۳. اگر نور آفتاب از دور دست یک هشتمِ اولِ دستگاهِ مختصات ($\{(x, y, z)|x, y, z > 0\}$)، موازی بردار $(-1, -1, -1)$ بتابد، مطلوبست به دست آوردن معادله (ضمنی یا پارامتری) مرز شکل حاصل از سایه کره $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ در صفحه $z = 0$. (۱۰ نمره)

سؤال ۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow \mathbb{R}$، $z=f(x,y)$، تابعی باشد که دارای مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته روی $\mathbb{R}^{۲}$ است. قرار می‌دهیم $x=(۱+v)e^{u}$ و $y=(۱-v)e^{u}$. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$x\ \frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}+(y-x)\ \frac{\partial^{۲} z}{\partial x\partial y}-y\ \frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}.$$

(۱.۲) مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ اوّل x و y را نسبت به u به دست آورید و با جایگذاری آنها در عبارت داده شده، عبارت را به صورت " $\frac{\partial}{\partial u}$(یک عبارت) " بنویسید.

(۲.۲) به کمک قسمت قبل، عبارت داده شده را بر حسب مشتقات پاره‌ای z نسبت به u و v به صورت ساده شده بازنویسی کنید.

۴. برای تابع با ضابطه $f(x,y) = xy\exp(-x^2-y^2)$، مطلوبست محاسبه نقاط بحرانی و تعیین نوع آنها. (کمینه نسبی، بیشینه نسبی یا زینی) (۱۰ نمره)

سؤال ۶. فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت است. قرار دهید

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = a,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

و تابع $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(x, y, z) = xyz$ در نظر بگیرید.

(۱.۶) نشان دهید f دارای ماکزیمم مطلق است و آن را در نقاط مرزی A به خود نمی‌گیرد.

(۲.۶) با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، ماکزیمم مطلق f را به دست آورید.

(۳.۶) به کمک قسمت قبل، نشان دهید به ازای هر $x, y, z \geq 0$،

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$