ها $۰/۵ \text{ mm}$ ، طول موج نور ۶۰۰ nm و فاصله‌ی پرده از شکاف‌ها $m / ۴$ است. نوار مرکزی در چه جهتی و چه قدر جابه‌جا می‌شود؟
حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز بین منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \text{ mm} = ۱۰^{-۳} \text{ m} \Rightarrow d = . / ۵ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow d = ۵ \times ۱۰^{-۴} \text{ m} \\ d = . / ۵ \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱ \text{ nm} = ۱۰^{-۹} \text{ m} \Rightarrow \lambda = ۶۰۰ \times ۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۶ \times ۱۰^{-۷} \text{ m} \\ \lambda = ۶۰۰ \text{ nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱۸۰^\circ = \pi \text{ rad} \Rightarrow \phi = ۲۷۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} \Rightarrow \phi = ۱ / ۵ \pi \text{ rad} \\ \phi = ۲۷۰^\circ \end{cases}$$

$$\phi = \frac{r\pi d \sin \theta}{\lambda} \Rightarrow ۱ / ۵ \pi = \frac{r\pi \times ۵ \times ۱۰^{-۴} \sin \theta}{۶ \times ۱۰^{-۷}} \Rightarrow \sin \theta = ۹ \times ۱۰^{-۴}$$

نور حاصل از منبع اول، تاخیر فاز دارد پس نوارها به طرف بالا جابه‌جا می‌شوند. اندازه‌ی جابه‌جایی:

$$\Delta = L \sin \theta \Rightarrow \Delta = ۲ / ۴ \times ۹ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow \Delta = ۲ / ۱۶ \times ۱۰^{-۳} \text{ m}$$

(۶) دو بلندگو به فاصله‌ی $m / ۱$ از هم قرار دارند. یکی از آن‌ها موج صوتی هم‌فاز با بسامد ۱۰۰۰ Hz گسیل می‌کند. شنونده‌ای روی خطی به موازات خط واصل بلندگوها به فاصله‌ی $m / ۸$ در حال قدم زدن است. فاصله بین بیشینه و کمینه‌ی شدت صوت دریافتی را به دست آورید. سرعت صوت را $\frac{m}{s} / ۳۴۰$ فرض کنید.

حل: با استفاده از تعریف طول موج می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{۳۴۰}{۱۰۰۰} \Rightarrow \lambda = . / ۳۴ \text{ m}$$

با استفاده از رابطه‌ی فاصله بین دو نوار متوالی می‌توان نوشت:

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d} \Rightarrow \Delta y = \frac{. / ۳۴ \times ۸}{۱} \Rightarrow \Delta y = ۲ / ۷۲ \text{ m}$$

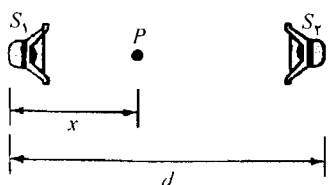
پس فاصله بین بیشینه و کمینه برابر است با:

$$\Delta Y = \frac{\Delta y}{۲} \Rightarrow \Delta Y = \frac{۲ / ۷۲}{۲} \Rightarrow \Delta Y = ۱ / ۳۶ \text{ m}$$

فصل ۱۵

۷) مطابق شکل زیر، دو منبعی نقطه‌ای S_1 و S_2 موج‌هایی با طول موج یکسان ($\lambda \ll d$) کسبیل می‌کنند. در هر یک از حالات زیر، برای این که نقطه‌ی P مکان تداخل ویرانگر باشد شرط لازم را بر حسب مقدار x به دست آورید: الف) S_2 و S_1 همفاز هستند ب) اختلاف فاز S_2 و S_1 برابر π است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز بین منبع‌ها داریم:



$$\phi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \Rightarrow \lambda \phi = 2\pi \delta \Rightarrow \delta = \frac{\lambda \phi}{2\pi} \quad (۱)$$

الف) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر می‌توان نوشت:

$$\phi = (2m+1)\pi \Rightarrow \delta = \frac{\lambda}{2\pi} (2m+1)\pi \Rightarrow$$

$$(d-x) - x = (m + \cdot / \delta) \lambda \Rightarrow d - 2x = (m + \cdot / \delta) \lambda \Rightarrow$$

$$d - (m + \cdot / \delta) \lambda = 2x \Rightarrow x = \cdot / \delta d - \frac{m + \cdot / \delta}{2} \lambda$$

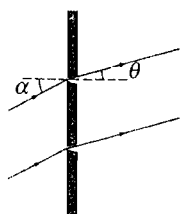
ب) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر می‌توان نوشت:

$$\phi' = \phi - \pi \Rightarrow \phi' = (2m+1)\pi - \pi \Rightarrow \phi' = 2m\pi$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\delta = \frac{\lambda \phi'}{2\pi} \Rightarrow (d-x) - x = \frac{\lambda}{2\pi} 2m\pi \Rightarrow d - 2x = m\lambda \Rightarrow d - m\lambda = 2x \Rightarrow x = \cdot / \delta d - \frac{m\lambda}{2}$$

۸) مطابق شکل زیر، امواج تخت با زاویه‌ی α به دو شکاف می‌تابد. الف) اختلاف راه پرتوهای خروجی



با زاویه‌ی θ از شکاف‌ها چه قدر است؟ (پرده را در فاصله‌ی دور از

شکاف‌ها فرض کنید.) ب) زاویه‌ی θ بیشینه‌ی مرکزی را به دست

آورید. ج) برای این که در مرکز پرده، کمینه شدت تداخلی، تشکیل

شود کمینه مقدار را به دست آورید.

حل:

الف) پرتو فرودی دارای زاویه‌ی α است که باعث ایجاد اختلاف راه $d_1 = -d \sin \alpha$ می‌شود.

