



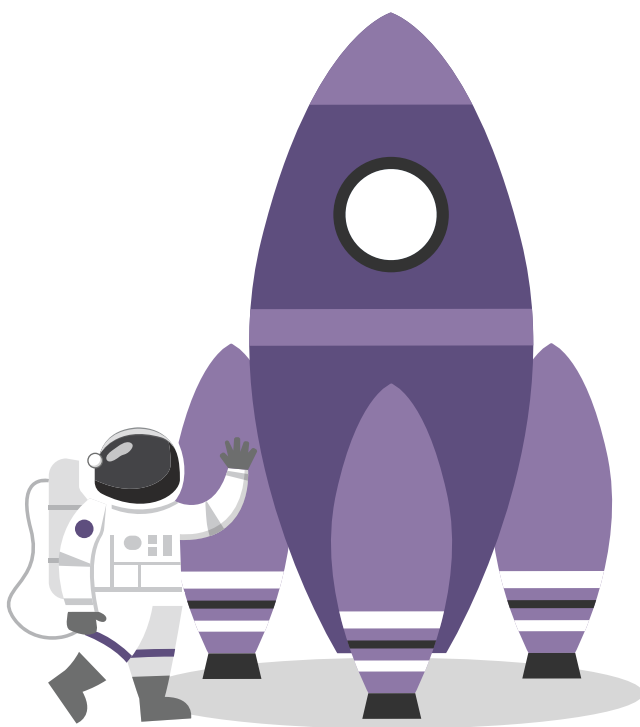
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

هندسه ۳



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

هندسه ۳ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان هندسه : امیرحسین نادری

فصل اول : ماتریس ها و کاربردها

ماتریس ها و اعمال روی آن

۱) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ به صورت زیر معرفی شده باشد ماتریس A را بیابید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & , i = j \\ i - j & , i > j \\ j - i & , i < j \end{cases}$$

۲) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

۳) اگر $A = \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $x + y + z$ را بیابید.

۴) جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) ماتریس قطری ماتریسی است که

ب) ماتریس اسکالر، ماتریسی است که

۵) ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض اند. یک ماتریس 3×2 مانند C را طوری پیدا کنید که $A + B - C = O_{3 \times 2}$

۶) اگر $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $2A - I$ و مجموعه درایه های روی قطر اصلی ماتریس A برابر با ۵ باشد، مقدار m را بیابید.

۷) اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.



۸ کارخانه‌ای سه محصول a, b, c را به دو بازار m, n می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته‌شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نمایش داده شده است. ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$ به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام‌شده هر واحد از a, b, c را نشان می‌دهند. درایه‌های هر یک از ماتریس‌های $AB, AC, AB - AC$ را تعبیر کنید.

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ باشد، مطلوبست A^{10} .

۱۰ دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$.

۱۱ با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

۱۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ نشان دهید $CA = C, AC = A, AB = BA = O$.

۱۳ درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف حاصل ضرب ماتریس 1×3 در ماتریس 3×1 ، یک عدد است.

ب اگر $A \times B = \bar{O}$ باشد، آنگاه $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$.

۱۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ اعداد m و n و r را طوری پیدا کنید به طوری که داشته باشیم $mA^2 + nA + rI = \bar{O}$.

۱۵ نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ در رابطه $A^2 - 3A + 3I = \bar{O}$ صدق می‌کند.

۱۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مقادیر α و β را طوری بیابید که داشته باشیم $A^2 = \alpha A + \beta I$.



۱۷) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{2° را به دست آورید.

۱۸) در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A^{1° را به دست آورید.

۱۹) اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض‌پذیر باشند ($A \times B = B \times A$)، آنگاه ثابت کنید:

الف) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

۲۰) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{100} را به دست آورید؟

۲۱) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^4 را بیابید.

۲۲) اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۳) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبه توان‌های مختلف A ، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^n = O$.

۲۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه A^{1° .

۲۵) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ نشان دهید $A^2 - 4A - 5I_3 = O$.

۲۶) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^4 - A^2$ را به دست آورید؟

دترمینان و کاربردها

۲۷) اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ 1 & 4|A| \end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ را به دست آورید.



۲۸) ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A \times B$ را به‌دست آورید و برقراری تساوی $|AB| = |A||B|$ را بررسی کنید.

۲۹) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در این‌صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۳۰) اگر $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$ باشد مقدار x را به‌دست آورید.

۳۱) اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$ ، در این صورت حاصل $|A||A|$ را بیابید.

۳۲) اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به‌دست آورید.

۳۳) اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11} = 4$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

۳۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^3 - 2)$ را بیابید.

۳۵) دترمینان ماتریس زیر را برحسب سطر اول و برحسب ستون سوم محاسبه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۶) دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

۳۷) نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادله خطی است که از نقاط (a, b) ، (c, d) در $\mathbb{R}^2$ می‌گذرد.



۳۸ اگر $C = (c_1, c_2), B = (b_1, b_2), A = (a_1, a_2)$ رئوس یک مثلث از صفحه $\mathbb{R}^2$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق مقدار زیر:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

۳۹ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر دوم و همچنین ستون سوم پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

۴۰ اگر دترمینان ماتریس مربعی A از مرتبه ۳ برابر با ۳ باشد، حاصل $|A^2|$ را حساب کنید.

۴۱ دترمینان ماتریس $M = [i^2 - j^2]_{3 \times 3}$ را به دست آورید؟

۴۲ دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴۳ دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۴ ماتریس $A_{3 \times 3}$ را طوری بیابید که در معادله $2|A|^2 + 3|A| - 2 = 0$ صدق کند.

۴۵ اگر ماتریس $A_{3 \times 3}$ به صورت $A = [i - j]$ باشد، مطلوبست محاسبه دترمینان ماتریس $2A + I$.

وارون یک ماتریس

۴۶ اگر $A = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ وارون ماتریس A را بیابید.

۴۷ اگر A ماتریس مربعی از مرتبه ۲ باشد و $|A| = 3$ ، حاصل $|2A^{-1}| + |3A|$ را به دست آورید.

۴۸ اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = B^2$ باشد، مقدار x چقدر است؟

۴۹ اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر و $A^2 = A$ و $B^2 = B$ باشد؛ آنگاه حاصل $(A + B)^{-1}$ را به دست آورید.



۵۰ اگر A و B وارون‌پذیر باشد و $AB = A + B$ ثابت کنید:

$$A^{-1} + B^{-1} = I$$

۵۱ اگر A وارون‌پذیر و $A^2 = A$ باشد، وارون $(I - 3A)$ را بیابید.

۵۲ اگر $A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ حاصل دترمینان $(2A)^{-1}$ را به دست آورید.

۵۳ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} |A| & 2|A| \\ -3 & 5|A| \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، معکوس A را بیابید.

۵۴ اگر A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

۵۵ اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر باشند و $(A^2)^{-1} = B$ ثابت کنید.

$$A^{-1} = AB$$

۵۶ به ازای چه مقدار m ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 3 \\ 1 & m-2 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست؟

۵۷ اگر A و B مربعی و وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

۵۸ اگر برای دو ماتریس مربعی A و B داشته باشیم $AB = I$ ، آنگاه ثابت کنید.

الف) A وارون‌پذیر است.

ب) $B = A^{-1}$

۵۹ برای دو ماتریس 2×2 و وارون‌پذیر A و B داریم:

$$(A \times B)^{-1} = \dots\dots\dots$$

$$(kA)^{-1} = \dots\dots\dots$$

$$(A^{-1})^{-1} = \dots\dots\dots$$

۶۰ نشان دهید ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است.

۶۱ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.



۶۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

۶۳) اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1} - 3B^{-1})$ را بیابید.

۶۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مطلوبست محاسبه: $A^{-1}(A + 2B^{-1} + AB^{-1})BA$.

۶۵) اگر A ماتریسی 3×3 که $|A| = 2$ باشد، حاصل $|A^3 A^{-1} + 3A^2|$ را بیابید.

۶۶) برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه A و B ، کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) اگر A و B وارون‌پذیر باشند، AB نیز وارون‌پذیر است.

ب) اگر AB وارون‌پذیر باشد، A و B وارون‌پذیرند.

پ) اگر A و B وارون‌پذیر نباشند، AB نیز وارون‌پذیر نیست.

ت) اگر AB وارون‌پذیر نباشد، A و B هم وارون‌پذیر نیستند.

حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

۶۷) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است. $x + y$ را به دست آورید.

۶۸) دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توان از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کرد؟ توضیح دهید.

۶۹) به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

۷۰) دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

۷۱) دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۷۲) به ازای چه مقادیری از k و m دستگاه مقابل بی‌شمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} -2x + ky = 2 \\ 4x - 6y = m \end{cases}$$



فصل دوم : مقاطع مخروطی

مکان هندسی و کاربرد

۷۳) مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی به طول ثابت L که دو سر آنها روی دو خط عمود برهم باشد را بیابید.

۷۴) نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۷۵) مکان هندسی نقاطی را بیابید که از آنها بر دایره $C(O, R)$ دو مماس عمود بر هم رسم شود.

۷۶) در مثلث ABC ، ضلع BC ثابت و فاصله رأس A از BC برابر با h است. با جابه‌جا شدن رأس A ، مکان هندسی مرکز هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC را بیابید.

۷۷) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را بیابید که از A و B می‌گذرند؟

۷۸) در مثلث ABC ، نقاط M و N به‌ترتیب روی AB و AC قرار دارند. چند نقطه روی محیط مثلث MNB می‌توان یافت که از AB و AC به یک فاصله باشد؟ (M و N روی رأس‌های مثلث قرار ندارند).

۷۹) دو خط d و d' متقاطع هستند. چند نقطه وجود دارد که از d و d' به فاصله 2cm است؟

۸۰) ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

۸۱) ثابت کنید هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۸۲) ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۸۳) ثابت کنید هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط، یک فاصله باشد، حتماً روی عمودمنصف آن است.

۸۴) ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

۸۵) در مثلث ABC ، ارتفاع AH رسم می‌شود. چند نقطه روی AH می‌توان یافت از AC و BC به یک فاصله باشد؟

۸۶) ضلع BC و مساحت مثلث ABC معلومند. مکان هندسی رأس A را بیابید.

۸۷) مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی را بیابید که دو سر آنها بر دو خط موازی واقع باشند؟



۸۸) نقطه A درون زاویه xOy قرار دارد. چند نقطه درون زاویه وجود دارد که از A به فاصله r و از اضلاع زاویه به یک فاصله باشد. (بحث کنید)

۸۹) هرگاه دو خط d و ℓ موازی باشند، از دوران d حول ℓ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه p ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

۹۰) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چیست؟

۹۱) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r را مشخص کنید که بر دایره $C(O, R)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند.

۹۲) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r را مشخص کنید که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

۹۳) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی در صفحه را مشخص کنید که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.

۹۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه را مشخص کنید که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

۹۵) دو نقطه A و B و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

۹۶) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) تنها یک نقطه وجود دارد که از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است.

ب) هرگاه صفحه‌ای یک سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک می‌تواند هذلولی باشد.

پ) همواره یک نقطه وجود دارد که از چهار نقطه متمایز در یک صفحه به یک فاصله است.

۹۷) نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید).

۹۸) دایره C درون زاویه xOy قرار دارد. چند نقطه روی دایره وجود دارد که از اضلاع زاویه به یک فاصله باشد؟ بحث کنید.

۹۹) خط d و نقطه A در صفحه مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از خط d به فاصله L و از نقطه A به فاصله r باشند. همه حالات را بررسی کنید.

۱۰۰) ارتفاع دوزنقه‌ای 12cm می‌باشد. چند نقطه روی ساق‌های دوزنقه وجود دارد که نسبت فاصله آن نقاط از قاعده‌ها ۲ به ۱ باشد؟



۱۰۱) مربع $ABCD$ به طول ضلع 3cm مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر با $\frac{\pi}{2}$ باشد؟

۱۰۲) زاویه xOy مفروض است. چند نقطه داخل زاویه وجود دارد که از دو ضلع زاویه به فاصله 2cm باشد؟

۱۰۳) فاصله نقطه A از خط d برابر با 12cm است. مکان هندسی نقاطی که وسط پاره‌خط AB (روی d جابه‌جا می‌شود) قرار دارند چیست؟

انواع مقاطع

۱۰۴) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y = 3x - 8$ باشد و بر محورهای مختصات در ناحیه چهارم مماس باشد.

۱۰۵) مساحت دایره‌ای که از نقطه $A(1, 2)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس شود را بیابید.

۱۰۶) اگر معادله $x^2 + y^2 + ax - 2y + 4 = 0$ نمایش یک نقطه باشد، a را بیابید.

۱۰۷) حدود c را طوری مشخص کنید که خط $L: 3x + 4y + c = 0$ دایره $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ را قطع کند.

۱۰۸) معادله دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس باشد را بنویسید. همچنین معادله دایره‌ای که در ربع دوم، سوم و چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد را بنویسید.

۱۰۹) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات بوده و بر خط $3y + 4x = 5$ مماس باشد.

۱۱۰) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, 1)$ و بر خط $3x + 4y = 0$ مماس باشد.

۱۱۱) معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(1, 1)$ مرکز آن و $A(3, 2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

۱۱۲) دایره C به مرکز $O(-1, 1)$ و شعاع 2 ، از چند ناحیه مختصات می‌گذرد؟

۱۱۳) معادله دایره‌ای به شعاع 3 که مرکز آن روی تقاطع دو خط $y = 2x + 1$ و $y = x - 2$ باشد را بنویسید.

۱۱۴) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O(1, 2)$ باشد و از خط $d: 2x - y = 1$ وتری به طول $AB = 8$ جدا کند.

۱۱۵) معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A = (1, -1)$ و $B = (2, 3)$ دو سر قطر آن باشد.

۱۱۶) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x = y + 2$ بوده و در نقطه‌ای به طول 5 بر محور x مماس باشد.



۱۱۷) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(-1, 3)$ باشد و از نقطه $(0, 3)$ بگذرد.

۱۱۸) مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A = (7, 1)$ دو برابر فاصله آنها از نقطه $B = (1, 4)$ باشد.

۱۱۹) چند نقطه با مختصات صحیح درون دایره $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد؟

۱۲۰) حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

۱۲۱) معادله $x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + n + 1 = 0$ به ازای چه حدودی از m و n معادله دایره است؟

۱۲۲) با چه شرطی معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مربوط به دایره است؟ با چه شرطی نمایش یک نقطه و با چه شرطی نقطه‌ای وجود ندارد که نمایش آن باشد؟

۱۲۳) مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره $x^2 + y^2 - x + 2y = 1$ را تعیین کنید.

۱۲۴) نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کنید:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

۱۲۵) کدامیک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره‌ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$

ب) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$

ج) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$

۱۲۶) مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ را به دست آورید.

۱۲۷) فاصله نزدیک‌ترین و دورترین نقطه $M(1, 2)$ از دایره $C: x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ را بیابید.

۱۲۸) وضعیت هریک از نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, -2)$ و $C(2, 3)$ و $D(4, -1)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ تعیین کنید.

۱۲۹) طول مماس رسم‌شده از نقطه $M(1, -2)$ بر دایره $C: x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$ را به دست آورید.



۱۳۰) معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = 6$ بر آن مماس باشد.

۱۳۱) معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-1, -1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x + y = 1$ وترى به طول ۲ جدا کند.

۱۳۲) معادله خطی را بنویسید که در نقطه $A(4, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشد.

۱۳۳) حدود m را طوری تعیین کنید که خط $3x - 4y + m = 0$ دایره $d: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ را قطع نکند؟

۱۳۴) معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(2, 1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x + 4y = 0$ مماس باشد.

۱۳۵) وضعیت هریک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 2$

ب) $x + y = 4$, $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

۱۳۶) معادله دایره C' را که مرکزش $O'(5, 7)$ و بر دایره $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ مماس می‌باشد را بنویسید.

۱۳۷) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-1, 1)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس خارج باشد.

۱۳۸) وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2 + y^2 - 2x = 1$, $x^2 + y^2 = 1$

ب) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$

۱۳۹) وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$, $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

ب) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

۱۴۰) ثابت کنید در بیضی، بیشترین و کمترین فاصله نقاط روی بیضی از کانون‌ها برابر است با: $a - c$ و $a + c$.

۱۴۱) در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اگر B سر قطر کوچک و F و F' رأس‌های کانونی باشد، زاویه FBF' برابر است با

۱۴۲) طول قطرهای کوچک و بزرگ یک بیضی ۶ و ۱۲ می‌باشد. طول OF چقدر است؟ (O مرکز و F کانون بیضی می‌باشد).



۱۴۳) نقطه M روی بیضی با مقدار ثابت 10 می‌باشد. اگر حاصل ضرب فواصل M دو کانون بیضی 21 باشد، فاصله M از کانون‌ها را بیابید.

۱۴۴) نقطه M روی بیضی واقع است، به طوری که $MF - MF' = 2b$ باشد ثابت کنید: $MF \times MF' = a^2 - b^2 = c^2$

۱۴۵) ثابت کنید اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد آنگاه مجموع فواصل M از دو کانون بیشتر از $2a$ است.

۱۴۶) نقاط B و B' دو سر قطر کوچک یک بیضی هستند. ثابت کنید اندازه قطر کوچک برابر است با: $BB' = 2\sqrt{a^2 - c^2}$

۱۴۷) در یک بیضی با کانون‌های F و F' ، محور کانونی، بیضی را در دو نقطه A و A' قطع می‌کند. ثابت کنید: $AF = A'F'$

۱۴۸) ثابت کنید عمود منصف FF' محور تقارن بیضی است.

۱۴۹) ثابت کنید نقطه برخورد دو محور تقارن بیضی مرکز تقارن آن می‌باشد.

۱۵۰) طول قطرهای و فاصله کانونی یک بیضی افقی را بیابید که $A(4, 1)$ یک سر قطر بزرگ و $B(-1, 4)$ یک سر قطر کوچک آن باشد.

۱۵۱) طول قطرهای و فاصله کانونی بیضی را بیابید که در آن $A(7, 2)$ و $A'(-3, 2)$ دو سر قطر بزرگ آن و $F(5, 2)$ یک کانون آن باشد.

۱۵۲) یک بیضی بر خط‌های $x = 2$ ، $x = -4$ ، $y = 3$ و $y = -1$ مماس است. اگر قطرهای کوچک و بزرگ این بیضی، موازی محورهای مختصات باشد، مساحت چهارضلعی محاطی حاصل از به هم وصل کردن رأس‌های آن را به دست آورید.

۱۵۳) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس شود، زاویه MF و MF' با خط d برابرند. (F و F' کانون‌ها هستند.)

ب) در سهمی با کانون F و خط هادی d ، مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد، روی سهمی است.

۱۵۴) در بیضی به طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب $2a$ و $2b$ ، طول وتر کانونی را به دست آورید.

۱۵۵) نقاط $F'(2 - \sqrt{5}, 0)$ و $F(2 + \sqrt{5}, 0)$ دو کانون یک بیضی و $A(5, 0)$ نقطه‌ای از آن است. خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

۱۵۶) ثابت کنید در یک بیضی با خروج از مرکز e ، طول کوتاه‌ترین وتر کانونی برابر است با: $2a(1 - e^2)$



۱۵۷ در یک بیضی با خروج از مرکز e ثابت کنید اندازه قطر کوچک برابر است با: $BB' = 2a\sqrt{1 - e^2}$

۱۵۸ مختصات مرکز و طول قطرها و فاصله کانونی بیضی را بنویسید که $A(1, 7)$ و $A'(1, -5)$ دو سر قطر بزرگ و $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ خروج از مرکز آن باشد.

۱۵۹ اگر $F = (\sqrt{6}, 1)$ و $F' = (-\sqrt{6}, 1)$ دو کانون یک بیضی و طول قطر بزرگ آن ۶ باشد. طول قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۶۰ در یک بیضی مساحت مثلث متساوی الساقینی که رأس آن کانون F و قاعده آن کوتاهترین وتر کانونی F' است را برحسب خروج از مرکز به دست آورید.

۱۶۱ در یک بیضی فاصله یک کانون از دورترین نقطه بیضی دو برابر فاصله کانون دیگر از نزدیکترین نقطه آن است. الف) خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. ب) نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ بیضی را محاسبه کنید.

۱۶۲ معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه $(1, -2)$ و خط $x = 3$ به یک فاصله اند را به دست آورید.

۱۶۳ معادله $y^2 = 6x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

۱۶۴ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۱۶۵ معادله یک سهمی را بنویسید که کانون آن نقطه $F(-1, 2)$ و خط هادی آن $y = 4$ باشد.

۱۶۶ معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(2, 3)$ و خط $x = 4$ هادی آن باشد.

۱۶۷ با استفاده از تعریف سهمی، معادله سهمی را بنویسید که کانون آن نقطه $F(2, 1)$ بوده و خط هادی آن $x = 4$ باشد.

۱۶۸ ثابت کنید اندازه وتر کانونی یک سهمی با فاصله کانونی a برابر $4a$ است.

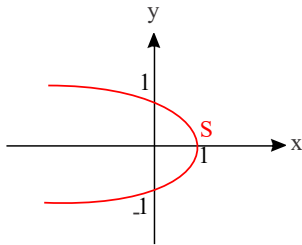
۱۶۹ ثابت کنید خطی که از کانون بر خط هادی سهمی عمود می شود محور تقارن آن است؟

۱۷۰ اگر دو خط موازی d و d' سهمی را در وترهای AB و $A'B'$ قطع کنند، خط گذرنده بر وسط AB و $A'B'$ با موازی است.



۱۷۱) معادله سهمی را بنویسید که $F(5, 3)$ کانون و $S(1, 3)$ رأس آن باشد.

۱۷۲) نمودار معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را رسم کنید.



۱۷۳) در شکل زیر معادله سهمی و خط هادی آن را به دست آورید.

