

$f = u + iv$ استحق پذیر در z_0 :

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

قضیه:



$$|z - z_0| < r_0$$

خرق کفیه $f = u + iv$ در یک مسایلی z تعریف شده

فرض کنیم u و v پیوسته، دارای مشتقات پاره ای پیوسته باشند

در این مسایلی و این روابط کوچی بیان برقرارند.

در این صورت f در تمام نقاط این مسایلی شق پذیر است (تخلیه است)

مثال:

$$f(z) = \bar{z} \Rightarrow f(x+iy) = x - iy$$

$$u(x, y) = x$$

$$u_x = 1$$

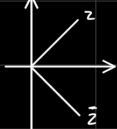
$$u_x \neq v_y$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$v(x, y) = -y$$

$$v_y = -1$$



پس f در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

معادلات نوشته‌شده در مختصات قطبی

$$f = u + iv \Rightarrow u = u(r, \theta), \quad v = v(r, \theta)$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_r = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot u_x + \frac{\partial y}{\partial r} \cdot u_y$$

مثلاً داریم:

$$u_r = \cos \theta \cdot u_x + \sin \theta \cdot u_y$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = v_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot v_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot v_y$$

$$v_\theta = -r \sin \theta \cdot v_x + r \cos \theta \cdot v_y$$

$$\frac{1}{r} v_\theta = -\sin \theta \cdot v_x + \cos \theta \cdot v_y = \sin \theta \cdot u_y + \cos \theta \cdot u_x \quad (r \neq 0)$$

به طور مشابه :

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

مثال :

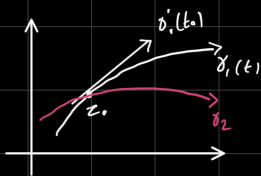
$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta \quad (r \neq 0) \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$u(r, \theta) = \ln r$$

$$u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta \quad \checkmark$$

$$v(r, \theta) = \theta \Rightarrow$$

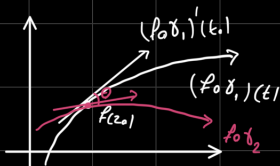
$$v_r = 0 = -\frac{1}{r} u_\theta \quad \checkmark$$



نکته هیدرس :

$$|\delta'_1(t_0)| \neq 0$$

$$(f \circ \delta_1)'(t_0) = f'(z_0) \cdot \delta'_1(t_0) \neq 0 \Rightarrow f'(z_0) \neq 0$$



$$\begin{aligned}\arg \left((f \circ \gamma)'(t_0) \right) &= \arg (f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)) \\ &= \arg (f'(z_0)) + \arg (\gamma'(t_0))\end{aligned}$$



$$\theta_2 = \theta_1 + \arg (f'(z_0))$$

اگر تابعی محلی داریم، مشتق تابع نامر است خاصیت محلی بودن برقرار است.

$$f'(z_0) \neq 0 \rightarrow f \text{ در } z_0 \text{ محلی است}$$

اگر مشتق 0 شود دیگر زاویه ها با هم برابر نبوده و خاصیت محلی از بین می رود.

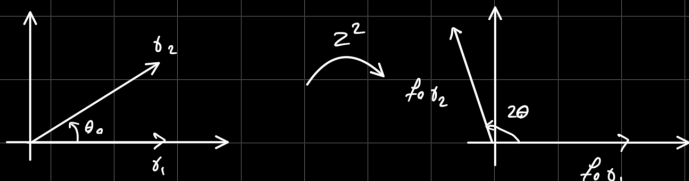
مثال :

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

برای $z \neq 0$ ، f در z محلی است ✓

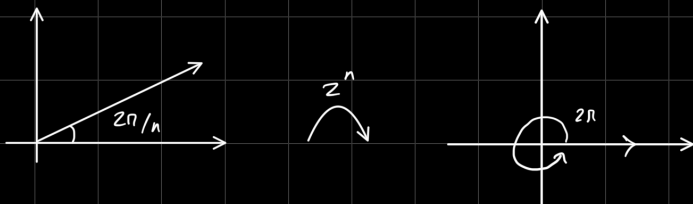
اما در مبدأ زوایا در برابر می شود.

$$z = r e^{i\theta} \Rightarrow z^2 = r^2 e^{2i\theta}$$



$$f(z) = z^n \quad (n \geq 2)$$

f من جابجی می‌باشد، معرّفی است اما در مبدأ نزدیکاً را n برابر می‌کنند



مثال:

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

برای $z \neq \pm 1$ ، f معرّفی است

$$f(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \underbrace{\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos\theta}_u + i \underbrace{\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\theta}_v$$