پرتو خروجی دارای زاویه‌ی θ است که باعث ایجاد اختلاف راه $d_2 = +d \sin \theta$ می‌شود.

$$\delta = d_2 + d_1 \Rightarrow \delta = -d \sin \alpha + d \sin \theta \Rightarrow \delta = d(\sin \theta - \sin \alpha)$$

ب) برای بیشینه‌ی مرکزی $m = 0$ است که با استفاده از شرط بیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\delta = m\lambda \Rightarrow d(\sin \theta - \sin \alpha) = 0 \times \lambda \Rightarrow \sin \theta - \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \theta = \sin \alpha \Rightarrow \theta = \alpha$$

ج) برای نوار مرکزی $\theta = 0$ است با استفاده از شرط کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$|\delta| = (m + \frac{1}{2}) \lambda \Rightarrow |d(\sin \theta - \sin \alpha)| = (0 + \frac{1}{2}) \lambda \Rightarrow |d(\sin 0 - \sin \alpha)| = \frac{1}{2} \lambda \Rightarrow$$

$$d \sin \alpha = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\lambda}{2d} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{2d} \right)$$

۹) در یک آزمایش دو شکاف یانگ، فاصله‌ی یک نوار روشن از مرکز نقش تداخلی $cm \ 1/25$ است. طول موج نور $nm \ 600$ ، فاصله بین شکاف‌ها $mm \ 0.4$ و فاصله‌ی پرده از شکاف‌ها $m \ 1/4$ است. تعداد نوارهای تاریک در فاصله‌ی بین مرکز دو نوار روشن مورد نظر چه قدر است؟
حل: برای پیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow y_m = 1/25 \times 10^{-2} \text{ m} \\ y_m = 1/25 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 600 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 600 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow d = 0.4 \times 10^{-3} \Rightarrow d = 4 \times 10^{-4} \text{ m} \\ d = 0.4 \text{ mm} \end{cases}$$

$$y_m = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow 1/25 \times 10^{-2} = \frac{m \times 6 \times 10^{-7} \times 1/25}{4 \times 10^{-4}} \Rightarrow m = 8$$

نوار مرکزی، نوار روشن است پس تعداد نوارهای تاریک: $8 - 1 = 7$ است.

شدت نقش دو شکاف

۱۰) نشان دهید شدت نقش دو شکاف را می‌توان به صورت: $I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi yd}{\lambda L}\right)$ نوشت. y فاصله از مرکز نقش تداخلی است.

حل: با استفاده از شرط پیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \phi = 2m\pi \\ y = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow \frac{\phi}{y} = \frac{2m\pi}{\frac{m\lambda L}{d}} \Rightarrow \frac{\phi}{y} = \frac{2\pi d}{\lambda L} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi yd}{\lambda L} \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi yd}{\lambda L} \end{cases}$$

رابطه‌ی فوق را در رابطه‌ی شدت نقش تداخل جاگذاری می‌کنیم:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \Rightarrow I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi yd}{\lambda L} \right)$$

۱۱) دو شکاف نازک با فاصله‌ی $mm \ 0.6$ را با نوری به طول موج $nm \ 480$ روشن کرده‌ایم. نقش تداخلی روی پرده‌ای در فاصله‌ی $m \ 1/25$ از شکاف‌ها تشکیل شده است. شدت نقش تداخلی را (نسبت به شدت نقش تک شکاف) در نقطه‌ای به فاصله‌ی $mm \ 0.45$ از مرکز به دست آورید.
حل: با استفاده از نتیجه‌ی مسأله‌ی ۱۰ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 0.6 \text{ mm} \\ y = 0.45 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0.6 \times 10^{-3} \\ y = 0.45 \times 10^{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 6 \times 10^{-4} \text{ m} \\ y = 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} \end{cases}$$

فصل ۱۵

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 480 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 4/8 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 480 \text{ nm} \end{cases}$$

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi yd}{\lambda L}\right) \Rightarrow I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi \times 6 \times 10^{-4} \times 4/5 \times 10^{-4}}{4/8 \times 10^{-7} \times 1/25}\right) \Rightarrow I = 0.98 I_0$$

۱۲) نوری با طول موج 627 nm به دو شکاف می‌تابد. کمینه اختلاف راه بین موج‌های ناشی از شکاف‌ها چه قدر باشد تا شدت برآیند 25% بیشینه‌ی مرکزی شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی شدت نقش تداخل می‌توان نوشت:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \Rightarrow \frac{25}{100} I_0 = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\phi}{2} = 0.25 \Rightarrow \frac{\phi}{2} = 1/22 \Rightarrow \phi = 2/64 \text{ rad}$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\phi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \Rightarrow 2/64 = \frac{2\pi \delta}{627} \Rightarrow \delta = 264 \text{ nm}$$

لایه‌های نازک

۱۳) لایه‌ای از MgF_2 با $n = 1/28$ به ضخامت $8/3 \times 10^{-5} \text{ cm}$ روی شیشه با $n = 1/6$ قرار دارد. اگر نور سفید عمود بر آن بتابد در نور مرئی بازتابیده چه طول موج‌هایی، حذف می‌شوند؟

حل: با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در لایه‌ی نازک می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ cm} \\ t = 8/3 \times 10^{-5} \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow t = 8/3 \times 10^{-5} \times \frac{1}{10^{-9}} \Rightarrow t = 830 \text{ nm}$$

$$2t = M\lambda_F \Rightarrow 2t = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{2nt}{m + 0.5} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \times 1/28 \times 830}{m + 0.5} \Rightarrow \lambda = \frac{2/29 \times 10^3}{m + 0.5}$$

$$m = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2/29 \times 10^3}{1 + 0.5} \Rightarrow \lambda_1 = 1/53 \times 10^3 \text{ nm}$$

$$m = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2/29 \times 10^3}{2 + 0.5} \Rightarrow \lambda_2 = 916 \text{ nm}$$

$$m = 3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2/29 \times 10^3}{3 + 0.5} \Rightarrow \lambda_3 = 654 \text{ nm}$$

$$m = 4 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{2/29 \times 10^3}{4 + 0.5} \Rightarrow \lambda_4 = 509 \text{ nm}$$

$$m = 5 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{2/29 \times 10^3}{5 + 0.5} \Rightarrow \lambda_5 = 416 \text{ nm}$$

$$m = 6 \Rightarrow \lambda_6 = \frac{2/29 \times 10^3}{6 + 0.5} \Rightarrow \lambda_6 = 352 \text{ nm}$$

طول موج نور مرئی در گستره‌ی 400 nm تا 700 nm است پس طول موج‌های λ_5 و λ_6 حذف می‌شوند.