۱۷۴) خط هادی سهمی $y^2 - (x - 2) = 16$ خط به معادله $y = 3x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱۷۵) مختصات کانون و رأس و معادله خط هادی سهمی $y^2 - 6y + 16x + 25 = 0$ را بیابید.

۱۷۶) در سهمی $y^2 + ay + x + b = 0$ مقادیر a و b را طوری بیابید که $F(1, 1)$ کانون آن باشد.

۱۷۷) a و b را چنان تعیین کنید که نقطه $S(-1, 2)$ رأس سهمی $x = y^2 + ay + b$ باشد.

۱۷۸) در سهمی $(3x + y)^2 = 8(x - 1) + (x + 3y)^2$ ، مختصات کانون و معادله خط هادی و معادله محور تقارن را بیابید.

۱۷۹) معادله سهمی را بنویسید که دارای خط هادی $x = 2$ بوده و رأس آن نقطه $A(3, 4)$ باشد.

۱۸۰) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی به معادله $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ را به دست آورید.

۱۸۱) m و n را چنان تعیین کنید که نقطه $S = (-1, 2)$ رأس سهمی $x = y^2 + my + n$ باشد.

۱۸۲) اگر فاصله کانون تا خط هادی سهمی به معادله $y^2 - 2y + mx + m = 0$ برابر ۲ باشد. آنگاه مختصات رأس سهمی را به دست آورید.

۱۸۳) اگر در سهمی به معادله $2y^2 + 4y - x + m = 0$ طول کانون برابر $\frac{17}{8}$ باشد آنگاه مقدار m را بیابید.

۱۸۴) اگر در سهمی به معادله $y = 2x^2 + mx - 3$ خط $x = 1$ محور تقارن باشد آنگاه مقدار m را به دست آورید.

۱۸۵) معادله خطی که از کانون سهمی $4x = x^2 + 2y + 1$ و مبدأ می‌گذرد را به دست آورید.



۱۸۶) معادله وتر مشترک سهمی‌های $x + y^2 = 0$ و $x + 2y = y^2$ را به دست آورید.

۱۸۷) طول وترى که از کانون سهمی $y^2 + 4x = 3$ گذشته و بر محور کانونی عمود است را به دست آورید.

۱۸۸) محور یک سهمی موازی محور y ها و مختصات کانون آن $F(2, -\frac{7}{2})$ است. اگر دهانه سهمی رو به پایین و فاصله کانونی آن برابر یک باشد. معادله سهمی را به دست آورید.

۱۸۹) سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

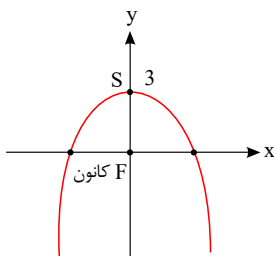
۱۹۰) معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 + 3x + 5$ داده شده است. آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

۱۹۱) معادله محور تقارن سهمی به معادله $y = -2x^2 + 4x - 3$ را به دست آورید.

۱۹۲) مختصات کانون سهمی به معادله $x^2 = 4(x + 2y + 3)$ را به دست آورید.

۱۹۳) مختصات رأس سهمی به معادله $y = x^2 - 4x + 5$ را به دست آورید.

۱۹۴) در شکل مقابل، سهمی محور x ها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟



۱۹۵) اگر مختصات کانون یک سهمی $(-2, 3)$ و معادله خط هادی آن $x = 6$ باشد مختصات رأس سهمی را به دست آورید و آن را رسم کنید.

۱۹۶) معادله سهمی با کانون $F(2, -\frac{7}{2})$ و خط هادی $y = -\frac{5}{2}$ را به دست آورید.

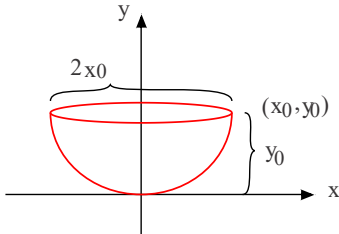
۱۹۷) مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(4, 6)$ و خط هادی $x = 9$ بنویسید.

۱۹۸) معادله سهمی به رأس $A(2, 1)$ و کانون $F(2, 5)$ را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.



۱۹۹ معادله سهمی را بنویسید که رأس $S(1, 2)$ و کانون $F(1, -2)$ آن باشد.

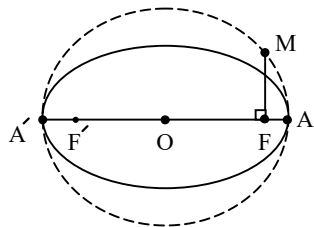
۲۰۰ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آن به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۲۰۱ تمام پرتوهای نوری که موازی محور تقارن سهمی $y^2 - y - 2x - 1 = 0$ بر آن می‌تابند. از چه نقطه‌ای عبور می‌کنند؟ مختصات آن را بیابید.

۲۰۲ سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۲۰۳ قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۲۰۴ در سهمی $4y^2 + 4y - 2x - 1 = 0$ ، مختصات کانون و رأس و معادله خط هادی را بیابید.

۲۰۵ نقطه $S = (2, 1)$ رأس سهمی افقی با کانون F می‌باشد. اگر F روی خط $y = -x + 1$ قرار گیرد، مختصات F را مشخص کنید و سپس معادله سهمی را بنویسید.

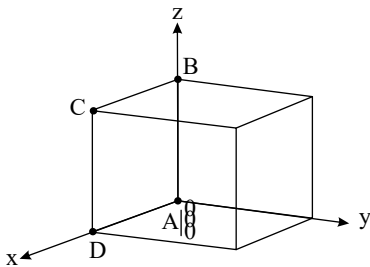


فصل سوم : بردارها

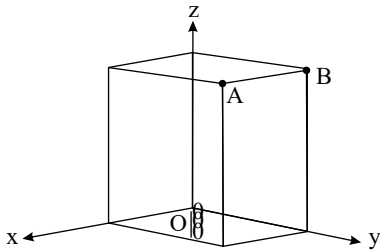
معرفی $\mathbb{R}^3$ و بردارها

۲۰۶ بر روی صفحه $x = 1$ نقاطی را که مؤلفه دوم آنها ۲ است، مشخص نمایید و شکل حاصل از این نقاط را توصیف نمایید و معادلات مربوط به آن را بنویسید.

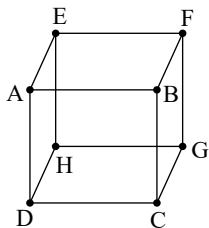
۲۰۷ طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل مقابل به ترتیب ۲ و ۳ و ۴ است. حدود تغییرات m و n را طوری به دست آورید که نقطه $(2n - p - 1, p - 1, m + p)$ در وجه $ABCD$ قرار گیرد.



۲۰۸ طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل مقابل به ترتیب ۲، ۳ و ۴ است. حدود تغییرات m را طوری به دست آورید که نقطه $(m + n + p, n + 2, p - 1)$ روی یال AB قرار گیرد.



۲۰۹ اگر معادلات وجه‌های یک مکعب مستطیل به صورت $x = 1, x = 3, y = 1, y = 4, z = 2$ و $z = -2$ باشد، الف) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.



ب) در هریک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

پ) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار گرفته باشند.

ت) معادلات مربوط به یال‌های AB و BF را بنویسید. (دقت کنید یال‌ها پاره‌خط‌اند.)

ث) روابط مشخص‌کننده دو وجه $ADHE$ و $EFGH$ را بنویسید.

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد.

چ) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که روی یکی از وجه‌های آن و غیرواقع بر یال‌ها باشد.



۲۱۰) درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) نقطه $A = (-1, 5, 7)$ در ناحیه چهارم قرار دارد.

ب) نقطه $B = (3, 2, -1)$ در ناحیه پنجم قرار دارد.

پ) معادله $z = 3$ در فضا معادله یک خط است.

ت) معادله $\begin{cases} y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$ معادله خطی موازی محور x هاست.

ث) بردار $\vec{V} = (0, 0, 5)$ عمود بر صفحه xoy است.

ج) بردار $\vec{V} = (-2, 0, 3)$ موازی محور y هاست.

۲۱۱) چهار نقطه $A(2, 1, 3)$ و $B(-1, 1, 3)$ و $C(2, -1, 3)$ و $D(-1, -1, 3)$ مفروض هستند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهار ضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.

۲۱۲) الف) مختصات چند نقطه را مشخص کنید که در رابطه $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ صدق کنند و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

ب) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x = 0$ دارد؟

۲۱۳) اگر B تصویر قائم نقطه $A = (1, m-1, -2)$ بر محور y ها و D قرینه نقطه $C(m+2, -1, 1)$ نسبت به محور x ها باشد،

کمترین فاصله B تا D چقدر است؟

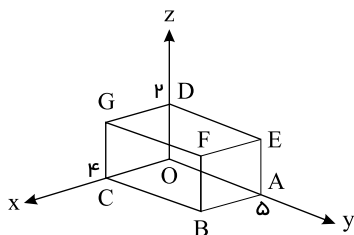
۲۱۴) اگر اندازه تصاویر قائم بردار $\vec{V}$ بر صفحات مختصات xoy و xoz و yoz به ترتیب برابر $4\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ و $4\sqrt{3}$ باشد، طول بردار $\vec{V}$ را به دست آورید.

۲۱۵) اگر تصویر قائم نقطه $A(m, 1, 2)$ بر صفحه yoz برابر B و قرینه نقطه B نسبت به صفحه xoy برابر C باشد، مقدار m را طوری

به دست آورید که طول میانه وارد بر ضلع BC برابر $2\sqrt{2}$ باشد.

۲۱۶) نقاط $A(1, 2, 1)$ و $B(3, 1, 3)$ و $C(1, 5, 4)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه AM و محیط مثلث را محاسبه کنید.

۲۱۷) در مکعب مستطیل شکل مقابل، $OC = 4$ و $OD = 2$ و $OA = 5$ می باشد. فاصله رأس F از وسط OC را بیابید؟



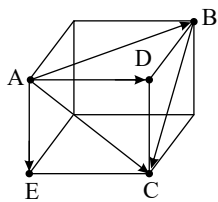


۲۱۸ در مثلث ABC ، $A = (2, -1, 1)$ و $B = (3, 1, 0)$ و $C = (m, 0, 2)$ ، میانه ضلع BC ، بر آن ضلع عمود می‌باشد. مقدار m را به دست آورید.

۲۱۹ تصویر قائم نقطه $A(-2, 3, 5)$ بر صفحه xoy ، نقطه A' می‌باشد. اگر $B(3, -1, 4)$ باشد، طول $A'B$ را بیابید؟

۲۲۰ اگر $|a| = |b| = |a + b|$ هر یک از زوایای زیر چقدر است؟

- الف) زاویه بین a و b ب) زاویه بین a و $a - b$ پ) زاویه بین b و $a - b$
 ت) زاویه بین b و $-a - b$ ث) زاویه بین $a + b$ و $a - b$



۲۲۱ اگر شکل مقابل یک مکعب باشد، درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

ب) زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ ، 60° است.

پ) زاویه بین $\vec{BC}$ و $\vec{AC}$ ، 60° است.

ت) زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{AD}$ ، 45° است.

ث) زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{AE}$ ، 135° است.

۲۲۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموع طول‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از طول بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کمتر نیست.

ب) خط $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ با محور z موازی است.

۲۲۳ خط $\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ با محور موازی است.

۲۲۴ همه نقاطی که مختصات آنها در رابطه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ صدق کنند، را مشخص می‌کنند.

ضرب داخلی

۲۲۵ سه بردار a, b, c مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $b \neq c$.

۲۲۶ فرض کنید $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ به ترتیب بردارهایی به طول ۱، ۲ و ۳ باشد با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

۲۲۷ اگر دو بردار a و b هم طول بوده و $|a - b| = 1$ ، $|a + b| = \sqrt{3}$ باشد، زاویه بین a و b چقدر است؟



۲۲۸ اگر طول دو بردار a و b برابر بوده و زاویه بین آنها θ باشد، ثابت کنید:

$$|a + b| = 2|a| \cos \frac{\theta}{2}$$

۲۲۹ اگر طول دو بردار a و b برابرهم بوده و زاویه بین آنها θ باشد، ثابت کنید:

$$|a - b| = 2|a| \sin \frac{\theta}{2}$$

۲۳۰ اگر a, b, c سه بردار باشد به طوری که $a + b + c = \vec{0}$ ثابت کنید:

$$a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -\frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}{2}$$

۲۳۱ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضای سه بعدی باشند، هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $a \cdot a = |a|^2$

ب) $a \cdot b = b \cdot a$

۲۳۲ اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار در فضای سه بعدی باشند، ثابت کنید:

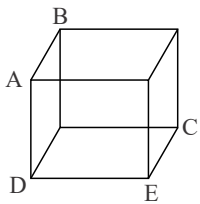
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

۲۳۳ دو بردار $a = (2m - 1, m + 2, 2)$ و $b = (-1, 3, m - 1)$ مفروض اند. اگر $|a - b| > |a + b|$ حدود m را به دست آورید.

۲۳۴

در مکعب مقابل طول یال‌ها برابر $3\sqrt{2}$ است. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ ب) $\vec{AB} \cdot \vec{DE}$



۲۳۵ اندازه بردارهای b و c به ترتیب برابر ۳ و ۲ است. اگر $2a + b + c = \vec{0}$ ، حاصل عبارت $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$ را به دست آورید.

۲۳۶ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) زاویه بین a و b منفرجه است، اگر و فقط اگر $a \cdot b < 0$.

ب) $a + b$ و $a - b$ عمود برهم اند، اگر و فقط اگر زاویه بین a و b برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد.

پ) $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

ت) اگر $a \cdot b = 2 + a \cdot c$ ، آنگاه زاویه بین a و $b - c$ حاده است.

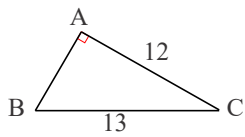


۲۳۷ اگر بردار a در صفحه xoz بوده و $|a| = 2$ و این بردار بر بردار $b = i - j + k$ عمود باشد، حاصل هریک از موارد زیر را به دست آورید.

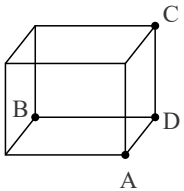
الف) $a \cdot i$ ب) $a \cdot j$ پ) $a \cdot k$

۲۳۸ فرض کنید $a = (m, -1, 1)$ ، $b = (1, n, 2)$ و $a \cdot b = 3$ ؛ مقدار n, m را طوری به دست آورید که $|a + b| = 3\sqrt{2}$ باشد.

۲۳۹ فرض کنید زاویه بین دو بردار a و b برابر $\frac{\pi}{3}$ بوده و $|b| = 2$ باشد. اگر $|2a - 3b|^2 = 28a \cdot b$ ، اندازه بردار a را به دست آورید.



۲۴۰ در مثلث قائم الزاویه مقابل حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ را به دست آورید.



۲۴۱ در مکعب شکل مقابل به ضلع ۲ واحد، حاصل عبارت $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AB} \cdot \vec{BC}$ را به دست آورید.

۲۴۲ سه بردار متمایز و غیر صفر a, b, c در یک صفحه مفروض اند. اگر c بر بردار $a - b$ و b بر بردار $a - c$ عمود باشد، ثابت کنید a بر بردار $b - c$ عمود است.

۲۴۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) برای بردارهای غیر صفر a و b و c ، اگر $a \times b = a \times c$ آنگاه داریم: $b = c$

ب) برای بردارهای غیر صفر a و b و c ، اگر $a \cdot b = a \cdot c$ آنگاه داریم: $b = c$

۲۴۴ اگر سه نقطه $A = j + k$ و $B = \sqrt{3}i + 2j - k$ و $C = \sqrt{3}i + 2j + k$ سه رأس یک مثلث باشند، مقدار زاویه A را به دست آورید.

۲۴۵ ثابت کنید θ زاویه بین دو بردار a و b از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$



۲۴۶ بردار غیر صفر $V = (|a|, a, a - |a|)$ مفروض است. درستی و نادرستی هریک از عبارات زیر را تعیین کنید:

- الف) اگر V بر محور z ها عمود باشد، زاویه آن با محور oy حاده است.
 ب) اگر V با محور z ها زاویه منفرجه بسازد، زاویه آن با محور oy حاده است..
 پ) اگر V با محور y ها زاویه حاده بسازد، زاویه آن با ox حاده و عمود بر محور z هاست.

۲۴۷ اگر بردار a' تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b باشد، ثابت کنید:

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

۲۴۸ برای هریک از بردارهای a و b که در زیر آمده است تصویر قائم a را در امتداد بردار b به دست آورید.

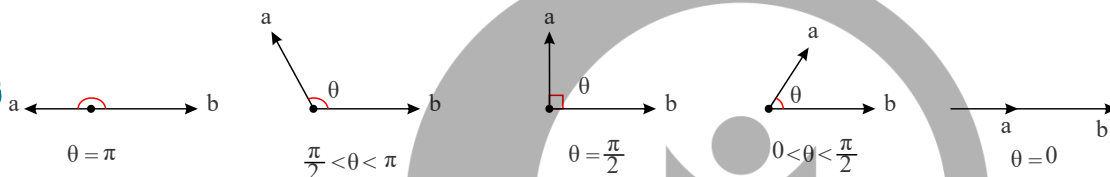
الف) $a = (2, -1, 2)$, $b = i$

ب) $a = (2, 3, 1)$, $b = (3, 2, 1)$

ج) $a = (1, 1, 0)$, $b = (-1, 2, 4)$

۲۴۹ هریک از حالات زیر را با شکل‌های داده شده نظیر کنید.

الف) $a \cdot b > 0$ (ب) $a \cdot b = 0$ (پ) $a \cdot b < 0$ (ت) $a \cdot b = |a| |b|$ (ث) $a \cdot b = -|a| |b|$



۲۵۰ اگر $A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 1, 1)$ و $C = (-1, 1, 0)$ سه نقطه در فضا باشند، تصویر قائم بردار $2OA + OB$ بر امتداد بردار $2OC - OB$ را به دست آورید.

۲۵۱ اگر θ زاویه بین دو بردار a, b حاده بوده و تصویر قائم و قرینه بردار a نسبت به بردار b به ترتیب a' و a'' باشند. ثابت کنید:
 $a' \cdot a'' = |a|^2 \cdot \cos^2 \theta$

۲۵۲ اگر a' و a'' به ترتیب تصویر قائم و قرینه بردار a نسبت به بردار b باشند، درستی و نادرستی هریک از موارد زیر را تعیین کنید:

الف) $(a - \frac{a \cdot b}{|b|^2} b) \perp b$

ب) $\frac{a' \cdot a''}{a \cdot a'} = 1$

پ) $(a - a') \cdot (a + a'') = 0$

۲۵۳ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ثابت کنید:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -|AB|^2$$



۲۵۴ تصویر قائم بردار $i = (1, 0, 0)$ بر امتداد بردار $j = (0, 1, 0)$ را بیابید.

۲۵۵ اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

۲۵۶ به ازای هر دو بردار دلخواه u و v نامساوی کوشی - شوارتز را اثبات کنید.

۲۵۷ اگر $\sqrt{2}x + 3y - z = -2$ ، کمترین مقدار عبارت $x^2 + y^2 + z^2$ را به دست آورید.

ضرب خارجی

۲۵۸ اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، ثابت کنید: $a \times b = b \times c = c \times a$

۲۵۹ اگر $a = -2i + j - 3k$ و $b = i - 2j + k$ باشد، بردار عمود بر دو بردار $\sqrt{5}a - 7b$ و $\sqrt{3}b + 4a$ را به دست آورید.

۲۶۰ بردارهای a و b مفروض‌اند. به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ ، مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۲۶۱ سه بردار a ، b و c مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟

۲۶۲ برداری عمود بر دو بردار $b = (-2, 1, -5)$ و $a = (1, -3, 2)$ پیدا کنید.

۲۶۳ مقدار m و n را طوری به دست آورید که بردار $a = (m - 2, -3, n + 1)$ بر دو بردار $b = (2, 3, 4)$ و $c = (-1, 2, 1)$ عمود باشد.

۲۶۴ اگر $a \cdot j = 4$ و $a \cdot k = 5$ حاصل اندازه $a \times i$ را به دست آورید.

۲۶۵ اگر a و b و c سه برابر غیر صفر باشند، کدامیک درست است؟

الف) $a \times b + c \times a = \vec{0} \Rightarrow b = c$

ب) $a \times b = \vec{0} \Rightarrow a \parallel b$

۲۶۶ اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ و $\vec{a} \neq \vec{0}$ و $\vec{b} \neq \vec{c}$ ، کدام نادرست است؟

(۲) $\vec{a}$ با $\vec{b} - \vec{c}$ موازی است.

(۴) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه‌اند.

(۱) $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ عمود است.

(۳) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$



۲۶۷ سه نقطه $A(1, 2, -1)$ و $B(3, 1, 2)$ و $C(-1, 4, 1)$ مفروضند. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ باشند، چقدر است؟

۲۶۸ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$ ، $B = (5, 5, 0)$ و $C = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.

۲۶۹ اگر $3a + b = (-3, 1, 2)$ و $a - 4b = (0, 2, 1)$ باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی دو بردار a و b را به دست آورید.

۲۷۰ کدامیک از موارد زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) اگر بردار a یک ضلع متوازی‌الاضلاع و بردار d یک قطر آن باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |a \times d|$
 ب) اگر d و d' قطرهای یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |d \times d'|$

۲۷۱ اگر a و b دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند، ثابت کنید:

$$a \cdot (a \times b) = 0$$

۲۷۲ اگر k, j, i بردارهای یکه باشند حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(3j - k) \cdot [(2k - i) \times (2i - j)]$$

۲۷۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$$۱) k \times j = i$$

$$۲) j \times j = \vec{0}$$

$$۳) k \times (i \times j) = \vec{0}$$

$$۴) k \cdot (j \times i) = -1$$

$$۵) i \times (k - j) = (0, -1, -1)$$

۲۷۴ فرض کنید a, b, c سه بردار بوده که در یک صفحه قرار ندارند. ثابت کنید حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی این سه بردار از رابطه $V = |a \cdot (b \times c)|$ به دست می‌آید.