۱۴) نوری با طول موج 600 nm به گوه‌ای شیشه‌ای با $n = 1/5$ غوطه‌ور در آب با $n = 1/33$ می‌تابد. اگر فاصله‌ی بین دو نوار روشن متوالی 2 mm باشد: الف) تغییر ضخامت شیشه در فاصله‌ی بین این نوارها (ب) زاویه‌ی راس گوه را به دست آورید.

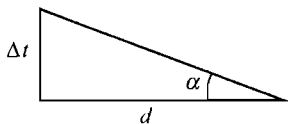
حل:

الف) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در گوه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 600 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 600 \text{ nm} \end{cases}$$

$$2t = m\lambda_F \Rightarrow 2t = m \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 = m \frac{\lambda}{n} \\ 2t_2 = (m+1) \frac{\lambda}{n} \end{cases} \Rightarrow 2t_2 - 2t_1 = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2\Delta t = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2\Delta t = \frac{6 \times 10^{-7}}{1/33} \Rightarrow$$

$$\Delta t = 2/25 \times 10^{-7} \text{ m}$$



ب) با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow d = 2 \times 10^{-3} \text{ m} \\ d = 2 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta t}{d} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2/25 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-3}} \Rightarrow \tan \alpha = 1/125 \times 10^{-4} \Rightarrow \alpha = 0.006 \text{ rad}$$

۱۵) نور سفید به طور عمود بر لایه‌ی یکنواختی از آب با $n = 1/33$ روی تیغه‌ای شیشه‌ای با $n = 1/6$ می‌تابد. کمترین ضخامت ممکن این لایه را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) در نور بازتابیده، طول موج 550 nm تقویت شود. ب) در نور بازتابیده، طول موج 550 nm حذف شود.

حل:

الف) با استفاده از شرط تداخل سازنده در لایه‌ی نازک می‌توان نوشت:

$$2t = m\lambda_F \Rightarrow 2t = m \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2t_{\min} = 1 \times \frac{550}{1/33} \Rightarrow t_{\min} = 206/8 \text{ nm}$$

ب) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در لایه‌ی نازک می‌توان نوشت:

$$2t = M\lambda_F \Rightarrow 2t = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2t_{\min} = (0 + \frac{1}{2}) \times \frac{550}{1/33} \Rightarrow t_{\min} = 103/4 \text{ nm}$$

۱۶) در آزمایش حلقه‌های نیوتن، وقتی فضای بین عدسی و تیغه را با روغن، پر می‌کنیم شعاع هشتمین حلقه‌ی تاریک از $1/8 \text{ cm}$ به $1/64 \text{ cm}$ کاهش می‌یابد. ضریب شکست روغن چه قدر است؟ ضریب شکست شیشه را بیش از ضریب شکست روغن، فرض کنید.

حل: با استفاده از شرط تداخل سازنده در حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$2t = M\lambda_F \Rightarrow 2t = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2t = (8 + \frac{1}{2}) \times \frac{\lambda}{1} \Rightarrow 2t = 8/5 \lambda$$

فصل ۱۵

با استفاده از رابطه‌ی شعاع حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$r^2 = 2tR \Rightarrow (1/\lambda)^2 = \lambda / \delta \lambda R \Rightarrow \lambda R = \cdot / 381$$

با استفاده از شرط تداخل سازنده در حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$2t' = M\lambda'_t \Rightarrow 2t' = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{n'} \Rightarrow 2t' = (\lambda + \frac{1}{2}) \times \frac{\lambda}{n'} \Rightarrow 2t' = \frac{\lambda / \delta \lambda}{n'}$$

با استفاده از رابطه‌ی شعاع حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$r'^2 = 2t'R \Rightarrow (1/64)^2 = \frac{\lambda / \delta \lambda}{n'} R \Rightarrow (1/64)^2 = \frac{\lambda / \delta \lambda}{n'} \times \cdot / 381 \Rightarrow n' = 1/2$$

پراش تک شکاف

(۱۷) اگر برای روشن کردن تک شکاف از نور بخار سدیم با طول موج 589 nm استفاده شود عرض بیشینه پراش مرکزی 3 cm می‌شود. اگر از طول موج 436 nm بخار جیوه، استفاده شود عرض این بیشینه چه قدر می‌شود؟

حل: با توجه به رابطه‌ی شدت پراش، دیده می‌شود عرض بیشینه با طول موج، نسبت مستقیم دارد پس:

$$\frac{a'}{a} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{a'}{3} = \frac{436}{589} \Rightarrow a' = 2/22 \text{ cm}$$

(۱۸) در نقش پراش تک شکافی بر روی پرده‌ای به فاصله‌ی $2/80 \text{ m}$ از شکاف، فاصله بین کمینه‌های اول و دوم 3 cm است. اگر طول موج نور 480 nm باشد عرض شکاف را به دست آورید.
حل: برای کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta y = 3 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \Delta y = 3 \times 10^{-2} \Rightarrow \Delta y = \cdot / 3 \text{ m}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \\ \lambda = 480 \text{ nm} \end{cases} \Rightarrow \lambda = 480 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 4/8 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$y_m = \frac{m\lambda L}{a} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1 \times \lambda L}{a} \\ y_2 = \frac{2 \times \lambda L}{a} \end{cases} \Rightarrow y_2 - y_1 = \frac{2\lambda L}{a} - \frac{\lambda L}{a} \Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda L}{a} \Rightarrow$$

$$\cdot / 3 = \frac{4/8 \times 10^{-7} \times 2/80}{a} \Rightarrow a = 4/48 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(۱۹) در یک آزمایش دو شکاف، عرض شکاف $0/15 \text{ mm}$ و فاصله‌ی بین شکاف‌ها $0/6 \text{ mm}$ است. در بیشینه‌ی مرکزی پراش، تعداد نوارهای روشن چه قدر است؟

حل: فاصله بین مراکز شکاف‌ها برابر است با:

$$d = \frac{0.15}{2} + 0.6 + \frac{0.15}{2} \Rightarrow d = 0.75 \text{ mm}$$

برای بیشینه‌ی مرکزی پراش می‌توان نوشت:

$$y_M = \frac{M\lambda L}{a} \Rightarrow y_M = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda L}{a} \Rightarrow y_M = \frac{(0 + \frac{1}{2})\lambda L}{0.15} \Rightarrow y_M = \frac{\lambda L}{0.3}$$

نوارهای تداخلی در دو طرف نوار روشن مرکزی، تشکیل می‌شود پس: $y_m = 2y_M$ است.