۲۷۵ مقدار m را طوری بیابید که سه بردار $a = 2i + (m + 1)j - 3k$ ، $b = 2j + k$ و $c = -i + j + k$ هم‌صفحه باشند.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۲

$$a_{ij} = \begin{cases} 7 & , i = j \\ i + j & , i > j \\ i^2 & , i < j \end{cases}$$

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

۳

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$x + y + z = 2 + 1 + (-2) = 1$$

۴

الف) به‌جز درایه‌های روی قطر اصلی، بقیه درایه‌ها صفر هستند.

ب

قطری بوده و همه درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند.

۵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A + B - C = O_{3 \times 2} \Rightarrow C = A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - 1 & 2b \\ 2c & 2d - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 - m \end{bmatrix}$$

$$2a - 1 = -1 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0, \quad 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$2c = -2 \Rightarrow c = -1, \quad 2d - 1 = 3 - m \quad (1)$$

$$\text{فرض: } a + d = 5 \Rightarrow 0 + d = 5 \Rightarrow d = 5 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2 \times 5 - 1 = 3 - m \Rightarrow m = -6$$

۷

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b - 3 & -2b - 2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -8 + 2a = 0 \rightarrow a = 4 \\ b - 3 = 0 \rightarrow b = 3 \end{cases}$$

۸

$$AB = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار m را نشان می‌دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار n را نشان می‌دهد.

$$AC = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18 \\ 35 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام‌شده محصولات در بازار m و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام‌شده محصولات در بازار n می‌باشد.



$$AB - AC = \begin{bmatrix} 2750 \\ 1900 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم سود یعنی از قیمت فروش، قیمت تمام‌شده را کم کنیم، پس ۲۷۵۰ میزان سود فروش محصولات در بازار m و عدد ۱۹۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار n را نشان می‌دهد.

۹

$$A = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{100} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{100} \times B^{100}$$

$$B^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow B^r = I$$

$$B^r = B^r \times B^r = I \times I = I \Rightarrow B^r = B^r \times B^r = I \times I = I \Rightarrow B^{100} = I$$

$$A^{100} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{100} \times B^{100} = \frac{1}{3^{50}} \times I$$

۱۰

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}_C \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $AB = AC$ اما $B \neq C$

۱۲

$$AB = BA = O \Rightarrow \begin{cases} AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O} \\ BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O} \end{cases}$$

$$AC = A \Rightarrow AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow AC = A$$

$$CA = C \Rightarrow CA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow CA = C$$

۱۳

الف درست

$$A_{1 \times 3} \times B_{3 \times 1} = C_{1 \times 1} = \text{عدد}$$

ب نادرست

$$\text{مثال نقض: } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۱۴

$$A^r = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 18 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$mA^r + nA + rI = \bar{O} \rightarrow \begin{bmatrix} 31m & 18m \\ 12m & 7m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5n & 3n \\ 2n & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 31m + 5n + r & 18m + 3n \\ 12m + 2n & 7m + n + r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 18m + 3n = 0 \\ 12m + 2n = 0 \end{cases} \rightarrow 6m + n = 0 \Rightarrow n = -6m$$

با جایگذاری $n = -6m$ در درایه‌های دیگر نتیجه می‌گیریم $r = -m$ ؛ پس با فرض $m = 1$ مقادیر $n = -6$ و $r = -1$ به دست می‌آیند.



۱۵

$$A^r = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, 3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^r - 3A + 3I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۱۶

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{bmatrix}, \beta I = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$A^r = \alpha A + \beta I \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

۱۷

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{r^0} = \begin{bmatrix} 1 & 4^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید فقط درایه سطر اول و ستون دوم متغیر است.

۱۸

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{1^0} = \begin{bmatrix} 2^1 & 2^1 & 2^1 & 2^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 2^1 & 2^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 8 \times 2^1 = 2^3 \times 2^1 = 2^{12}$$

۱۹

$$\text{الف) } (A+B)^r = (A+B)(A+B) = A^r + AB + BA + B^r \xrightarrow{AB=BA} A^r + 2AB + B^r$$

$$\text{ب) } (A-B)(A+B) = A^r + AB - BA - B^r \xrightarrow{AB=BA} A^r - B^r$$

۲۰

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

$$A^{1^0} = (A^r)^{r^0} = (-4I)^{r^0} = -(4^{r^0}) \times I^{r^0} = -(2^{5^0})I$$

۲۱

$$A^r = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$



$$A^r = I \xrightarrow{\times A} A^r = A$$

$$A^r = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } r} A^r = I \xrightarrow{\times A} A^r = A$$

$$A^r = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^r = A^r A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^r & 0 & 0 \\ 0 & 3^r & 0 \\ 0 & 0 & 4^r \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix} \quad \text{نتیجه می‌گیریم اگر } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ آنگاه داریم:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = 0 \Rightarrow n = 3$$

در اینجاست که ماتریس A را پوچ توان از مرتبه ۳ می‌گوئیم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^r = I \Rightarrow (A^r)^0 = I^0 \Rightarrow A^{1^0} = I$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$rA = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \Delta I_r = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^r - rA - \Delta I_r = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^r = I \Rightarrow A^r = A \times A^r = AI = A \Rightarrow A^r = A^r A = A \times A = A^r = I \Rightarrow A^r - A^r = 0$$

$$= A^r (A^r - I) = I(A - I) = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & 3 \\ 1 & 4|A| \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 4|A|^r - 3$$

$$\rightarrow 4|A|^r - |A| - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 25 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow |AB| = 22 \quad (1)$$

$$|A| = 11 + 3 = 14 \rightarrow |AB| = 14 \times 2 = 28 \quad (2)$$

$$|B| = 6 - 4 = 2$$

$$(1), (2) \rightarrow |AB| = |A| |B|$$



$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 2 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \end{bmatrix} \rightarrow |AB| = -13$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |BA| = -2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

۳۰ دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$0 = 1 \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + 0 = 1 \rightarrow -(1 - x^2) = 1 \rightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$\rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

۳۱

$$||A| A| \stackrel{|A|=5}{=} |5A| = 125 |A| = 625$$

۳۲ می‌دانیم $|A^n| = |A|^n$ بنابراین داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

$$\rightarrow |A|^2 = |A|^2 = (-30)^2 = 900$$

۳۳ می‌دانیم ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که درایه‌ها یکسان هستند. چون $a_{11} = 4$ بنابراین داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 64$$

۳۴

$$A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 20|A|^2 - 5|A| \rightarrow 20|A|^2 - 6|A| = 0 \rightarrow 2|A|(10|A|^2 - 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow |A|^2 - 2 = -2 \\ |A| = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow |A|^2 - 2 = \frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 2 \\ \rightarrow |A|^2 - 2 = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 2 \end{cases} \end{cases}$$

۳۵ بسط برحسب سطر اول:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 6 + 20 = 14$$

بسط برحسب ستون سوم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$$

نتیجه:

اولاً دترمینان برحسب هر سطر یا ستونی بسط داده شود، فرقی نمی‌کند و حاصل یکسان است. ثانیاً بهتر است دترمینان را برحسب سطر یا ستونی بسط دهیم که صفر بیشتری دارد.

۳۶

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 13 + 6 = 19$$



$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

۳۷

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow +x(b-d) - y(a-c) + 1(ad-bc) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + C = 0$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می‌کنیم

$$A(a, b) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

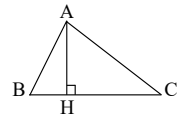
$$B(c, d) \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه $B(c, d)$, $A(a, b)$ عبور می‌کند.

برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع AH یعنی فاصله A از خط BC .

ابتدا معادله خط BC را می‌نویسیم.



$$\begin{cases} B(b_1, b_1) \\ C(c_1, c_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{c_1 - b_1}{c_1 - b_1} \\ y - b_1 = \frac{c_1 - b_1}{c_1 - b_1}(x - b_1) \Rightarrow (y - b_1)(c_1 - b_1) = (c_1 - b_1)(x - b_1) \end{cases}$$

$$|AH| = \frac{|(a_1 - b_1)(c_1 - b_1) - (c_1 - b_1)(a_1 - b_1)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_1 - b_1)^2}} = \frac{|a_1(b_1 - c_1) - b_1(a_1 - c_1) + c_1(a_1 - b_1)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_1 - b_1)^2}}$$

از طرفی $|BC| = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_1 - b_1)^2}$ پس:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |AH| \times |BC| = \frac{1}{2} |a_1(b_1 - c_1) - b_1(a_1 - c_1) + c_1(a_1 - b_1)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(b_1 - c_1) - b_1(a_1 - c_1) + c_1(a_1 - b_1)$$

بنابراین نصف قدرمطلق این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

سطر دوم: ۳۹

$$|A| \xrightarrow{\text{بسط حول سطر ۲}} -2(-10 - 35) + (-1)(-2 - 28) - 3(5 - 20) = 90 + 30 + 45 = 165$$

ستون سوم:

$$|A| \xrightarrow{\text{بسط حول ستون ۳}} +7(10 + 4) - 3(5 - 20) - 2(-1 - 10) = 165$$

دترمینان: به کمک روش ساروس:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (1 \times 60 + 70) - (-28 + 15 - 20) = 132 + 33 = 165$$

۴۰

$$|A^2| |A| = |A^2| \times |A|^3 = |A|^2 \times |A|^3 = |A|^5 = 3^5 = 243$$

۴۱

$$M = \begin{bmatrix} 1^2 - 1^2 & 1^2 - 2^2 & 1^2 - 3^2 \\ 2^2 - 1^2 & 2^2 - 2^2 & 2^2 - 3^2 \\ 3^2 - 1^2 & 3^2 - 2^2 & 3^2 - 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|M| = 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + (-8) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |M| = 3 \times 40 - 8 \times 15 = 0$$

۴۲



$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_0 - e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_0 + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_0 = 0$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا دو ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۴۳

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \underbrace{(4 - 9 - 8)}_{-13} - \underbrace{(3 - 12 - 8)}_{-17} = 4$$

۴۴

$$2|A|^2 + 3|A| - 2 = 0$$

$$|A| = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2(-2)}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow |A| = -2, \frac{1}{2}$$

می‌توان دو ماتریس زیر را معرفی کرد که برای آنها $|A| = -2, \frac{1}{2}$ باشد.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2 \times 1 \times 1 = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

۴۵

$$A = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A + I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس $2A + I$ را با بسط نسبت به سطر اول می‌یابیم:

$$|2A + I| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+4) - (-2)(2+8) + (-4)(4-4) = 5 + 20 = 25$$

۴۶

$$A = [i^r - j]_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1^r - 1 & 1^r - 2 \\ 2^r - 1 & 2^r - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۴۷

$$|2A^{-1}| + |3A| = 2^r |A^{-1}| + 3^r |A| = 4 \left(\frac{1}{|A|} \right) + 9|A| = \frac{4}{3} + 27 = \frac{85}{3}$$

۴۸

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x \\ x & x^r - 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = B^r \rightarrow \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x \\ x & x^r - 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = -1$$

۴۹



$$A^r = A \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^{-1}} \underbrace{A^{-1}A}_I = \underbrace{A^{-1}A}_I \rightarrow A = I$$

$$B^r = B \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } B^{-1}} \underbrace{B^{-1}B}_I = \underbrace{B^{-1}B}_I \rightarrow B = I$$

$$\rightarrow (A+B)^{-1} = (I+I)^{-1} = (2I)^{-1} = \frac{1}{2}I^{-1} = \frac{1}{2}I$$

$$AB = A+B \xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{\text{ضرب در } A^{-1}} A^{-1}(AB) = A^{-1}(A+B)$$

$$(A^{-1}A)B = A^{-1}A + A^{-1}B \rightarrow IB = I + A^{-1}B$$

$$\rightarrow B = I + A^{-1}B \xrightarrow[\text{از سمت راست}]{\text{ضرب در } B^{-1}} BB^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1}$$

$$I = IB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \rightarrow I = B^{-1} + A^{-1} \rightarrow A^{-1} + B^{-1} = I$$

$$A^r = A \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^{-1}} \underbrace{A^{-1}A}_I = \underbrace{A^{-1}A}_I \rightarrow A = I$$

$$\rightarrow (I - 3A)^{-1} = (I - 3I)^{-1} = (-2I)^{-1} = -\frac{1}{2}I^{-1} = -\frac{1}{2}I$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow |A|^r = 2 \cdot 9 \rightarrow |A| = 3$$

$$|(2A)^{-1}| = \left| \frac{1}{2}A^{-1} \right| = \frac{1}{2}|A^{-1}| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{|A|} = \frac{1}{12}$$

$$A = \begin{bmatrix} |A| & 2|A| \\ -3 & 5|A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{از دو طرف نثرمینان می‌گیریم}} |A| = 5|A|^2 + 6|A| \rightarrow 5|A|^2 + 5|A| = 0$$

$$\rightarrow 5|A|(|A| + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = -1 \end{cases} \text{ غلطی}$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = I \xrightarrow{\text{از طرفین نثرمینان می‌گیریم}} |A^{-1}A| = |I|$$

$$\rightarrow |A^{-1}| |A| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$(A^r)^{-1} = B$$

$$(A^{-1})^r = B \rightarrow A^{-1} \times A^{-1} = B$$

$$\xrightarrow{\times A} \underbrace{AA^{-1}}_I \times A^{-1} = AB \rightarrow A^{-1} = AB$$

$$\text{ماتریس } A \text{ وارون‌پذیر نیست.} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow m(m-2) - 3 = 0 \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \rightarrow (m+1)(m-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

طبق تعریف وارون باید ضرب AB و $B^{-1}A^{-1}$ برابر I باشد. (۵۷)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_I)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_I)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$AB = I \rightarrow |AB| = |I| \rightarrow |A||B| = 1 \rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$$

(الف) (۵۸)



پس A وارون پذیر است.
(ب)

$$AB = I \xrightarrow{\text{ضرب در } A^{-1}} A^{-1}(AB) = A^{-1}I$$

$$\rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1} \rightarrow IB = A^{-1} \rightarrow B = A^{-1}$$

۵۹

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k} \times A^{-1}, (A^{-1})^{-1} = A$$

کافیست نشان دهیم: $AB = BA = I$ ۶۰

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۶۱ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است. بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

۶۲

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$|A| = (5 \times 2) - (3 \times 4) = 10 - 6 = 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

۶۳

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow 2A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 3B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{9}{17} \\ -\frac{15}{17} & -\frac{6}{17} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2A^{-1} - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + \frac{3}{17} & -\frac{3}{7} - \frac{9}{17} \\ -\frac{2}{7} + \frac{15}{17} & \frac{4}{7} + \frac{6}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{106}{119} & -\frac{114}{119} \\ \frac{71}{119} & \frac{110}{119} \end{bmatrix}$$

۶۴

$$A^{-1}(A + 2B^{-1} + AB^{-1})BA = (A^{-1} \times A + 2A^{-1}B^{-1} + A^{-1}AB^{-1})BA = (I + 2A^{-1}B^{-1} + IB^{-1})BA = I \times BA + 2A^{-1} \underbrace{B^{-1}BA}_I + \underbrace{BB^{-1}}_I A$$

$$= BA + 2A^{-1}A + A = BA + 2I + A$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow BA + 2I + A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$$

۶۵

$$A^r A^{-1} = A^r \times \underbrace{A \times A^{-1}}_I = A^r I = A^r \Rightarrow |A^r A^{-1} + 3A^r| = |A^r + 3A^r| = |4A^r| = 4^r \times |A|^r = 4^r \times 2^r = 4^r$$

۶۶ الف) درست

$$A \text{ و } B \text{ وارون پذیر} \Rightarrow |A| \neq 0, |B| \neq 0 \Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow AB \text{ وارون پذیر}$$

ب) درست

$$AB \text{ وارون پذیر} \Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow |A| \times |B| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0, |B| \neq 0 \Rightarrow A \text{ و } B \text{ وارون پذیر}$$

پ) درست



وارون پذیر نیست $AB \Rightarrow |AB| = 0 \Rightarrow |B| = 0, |A| = 0 \Rightarrow$ وارون پذیر نیستند A و B

(ت) نادرست

$|B| = 0$ یا $|A| = 0 \Rightarrow |A| \times |B| = 0 \Rightarrow |AB| = 0 \Rightarrow$ وارون پذیر نیست AB

A یا B وارون پذیر نیست، (نه هر دو A و B).

۶۷

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow x + y = 1 + 3 = 4$$

۶۸ خیر، زیرا دترمینان ماتریس ضرایب صفر است؛ بنابراین محاسبه وارون امکان ندارد.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

درواقع معادلات این دستگاه، معادله ۲ موازی را نشان می‌دهد که می‌دانیم دو خط موازی نقطه برخوردی (جوابی) ندارند.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases} \quad \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{4}{2}$$

۶۹ شرط اینکه دستگاه یک جواب داشته باشد این است که ۲ خط متقاطع باشند.

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k}{1} \neq \frac{3}{-2} \rightarrow \boxed{k \neq -\frac{3}{2}}$$

۷۰

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} + \frac{50}{26} \\ -\frac{2}{13} + \frac{30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{26} \\ \frac{26}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

۷۱

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B$$

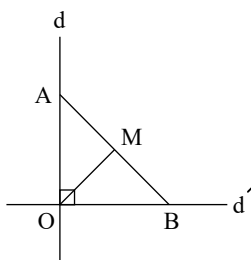
$$X = A^{-1}B, A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

۷۲

$$\text{شرط بی‌شمار جواب: } \frac{-2}{4} = \frac{k}{-6} = \frac{2}{m} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ k = 3 \end{cases}$$

۷۳ مطابق شکل دو خط d و d' برهم عمودند. مثلث AOB همواره قائم‌الزاویه می‌باشد. اگر M وسط وتر AB باشد، چون میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس:



$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2}$$

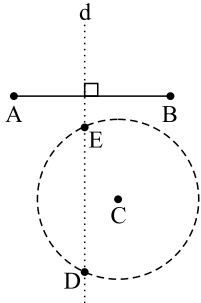


بنابراین با جابه‌جایی A و B ، طول OM همواره مقدار ثابت $\frac{L}{2}$ می‌باشد. پس مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{L}{2}$ می‌باشد. توجه کنید که A و B در هر چهار ناحیه می‌توانند جابه‌جا شوند. (به‌جز چهار نقطه‌ای که روی خط d و d' می‌افتد.)

(۷۴) مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

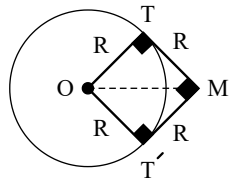
مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف و دایره جواب مسئله است.

اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند (نقاط D و E) مسئله دو جواب دارد. (همانند شکل روبه‌رو) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد و در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



(۷۵) مطابق شکل مماس‌های رسم‌شده از M برهم عمودند ($\hat{M} = 90^\circ$) و شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است. ($\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$)

مماس‌های رسم‌شده از M برابرند، یعنی: $MT = MT'$

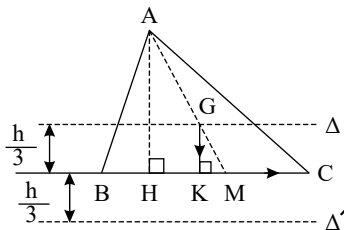


پس می‌توان نتیجه گرفت که $MTOT'$ مربع می‌باشد. داریم:

$$MT = MT' = OT = OT' = R \Rightarrow OM = \sqrt{2}R$$

پس مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{2}R$ می‌باشد.

(۷۶) ارتفاع $AH = h$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که اگر G محل هم‌رسانی میانه‌های مثلث ABC باشد، آنگاه داریم:



$$GM = \frac{1}{3}AM$$

در ادامه داریم:

$$GK \parallel AH \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK = \frac{AH}{3} = \frac{h}{3}$$

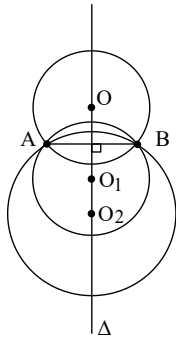
پس فاصله G از ضلع ثابت BC ، همواره $\frac{h}{3}$ است. بنابراین مکان هندسی G ، دو خط موازی با BC و به فاصله $\frac{h}{3}$ از آن در دو طرف BC می‌باشد.

(۷۷) اگر O ، O_1 و O_2 مراکز دایره‌هایی باشند که بر AB می‌گذرند:

$$\begin{cases} OA = OB \\ O_1A = O_1B \\ O_2A = O_2B \end{cases}$$

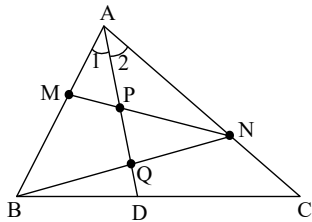


پس طبق ویژگی مکان هندسی، مکان هندسی مراکز این دایره‌ها، عمودمنصف AB خط Δ می‌باشد.



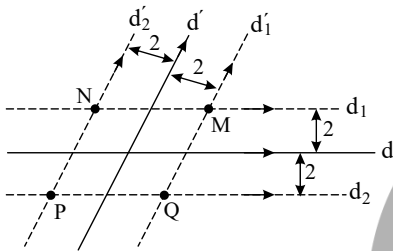
۷۸

مکان هندسی نقاطی که از AB و AC به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه A می‌باشد.
محل برخورد نیمساز AD با MN و BN پاسخ مسئله می‌باشد. (نقاط P و Q)



۷۹

مکان هندسی نقاطی که از یک خط به فاصله $2cm$ باشد، دو خط موازی با آن خط و به فاصله $2cm$ از آن می‌باشد.
مطابق شکل، مکان هندسی نقاطی که از d به فاصله $2cm$ باشند، دو خط موازی با d و به فاصله $2cm$ از آن می‌باشد و به همین ترتیب برای d' .
محل برخورد این مکان‌ها، چهار نقطه جواب مسئله می‌باشد یعنی نقاط M, N, P و Q .