برای بیشینه‌های ناشی از دو شکاف می‌توان نوشت:

$$y_m = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow 2y_M = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow 2 \times \frac{\lambda L}{0.3} = \frac{m\lambda L}{0.75} \Rightarrow m = 5$$

پس ۵ نوار روشن، تشکیل می‌شود.

معيار رایلی

(۲۰) قطر روزنه‌ی دوربین 0.8 mm و فاصله‌ی فیلم از روزنه 20 cm است. با استفاده از این دوربین، از دو منبع نقطه‌ای به فاصله‌ی 16 m از روزنه، عکسبرداری می‌کنیم. اگر طول موج نور 600 nm باشد کمترین فاصله بین منبع‌ها برای تولید تصاویر تفکیک شده چه قدر است؟

حل: با استفاده از معیار رایلی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow a = 0.8 \times 10^{-3} \Rightarrow a = 8 \times 10^{-4} \text{ m} \\ a = 0.8 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 600 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 600 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\theta_c = \frac{1/22\lambda}{a} \Rightarrow \theta_c = \frac{1/22 \times 6 \times 10^{-7}}{8 \times 10^{-4}} \Rightarrow \theta_c = 9/15 \times 10^{-4}$$

فاصله‌ی جدایی منبع‌ها:

$$s = L\theta_c \Rightarrow s = 16 \times 9/15 \times 10^{-4} \Rightarrow s = 1/46 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(۲۱) در حالت‌های زیر برای این که دو منبع نقطه‌ای روی سطح ماه بر اساس معیار رایلی قابل تفکیک باشند کمترین فاصله بین دو منبع نقطه‌ای چه قدر باشد؟ (الف) با چشمی که قطر مردمک آن 5 mm است. (ب) با تلسکوپي که قطر آن $4/5 \text{ m}$ است. طول موج نور را 550 nm فرض کنید.

حل: فاصله‌ی ماه از زمین $3/84 \times 10^8 \text{ m}$ است. با استفاده از معیار رایلی و فاصله‌ی جدایی منبع‌ها داریم:

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 550 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 5/5 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 550 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_c = \frac{1/22\lambda}{a} \Rightarrow s = \frac{1/22\lambda L}{a} \Rightarrow s = \frac{1/22 \times 5/5 \times 10^{-7} \times 3/84 \times 10^8}{a} \Rightarrow s = \frac{257}{7} \\ s = L\theta_c \end{cases}$$

فصل ۱۵

(الف)

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow a = 5 \times 10^{-2} \text{ m} \\ a = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$s = \frac{257 / 7}{5 \times 10^{-2}} \Rightarrow s = 5 / 15 \times 10^4 \text{ m}$$

(ب)

$$s = \frac{257 / 7}{4 / 5} \Rightarrow s = 57 / 3 \text{ m}$$

(۲۲) دو جسم کوچک به فاصله‌ی 25 cm از یک چشم، قرار دارند. کمترین فاصله‌ی قابل تفکیک آن‌ها را وقتی به دست آورید که قطر مردمک 3 mm است. طول موج نور را 500 nm فرض کنید.
حل: با استفاده از معیار رایلی و فاصله‌ی جدایی منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow L = 25 \times 10^{-2} \Rightarrow L = 0.25 \text{ m} \\ L = 25 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow a = 3 \times 10^{-3} \text{ m} \\ a = 3 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 500 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 500 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_c = \frac{1/22 \lambda}{a} \Rightarrow s = \frac{1/22 \lambda L}{a} \Rightarrow s = \frac{1/22 \times 5 \times 10^{-7} \times 0.25}{3 \times 10^{-3}} \Rightarrow s = 5 / 0.8 \times 10^{-5} \text{ m} \\ s = L \theta_c \end{cases}$$

(۲۳) یک خوشه‌ی ستاره‌ای را در فاصله‌ی 10^{16} m در نظر بگیرید. در هر یک از حالات زیر، کمترین فاصله‌ی قابل تفکیک بین دو منبع را به دست آورید: (الف) با استفاده از تلسکوپ اپتیکی مونت پالومار که قطر آن 200 in است و با طول موج 500 nm کار می‌کند. (ب) با استفاده از تلسکوپ رادیویی مستقر در پورتوریکو که قطر آن 305 m است و با طول موج 21 cm کار می‌کند. محدودیت هر دو تلسکوپ را صرفاً ناشی از پراش در نظر بگیرید.
حل: با استفاده از معیار رایلی و فاصله‌ی جدایی منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \theta_c = \frac{1/22 \lambda}{a} \Rightarrow s = \frac{1/22 \lambda L}{a} \\ s = L \theta_c \end{cases}$$

(الف)

$$\begin{cases} 1 \text{ in} = 2/54 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow a = 200 \times 2/54 \times 10^{-2} \Rightarrow a = 5/0.8 \text{ m} \\ a = 200 \text{ in} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 500 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 500 \text{ nm} \end{cases}$$

$$s = \frac{1/22 \times 5 \times 10^{-7} \times 10^{16}}{5/0.8} \Rightarrow s = 1/2 \times 10^9 \text{ m}$$

(ب)

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 21 \times 10^{-2} \Rightarrow \lambda = 0.21 \text{ m} \\ \lambda = 21 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = \frac{1/22 \times 0.21 \times 10^{16}}{3.05} \Rightarrow s = 8/4 \times 10^{12} \text{ m}$$

توری

۲۴) برای بررسی نور ناشی از تخلیه‌ی الکتریکی هیدروژن (که طول موج‌های $410/1 \text{ nm}$ و $656/3 \text{ nm}$ گسیل می‌کند) از یک توری 300 خط در هر میلی‌متر، استفاده می‌کنیم. جدایی زاویه‌ای این طول موج‌ها: الف) در مرتبه‌ی اول ب) در مرتبه‌ی دوم چه قدر است؟ ج) ممکن است که مرتبه‌های دوم و سوم بر روی هم قرار گیرند؟ حل: تعداد شکاف‌ها:

$$d = \frac{1}{N} \Rightarrow d = \frac{10^{-3}}{300} \Rightarrow d = 3/33 \times 10^{-6} \text{ m}$$

برای بیشینه‌ها در توری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \\ \lambda = 410/1 \text{ nm} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 410/1 \times 10^{-9} \text{ m} \\ \lambda' = 656/3 \times 10^{-9} \text{ m} \end{cases} \end{cases}$$

$$d \sin \theta = m\lambda \Rightarrow \begin{cases} 3/33 \times 10^{-6} \sin \theta = m \times 410/1 \times 10^{-9} \\ 3/33 \times 10^{-6} \sin \theta' = m \times 656/3 \times 10^{-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0/123 \text{ m} \\ \sin \theta' = 0/197 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \sin^{-1}(0/123 \text{ m}) \\ \theta' = \sin^{-1}(0/197 \text{ m}) \end{cases} \Rightarrow \theta' - \theta = \sin^{-1}(0/197 \text{ m}) - \sin^{-1}(0/123 \text{ m}) \Rightarrow$$

$$\Delta \theta = \sin^{-1}(0/197 \text{ m}) - \sin^{-1}(0/123 \text{ m})$$

الف) برای مرتبه‌ی اول: $m = 1$ است.

$$\Delta \theta = \sin^{-1}(0/197 \times 1) - \sin^{-1}(0/123 \times 1) \Rightarrow \Delta \theta = 4/3^\circ$$

ب) برای مرتبه‌ی دوم: $m = 2$ است.

$$\Delta \theta = \sin^{-1}(0/197 \times 2) - \sin^{-1}(0/123 \times 2) \Rightarrow \Delta \theta = 8/96^\circ$$

ج)

$$\theta' = \sin^{-1}(0/197 \times 2) \Rightarrow \theta' = 23/2^\circ$$

$$\theta = \sin^{-1}(0/123 \times 2) \Rightarrow \theta = 21/7^\circ$$

با توجه به اختلاف کم θ' و θ ممکن است بر روی هم بیافتند.

فصل ۱۵

(۲۵) نور با زاویه ϕ نسبت به خط عمود بر یک توری می‌تابد. نشان دهید مکان بیشینه‌های اصلی از رابطه‌ی: $d(\sin \phi \pm \sin \theta) = m\lambda$ به دست می‌آید.

حل: به طور مشابه با مساله‌ی ۸، اختلاف راه در این حالت: $\delta = d(\sin \phi \pm \sin \theta)$ است پس:

$$\delta = m\lambda \Rightarrow d(\sin \phi \pm \sin \theta) = m\lambda$$

(۲۶) خط طیفی با طول موج 640 nm در مرتبه‌ی اول یک توری، تحت زاویه‌ی 11° ، تشکیل شده است.

خط طیفی با طول موج 490 nm در مرتبه‌ی دوم، تحت چه زاویه‌ای تشکیل می‌شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه‌ها برای مرتبه‌های اول و دوم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} d \sin \theta = m\lambda \\ d \sin \theta' = m'\lambda' \end{cases} \Rightarrow \frac{d \sin \theta'}{d \sin \theta} = \frac{m'\lambda'}{m\lambda} \Rightarrow \frac{\sin \theta'}{\sin 11} = \frac{2 \times 490}{1 \times 640} \Rightarrow \sin \theta' = 0.292 \Rightarrow \theta' = 17^\circ$$

تداخل چند شکاف

(۲۷) میدان‌های الکتریکی ناشی از سه منبع در یک نقطه: $E_1 = E_0 \sin(\omega t)$ ، $E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi)$ و $E_3 = E_0 \sin(\omega t + 2\phi)$

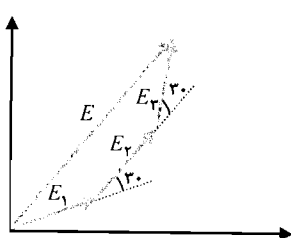
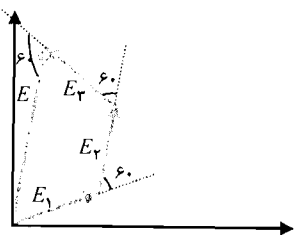
هستند. با استفاده از روش فازور، اندازه و فاز میدان برآیند (نسبت به E_1)

را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) $\phi = 30^\circ$ ب) $\phi = 60^\circ$ ج) $\phi = 90^\circ$ د) $\phi = 120^\circ$

حل:

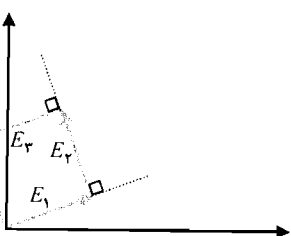
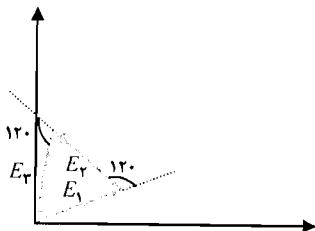
الف)

ب)



ج)

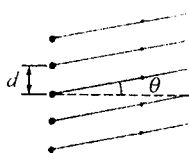
د)



(۲۸) مطابق شکل زیر، پنج منبع همدوس روی یک خط و به فاصله‌ی m از هم قرار دارند. منبع‌ها

امواجی با دامنه‌ی یکسان و بسامد 100 MHz گسیل می‌کنند. برای این که دامنه‌ی برآیند در نقطه‌ی

دوری روی محور مرکزی برابر صفر شود کمینه اختلاف فاز بین منبع‌های مجاور چه قدر باشد؟



حل: برای این که دامنه‌ی برآیند روی محور مرکزی برابر صفر باشد باید: $p=1$ باشد پس:

$$\phi = \frac{2p\pi}{N} \Rightarrow \phi = \frac{2 \times 1 \times \pi}{5} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