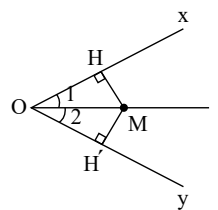


۸۰

طبق تعریف، مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. بنابراین اثبات در دو مرحله و به صورت قضیه دو شرطی انجام می‌شود یعنی ابتدا ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مرحله ۱:

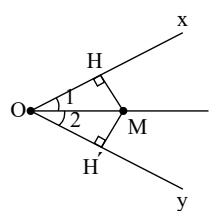
فرض	$M(\hat{O}_1 = \hat{O}_r)$ روی نیمساز $\hat{O}$ قرار دارد
حکم	$MH = MH'$



$$\left. \begin{array}{l} MO = MO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_r \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle MOH \cong \triangle MOH' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MH = MH'$$

مرحله ۲:

فرض	$MH = MH'$
حکم	$M(\hat{O}_1 = \hat{O}_r)$ روی نیمساز $\hat{O}$ قرار دارد

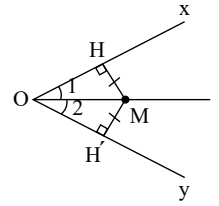


$$\left. \begin{array}{l} MO = MO \\ MH = MH' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویه قائمه}} \triangle MOH \cong \triangle MOH' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_r$$

۸۱



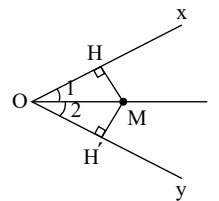
فرض	$MH = MH'$
حکم	$M(\hat{O}_1 = \hat{O}_2)$ روی نیمساز O قرار دارد



$$\left. \begin{array}{l} MO = MO \\ MH = MH' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویه قائمه}} \triangle MOH \cong \triangle MOH' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

۸۲

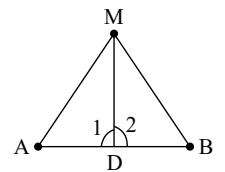
فرض	$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
حکم	$MH = MH'$



$$\left. \begin{array}{l} MO = MO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle MOH \cong \triangle MOH' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MH = MH'$$

۸۳

فرض	$MA = MB$
حکم	M روی عمود منصف AB قرار دارد



از M به وسط AB (D) وصل می‌کنیم. داریم:

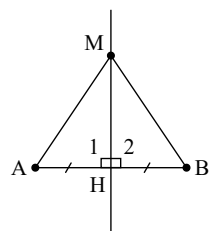
$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \\ MD = MD \\ DA = DB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle MAD \cong \triangle MBD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$$

۸۴

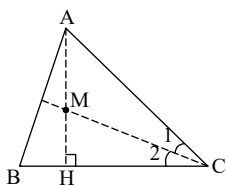
فرض	$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ, AH = HB$
حکم	$MA = MB$

$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = HB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AMH \cong \triangle BMH \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MA = MB$$

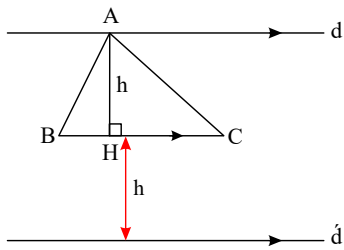


۸۵

می‌دانیم که مکان هندسی نقاطی که از AC و BC به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه C می‌باشد. محل برخورد نیمساز زاویه C با ارتفاع AH (نقطه M) پاسخ مسئله می‌باشد.



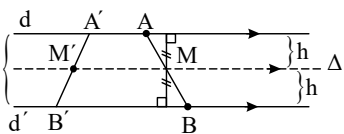
۸۶



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow h = AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \text{معلوم}$$

پس مکان هندسی A دو خط موازی با BC و به فاصله AH (معلوم) از آن می‌باشد.

۸۷

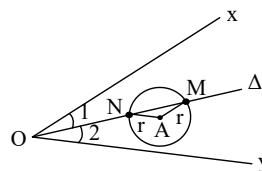


مطابق شکل دو خط d و d' موازیند.

همه نقاطی مانند M که وسط پاره‌های متکی بر d و d' هستند، این ویژگی را دارند که از d و d' به یک فاصله‌اند.

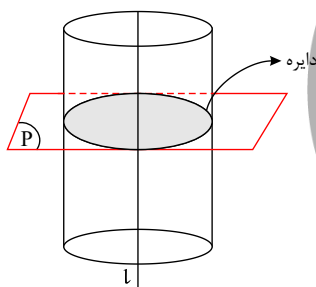
پس مکان هندسی وسط این پاره‌ها، خط Δ موازی d و d' و به فاصله یکسان از آنها می‌باشد.

۸۸

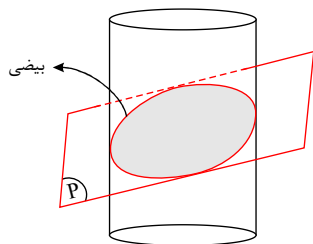


مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله r باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع r می‌باشد.
مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه می‌باشد.
محل برخورد این دو مکان پاسخ مسئله هستند.
مسئله ممکن است ۲ نقطه M و N به‌عنوان جواب داشته باشد یا یک نقطه در حالت مماس بودن خط Δ و دایره و هیچ نقطه در حالتی که Δ و دایره همدیگر را قطع نکنند.

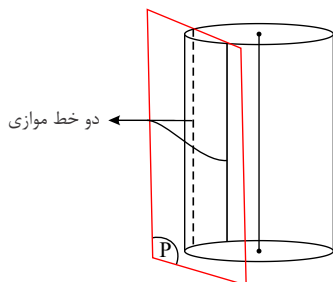
۸۹



— اگر صفحه p عمود بر محور سطح استوانه (ℓ) آن را قطع کند سطح مقطع حاصل دایره است.



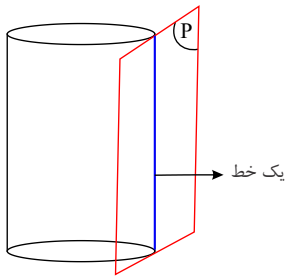
— اگر صفحه p بر محور سطح استوانه‌ای عمود نباشد و آن را قطع کند سطح مقطع حاصل بیضی است.



— اگر صفحه P شامل محور سطح استوانه‌ای یا موازی آن باشد، در دو خط موازی، سطح استوانه‌ای را قطع می‌کند.

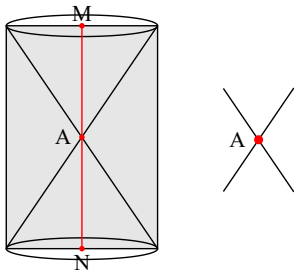


– اگر صفحه p مماس بر سطح استوانه‌ای باشد آن را در یک خط قطع می‌کند.



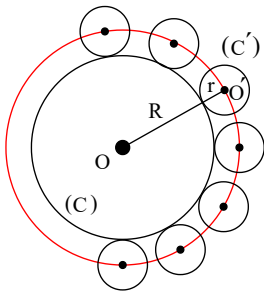
۹۰

فصل مشترک صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، برابر با، دو خط متقاطع در نقطه A است (شکل را ببینید).



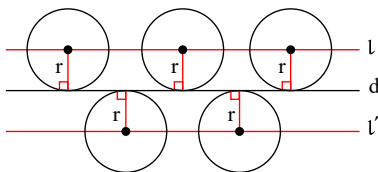
۹۱

دایره C' به مرکز O' و شعاع r بر دایره C به مرکز O و شعاع R مماس خارج است و $OO' = R + r$. بنابراین مکان هندسی موردنظر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R + r$ می‌باشد.



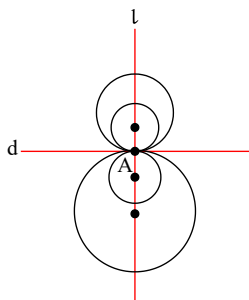
۹۲

مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d مماس‌اند به فاصله r از خط d و در دو طرف آن قرار دارند. بنابراین مکان هندسی موردنظر دو خط موازی d در دو طرف آن و به فاصله r از آن می‌باشد.



۹۳

تعدادی دایره دلخواه که در نقطه A بر خط d مماس‌اند رسم می‌کنیم. شعاع گذرنده از A در هر دایره بر خط d عمود است زیرا خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود می‌باشد. شعاع‌های عمود بر خط d باهم موازیند و در نقطه A مشترک هستند بنابراین برهم منطبق می‌باشند و خط ℓ شامل آن است. پس مکان هندسی مطلوب خطی عمود بر d در نقطه A است (ℓ).



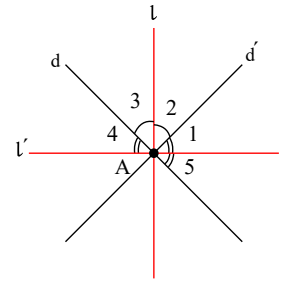
توجه: خود نقطه A نمی‌تواند مرکز دایره‌ای باشد که در نقطه A بر خط d عمود است و باید آن را از مکان هندسی موردنظر حذف کرد یعنی پاسخ دقیق خط ℓ بهجز تک نقطه A می‌باشد ولی در بیشتر سؤالات و تست‌ها این تک نقطه را که باید از مکان هندسی حذف شود در نظر نمی‌گیرند.

۹۴

نقطه تقاطع دو خط d و d' را A می‌نامیم. از تقاطع دو خط d و d' چهار زاویه با رأس A ایجاد می‌شود که دایره‌ها متقابل به رأس هستند. مکان هندسی تقاطعی که از ضلع‌های این زاویه‌ها به یک فاصله هستند، نیمساز آنها یعنی خط‌های ℓ و ℓ' می‌باشند. دقت کنید که ℓ و ℓ' برهم عمودند.



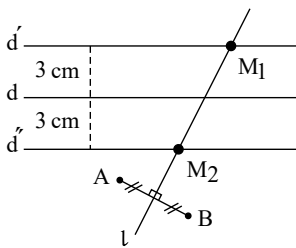
$$\begin{aligned}
 d\hat{A}d' \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{A}_r \\
 \left. \begin{aligned} \hat{A}_d = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_r = \hat{A}_d \text{ (متقابل به رأس)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_r \\
 \hat{A}_1 + \hat{A}_r + \hat{A}_r + \hat{A}_r = 180^\circ \\
 \rightarrow 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_r = 180^\circ \\
 \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_r = 90^\circ \\
 \Rightarrow \ell, \ell' \text{ برهم عمودند.}
 \end{aligned}$$



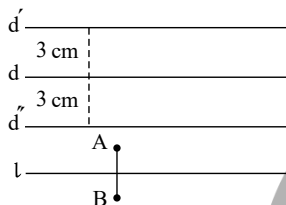
۹۵) مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی d به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد خط ℓ (عمودمنصف AB) و دو خط d' و d'' جواب مسئله است.

بحث در وجود جواب:

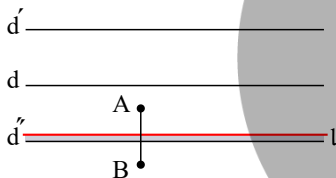
– اگر ℓ یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم می‌کند و مسئله ۲ جواب دارد. (نقاط M_1 و M_2) شکل را ببینید.



– اگر ℓ با دو خط d' و d'' موازی باشد مسئله جواب ندارد. (AB بر d عمود است.)



– اگر ℓ بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



۹۶) درست – محل برخورد عمودمنصف‌های AB و BC

ب درست

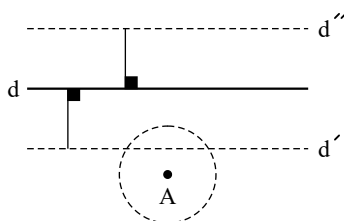
پ نادرست – در صورتی درست است که چهار نقطه روی یک دایره باشند.

۹۷) مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط d' و d'' در طرفین خط d و به موازات d است، این دو خط را رسم می‌کنیم. محل برخورد دو خط d' و d'' با دایره، مطابق شکل، جواب مسئله است.

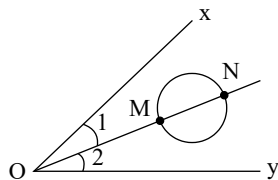
اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند، مسئله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط d' و d'' بر دایره مماس باشد، مسئله ۱ جواب دارد.

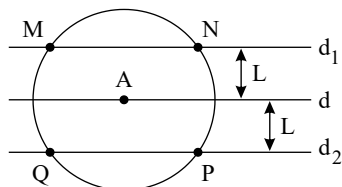
اگر هیچ‌یک از دو خط d' و d'' دایره را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



۹۸) مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه به یک فاصله می‌باشد، نیمساز آن زاویه است. محل برخورد نیمساز با دایره جواب مسئله است. مسئله می‌تواند دو جواب M و N یا یک جواب و یا بدون جواب باشد.

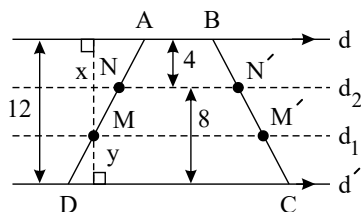


۹۹ مکان هندسی نقاطی که از d به فاصله L باشند، دو خط d_1 و d_2 موازی با آن و به فاصله L می‌باشد.



همچنین مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله r باشد، دایره‌ای به مرکز A و شعاع r می‌باشد. محل برخورد دایره و d_1 و d_2 پاسخ مسئله است. در شکل رسم شده، چهار نقطه M و N و P و Q پاسخ مسئله هستند. برای یافتن بقیه حالت‌ها باید در نظر بگیریم که دو خط d_1 و d_2 در چه حالت‌هایی دایره را قطع می‌کنند. این دو خط می‌توانند دایره را در هیچ، یک، دو، سه یا حداکثر چهار نقطه قطع کنند.

۱۰۰ مطابق شکل در دوزنقه $ABCD$ ، ارتفاع دوزنقه 12cm می‌باشد.

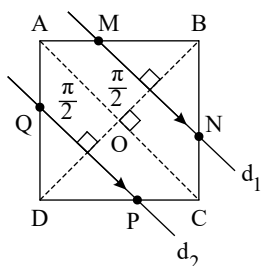


اگر نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله آن از AB و CD ، ۱ و ۲ باشد داریم:

$$x + y = 12, \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 8, y = 4$$

پس فاصله M از AB (خط d روی AB) برابر با ۸ و از CD برابر با ۴ می‌باشد. می‌دانیم که مکان هندسی نقاطی که از خطی به فاصله L باشند، دو خط موازی با آن خط و به فاصله L از آن است. پس مکان هندسی نقاطی مثل M و N دو خط d_1 و d_2 موازی با AB (یا امتداد آن) و CD (یا امتداد آن) می‌باشد. محل برخورد این خطوط و ساق‌های AD و BC ، چهار نقطه M و M' و N و N' پاسخ مسئله است.

۱۰۱ مطابق شکل مربع $ABCD$ به طول ضلع 3cm را داریم. طول قطر این مربع $3\sqrt{2}$ و به همین ترتیب:

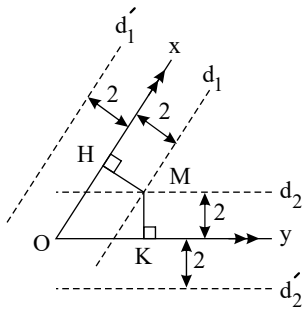


$$OA = OB = OC = OD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

می‌دانیم که مکان هندسی نقاطی که از یک خط به فاصله L باشند، دو خط موازی با آن خط و به فاصله L از آن است. بنابراین نقاطی که از AC به فاصله $\frac{\pi}{2}$ باشند، دو خط d_1 و d_2

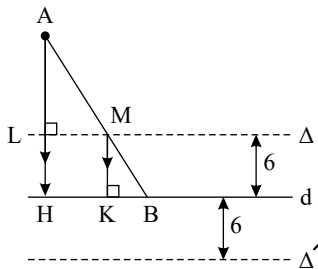
موازی با AC و به فاصله $\frac{\pi}{2}$ از آن است. از آنجا که $\frac{\pi}{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، پس دو خط d_1 و d_2 درون مربع رسم شده و اضلاع مربع را در چهار نقطه M ، N ، P و Q قطع می‌کنند.

۱۰۲ مکان هندسی نقاطی که از خط Ox به فاصله ۲ باشند، دو خط موازی با آن و به فاصله ۲ از آن است.



بنابر این مکان هندسی نقاطی که از Ox به فاصله ۲ باشند، دو خط d_1 و d'_1 موازی با آن و به فاصله ۲ از آن می‌باشد. به همین شکل، مکان هندسی نقاطی که از Oy به فاصله ۲ باشند، دو خط d_2 و d'_2 موازی با آن و به فاصله ۲ از آن می‌باشد. محل برخورد دوطرفه‌ی این خطوط پاسخ مسئله است. از آنجا که تنها برخورد درون زاویه پاسخ است پس تنها جواب مسئله نقطه M می‌باشد.

(۱۰۳) مطابق شکل فاصله نقطه A از d برابر با ۱۲cm می‌باشد. وسط AH را نقطه L در نظر می‌گیریم. داریم:



$$AL = LH = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

برای پاره‌خط دلخواهی مثل AB هم داریم:

$$AB \text{ وسط } M \text{ و } MK \parallel AH \Rightarrow \frac{MK}{AH} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MK = \frac{AH}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

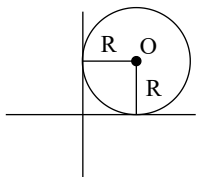
پس همه نقاطی مثل M ، فاصله‌ای به اندازه ثابت 6cm از d دارند. بنابر این مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی مثل AB ، دو خط Δ و Δ' موازی با d و به فاصله 6cm از آن می‌باشد. (برای خط Δ' یادمان باشد که نقطه A را پایین خط d در نظر می‌گیریم.)

(۱۰۴) اگر دایره‌ای در ناحیه چهارم بر محورهای مماس باشد، مرکز آن به صورت $O(R, -R)$ می‌باشد که R شعاع دایره است. داریم:

$$O \in d \Rightarrow -R = 3R - 8 \Rightarrow R = 2 \text{ و } O(2, -2)$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4 \text{ معادله دایره}$$

(۱۰۵) چون دایره از نقطه $A(1, 2)$ می‌گذرد پس بر محورهای مختصات ناحیه اول مماس است.



معادله چنین دایره‌ای برابر است با:

$$(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2 \xrightarrow{(1,2)} (1-R)^2 + (2-R)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 2R + 1 + R^2 - 4R + 4 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow R = 1 \text{ یا } R = 5$$

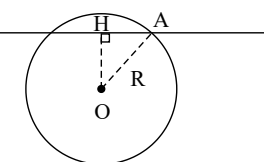
$$S = \pi R^2 \Rightarrow S_1 = \pi \text{ یا } S_2 = 25\pi$$

(۱۰۶) نکته: معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ هنگامی نمایش یک نقطه است که: $a^2 + b^2 = 4c$

پس:

$$a^2 + (-2)^2 = 4 \times 4 \Rightarrow a^2 + 4 = 16 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$

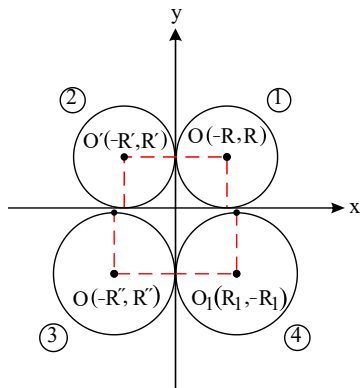
(۱۰۷) اگر خط L ، دایره C را قطع کند، آنگاه فاصله O تا این خط کمتر از شعاع دایره می‌باشد: $OH < R$





$$OH = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 0 + c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|9 + c|}{5} < 1 \Rightarrow |9 + c| < 5$$

$$\Rightarrow -5 < 9 + c < 5 \Rightarrow -14 \leq c \leq -4$$



۱۰۸

معادله «۱»: $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$

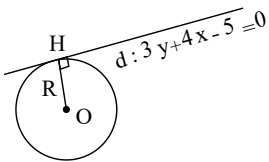
معادله «۲»: $(x + R')^2 + (y - R')^2 = R'^2$

معادله «۳»: $(x + R'')^2 + (y + R'')^2 = R''^2$

معادله «۴»: $(x - R_1)^2 + (y + R_1)^2 = R_1^2$

۱۰۹

از آنجایی که دایره بر خط $5 = 3y + 4x$ مماس است مطابق شکل داریم:



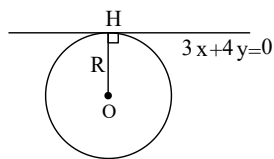
$d: 3y + 4x - 5 = 0$ و $O(0, 0)$

$$OH = R = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

معادله دایره: $x^2 + y^2 = 1$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

۱۱۰



$3x + 4y = 0$

$$OH = R = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

$$R = OA = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

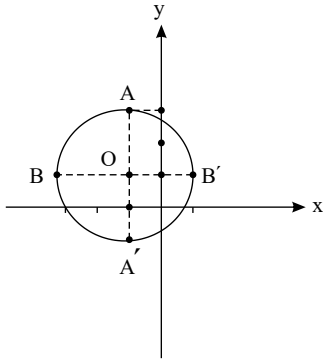
معادله دایره: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

۱۱۱

۱۱۲



نمودار این دایره به صورت زیر است؛ مطابق شکل از ۴ ناحیه مختصات دایره می‌گذرد.