شدت پراش تک شکاف

۲۹) گاز هیدروژن بر اثر تخلیه‌ی الکتریکی، خط سرخی با طول موج 656.3 nm ، گسیل می‌کند. نور گسیلی از تک شکافی به عرض 0.8 mm عبور می‌کند. الف) اولین کمینه، تحت چه زاویه‌ای تشکیل می‌شود؟ ب) به ازای نصف زاویه‌ی قسمت الف، شدت نقش نسبت به بیشینه‌ی مرکزی چه قدر است؟ حل:

الف) شدت، کمینه است پس:

$$I = 0 \Rightarrow I_0 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 0 \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pi \Rightarrow \alpha = 2\pi$$

با استفاده از تعریف α می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 656.3 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6.562 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 656.3 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow a = 0.8 \times 10^{-3} \Rightarrow a = 8 \times 10^{-4} \text{ m} \\ a = 0.8 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \Rightarrow a \sin \theta = \lambda \Rightarrow 8 \times 10^{-4} \sin \theta = 6.562 \times 10^{-7} \Rightarrow$$

$$\sin \theta = 8.2 \times 10^{-4} \Rightarrow \theta = 0.47^\circ$$

(ب)

$$\theta' = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta' = \frac{0.47}{2} \Rightarrow \theta' = 0.235^\circ$$

مقدار فوق را در تعریف α جاگذاری می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{2\pi a \sin \theta'}{\lambda} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi \times 8 \times 10^{-4} \times \sin 0.235}{6.562 \times 10^{-7}} \Rightarrow \alpha = 2.14 \text{ rad} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1.07 \text{ rad}$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی شدت پراش، جاگذاری می‌کنیم:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \Rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2 1.07}{(1.07)^2} \Rightarrow I = 0.406 I_0$$

فصل ۱۵

۳۰) نشان دهید که اگر عرض یک شکاف منفرد به دو برابر افزایش یابد شدت در مرکز بیشینه‌ی پراش مرکزی چهار برابر می‌شود.

حل:

طبق رابطه‌ی: $\alpha = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$ با دو برابر شدن a ، α دو برابر می‌شود.

طبق رابطه‌ی: $A_0 = R\alpha$ با دو برابر شدن α ، A_0 دو برابر می‌شود.

طبق رابطه‌ی: $I_0 \propto A_0^2$ با دو برابر شدن A_0 ، I_0 چهار برابر می‌شود.

مسائل تکمیلی

۳۱) به دو شکاف باریک با فاصله‌ی 0.3 mm از هم نوری به طول موج 600 nm می‌تابد. مقابل شکاف بالایی، ورق پلاستیکی، قرار می‌دهیم که باعث تاخیر فاز $\frac{9\pi}{4} \text{ rad}$ می‌شود. اگر نقش تداخلی روی پرده‌ای به فاصله‌ی 4 m از شکاف‌ها بررسی شود نقش چه قدر و در چه جهتی جابه‌جا می‌شود؟ حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز بین منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ d = 0.3 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow d = 0.3 \times 10^{-3} \Rightarrow d = 3 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \\ \lambda = 600 \text{ nm} \end{cases} \Rightarrow \lambda = 600 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \Rightarrow \frac{9\pi}{4} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^{-4} \sin \theta}{6 \times 10^{-7}} \Rightarrow \sin \theta = 4/5 \times 10^{-2}$$

نور حاصل از منبع اول، تاخیر فاز دارد پس نوارها به طرف بالا جابه‌جا می‌شوند. اندازه‌ی جابه‌جایی:

$$\Delta = L \sin \theta \Rightarrow \Delta = 4 \times 4/5 \times 10^{-2} \Rightarrow \Delta = 1/8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

۳۲) نور سفید به طور عمود به لایه‌ای با ضخامت 900 nm و ضریب شکست $1/5$ واقع در هوا می‌تابد. چه طول موج‌هایی در نور بازتابیده: الف) حذف می‌شوند؟ ب) تداخل سازنده می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در گوه می‌توان نوشت:

$$2t = m\lambda_F \Rightarrow 2t = m \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{2nt}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \times 1/5 \times 900}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{3700}{m}$$

$$m = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3700}{1} \Rightarrow \lambda_1 = 3700 \text{ nm}$$

$$m = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3700}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 1850 \text{ nm}$$

$$m = 3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{3700}{3} \Rightarrow \lambda_3 = 900 \text{ nm}$$

$$m = 4 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{2700}{4} \Rightarrow \lambda_4 = 675 \text{ nm}$$

$$m = 5 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{2700}{5} \Rightarrow \lambda_5 = 540 \text{ nm}$$

$$m = 6 \Rightarrow \lambda_6 = \frac{2700}{6} \Rightarrow \lambda_6 = 450 \text{ nm}$$

$$m = 7 \Rightarrow \lambda_7 = \frac{2700}{7} \Rightarrow \lambda_7 = 386 \text{ nm}$$

طول موج نور سفید در گستره‌ی 400 nm تا 700 nm است پس طول موج‌های λ_4 تا λ_6 حذف می‌شوند.

ب) برای این حالت با استفاده از شرط تداخل سازنده در گوه می‌توان نوشت:

$$2t = m \lambda_f \Rightarrow 2t = (m + \frac{1}{2}) \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2nt}{m + 0.5} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \times 1.5 \times 900}{m + 0.5} \Rightarrow \lambda = \frac{2700}{m + 0.5}$$

$$m = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2700}{1 + 0.5} \Rightarrow \lambda_1 = 1800 \text{ nm}$$

$$m = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2700}{2 + 0.5} \Rightarrow \lambda_2 = 1080 \text{ nm}$$

$$m = 3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2700}{3 + 0.5} \Rightarrow \lambda_3 = 771 \text{ nm}$$

$$m = 4 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{2700}{4 + 0.5} \Rightarrow \lambda_4 = 600 \text{ nm}$$

$$m = 5 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{2700}{5 + 0.5} \Rightarrow \lambda_5 = 491 \text{ nm}$$

$$m = 6 \Rightarrow \lambda_6 = \frac{2700}{6 + 0.5} \Rightarrow \lambda_6 = 415 \text{ nm}$$

$$m = 7 \Rightarrow \lambda_7 = \frac{2700}{7 + 0.5} \Rightarrow \lambda_7 = 360 \text{ nm}$$

طول موج نور سفید در گستره‌ی 400 nm تا 700 nm است پس طول موج‌های λ_4 تا λ_6 تداخل سازنده

انجام می‌دهند.