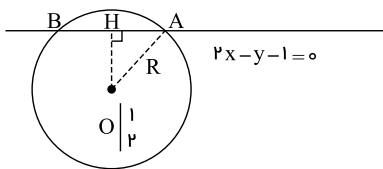
۱۱۳ برای یافتن تقاطع دو خط داریم:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = x - 2 \Rightarrow x = -3 \text{ و } y = -5 \Rightarrow \text{مرکز دایره: } O(-3, -5)$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

۱۱۴



$$AB = 2 \Rightarrow AH = BH = \frac{2}{2} = 1, OB = R$$

$$OH = \frac{|2 \times 1 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ و } R^2 = AH^2 + OH^2 = 1^2 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{6}{5}$$

۱۱۵ می‌دانیم که وسط AB، مرکز دایره می‌باشد. داریم:

$$O: \begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow O: \begin{cases} x_O = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_O = \frac{3 - 1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O: \left(\frac{3}{2}, 1 \right)$$

همچنین شعاع دایره برابر نصف طول پاره خط AB (قطر) می‌باشد. داریم:

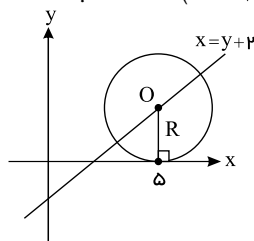
$$2R = AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{17}{4}$$

۱۱۶ از آنجا که مرکز دایره روی خط $x = y + 2$ می‌باشد. پس می‌توان مختصات O را به صورت $(\alpha + 2, \alpha)$ نشان داد. چون طول نقطه O برابر با ۵ می‌باشد.

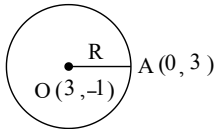
شکل زیر را در نظر می‌گیریم، پس داریم:



$$\alpha + 2 = 5 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow O(5, 3) \Rightarrow R = 3$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$$



$$OA = R = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$$

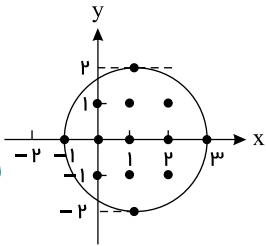
نقطه $M(x, y)$ در این مکان هندسی را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$MA = 2MB \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 32y + 64$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 3y^2 - 30y + 18 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 10y + 6 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-5)^2 = 20$$

پس مکان هندسی دایره‌ای به مرکز $(-1, 5)$ و شعاع $2\sqrt{5}$ می‌باشد.شعاع دایره $r = 2$ ، مرکز دایره $O(1, 0)$ نقاط داخل دایره با مختصات صحیح $(0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, -1), (1, -1), (2, -1)$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 9 + 25 - 4a > 0 \Rightarrow 4a < 34 \Rightarrow a < \frac{17}{2}$$

اول اینکه باید ضرایب x^2 و y^2 یکسان باشد. پس: $m = 5$

$$5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + n + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + \frac{n+1}{5} = 0$$

شرط اینکه دایره باشد این است که:

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 4^2 + (-2)^2 > 4 \times \frac{n+1}{5} \Rightarrow 20 > 4 \times \frac{n+1}{5} \Rightarrow n+1 < 25 \Rightarrow n < 24$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

(۱) اگر $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0$ و به بیان دیگر $a^2 + b^2 > 4c$ باشد، معادله دایره‌ای به مرکز $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$ می‌باشد.(۲) اگر $a^2 + b^2 = 4c$ باشد، نمایش نقطه $M\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ می‌باشد.(۳) اگر $a^2 + b^2 < 4c$ باشد، نمایش هیچ نقطه‌ای از صفحه نمی‌باشد.

$$x^2 + y^2 - x + 2y = 1 \Rightarrow (x^2 - x) + (y^2 + 2y) = 1 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 = 1$$



$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} \text{مرکز دایره } O: (\frac{1}{2}, -1) \\ \text{شعاع دایره } R = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۲۴

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

پس این مقطع مخروطی، دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز $O(3, -2)$ می‌باشد.

۱۲۵

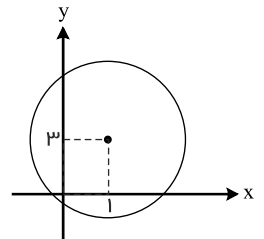
$$\text{الف) } x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(-1)} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{11}$$

$$O(-\frac{2}{2}, -\frac{6}{2}) = (1, 3)$$

معادله دایره است زیرا ضرایب x^2 و y^2 برابرند و عدد زیر رادیکال برای محاسبه شعاع، مقداری مثبت است.

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 11$$



$$\text{ب) } x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$$

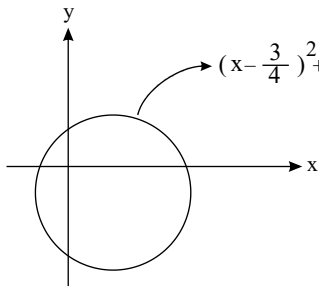
$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 3^2 - 4 \times 4} = \frac{1}{2} \sqrt{-3}$$

زیرا رادیکال عدد منفی است بنابراین معادله، مربوط به دایره نمی‌باشد.

$$\text{ج) } 2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - 1 = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{-3}{2})^2 + 2^2 - 4(-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$$

$$O(-\frac{\frac{-3}{2}}{2}, -\frac{2}{2}) = (\frac{3}{4}, -1)$$



ضرایب x^2 و y^2 با یکدیگر برابرند و عدد زیر رادیکال برای محاسبه شعاع مثبت است. بنابراین معادله فوق، مربوط به دایره است.

در معادله ضمنی دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره از روابط زیر به دست می‌آید.

۱۲۶

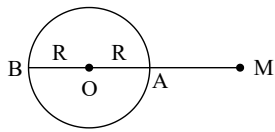
$$O(-\frac{\text{ضریب } x}{2}, -\frac{\text{ضریب } y}{2}) = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$



$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{-4}{2}\right) = (-1, 2)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(1)} = \frac{4}{2} = 2$$



۱۲۷
مطابق شکل داریم:

$$R: OM = d \Rightarrow \begin{cases} \text{نزدیکترین فاصله: } AM = d - R \\ \text{دورترین فاصله: } BM = d + R \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(-1, 0) \text{ و } R = \sqrt{2}$$

$$d = OM = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} AM = d - R = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ BM = d + R = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$A(-1, -1) \rightarrow (-1)^2 + (-1)^2 - 2(-1) + 4(-1) - 5 = -5 < 0$$

$$B(1, -2) \rightarrow 1^2 + (-2)^2 - 2 \times 1 + 4 \times (-2) - 5 = -10 < 0$$

$$C(2, 3) \rightarrow 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 + 4 \times 3 - 5 = 16 > 0$$

$$D(4, -1) \rightarrow 4^2 + (-1)^2 - 2 \times 4 + 4 \times (-1) - 5 = 0$$

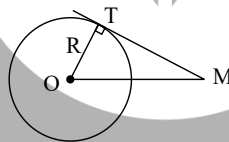
۱۲۸
نقطه A درون دایره قرار دارد.

نقطه B درون دایره قرار دارد.

نقطه C بیرون دایره قرار دارد.

نقطه D روی دایره قرار دارد.

۱۲۹
مطابق شکل داریم:



$$x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 - 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow O\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \text{ و } R = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$MO = \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \frac{\sqrt{45}}{2} \quad (2)$$

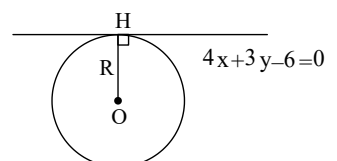
در نتیجه مطابق شکل طول مماس MT برابر است با:

$$MT^2 = OM^2 - R^2 \xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{45}{4} - \frac{9}{4} = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow MT = 3$$

$$O: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow O: \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$OH = \frac{|4 \times 2 + 3 \times (-1) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$$

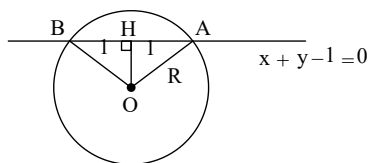
۱۳۰
مرکز دایره محل برخورد دو خط می‌باشد:





معادله دایره: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25}$

۱۳۱



$x + y - 1 = 0$

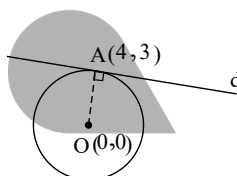
$OH = \frac{|-1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $AH = BH = 1$

$R^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$

معادله دایره: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$

۱۳۲

مطابق شکل داریم:



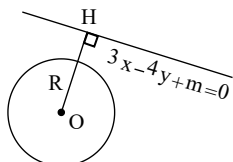
$OA \perp d \Rightarrow m_{OA} \times m_d = -1$

$m_{OA} = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_d = -\frac{4}{3}$, $A(4,3)$

$\Rightarrow d: (y-3) = -\frac{4}{3}(x-4)$

۱۳۳

شرط اینکه خط d دایره را قطع نکند این است که $OH > R$ باشد. داریم:



$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y) = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O(1,2)$, $R=2$

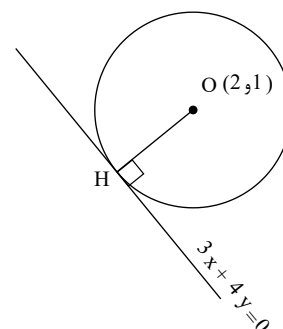
$OH = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 2 + m|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|m-5|}{5} > 2 \Rightarrow |m-5| > 10$

$\Rightarrow \begin{cases} m-5 > 10 \Rightarrow m > 15 \\ \text{یا} \\ m-5 < -10 \Rightarrow m < -5 \end{cases}$

۱۳۴

فاصله O تا خط $3x + 4y = 0$ برابر شعاع دایره است.

$R = OH = \frac{|(3 \times 2) + (4 \times 1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$





$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2 = 4$$

۱۳۵

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 = 2 \rightarrow O(0,0), R = \sqrt{2} \\ \text{الف) } x + y - 2 = 0 \text{ از خط } O \text{ فاصله مرکز دایره } = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

خط بر دایره مماس است.

$$\text{ب) } x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow O(-\frac{0}{2}, -\frac{-2}{2}) = (0,1)$$

$$\left. \begin{aligned} R = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-2)^2} - 3(-3) = \frac{4}{2} = 2 \\ x + y - 4 = 0 \text{ از خط } O \text{ فاصله مرکز دایره } = \frac{|0+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} > 2$$

خط، دایره را قطع نمی‌کند.

۱۳۶

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \Rightarrow O(2,3) \text{ و } R=3$$

حالت اول C' و C مماس خارج باشند:

$$OO' = d = R + R' \Rightarrow \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2} = 3 + R' \Rightarrow 0 = 3 + R' \Rightarrow R' = -3$$

$$C': (x-5)^2 + (y-7)^2 = 4$$

حالت دوم C' و C مماس داخل باشند:

$$OO' = d = |R - R'| \Rightarrow 0 = |3 - R'| \Rightarrow 3 - R' = 0 \text{ یا } 3 - R' = -0$$

$$\Rightarrow R' = -3 \text{ یا } R' = 3 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-7)^2 = 64$$

مختصات مرکز و اندازه شعاع را برای دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ به دست می‌آوریم: ۱۳۷

$$O'(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}) = (-\frac{-2}{2}, -\frac{2}{2}) = (1, -1)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2} - 4 \times 0 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

طول خط‌المركزین دو دایره (OO') برابر است با:

$$OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

برای اینکه دو دایره مماس خارج باشند باید داشته باشیم:

$$OO' = R + R' \rightarrow 2\sqrt{2} = R + \sqrt{2} \rightarrow R = \sqrt{2}$$

معادله دایره را با استفاده از مختصات مرکز $O(-1, 1)$ و اندازه شعاع $R = \sqrt{2}$ می‌نویسیم:

$$(x-(-1))^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2 \rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

۱۳۸

$$\text{الف) } x^2 + y^2 - 2x = 1 \rightarrow O(-\frac{-2}{2}, \frac{0}{2}) = (1, 0)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} - c = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} - 4(-1) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow O'(0, 0), R' = 1$$

$$\left. \begin{aligned} OO' &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1 \\ R + R' &= \sqrt{2} + 1 \\ |R - R'| &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow |R - R'| < OO' < R + R' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند.}$$



ب) $x^2 + y^2 = 4$ $O(0, 0)$, $R = 2$

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 19 = 0$ $O'(-\frac{-4}{2}, -\frac{-4}{2}) = (2, 2)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 - 4 \times 19} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 76} = \frac{\sqrt{44}}{2} = 1$

$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\left. \begin{aligned} & \rightarrow OO' > R + R' \rightarrow \text{دو دایره متخارج هستند.} \\ & R + R' = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\}$

۱۳۹

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ $\rightarrow O(-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}) = (2, 3)$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 12} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$ $\rightarrow O'(-\frac{-10}{2}, -\frac{-14}{2}) = (5, 7)$

$R' = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + (-14)^2 - 4 \times 73} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$OO' = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$\left\{ \begin{aligned} & OO' = 5 \\ & R + R' = 4 + 1 = 5 \end{aligned} \right. \rightarrow OO' = R + R' \rightarrow \text{دو دایره مماس خارج هستند.}$

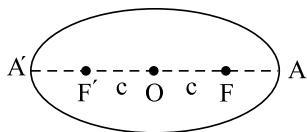
ب) $x^2 + y^2 = 9$ $\rightarrow O(0, 0)$, $R = 3$

$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ $\rightarrow O'(-\frac{-2}{2}, -\frac{2}{2}) = (1, -1)$

$R' = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 - 4 \times 1} = 1$

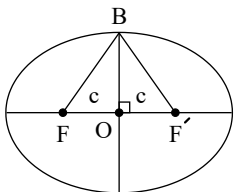
$OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$ $\left. \begin{aligned} & \rightarrow OO' < |R - R'| \rightarrow \text{دو دایره متداخل هستند.} \\ & |R - R'| = |3 - 1| = 2 \end{aligned} \right\}$

۱۴۰ مطابق شکل، بیشترین AF و کمترین $A'F$ فاصله نقاط بیضی از کانون‌ها هستند. داریم:



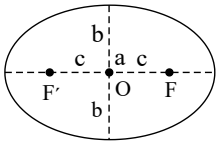
$AA' = 2a \Rightarrow OA = OA' = a \Rightarrow AF = A'F' = a - c$
 $\Rightarrow AF' = AF + F'F \xrightarrow{AF' = a-c, F'F = 2c} (a - c) + 2c = a + c$

۱۴۱ 120°



فرض: $2a = 2 \times 2b \Rightarrow a = 2b$
 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 3b^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}b$
 $\Delta BOF: \tan \hat{OBF} = \frac{c}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{OBF} = 60^\circ \Rightarrow \hat{BBF} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

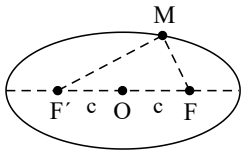
۱۴۲



$$\begin{cases} \text{قطر بزرگ: } 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \\ \text{قطر کوچک: } 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{می‌دانیم: } c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow c = 3\sqrt{3} \Rightarrow OF = 3\sqrt{3}$$

طبق روابط بیضی داریم: ۱۴۳



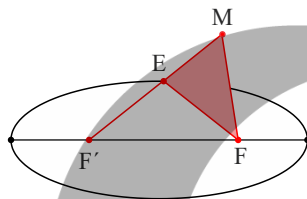
$$\begin{cases} MF + MF' = 10 \Rightarrow MF = 7 \text{ یا } 3 \text{ و } MF' = 3 \text{ یا } 7 \\ MF \times MF' = 21 \end{cases}$$

M روی بیضی قرار دارد. داریم: ۱۴۴

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF = a + b \\ MF' = a - b \end{cases} \Rightarrow MF \times MF' = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = c^2$$

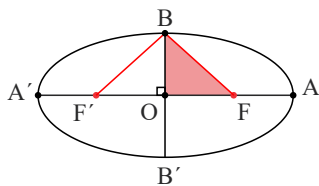
۱۴۵

بنابر قضیه حمار در مثلث EMF داریم:



$$ME + MF > EF \xrightarrow{+EF'} (ME + EF') + MF > EF + EF'$$

$$\xrightarrow{EF+EF'=2a} MF' + ME > 2a$$



BB' عمودمستقیم FF' است و هر نقطه روی عمودمستقیم از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. بنابراین:

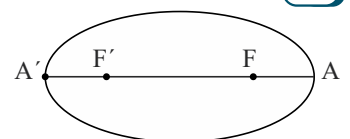
$$\begin{cases} BF = BF' \\ BF + BF' = 2a \end{cases} \rightarrow BF = BF' = a$$

$$\begin{cases} FF' = OF + OF' = 2c \\ OF = OF' \end{cases} \rightarrow OF = OF' = c$$

$$\triangle BOF: OB^2 + OF^2 = BF^2 \rightarrow OB^2 + c^2 = a^2 \rightarrow OB = \sqrt{a^2 - c^2}$$

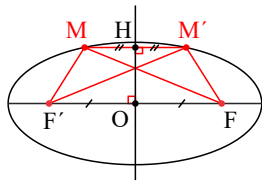
$$\begin{cases} BB' = OB + OB' \\ OB = OB' \end{cases} \rightarrow BB' = 2OB = 2\sqrt{a^2 - c^2}$$

۱۴۶



$$\begin{cases} \text{روی بیضی } A \rightarrow AF + AF' = 2a \Rightarrow AF + (AF + FF') = 2a \Rightarrow AF = \frac{1}{2}(2a - FF') \quad (1) \\ \text{روی بیضی } A' \rightarrow A'F' + A'F = 2a \Rightarrow A'F' + (A'F' + FF') = 2a \Rightarrow A'F' = \frac{1}{2}(2a - FF') \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(2), (1)} AF = A'F'$$

۱۴۸

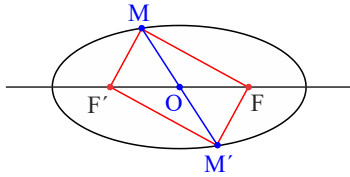


نقطه دلخواه M را روی بیضی در نظر می‌گیریم و بازتاب آن را نسبت به عمودمنصف FF' می‌نامیم. در دوزنقه $MM'FF'$ پاره‌خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند بر آنها عمود است. بنابراین دوزنقه متساوی‌الساقین است و دو ساق و دو قطر آن برابرند یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} MF' = M'F \\ MF = M'F' \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو معادله را باهم}} MF + MF' = M'F' + M'F \rightarrow \underbrace{MF + MF'}_{2a} = M'F' + M'F$$

چون بازتاب نقطه دلخواه M نسبت به عمودمنصف FF' روی بیضی قرار می‌گیرد بنابراین عمودمنصف FF' محور تقارن بیضی است.

۱۴۹



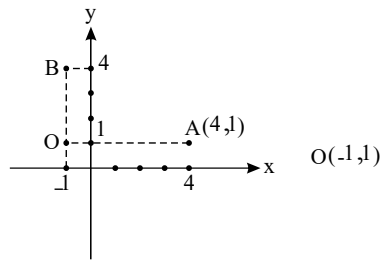
نقطه دلخواه M را روی بیضی در نظر می‌گیریم و بازتاب آن را نسبت به محل برخورد محورهای تقارن بیضی (نقطه O ، M' می‌نامیم.

$$\left. \begin{array}{l} OM' = OM \\ OF = OF' \end{array} \right\} \rightarrow \text{چهارضلعی } MF'M'F \text{ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهايش يكدیگر را نصف کرده‌اند.}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} MF' = FM' \\ MF = F'M' \end{array} \right. \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو معادله را}} MF' + MF = FM' + F'M' \rightarrow \underbrace{MF' + MF}_{2a} = FM' + F'M'$$

چون بازتاب نقطه دلخواه M نسبت به O روی بیضی قرار می‌گیرد بنابراین نقطه O (محل برخورد دو محور تقارن بیضی) مرکز تقارن است.

۱۵۰ مطابق شکل نقطه O مرکز بیضی می‌باشد. $O(-1, 1)$



$$OA = a = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (1 - 1)^2} = 5 \Rightarrow \text{قطر بزرگ} = 2a = 10$$

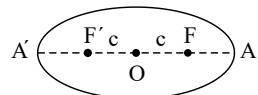
$$OB = b = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (4 - 1)^2} = 3 \Rightarrow \text{قطر کوچک} = 2b = 6$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$\Rightarrow \text{فاصله کانونی} = 2c = 2 \times 4 = 8$$

۱۵۱

شکل روبه‌رو را در نظر می‌گیریم. داریم:



$$AF = a - c \text{ و } A'F = a + c$$

$$AA' = 2a = \sqrt{(7 - (-3))^2 + (2 - 2)^2} = 10 \text{ (طول قطر بزرگ)}$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$AF = \sqrt{(7 - 5)^2 + (2 - 2)^2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a - c = 2 \\ a + c = 8 \end{cases} \Rightarrow c = 3 \Rightarrow 2c = 6 \text{ فاصله کانونی}$$

$$A'F = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (2 - 2)^2} = 8$$

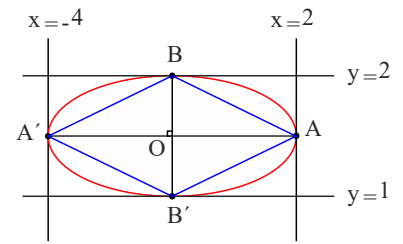
$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8 \text{ (طول قطر کوچک)}$$

۱۵۲



$$\begin{cases} AA' = 2 - (-4) = 6 \\ BB' = 3 - (-1) = 4 \end{cases}$$

$$ABB'A' \text{ مساحت لوزی} = \frac{1}{2} AA' \times BB' = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



۱۵۳

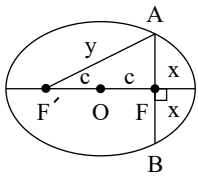
الف درست

ب

درست - زیرا هر نقطه روی سهمی از F و d به یک فاصله است.

در شکل مقابل AB وتر کانونی است. داریم:

۱۵۴



$$\angle AFF' = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4c^2 + x^2 \\ x + y = 2a \Rightarrow y = (2a - x) \end{cases} \Rightarrow (2a - x)^2 = 4c^2 + x^2 \Rightarrow 4a^2 + x^2 - 4ax = 4c^2 + x^2 \Rightarrow 4a^2 + x^2 - 4ax = 4c^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{b^2}{a} \Rightarrow AB = 2x = \frac{2b^2}{a}$$

۱۵۵

$$FF' = 2c = \sqrt{(2 + \sqrt{5} - (2 - \sqrt{5}))^2 + (0, 0)^2} = 2\sqrt{5} \rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$AF + AF' = 2a \rightarrow \sqrt{(5 - 2 - \sqrt{5})^2 + 0^2} + \sqrt{(5 - 2 + \sqrt{5})^2 + 0^2} = 2a$$

$$\rightarrow |3 - \sqrt{5}| + |3 + \sqrt{5}| = 2a \rightarrow 3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} = 2a \rightarrow 6 = 2a \rightarrow a = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ خروج از مرکز}$$

$$\left. \begin{aligned} MN &= \frac{2b^2}{a} \\ a^2 &= b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \end{aligned} \right\} \text{ طول کوتاهترین وتر کانونی}$$

$$\rightarrow MN = \frac{2(a^2 - c^2)}{a} \times \frac{a}{a} = 2a \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$\rightarrow MN = 2a(1 - (\frac{c}{a})^2) \rightarrow MN = 2a(1 - e^2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\div a^2} 1 = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 \rightarrow 1 = (\frac{b}{a})^2 + e^2$$

$$\rightarrow (\frac{b}{a})^2 = 1 - e^2 \rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\text{قطر کوچک: } BB' = 2b = 2a\sqrt{1 - e^2}$$

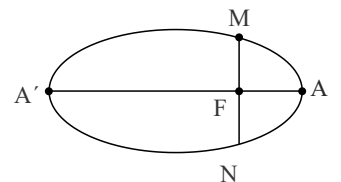
$$AA' = 2a = \sqrt{(1 - 1)^2 + (7 - (-5))^2} = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \text{قطر بزرگ} = 2 \times 6 = 12$$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{c}{a} = \frac{c}{6} \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow \text{فاصله کانونی} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \text{قطر کوچک} = 2 \times 4 = 8$$

۱۵۶ اگر طول قطر بزرگ $2a$ ، طول قطر کوچک $2b$ و فاصله کانونی $2c$ باشد. داریم:

۱۵۷



۱۵۸

$$FF' = 2c \Rightarrow 2c = \sqrt{(\sqrt{6} - (-\sqrt{6}))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{6} \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

۱۵۹ از آنجا که عرضهای کانونهای بیضی برابرند، پس بیضی افقی می‌باشد. داریم:

۱۵۹

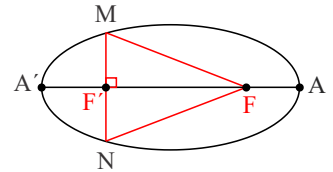


$$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 6 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 2\sqrt{3}$$

$$\text{خروج از مرکز: } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle FMN} &= \frac{1}{2} \times FF' \times MN = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{2b^2}{a} \\ &= 2 \times \frac{c}{a} \times b^2 = 2eb^2 \end{aligned}$$



$$\text{الف) طبق فرض: } a + c = 2(a - c) \rightarrow a + c = 2a - 2c \rightarrow 3c = a \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow e = \frac{1}{3}$$

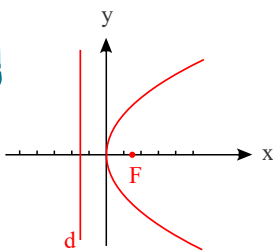
$$\text{ب) } a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\div a^2} 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \frac{2b}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \frac{BB'}{AA'} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

نقطه‌های موردنظر را به صورت $M(x, y)$ در نظر می‌گیریم و فاصله آنها را از نقطه $(1, -2)$ و خط $x = 3$ برابر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = |x-3| \rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-3)^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow y^2 + 4y + 4x - 4 = 0$$

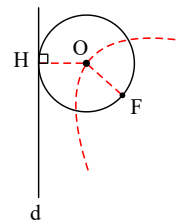


این معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به راست بوده و محور تقارن آن محور x هاست. با قرار دادن $4a = 6$ داریم $a = \frac{3}{2}$. لذا کانون

آن $F(\frac{3}{2}, 0)$ و خط هادی آن موازی محور y ها و به معادله $x = -\frac{3}{2}$ بوده و رأس آن مبدأ مختصات است.

می‌دانیم که سهمی مکان هندسی نقاطی است که از کانون F و خط هادی d به یک فاصله باشد. پس مرکز دایره حتماً روی سهمی قرار می‌گیرد و با این ترتیب عکس این مطلب هم درست است.

سهمی مکان هندسی مرکز دایره‌ای است که از نقطه ثابت F می‌گذرد و بر خط ثابت d مماس است.



می‌دانیم که فاصله کانون تا خط هادی برابر است با $2a$. داریم:

$$(y - 4 = 0) \text{ فاصله کانون } F(-1, 2) \text{ تا خط هادی } 4 - 2 = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

از آنجا که خط هادی $y = 4$ (افقی) است پس سهمی هم قائم بوده و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد. داریم:

$$\text{رأس سهمی: } S(-1, 2 + 1) = (-1, 3)$$

در نتیجه معادله سهمی برابر است با:

$$\text{معادله سهمی: } (x+1)^2 = -4 \times (y-3) \Rightarrow (x+1)^2 = -4(y-3)$$

$$\begin{cases} \text{خط هادی: } x = 4 \\ \text{کانون: } F(2, 3) \end{cases}$$

می‌دانیم که فاصله کانون تا خط هادی برابر با $2a$ می‌باشد. داریم:

$$(x - 4 = 0) \text{ فاصله } F(2, 3) \text{ تا } 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

سهمی افقی است چون هادی آن $x = 4$ می‌باشد و دهانه آن به سمت چپ باز می‌شود.



رأس سهمی: $S(2+1, 3) = (3, 3)$

معادله سهمی: $-4 \times 1(x-3) = (y-3)^2 \Rightarrow (y-3)^2 = -4(x-3)$

اگر نقطه $M(x, y)$ روی سهمی باشد، فاصله آن تا خط هادی $x-4=0$ و $F(2, 1)$ یکسان می‌باشد. داریم:

فاصله M تا $(x-4=0)$: $|x-4|$

فاصله M تا F : $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$

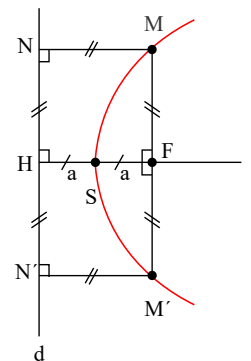
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |x-4| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 8x + 16$$

$$y^2 - 2y = -4x + 11 \Rightarrow (y-1)^2 = -4x + 12 \Rightarrow (y-1)^2 = -4(x-3)$$

مربع $MNHF \rightarrow MF = HF = 2a$

مربع $M'FHN' \rightarrow M'F = M'N' = 2a$

$$MM' = MF + M'F = 2a + 2a = 4a$$



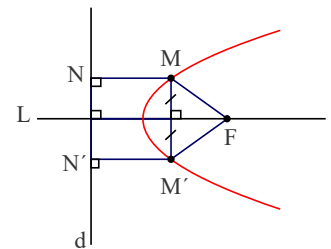
نقطه دلخواه M را روی سهمی در نظر می‌گیریم و بازتاب آن را نسبت به خطی که از کانون بر خط هادی سهمی عمود می‌شود (خط L), M' می‌نامیم.

$MN = M'N'$ → مستطیل است $MNN'M'$

$M' \rightarrow MF = M'F$ بازتاب M نسبت به خط L است

$M \rightarrow MF = MN$ روی سهمی قرار دارد

M' روی سهمی قرار دارد →



چون بازتاب M نسبت به خط L روی سهمی قرار می‌گیرد، بنابراین خط L , محور تقارن است.

محور تقارن سهمی

از آنجا که F و S دارای عرض‌های برابر هستند، نتیجه می‌گیریم که سهمی افقی می‌باشد. می‌دانیم که فاصله FS برابر a می‌باشد. از طرفی با توجه به مختصات F و S نتیجه می‌گیریم که دهانه سهمی به سمت راست می‌باشد. داریم:

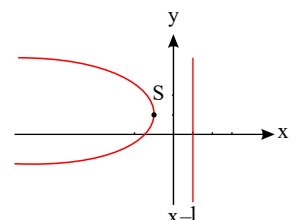
$$FS = \sqrt{(5-1)^2 + (3-3)^2} = 4 \Rightarrow a = 4$$

معادله سهمی برابر است با:

$$(y-3)^2 = 4 \times 4(x-1) \Rightarrow (y-3)^2 = 16(x-1)$$

$$y^2 - 2y = -8x - 9 \xrightarrow{+1} y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1 \rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مختصات رأس } A(-1, 1) \\ 4a = 8 \rightarrow a = 2 \\ \text{دهانه سهمی رو به چپ است} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله خط هادی: } x = -1 + 2 = 1$$



سهمی افقی و دهانه آن رو به چپ است بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$(y-\beta)^2 = -4a(x-\alpha) \rightarrow (y-0)^2 = -4a(x-1) \rightarrow y^2 = -4a(x-1)$$

مختصات رأس $S(1, 0)$

$$\text{نقطه } (0, 1) \rightarrow 1 = -4a(0-1) \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\text{معادله سهمی: } y^2 = -4 \times \frac{1}{4}(x-1) \rightarrow y^2 = -(x-1)$$



معادله خط هادی: $x = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

۱۷۴

$$-(x-2)^2 = 16y + 16 \Rightarrow (x-2)^2 = -16(y+1)$$

$\begin{cases} \text{رأس سهمی } S(2, -1) \text{ و } 4a = 16 \Rightarrow a = +4 \\ \text{سهمی قائم و دهانه رو به پایین} \end{cases}$
خط هادی: $y = -1 + 4 = 3$

در نتیجه نقطه برخورد برابر است با:

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } (1, 3)$$

۱۷۵

$$y^2 - 6y + 16x + 25 = 0$$

سهمی افقی است $\Rightarrow (y-3)^2 = -16x - 25 \Rightarrow (y-3)^2 = -16x - 16$

$$(y-3)^2 = -16(x+1) \Rightarrow \begin{cases} S = (h, k) = (-1, 3) \\ 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \\ \text{دهانه سهمی رو به چپ} \end{cases}$$

$$F(h-a, k) \Rightarrow F(-1-4, 3) = (-5, 3)$$

خط هادی $x = h + a = -1 + 4 = 3$

۱۷۶

$$y^2 + ay + x + b = 0$$

$$(y + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} = -x - b \Rightarrow (y + \frac{a}{2})^2 = -x + \frac{a^2}{4} - b$$

$$(y + \frac{a}{2})^2 = -(x - \frac{a^2}{4} + b)$$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{سهمی افقی و دهانه رو به چپ} \\ \text{رأس سهمی } S(\frac{a^2}{4} - b, -\frac{a}{2}) \\ 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases}$

کانون سهمی: $F(\frac{a^2}{4} - b - \frac{1}{4}, -\frac{a}{2}) = (1, 1)$

$$\frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2 \text{ و } \frac{(-2)^2}{4} - b - \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

۱۷۷

$$y^2 + ay + b = x \Rightarrow (y + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} = x - b$$

$$(y + \frac{a}{2})^2 = x + \frac{a^2}{4} - b \Rightarrow S: (b - \frac{a^2}{4}, -\frac{a}{2}) = (-1, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4 \\ b - \frac{(-4)^2}{4} = -1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

۱۷۸

$$x^2 + 9y^2 + 6xy + 8x^2 + 8 - 16x = 9x^2 + y^2 + 6xy$$

سهمی افقی و دهانه رو به راست $\begin{cases} 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ S = (h, k) = (\frac{1}{2}, 0) \end{cases}$
 $8y^2 = 16x - 8 \Rightarrow y^2 = 2x - 1 \Rightarrow y^2 = 2(x - \frac{1}{2})$

کانون سهمی: $F = (h + a, k) = (1, 0)$

محور x ها: $y = k = 0$ محور تقارن و $x = h - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ خط هادی



۱۷۹ چون خط هادی $x = 2$ می‌باشد پس سهمی افقی است. فاصله رأس سهمی تا خط هادی برابر با a می‌باشد. داریم:

$$(x - 2 = 0) \text{ تا خط } A(3, 4) \text{ فاصله} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

با توجه به رأس سهمی و خط هادی، دهانه سهمی به سمت راست می‌باشد. داریم:

$$(y - 4)^2 = 4 \times 1(x - 3) \Rightarrow (y - 4)^2 = 4(x - 3)$$

۱۸۰

$$x^2 - 4x - 8y - 4 = 0 \rightarrow (x^2 - 4x) = 8y + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 - 4 = 8y + 4$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = 8y + 8 \Rightarrow (x - 2)^2 = 8(y + 1)$$

$$\text{رأس سهمی } S = (h, k) = (2, -1) \text{ و } 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{کانون سهمی قائم } F(h, a + k) = (2, -1 + 2) = (2, 1)$$

$$\text{خط هادی } y = k - a = -1 - 2 = -3$$

۱۸۱

$$x = y^2 + my + n \Rightarrow y^2 + my - x + n = 0$$

$$(y + \frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4} - x + n = 0 \Rightarrow (y + \frac{m}{2})^2 = x + \frac{m^2}{4} - n$$

$$\text{مختصات رأس سهمی } (n - \frac{m^2}{4}, -\frac{m}{2}) = (-1, 2)$$

$$\frac{-m}{2} = 2 \Rightarrow m = -4 \text{ و } n - \frac{m^2}{4} = -1 \Rightarrow n = 3$$

۱۸۲

$$y^2 - 2y + mx + m = 0 \rightarrow y^2 - 2y = -mx - m$$

$$\xrightarrow{+1} y^2 - 2y + 1 = -mx - m + 1 \rightarrow (y - 1)^2 = -m(x + \frac{m-1}{m})$$

$$\text{فاصله کانون تا خط هادی } 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

$$|m| = 4a = 4$$

اگر $m > 0$ باشد آنگاه $m = 4$ است و معادله سهمی به صورت زیر است:

$$(y - 1)^2 = -4(x + \frac{4-1}{4}) \rightarrow (y - 1)^2 = -4(x + \frac{3}{4}) \rightarrow x_S = -\frac{3}{4}$$

اگر $m < 0$ باشد آنگاه $m = -4$ است و معادله سهمی به صورت زیر است:

$$(y - 1)^2 = 4(x + \frac{-4-1}{-4}) \rightarrow (y - 1)^2 = 4(x + \frac{5}{4}) \rightarrow x_S = \frac{-5}{4}$$

۱۸۳

$$2y^2 + 4y = x - m \xrightarrow{\div 2} y^2 + 2y = \frac{x}{2} - \frac{m}{2} \xrightarrow{+1} y^2 + 2y + 1 = \frac{x}{2} - \frac{m}{2} + 1$$

$$\rightarrow (y + 1)^2 = \frac{1}{2}(x - m + 2) \rightarrow \text{سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است.}$$

$$\begin{cases} S(m - 2, -1) \\ 4a = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{4} \rightarrow x_F = x_S + a \rightarrow \frac{17}{8} = m - 2 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{17}{8} - \frac{1}{4} = m - 2 \rightarrow \frac{16}{8} = m - 2 \rightarrow m = 4$$

۱۸۴

$$y = 2x^2 + mx - 3 \rightarrow 2x^2 + mx = y + 3 \xrightarrow{\div 2} x^2 + \frac{m}{2}x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{+(\frac{m}{2})^2} x^2 + \frac{m}{2}x + \frac{m^2}{16} = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} + \frac{m^2}{16}$$

$$\rightarrow (x + \frac{m}{4})^2 = \frac{1}{2}(y + \frac{m^2}{32} + \frac{3}{2}) \rightarrow \text{سهمی قائم و دهانه آن روبه بالا است.}$$

$$\left. \begin{aligned} x = 1 \rightarrow x_S = 1 \\ x = -\frac{m}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow -\frac{m}{4} = 1 \rightarrow m = -4$$



۱۸۵

$$x^2 + 2y + 1 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = -2y - 1 \xrightarrow{+4} x^2 - 4x + 4 = -2y - 6$$

سهمی قائم و دهانه آن رو به پایین است. $\rightarrow (x - 2)^2 = -2(y + 3) \rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \\ S(2, -3) \text{ مختصات رأس} \end{aligned} \right\} \rightarrow F(2, -3 - \frac{1}{2}) = (2, -\frac{7}{2})$$

معادله خطی که از کانون و مبدأ می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$\left. \begin{aligned} F(2, -\frac{7}{2}) \\ O(0, 0) \end{aligned} \right\} \rightarrow m_{OF} = \frac{-\frac{7}{2} - 0}{2 - 0} = -\frac{7}{4}$$

$$\rightarrow y - 0 = -\frac{7}{4}(x - 0) \rightarrow 7x + 4y = 0$$

برای تعیین معادله وتر مشترک دو سهمی متقاطع، از دستگاه معادلات آنها جمله درجه ۲ را حذف می‌کنیم. ۱۸۶

$$\left. \begin{aligned} x + y^2 = 0 \\ y^2 = x + 2y \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} y^2 = -x \\ y^2 = x + 2y \end{cases} \rightarrow -x = x + 2y \rightarrow 2x + 2y = 0 \rightarrow x + y = 0$$

۱۸۷

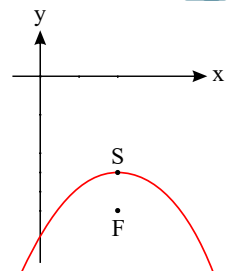
$$y^2 + 4x = 3 + 2y \rightarrow y^2 - 2y = -4x + 3 \xrightarrow{+1} y^2 - 2y + 1 = -4x + 3 + 1$$

$$\rightarrow (y - 1)^2 = -4(x - 1) \rightarrow 4a = 4 \rightarrow \text{اندازه وتر کانونی} = 4$$

۱۸۸

$$\left. \begin{aligned} F(2, -\frac{5}{2}) \\ a = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow S(2, -\frac{5}{2} + 1) = (2, -\frac{3}{2})$$

رأس سهمی:



سهمی قائم و دهانه آن رو به پایین است بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$(x - 2)^2 = -4(y - (-\frac{5}{2}))$$

$$\rightarrow (x - 2)^2 = -4(y + \frac{5}{2})$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = -4y - 10$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4y + 14 = 0$$

۱۸۹

$$y^2 + 4y = 2x \xrightarrow{+4} y^2 + 4y + 4 = 2x + 4$$

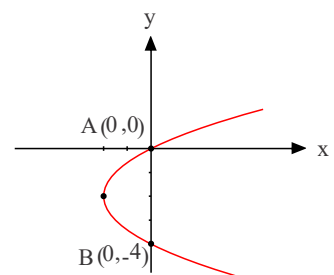
سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است. $\rightarrow (y + 2)^2 = 2(x + 2) \rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} S(-2, -2) \text{ مختصات رأس} \\ 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow F(-2 + \frac{1}{2}, -2) = (-\frac{3}{2}, -2)$$

برای یافتن محل تقاطع سهمی با محور yها در معادله سهمی $x = 0$ قرار می‌دهیم:

$$(y + 2)^2 = 2(0 + 2) \rightarrow (y + 2)^2 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} y + 2 = 2 \rightarrow y = 0 \\ y + 2 = -2 \rightarrow y = -4 \end{cases}$$



سهمی در نقاط $A(0, 0)$ و $B(0, -4)$ محور yها را قطع می‌کند.

۱۹۰



$$x^2 + 3x = y - 5 \xrightarrow{+\frac{9}{4}} x^2 + 3x + \frac{9}{4} = y - 5 + \frac{9}{4} \rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = y - \frac{11}{4}$$

معادله یک سهمی است که دهانه آن روبه بالا، رأس آن $(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$ و $4a = 1$ و در نتیجه $a = \frac{1}{4}$ است. $F(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}) = (-\frac{3}{2}, 3)$ و معادله خط هادی $y = \frac{11}{4} - \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ است. $x = -\frac{3}{2}$ معادله محور سهمی به صورت $x = -\frac{3}{2}$ است.

۱۹۱

$$-2x^2 + 4x = y + 3 \xrightarrow{\div(-2)} x^2 - 2x = -\frac{y}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{+1} x^2 - 2x + 1 = -\frac{y}{2} - \frac{3}{2} + 1 \rightarrow (x - 1)^2 = -\frac{1}{2}(y + 1)$$

سهمی قائم و دهانه آن رو به پایین است $\rightarrow$ محور تقارن سهمی $x = 1$
 $S(1, -1)$

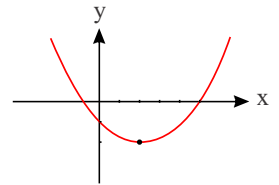
۱۹۲

$$x^2 = 4x + 8y + 12 \rightarrow x^2 - 4x = 8y + 12 \xrightarrow{+4} x^2 - 4x + 4 = 8y + 16$$

$$\rightarrow (x - 2)^2 = 8(y + 2)$$

$$\left. \begin{matrix} 4a = 8 \rightarrow a = 2 \\ S(2, -2) \end{matrix} \right\} \rightarrow F(2, -2 + 2) = (2, 0)$$

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا است.