۳۳) در آزمایش حلقه‌های نیوتن، شعاع انحنای عدسی کوز - تخت m است. اگر طول موج نور به

کار رفته 600 nm باشد در محدوده‌ای به شعاع 0.8 cm چند نوار روشن، تشکیل می‌شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی شعاع حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \\ r = 0.8 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow r = 0.8 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$r^2 = 2tR \Rightarrow (8 \times 10^{-3})^2 = 2t \times 3 \Rightarrow 2t = \frac{2}{13} \times 10^{-5} \text{ m}$$

با استفاده از شرط تداخل سازنده در حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

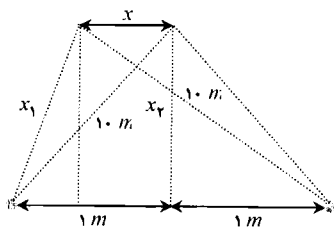
فصل ۱۵

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \\ \lambda = 600 \text{ nm} \end{cases} \Rightarrow \lambda = 600 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\Delta t = M\lambda_F \Rightarrow \Delta t = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{v} \Rightarrow 2/13 \times 10^{-5} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \frac{6 \times 10^{-7}}{1} \Rightarrow m + \frac{1}{2} = 35/5 \Rightarrow m = 35$$

با توجه به این که حلقه‌ی مرکزی به‌ازای $m=0$ ایجاد می‌شود پس تعداد حلقه‌های روشن ۳۶ است.

۳۳) دو منبع نقطه‌ای به فاصله‌ی m از هم قرار دارند و امواج صوتی همفازی با بسامد 300 Hz گسیل می‌کنند. شخصی در امتداد خطی به موازات خط واصل منبع‌ها در فاصله‌ی m 10 قدم می‌زند. بلندی صدایی که می‌شنود در چه فواصلی از بیشینه‌ی مرکزی: الف) بیشینه (ب) کمینه است؟ سرعت صوت را $\frac{m}{s}$ ۳۴۰ فرض کنید.



حل: با استفاده از تعریف طول موج می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{340}{300} \Rightarrow \lambda = 1/13 \text{ m}$$

با توجه به به شکل مقابل می‌توان نوشت:

$$x_1 = \sqrt{10^2 + (1-x)^2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{10 + x^2 - 2x}$$

$$x_2 = \sqrt{10^2 + (1+x)^2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{10 + x^2 + 2x}$$

اختلاف راه منبع‌ها:

$$\delta = x_2 - x_1 \Rightarrow \delta = \sqrt{10 + x^2 + 2x} - \sqrt{10 + x^2 - 2x}$$

الف) با استفاده از شرط تداخل سازنده می‌توان نوشت:

$$\delta = m\lambda \Rightarrow \sqrt{10 + x^2 + 2x} - \sqrt{10 + x^2 - 2x} = 1 \times 1/13 \Rightarrow$$

$$\sqrt{10 + x^2 + 2x} = 1/13 + \sqrt{10 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$10 + x^2 + 2x = 1/28 + 10 + x^2 - 2x + 2/26 \sqrt{10 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$4x - 1/28 = 2/26 \sqrt{10 + x^2 - 2x} \Rightarrow (4x - 1/28)^2 = 5/13(10 + x^2 - 2x) \Rightarrow$$

$$16x^2 + 1/64 - 10/28x = 515/13 + 5/13x^2 - 10/28x \Rightarrow 10/9x^2 = 513/13 \Rightarrow x^2 = 47/10 \Rightarrow x = 6/9 \text{ m}$$

ب) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر می‌توان نوشت:

$$\delta = M\lambda \Rightarrow \delta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \Rightarrow \sqrt{10 + x^2 + 2x} - \sqrt{10 + x^2 - 2x} = \left(0 + \frac{1}{2}\right) \times 1/13 \Rightarrow$$

$$\sqrt{10 + x^2 + 2x} = 0.565 + \sqrt{10 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$10 + x^2 + 2x = 0.32 + 10 + x^2 - 2x + 1/13 \sqrt{10 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$4x - 0.32 = 1/13 \sqrt{10 + x^2 - 2x} \Rightarrow (4x - 0.32)^2 = 1/169(10 + x^2 - 2x) \Rightarrow$$

$$16x^2 + 0.1024 - 2/56x = 129/13 + 1/169x^2 - 2/56x \Rightarrow 14/13x^2 = 129/13 \Rightarrow$$

$$x^2 = 8/8 \Rightarrow x = 2/9 \text{ m}$$

۳۵) ورق پلاستیکی نازکی با $n = 1/6$ ، مقابل یکی از شکاف‌ها در آزمایش دو شکاف قرار داده شده است و نوار روشن مرکزی را به مکان دوازدهمین نوار روشن در نقش قبلی، منتقل می‌شود. اگر طول موج نور nm ۶۵۰ باشد کمینه ضخامت ورق چه قدر است؟

حل: نور از ورقه‌ی پلاستیکی وارد هوا شده است. با استفاده از رابطه‌ی ضریب شکست نسبی می‌توان نوشت:

$$n = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n = \frac{1}{1/6} \Rightarrow \frac{1}{n} = 1/6$$

نوار روشن، ایجاد شده است. با استفاده از شرط تداخل سازنده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 650 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6/5 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 650 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\delta = m \lambda_F \Rightarrow t = m \frac{\lambda}{n} \Rightarrow t = 12 \times 6/5 \times 10^{-7} \times 1/6 \Rightarrow t = 1/25 \times 10^{-5} \text{ m}$$

۳۶) وقتی نور سفید به طور عمود بر لایه‌ی نازک واقع در هوا می‌تابد در نور بازتابیده، طول موج nm ۵۵۰ دیده نمی‌شود. اگر این لایه، کمترین ضخامت ممکن را داشته باشد اختلاف فاز بین دو باریکه‌ی تداخل کننده را برای طول موج‌های: الف) nm ۴۰۰ ب) nm ۷۰۰ به دست آورید. ج) برای طول موج‌های nm ۴۰۰ و nm ۷۰۰ ضرایب کاهش شدت نور بازتابیده را نسبت به شدت تداخل سازنده به دست آورید.