جمله‌های با متغیر x را در یک طرف و سایر عبارت‌ها را در طرف دیگر می‌نویسیم: ۱۹۳

$$x^2 - 4x = y - 5 \xrightarrow{+4} x^2 - 4x + 4 = y - 5 + 4 \rightarrow (x - 2)^2 = y - 1$$

مختصات رأس $S(2, 1)$

۱۹۴

$$\left. \begin{matrix} S(0, 3) \\ F(0, 0) \end{matrix} \right\} \rightarrow a = SF = 3$$

سهمی قائم و دهانه آن رو به پایین است. بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$(x - 0)^2 = -4(3)(y - 3) \rightarrow x^2 = -12(y - 3) \xrightarrow{y=0} x^2 = -12(0 - 3)$$

$$\rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$$

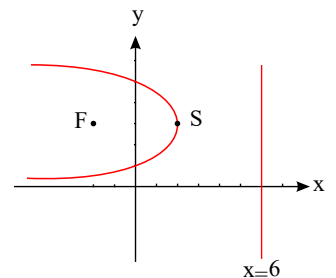
۱۹۵

سهمی افقی و دهانه آن رو به چپ است.

$$\left. \begin{matrix} F(-2, 3) \\ \text{خط هادی } x = 6 \end{matrix} \right\} \rightarrow 2a = 6 - (-2) = 8 \rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow \text{رأس سهمی } S(-2 + 4, 3) = (2, 3)$$

$$\text{معادله سهمی: } (y - 3)^2 = -4 \times 4(x - 2) = -16(x - 2)$$

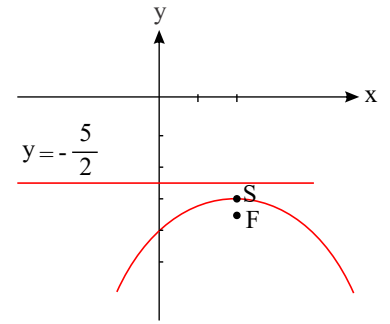


۱۹۶



$$\left. \begin{aligned} F(2, -\frac{5}{2}) \\ \text{خط هادی } y = -\frac{5}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow 2a = -\frac{5}{2} - (-\frac{5}{2}) = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{مختصات رأس: } S(2, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = (2, -2)$$



سهمی قائم و دهانه آن رو به پایین است.

$$(x - 2)^2 = -4(\frac{1}{2})(y - (-2))$$

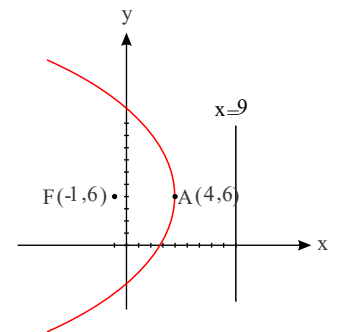
$$\rightarrow (x - 2)^2 = -2(y + 2)$$

۱۹۷ با توجه به جایگاه رأس و خط هادی در دستگاه مختصات داریم: $a = 9 - 4 = 5$

مختصات کانون به صورت زیر است:

$$x_F = x_A - a = 4 - 5 = -1, \quad y_F = y_A = 6$$

$$\Rightarrow F(-1, 6)$$

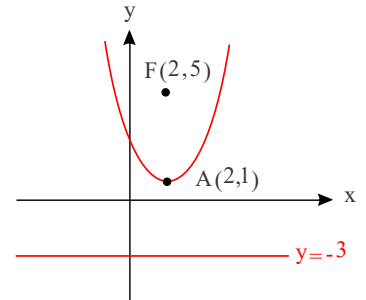


دهانه سهمی رو به چپ است و معادله آن $(y - k)^2 = -4a(x - h)$ می باشد و داریم:

$$(y - 6)^2 = -20(x - 4)$$

۱۹۸ با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات داریم:

$$a = y_F - y_A = 5 - 1 = 4$$



معادله خط هادی $y = y_A - a = 1 - 4 = -3$ می باشد و دهانه سهمی رو به بالاست.

معادله سهمی به صورت $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ است و داریم:

$$(x - 2)^2 = 16(y - 1)$$

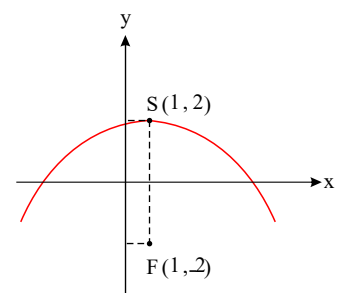
$$\left. \begin{aligned} S(1, 2) \\ F(1, -2) \end{aligned} \right\} \rightarrow x_S = x_F = 1 \rightarrow \text{سهمی قائم و دهانه آن رو به پایین است}$$

$$y_F < y_S$$

$$SF = a = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = 4$$

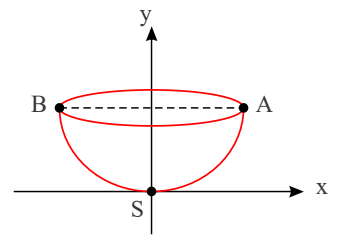
$$\text{معادله سهمی: } (x - 1)^2 = -4 \times 4(y - 2)$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = -16(y - 2)$$





۲۰۰ رأس سهمی را منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. اگر قطر دهانه دیش برابر $2x_0$ و گودی (عمق) دیش برابر y_0 باشد مختصات نقطه $A(x_0, y_0)$ در معادله $x^2 = 4ay_0$ صدق می‌کند.



$$\left. \begin{aligned} x_0^2 &= 4ay_0 \rightarrow a = \frac{x_0^2}{4y_0} \\ x_0 &= \frac{AB}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{4y_0}$$

$$\rightarrow a = \frac{AB^2}{16y_0}$$

۲۰۱ بازتاب پرتوهایی که موازی محور تقارن سهمی بر آن تابیده می‌شوند از کانون آن عبور می‌کنند.

$$y^2 - y = 2x + 1 \xrightarrow{+\frac{1}{4}} y^2 - y + \frac{1}{4} = 2x + 1 + \frac{1}{4} \rightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = 2x + \frac{5}{4}$$

سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است. $\rightarrow (y - \frac{1}{2})^2 = 2(x + \frac{5}{8})$

$$\left. \begin{aligned} \text{مختصات رأس} & S(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2}) \\ 4a = 2 & \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow F(-\frac{5}{8} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}) \text{ کانون سهمی}$$

$$y^2 = 4(x-1) \rightarrow S(1, 0), F(2, 0)$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 9, \begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ قی} \\ x = -3 \text{ غقی} \end{cases}$$

$$M(3, 2\sqrt{2}), M'(3, -2\sqrt{2})$$

$$OM = OA = a$$

$$\triangle OMF : OF^2 + MF^2 = OM^2 \rightarrow c^2 + MF^2 = a^2 \rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \rightarrow MF = b$$

$$4y^2 + 4y = 2x + 1 \Rightarrow y^2 + y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{رأس سهمی} & S(-1, -\frac{1}{2}) \text{ و } 4a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \\ \text{سهمی افقی و دهانه رو به راست} & \end{aligned} \right.$$

$$\text{کانون سهمی} : F(-1 + \frac{1}{8}, -\frac{1}{2}) = (-\frac{7}{8}, -\frac{1}{2})$$

$$\text{معادله خط هادی} : x = -1 - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$$

۲۰۵ سهمی افقی می‌باشد پس عرض رأس سهمی با عرض کانون برابر است. پس کانون آن $F(\alpha, 1)$ می‌باشد، داریم:

$$F \in (y = -x + 1) \Rightarrow 1 = -\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow F(0, 1)$$

می‌دانیم که $SF = a$ داریم:

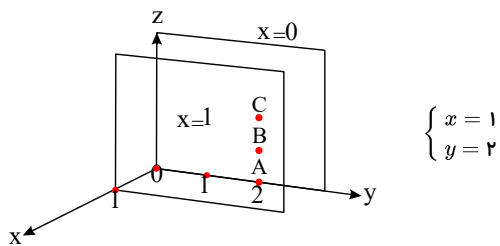
$$SF = \sqrt{(2-0)^2 + (1-1)^2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

همچنین از مختصات S و F می‌یابیم که دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. داریم:

$$\text{معادله سهمی} : (y-1)^2 = -4(2)(x-2) \Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-2)$$

۲۰۶ بر روی صفحه $x = 1$ سه نقطه مانند $A(1, 2, 0)$ و $B(1, 2, 1)$ و $C(1, 2, 2)$ که مؤلفه دوم آنها ۲ است، در نظر گرفتیم. بدیهی است این نقاط روی خطی به موازات

محور z ها قرار می‌گیرد و معادلات این خط به صورت زیر است:

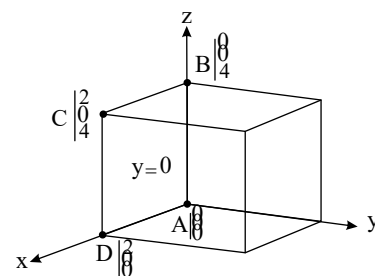


در واقع اگر صفحه $y = 2$ که موازی صفحه xoz (یا $y = 0$) است، رسم شود، فصل مشترک آن با صفحه $x = 1$ همان خط مورد نظر می‌باشد.

نقطه $(2n - p - 1, p - 1, m + p)$ در وجه $ABCD$ قرار دارد؛ در نتیجه داریم:

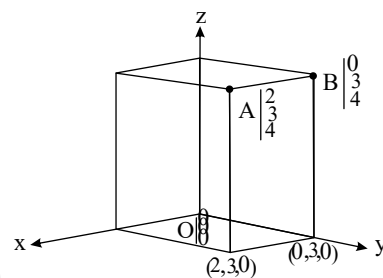
$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases} \text{ معادله چهار ضلعی } ABCD$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 2n - p - 1 \leq 2 \\ 0 \leq m + p \leq 4 \end{cases} \xrightarrow{p=1} \begin{cases} 2 \leq 2n \leq 4 \Rightarrow 1 \leq n \leq 2 \\ -1 \leq m \leq 3 \end{cases}$$



برای اینکه نقطه $(m + n + p, n + 2, p - 1)$ روی یال AB قرار گیرد؛ داریم:

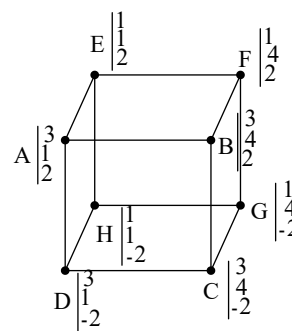
$$\text{معادله یال } AB: \begin{cases} y = 3 \rightarrow n + 2 = 3 \rightarrow n = 1 \\ z = 4 \rightarrow p - 1 = 4 \rightarrow p = 5 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow 0 \leq m + n + p \leq 2 \Rightarrow 0 \leq m + 6 \leq 2 \Rightarrow -6 \leq m \leq -4$$

$$\begin{cases} ABCD & \text{وجه: } x = 3, & EFGH & \text{وجه: } x = 1 \\ ADHE & \text{وجه: } y = 1, & BCGF & \text{وجه: } y = 4 \\ CDHG & \text{وجه: } z = -2, & ABFE & \text{وجه: } z = 2 \end{cases}$$

(الف ۲۰۹)



نقطه A بر سه وجه $ABCD$ و $ADHE$ و $ABFE$ قرار دارد پس مختصات A برابر است با:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب مختصات بقیه رأس‌ها به دست آمده است.

(ب)

$$\begin{cases} x = 1 \rightarrow (1, 2, 1) & , & x = 3 \rightarrow (3, 2, 0) & , & y = 1 \rightarrow (2, 1, -1) \\ y = 4 \rightarrow (2, 4, 1) & , & z = 2 \rightarrow (2, 3, 2) & , & z = -2 \rightarrow (2, 2, -2) \end{cases}$$

نقطه $(1, 4, 1)$ فقط بر دو وجه $x = 1$ و $y = 4$ قرار دارد یعنی روی یال FG قرار دارد.

و نقطه $(3, 2, 2)$ فقط بر دو وجه $x = 3$ و $z = 2$ قرار دارد و نقطه $(2, 4, -2)$ بر دو وجه $y = 4$ و $z = -2$ قرار دارد.

(ت)

$$\text{معادله خط } AB: \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{یال } AB \text{ (پاره خط } AB): \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{خط } BF: \begin{cases} y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{یال } BF: \begin{cases} y = 4 \\ z = 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(ث)



$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ وجه } EFGH \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq z \leq 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ وجه } ADHE$$

(ج) درون مکعب قرار دارد.

(چ) روی وجه $z = 2$ قرار دارد که روی هیچ یالی قرار نگرفته است.

(الف) نادرست است زیرا $A = (-1, 5, 7)$ در ناحیه دوم است.

(ب) درست است. زیرا:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z < 0 \end{cases}$$

(پ) نادرست. زیرا معادله $z = 3$ معادله یک صفحه است موازی صفحه $z = 0$ (یا همان صفحه xoy).

(ت) درست. در $\begin{cases} y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$ یعنی y و z مقادیر ثابتی هستند و x هر مقداری می‌تواند اختیار کند. (x نامشخص است).

(ث) درست. زیرا این بردار در راستای محور z ها قرار دارد و محور z ها بر صفحه شامل دو محور دیگر یعنی بر صفحه xoy عمود است.

(ج) نادرست است. زیرا مؤلفه y بردار $\vec{V} = (-2, 0, 3)$ برابر صفر است، یعنی این بردار در صفحه xoz قرار دارد پس موازی صفحه xoz و در نتیجه عمود بر محور y ها است.

(۲۱۱)

(الف) $A(2, 1, 3), B(-1, 1, 3), C(2, -1, 3), D(-1, -1, 3)$

حدود تغییرات طول نقاط، بین -1 و 2 و حدود تغییرات عرض نقاط، بین -1 و 1 بوده و چهارضلعی $ABCD$ به ارتفاع 3 قرار دارد. بنابراین:

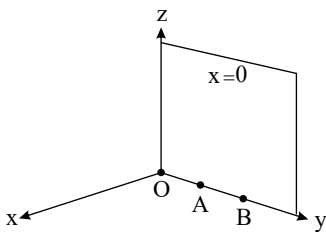
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

(ب) این صفحه، 2 واحد پایین‌تر از چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد.

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

(۲۱۲)

(الف) مختصات چند نقطه که در رابطه $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ صدق کنند عبارتند از: $O(0, 0, 0), A(0, 1, 0), B(0, 2, 0)$ و مکان آن نقاط طبق شکل مقابل روی محور y هاست.



(ب) نمودار معادله $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ یک خط (همان محور y ها) است.

$x = 0$ معادله صفحه‌ای شامل محور y ها است. (صفحه $x = 0$ همان صفحه yoZ است).

(۲۱۳)

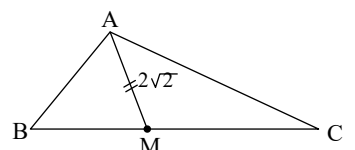
$$\begin{aligned} & \begin{cases} A(1, m-1, -2) \xrightarrow{\text{تصویر قائم بر } y} B(0, m-1, 0) \\ C(m+2, -1, 1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x} D(m+2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow |BD| = \sqrt{(m+2)^2 + (m-2)^2 + 1} \\ & \Rightarrow |BD| = \sqrt{2m^2 + 9} \xrightarrow{m=0} \min |BD| = 3 \end{aligned}$$

(۲۱۴) فرض کنید: $\vec{V} = (x, y, z)$ داریم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \vec{V} \text{ تصویر قائم بر صفحه } xoy = (x, y, 0) \\ \vec{V} \text{ تصویر قائم بر صفحه } xoz = (x, 0, z) \\ \vec{V} \text{ تصویر قائم بر صفحه } yoz = (0, y, z) \end{cases} \xrightarrow{\text{اندازه}} \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{2} \\ \sqrt{x^2 + z^2} = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{y^2 + z^2} = 4\sqrt{3} \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2(x^2 + y^2 + z^2) = 98 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 49 \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 7 \end{aligned}$$

(۲۱۵)

$$\begin{aligned} & A(m, 1, 2) \xrightarrow{\text{تصویر قائم بر } yoz} B(0, 1, 2) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } xoy} C(0, 1, -2) \\ & M = \frac{B+C}{2} = (0, 1, 0) \\ & |AM| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4} = 2\sqrt{2} \\ & \Rightarrow m^2 + 4 = 8 \Rightarrow m = \pm 2 \end{aligned}$$



(۲۱۶)



$$BC \text{ وسط } M: \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \\ z_M = \frac{z_B + z_C}{2} \end{cases} \Rightarrow M \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$AM = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + \left(\frac{7}{2}-1\right)^2} = \sqrt{1+1+\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \\ AC = \sqrt{(1-1)^2 + (5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{0+9+9} = 3\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21} \end{cases}$$

$$\Delta ABC \text{ محیط} = 3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{21}$$

۲۱۷

$$F = (4, 5, 2) \text{ و } OC \text{ وسط} = (2, 0, 0)$$

$$OC \text{ فاصله } F \text{ از وسط} = \sqrt{(4-2)^2 + (5-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$$

۲۱۸ زمانی، میانه وارد بر BC ، ارتفاع هم می‌باشد، که مثلث متساوی‌الساقین باشد، یعنی: $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$ داریم:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(m-2)^2 + (0-(-1))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(m-2)^2 + 2}$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{AC}| \Rightarrow (m-2)^2 + 2 = 6 \Rightarrow (m-2)^2 = 4 \Rightarrow m-2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

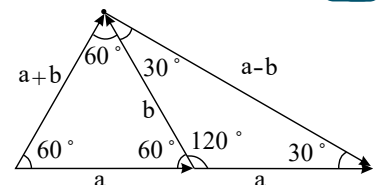
۲۱۹

$$A' = (-2, 3, 0), B = (3, -1, 4)$$

$$A'B = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25+16+16} = \sqrt{57}$$

$$|a| = |b| = |a+b| \Rightarrow \begin{cases} \text{مثلث سمت چپ متساوی‌الاضلاع} \\ \text{مثلث سمت راست متساوی‌الساقین} \end{cases}$$

۲۲۰



برای تعیین زاویه بین دو بردار، باید دو بردار هم‌مبدأ باشند و یا نقطه پایانی یکسانی داشته باشند. در غیر این صورت، مکمل آن را در نظر می‌گیریم.

الف) 120° = زاویه بین a و b (ب) 30° = زاویه بین a و $a-b$

پ) 150° = زاویه بین b و $a-b$ (ت) 120° = زاویه بین b و $-a-b$

ث) 90° = زاویه بین $a+b$ و $a-b$

۲۲۱

الف) درست، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است چون اضلاع این مثلث، قطرهای مربع می‌باشند.

ب) غلط، زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ 120° است.

پ) درست، زیرا نقاط پایانی دو بردار $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$ یکسان است.

ت) درست، چون زاویه بین یک ضلع و یک قطر مربع است.

ث) غلط است زیرا $\vec{AE}$ بر صفحه سقف عمود است پس بر هر بردار واقع در آن نیز عمود است.

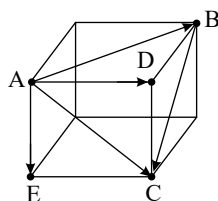
۲۲۲

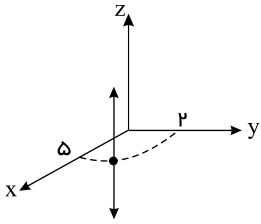
الف) درست - بنابر قانون وجود مثلث:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$$

ب

درست





۲۲۳ یها

محور z ها ۲۲۴

۲۲۵

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a \cdot b - a \cdot c = 0 \Rightarrow a \cdot (b - c) = 0$$

$$|a||b-c|\cos\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = 0 \Rightarrow a = \vec{0} = (0, 0, 0) & (1) \\ |b-c| = 0 \Rightarrow b-c = \vec{0} \Rightarrow b=c & (2) \\ \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow a \perp (b-c) & (3) \end{cases}$$

از آنجا که می‌خواهیم $b \neq c$ باشد، بنابراین مثال‌هایی می‌توان ارائه داد که یکی از دو حالت (۱) یا (۲) اتفاق بیفتد. مثالی در مورد حالت (۱):

$$\begin{cases} \vec{a} = (0, 0, 0), \quad b = (1, 2, 3), \quad c = (-1, 7, 5), \quad b \neq c \\ \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b = 0 + 0 + 0 = 0 \\ a \cdot c = 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = a \cdot c \end{cases}$$

مثالی در مورد حالت (۲):

$$b = (1, 2, -1), \quad c = (3, 2, 4) \xrightarrow{b \neq c} b - c = (-2, 0, -5)$$

حال کافی است بردار a را طوری در نظر بگیریم که ضرب داخلی آن در $b - c$ برابر صفر شود.

$$a = (5, 0, -2) \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b = 5 + 0 + 2 = 7 \\ a \cdot c = 15 + 0 - 8 = 7 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = a \cdot c$$

$$|a| = 2, \quad |b| = 1, \quad |c| = 3 \quad a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = ?$$

$$\text{فرض: } a + b + c = \vec{0} \xrightarrow{\text{توان دوم}} |a + b + c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$$

$$\Rightarrow 0 = 4 + 1 + 9 + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -7$$

$$\xrightarrow{+} 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = -14 \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -7$$

$$\begin{cases} |a+b| = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = 3 \\ |a-b| = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 2 \\ 2a \cdot b = 1 \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

طبق فرض $|a| = |b|$ پس:

$$\begin{cases} 2|a|^2 = 2 \Rightarrow |a|^2 = 1 \\ |a|^2 \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

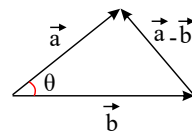
$$\begin{cases} \text{فرض مسئله: } |a| = |b| \\ |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta \\ \Rightarrow |a+b|^2 = 2|a|^2 + 2|a|^2 \cos\theta = 2|a|^2(1 + \cos\theta) = 4|a|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |a+b| = 2|a| \cos \frac{\theta}{2}$$

طبق قضیه کسینوس‌ها: ۲۲۹



$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta$$



مسئله: $|a| = |b| \Rightarrow |a - b|^2 = |a|^2 + |a|^2 - 2|a|^2 \cos\theta = 2|a|^2(1 - \cos\theta)$

$$\Rightarrow |a - b|^2 = 2|a|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow |a - b| = \sqrt{2}|a| \sin \frac{\theta}{2}$$

انفاز: $a + b + c = \vec{0} \Rightarrow |a + b + c| = 0$

توان: $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c = 0$

$$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -\frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}{2}$$

فرض: $\begin{cases} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$

الف) $\vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3), |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (1)$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \stackrel{(1)}{=} |a|^2$$

ب) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

فرض: $\begin{cases} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow b + c = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\ \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$

$$a \cdot (b + c) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$$

$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) = a \cdot b + a \cdot c$$

یعنی خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع برای ضرب داخلی سه بردار برقرار است.