حل: با استفاده از شرط تداخل ویرانگر لایه‌های نازک می‌توان نوشت:

$$\delta = m \lambda_F \Rightarrow \delta = m \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \delta = 1 \times \frac{550}{n} \Rightarrow \delta = \frac{550}{n}$$

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز می‌توان نوشت:

$$\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_F} - \pi \Rightarrow \phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} - \pi \Rightarrow \phi = 2\pi \times \frac{n}{400} - \pi \Rightarrow \phi = 5/5 \text{ rad}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز می‌توان نوشت:

$$\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_F} - \pi \Rightarrow \phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} - \pi \Rightarrow \phi = 2\pi \times \frac{n}{700} - \pi \Rightarrow \phi = 1/8 \text{ rad}$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی شدت نور بازتابی می‌توان نوشت:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow \frac{I}{4I_0} = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

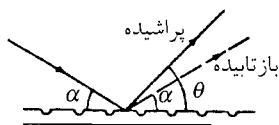
برای nm ۴۰۰ : $\lambda = 400$

$$\frac{I}{4I_0} = \cos^2\left(\frac{5/5}{2}\right) \Rightarrow \frac{I}{4I_0} = 0/854$$

برای $\lambda = 700 \text{ nm}$:

$$\frac{I}{4I_0} = \cos^2\left(\frac{1/8}{2}\right) \Rightarrow \frac{I}{4I_0} = 0.386$$

۳۷) مطابق شکل زیر، از فواصل بین علامت‌های درجه‌بندی یک خط‌کش فلزی می‌توان به عنوان توری بازتابشی، استفاده کرد. اگر نور تحت زاویه‌ی α به صفحه‌ی خط‌کش بتابد شرط تشکیل بیشینه‌ی اصلی در زاویه‌ی θ چیست؟



حل: مشابه مساله‌ی ۸ می‌توان نوشت:

$$\delta = d \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right] \Rightarrow \delta = d (\cos \alpha - \cos \theta)$$

با استفاده از شرط تداخل سازنده‌ی توری‌ها می‌توان نوشت:

$$\delta = m \lambda \Rightarrow d (\cos \alpha - \cos \theta) = m \lambda$$

۳۸) نوری با طول موج 450 nm به چهار شکاف باریک می‌تابد. فاصله‌ی شکاف‌ها از هم 0.8 mm و فاصله‌ی پرده $2/6 \text{ m}$ است. محل تشکیل: الف) اولین بیشینه‌ی اصلی (خارج از مرکز ب) دو کمینه‌ی اول را به دست آورید.

حل:

الف) برای اولین بیشینه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 450 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 4/5 \times 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda = 450 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow d = 0.8 \times 10^{-3} \Rightarrow d = 8 \times 10^{-5} \text{ m} \\ d = 0.8 \text{ mm} \end{cases}$$

$$d \sin \theta = m \lambda \Rightarrow 8 \times 10^{-5} \sin \theta = 1 \times 4/5 \times 10^{-7} \Rightarrow \sin \theta = 5/625 \times 10^{-3}$$

با استفاده از رابطه‌ی فاصله‌ی نوار از مرکز می‌توان نوشت:

$$\Delta = L \sin \theta \Rightarrow \Delta = 2/6 \times 5/625 \times 10^{-3} \Rightarrow \Delta = 2/0.25 \times 10^{-2} \text{ m}$$

ب) برای اولین کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{Nd} \Rightarrow \sin \theta = \frac{4/5 \times 10^{-7}}{4 \times 8 \times 10^{-5}} \Rightarrow \sin \theta = 1/406 \times 10^{-2}$$

با استفاده از رابطه‌ی فاصله‌ی نوار از مرکز می‌توان نوشت:

$$\Delta' = L \sin \theta \Rightarrow \Delta' = 2/6 \times 1/406 \times 10^{-2} \Rightarrow \Delta' = 5/0.6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

برای دومین کمینه می‌توان نوشت:

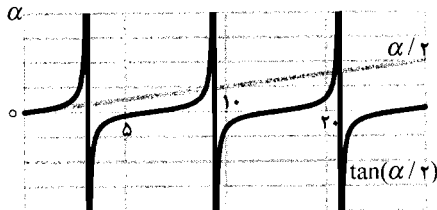
$$\Delta'' = 2\Delta' \Rightarrow \Delta'' = 2 \times 5/0.6 \times 10^{-2} \Rightarrow \Delta'' = 1/0.1 \times 10^{-2} \text{ m}$$

۳۹ الف) نشان دهید در نقش پراش تک شکاف، مکان زاویه‌ای بیشینه‌های فرعی از رابطه‌ی:
 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ به دست می‌آید. ب) اگر منحنی‌های نمایش $\tan \frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\alpha}{2}$ را بر حسب α رسم کنیم
 جواب‌های معادله‌ی غیر جبری به دست می‌آید. با انجام این کار، اولین مقدار α را به دست آورید.
 حل:

الف) برای این که I بیشینه شود باید:

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left[I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2} \right] = 0 \Rightarrow I_0 \times \frac{2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \times \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$



ب) با توجه به نمودار مقابل، جواب 9.0 rad است.

۴۰ مطابق شکل ۱۵-۲۴، برای تعیین شدت ناشی از N منبع می‌توان عبارتهای مربوط به فازورهای \vec{E}_0 و \vec{E}_T را بر حسب ϕ و R به دست آورد. عبارت \vec{E}_T را بر حسب \vec{E}_0 بنویسید و

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{N\phi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}$$

سپس با استفاده از این مطلب که شدت، متناسب با مجذور میدان است نشان دهید:

است. $I \propto E_0^2$ شدت ناشی از یک منبع است.

حل: با توجه به شکل ۱۵-۲۴ و روابط مربوط به آن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_0 = 2R \sin \frac{\phi}{2} \\ E_T = 2R \sin \left(\frac{N\phi}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow E_T = E_0 \frac{\sin \left(\frac{N\phi}{2} \right)}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\begin{cases} I \propto E_T^2 \\ I \propto E_0^2 \end{cases} \Rightarrow I \propto E_0^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{N\phi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)} \Rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}}$$