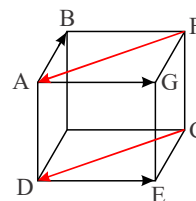
$$\begin{cases} a = (2m - 1, m + 2, 2), b = (-1, 3, m - 1) \Rightarrow a \cdot b < 0 \\ |a - b| > |a + b| \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = -2m + 1 + 3m + 6 + 2m - 2 < 0 \Rightarrow 3m < -5 \Rightarrow m < -\frac{5}{3}$$

مکعب $a = 3\sqrt{2} \Rightarrow$ قطر مربع (وجهها) $= a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$

الف) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{FA} = \underbrace{|\vec{AB}|}_a \underbrace{|\vec{FA}|}_{a\sqrt{2}} \cos 135^\circ$

$$= 3\sqrt{2} \times 6 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -18$$



ب) $\vec{AB} \cdot \vec{DE} = \underbrace{|\vec{AB}|}_a \underbrace{|\vec{AG}|}_a \cos 90^\circ = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times 0 = 0$



$$|b| = 3, |c| = 2$$

$$2a + b + c = \vec{0} \Rightarrow a + b + c = -a \xrightarrow{\text{اندازه}} |a + b + c| = |a|$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} |a|^2 + \underbrace{|b|^2}_{\text{۹}} + \underbrace{|c|^2}_{\text{۴}} + \underbrace{2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c}_{2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)} = |a|^2$$

$$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -\frac{13}{2}$$

۲۳۶ الف) درست

$$\begin{cases} a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \Rightarrow a \cdot b < 0 \\ \theta \text{ منفرجه} \end{cases}$$

ب) نادرست

$$(a+b) \perp (a-b) \Rightarrow (a+b) \cdot (a-b) = 0 \Rightarrow |a|^2 - |b|^2 = 0 \Rightarrow |a| = |b|$$

زاویه بین دو بردار مشخص نیست.

پ) نادرست

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a \cdot b - a \cdot c = 0 \Rightarrow a \cdot (b - c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \vec{0} \\ b = c \\ a \perp (b - c) \end{cases} \text{ یا}$$

هریک از سه حالت می‌تواند اتفاق بیفتد.

ت) درست

$$a \cdot b = 2 + a \cdot c \Rightarrow a \cdot b - a \cdot c = 2 \Rightarrow a \cdot (b - c) = 2 > 0$$

چون ضرب داخلی دو بردار a و $b - c$ مثبت شده، پس زاویه بین آنها حاده است.

۲۳۷

$$\begin{cases} a \in xoz \Rightarrow a = (x, 0, z), b = (1, -1, 1) \\ |a| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + z^2} = 2 \Rightarrow x^2 + z^2 = 4 \quad (1) \\ a \cdot b = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x \xrightarrow{\text{جایگذاری در (1)}} 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{2} \Rightarrow z = -\sqrt{2} \Rightarrow a = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2} \Rightarrow z = \sqrt{2} \Rightarrow a = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\text{الف) } a \cdot i = (a_1, a_2, a_3) \cdot (1, 0, 0) = a_1 \Rightarrow a \cdot i = \text{مؤلفه اول} = \pm \sqrt{2}$$

$$\text{ب) } a \cdot j = a \cdot \text{مؤلفه دوم} = 0$$

$$\text{پ) } a \cdot k = a \cdot \text{مؤلفه سوم} = \pm \sqrt{2}$$

۲۳۸

$$\begin{cases} a = (m, -1, 1) \\ b = (1, n, 2) \\ a \cdot b = 3 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = m - n + 2 = 3 \Rightarrow m = n + 1 \quad (1)$$

$$|a + b| = 3\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان}} |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = 18$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 + 1 + 1 + n^2 + 4 + 6 = 18 \Rightarrow m^2 + n^2 = 5 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (n+1)^2 + n^2 = 5 \Rightarrow 2n^2 + 2n - 4 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Rightarrow n = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow m = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

۲۳۹

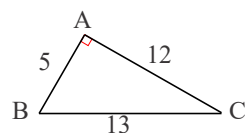
$$|2a - 3b|^2 = 28a \cdot b \Rightarrow 4|a|^2 - 12a \cdot b + 9|b|^2 = 28a \cdot b$$

$$\Rightarrow 4|a|^2 + 36 - 40 \underbrace{a \cdot b}_{|a||b|\cos \frac{\pi}{3}=|a|} = 0 \Rightarrow 4|a|^2 - 40|a| + 36 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} |a| = \begin{cases} 1 \\ \frac{36}{4} = 9 \end{cases}$$

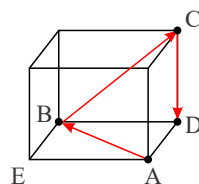
۲۴۰ با توجه به اعداد فیثاغورسی ۵، ۱۲، ۱۳، $|AB| = 5 \Leftarrow$



$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot (\underbrace{\vec{BA}}_{-\vec{AB}} + \vec{AC}) = -|\vec{AB}|^2 + \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}_{\vec{AB} \perp \vec{AC}} = -25$$



روش اول: ۲۴۱



$$\underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}_{\vec{AB} \perp \vec{CD}} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 + |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos 120^\circ$$

زیرا مثلث ABC متساوی الاضلاع بوده و $\vec{BC}$ و $\vec{AB}$ همبدا نیستند.

$$= a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{a=2}{=} -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = -4$$

روش دوم:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot (\underbrace{\vec{BC} + \vec{CD}}_{\vec{BD}})$$

$$= a\sqrt{2} \times a \times \cos 135^\circ = 2\sqrt{2} \times 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4$$

دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{BD}$ همبدا نیستند.

$$\begin{cases} c \perp (a-b) \Rightarrow c \cdot (a-b) = 0 \Rightarrow c \cdot a - c \cdot b = 0 \Rightarrow c \cdot a = c \cdot b \\ b \perp (a-c) \Rightarrow b \cdot (a-c) = 0 \Rightarrow b \cdot a - b \cdot c = 0 \Rightarrow b \cdot a = b \cdot c \end{cases} \Rightarrow c \cdot a = b \cdot a$$

$$\Rightarrow c \cdot a - b \cdot a = 0 \Rightarrow (c-b) \cdot a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & (\text{غ ق ق}) \\ b = c & (\text{غ ق ق}) \end{cases} \text{طبق فرض}$$

$$a \perp (c-b) \Rightarrow a \perp (b-c)$$

۲۴۲

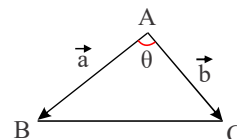
الف نادرست

ب نادرست

۲۴۴

$$A = (0, 1, 1), B = (\sqrt{3}, 2, -1), C = (\sqrt{3}, 2, 1), \theta = ?$$

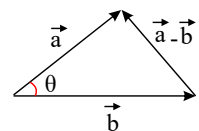
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{AB} = B - A = (\sqrt{3}, 1, -2) \\ \vec{b} = \vec{AC} = C - A = (\sqrt{3}, 1, 0) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3 + 1 + 0}{\sqrt{3+1+4} \times \sqrt{3+1}} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

۲۴۵ فرض می‌کنیم دو بردار $a = (a_1, a_2)$ و $b = (b_1, b_2)$ در فضای دوبعدی باشند. مطابق شکل ضلع سوم مثلث برابر است با:

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$



$$\begin{cases} |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad |b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad |a-b| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} \\ \text{طبق قضیه کسینوس ها: } |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta \Rightarrow 2|a||b|\cos\theta = |a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2|a||b|\cos\theta = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - [(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2]$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2) = 2a_1b_1 + 2a_2b_2$$

$$\Rightarrow |a||b|\cos\theta = \underbrace{a_1b_1 + a_2b_2}_{\text{تعریف ضرب داخلی } a \cdot b} \Rightarrow \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

رابطه فوق در فضای ۳ بعدی نیز قابل تعمیم است.



۲۴۶ الف) درست

$$V \perp oz \Rightarrow z = 0 \Rightarrow a - |a| = 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow a > 0 \Rightarrow V = (+, \underset{\downarrow}{+}, 0)$$

زاویه V با محور oy حاده است.

ب) نادرست

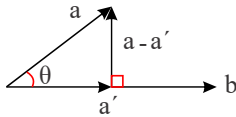
$$a - |a| < 0 \Rightarrow a < |a| \Rightarrow a < 0 \Rightarrow V = (+, \underset{\downarrow}{-}, -)$$

زاویه V با محور oy منفرجه است.

پ) درست

$$a > 0 \Rightarrow V = (\underset{\downarrow}{+}, +, \underset{\downarrow}{0})$$

بر محور z ها عمود زاویه با oz حاده



۲۴۷ مطابق شکل با فرض $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ اگر تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b ، بردار a' باشد، بدیهی است:

$$\begin{cases} a' \parallel b \Rightarrow \begin{cases} a' = rb \\ r > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - rb) \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot b - r|b|^2 = 0 \\ (a - a') \perp b \Rightarrow (a - a') \cdot b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

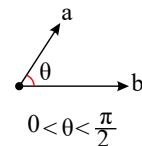
۲۴۸

تصویر قائم بردار a در امتداد b : $a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$

الف) $\begin{cases} a = (2, -1, 2) \\ b = i = (1, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow a \cdot b = 2 + 0 + 0 = 2 \Rightarrow a' = \frac{2}{1} b = 2b = (2, 0, 0)$

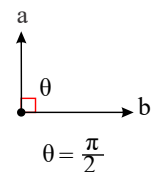
ب) $\begin{cases} a = (2, 3, 1) \Rightarrow a \cdot b = 6 + 6 + 1 = 13 \\ b = (3, 2, 1) \Rightarrow |b| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14} \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{13}{14} b = \frac{13}{14} (3, 2, 1)$

ج) $\begin{cases} a = (1, 1, 0) \Rightarrow a \cdot b = -1 + 2 + 0 = 1 \\ b = (-1, 2, 4) \Rightarrow |b| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{1}{21} b = \frac{1}{21} (-1, 2, 4)$



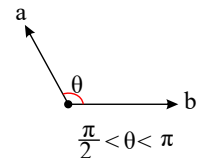
۲۴۹ الف) $a \cdot b > 0$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



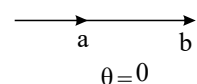
ب) $a \cdot b = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



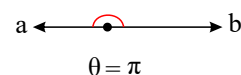
پ) $a \cdot b < 0$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$



ت) $a \cdot b = |a| |b|$

$$\theta = 0$$



ث) $a \cdot b = -|a| |b|$

$$\theta = \pi$$

۲۵۰

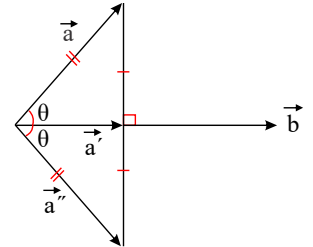


$$A = (1, 0, -1), B = (1, 1, 1), C = (-1, 1, 0)$$

$$\begin{cases} \vec{r}OA + \vec{OB} = (\vec{r}, 1, -1) \xrightarrow{\text{فرض}} \vec{a} \\ \vec{r}OC - \vec{OB} = (-\vec{r}, 1, -1) \xrightarrow{\text{فرض}} \vec{b} \end{cases} \quad a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{-\vec{r} + 1 + 1}{11} (-\vec{r}, 1, -1)$$

$$\Rightarrow a' = -\frac{\vec{r}}{11} (-\vec{r}, 1, -1)$$

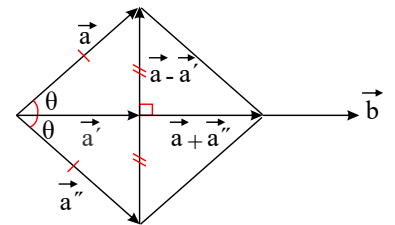
$$\begin{cases} |a'| = |a| \cos \theta, |a''| = |a| \\ a' \cdot a'' = |a'| \cdot |a''| \cdot \cos \theta = |a| \cos \theta \cdot |a| \cdot \cos \theta \\ \Rightarrow a' \cdot a'' = |a|^2 \cos^2 \theta \end{cases}$$



۲۵۱

۲۵۲ فرض می‌کنیم تصویر قائم و قرینه بردار a نسبت به بردار b به ترتیب a' و a'' باشند. بدیهی است چهارضلعی حاصل یک لوزی بوده، پس قطرهای، نیمساز زوایا بوده و برهم عمودند و طول دو ضلع مجاور برابرند.

$$|a''| = |a|$$



الف) درست زیرا:

ب) درست زیرا:

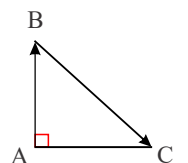
پ) درست زیرا:

$$(a - \frac{a \cdot b}{|b|^2} b) = a - a' \Rightarrow (a - a') \perp b$$

$$\frac{a' \cdot a''}{a \cdot a'} = \frac{|a'| |a''| \cos \theta}{|a| |a'| \cos \theta} \xrightarrow{|a''|=|a|} 1$$

$$(a - a') \perp (a + a'') \Rightarrow (a - a') \cdot (a + a'') = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{BC} &= \vec{AB} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{AB} \cdot (-\vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= -\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}_{\vec{AB} \perp \vec{AC}} = -|AB|^2 \end{aligned}$$



۲۵۳

۲۵۴

$$\begin{cases} i = (1, 0, 0) \xrightarrow{\text{فرض}} a \\ j = (0, 1, 0) \xrightarrow{\text{فرض}} b \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{0}{|b|^2} b \Rightarrow a' = (0, 0, 0) : \text{بردار صفر}$$

$$\vec{b} + \vec{c} = (\vec{r}, -\vec{r}, \vec{r}), \quad \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{35}{49} (\vec{r}, -\vec{r}, \vec{r})$$

$$|u \cdot v| \leq |u| |v|$$

$$u \cdot v = |u| |v| \cos \theta$$

۲۵۶ نامساوی کوشی- شوارتز:

طبق تعریف ضرب داخلی داریم:



اندازه

$$\rightarrow |u \cdot v| = ||u|| |v| \cos \theta = |u| |v| |\cos \theta| \Rightarrow |u \cdot v| \leq |u| |v|$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \Rightarrow |\cos \theta| \leq 1$$

۲۵۷

$$\begin{cases} \sqrt{2x + 3y - z} = -2 \\ \min(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{u \cdot v})? \\ \text{جزء تک تک: } u = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow v = (\sqrt{2}, 3, -1)$$

شوارتز نامساوی کوشی - $|u \cdot v| \leq |u| |v| \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{2 + 9 + 1}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{3}$$

۲۵۸

فرض: $a + b + c = \vec{0}$

طرفین فرض را یکبار در a و بار دیگر در b ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{a \times} \underbrace{a \times a + a \times b + a \times c}_{\vec{0}} = \underbrace{a \times \vec{0}}_{\vec{0}} \Rightarrow a \times b = -a \times c \Rightarrow a \times b = c \times a \quad (1) \\ \xrightarrow{b \times} \underbrace{b \times a + b \times b + b \times c}_{\vec{0}} = \underbrace{b \times \vec{0}}_{\vec{0}} \Rightarrow b \times c = -b \times a \Rightarrow b \times c = a \times b \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} a \times b = b \times c = c \times a$$

کافی است بردار $a \times b$ را به دست آوریم. زیرا $a \times b$ برداری است که بر b, a و هر مضربی از a, b و هر ترکیبی از b, a مانند $\alpha a + \beta b$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) نیز عمود است. ۲۵۹

$$\begin{cases} a = (-2, 1, -3) \\ b = (1, -2, 1) \end{cases} \times$$

$$a \times b = (-5, -1, 3)$$

۲۶۰

$$|a| = 3, |b| = \sqrt{26}$$

$$|a \times b| = \sqrt{35} \Rightarrow |a| |b| \sin \theta = \sqrt{35} \Rightarrow 3 \times \sqrt{26} \sin \theta = \sqrt{35} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = \pm \sqrt{\frac{12}{13}} = \pm \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = 3 \times \sqrt{26} \times \left(\pm \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}} \right) = \pm 6\sqrt{2}$$

۲۶۱

$$a \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - a \times c = \vec{0} \Rightarrow a \times (b - c) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \vec{0} \quad (1) \\ b - c = \vec{0} \Rightarrow b = c \quad (2) \\ a \parallel (b - c) \quad (2) \end{cases}$$

صورت مسئله حالتی را می‌خواهد که $b \neq c$ یعنی حالت (۱) یا حالت (۲)

مثال حالت (۱):

$$\begin{cases} a = \vec{0} = (0, 0, 0) \\ b = (1, 2, 5) \\ c = (3, 1, 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times b = (0, 0, 0) \times (1, 2, 5) = (0, 0, 0) \\ a \times c = (0, 0, 0) \times (3, 1, 4) = (0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow a \times b = a \times c$$

مثال حالت (۲):

$$\begin{cases} b = (1, 2, 5) \\ c = (3, 1, 4) \end{cases} \xrightarrow{b \neq c} b - c = (-2, 1, 1) \xrightarrow[\text{مثلا } a = 2(b-c)]{a \parallel (b-c)} a = (-4, 2, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \times b = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \Rightarrow a \times b = (6, 22, -10) \\ a \times c = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \Rightarrow a \times c = (6, 22, -10) \end{cases} \Rightarrow a \times b = a \times c$$

بردار عمود بر دو بردار a و b برداری است که از ضرب خارجی آن دو به دست می‌آید. ۲۶۲

$$\begin{cases} a = (1, -3, 2) \\ b = (-2, 1, -5) \end{cases} \times$$

$$a \times b = (15 - 2, -4 + 5, 1 - 6) = (13, 1, -5)$$



و نیز هر مضربی از این بردار بر a و b عمود است.

۲۶۳

$$a = (m - 2, -3, n + 1)$$

شرط آنکه بردار a بر دو بردار غیرموازی b و c عمود باشد، آن است که $a \parallel (b \times c)$

$$\begin{cases} b = (2, 3, 4) \\ c = (-1, 2, 1) \end{cases} \times$$

$$b \times c = (-5, -6, 7)$$

$$a \parallel (b \times c) \Rightarrow \frac{m-2}{-5} = \frac{-3}{-6} = \frac{n+1}{7}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{اولی و دومی}} \frac{m-2}{-5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2m-4 = -5 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \\ \xrightarrow{\text{دومی و سومی}} \frac{n+1}{7} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2n+2 = 7 \Rightarrow n = \frac{5}{2} \end{cases}$$

۲۶۴

فرض $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $a \cdot j = 4$, $a \cdot k = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot j = (a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 1, 0) = a_2 \Rightarrow a_2 = 4 \\ a \cdot k = (a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 0, 1) = a_3 \Rightarrow a_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = (a_1, 4, 5)$$

$$\Rightarrow a \times i = \frac{(a_1, 4, 5)}{(1, 0, 0)} \times \Rightarrow a \times i = (0, 5, -4) \xrightarrow{\text{اندازه}} |a \times i| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

۲۶۵

الف) $a \times b + c \times a = \vec{0} \Rightarrow a \times b - a \times c = \vec{0} \Rightarrow a \times (b - c) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \vec{0} \rightarrow \text{خلاف فرض} \\ b - c = \vec{0} \Rightarrow b = c \\ a \parallel (b - c) \end{cases} \Rightarrow \text{نادرست یا}$$

ب) $a \times b = \vec{0}$

$$\Rightarrow |a \times b| = 0 \Rightarrow |a||b| \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = 0 \Rightarrow a = \vec{0} \\ |b| = 0 \Rightarrow b = \vec{0} \\ \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ یا } \pi \Rightarrow a \parallel b \end{cases} \Rightarrow \text{خلاف فرض درست}$$

۲۶۶

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \xrightarrow{\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{c}} \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$$

پس گزینه «۱» اشتباه و بقیه گزینه‌ها درست هستند.

۲۶۷

$$\vec{AB} = B - A = (2, -1, 3), \vec{AC} = (-2, 2, 2)$$

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = i(-2-6) - j(4+6) + k(4-2) = -8i - 10j + 2k$$

$$\xrightarrow{\text{اندازه}} \text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \sqrt{64 + 100 + 4} = \sqrt{168} = 2\sqrt{42}$$

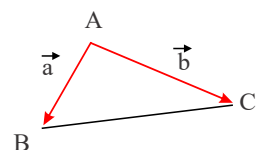
۲۶۸

$$A(3, 5, 7), B(5, 5, 0), C(-4, 0, 4)$$

$$\text{فرض: } \begin{cases} \vec{a} = \vec{AB} = B - A = (2, 0, -7) \\ \vec{b} = \vec{AC} = C - A = (-7, -5, -3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \times b = \frac{(2, 0, -7) \times (-7, -5, -3)}{(-7, -5, -3)}$$

$$a \times b = (-35, 55, -10) = 5(-7, 11, -2)$$





$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{5}{2} \sqrt{49 + 121 + 4} = \frac{5}{2} \sqrt{174}$$

۲۶۹

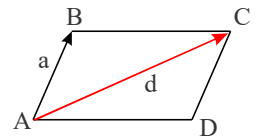
$$3a + b = (-3, 1, 2) \text{ و } a - 4b = (0, 2, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |(3a + b) \times (a - 4b)| = \left| \underbrace{3a \times a}_{\circ} - 12a \times b + \underbrace{b \times a}_{-a \times b} - \underbrace{4b \times b}_{\circ} \right| = |-12a \times b| = 12 |a \times b| \\ \begin{array}{l} (-3, 1, 2) \\ (0, 2, 1) \end{array} \times \xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7 \\ (-3, 3, -6) \end{array} \right.$$

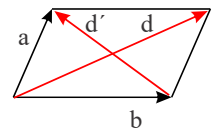
$$\Rightarrow 12 |a \times b| = 7 \Rightarrow S = |a \times b| = \frac{7\sqrt{6}}{12}$$

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} |a \times d| = |a \times d|$$

۲۷۰ الف) درست. زیرا:



ب) نادرست. زیرا:



$$\left\{ \begin{array}{l} |d \times d'| = |(a + b) \times (a - b)| = \left| \underbrace{a \times a}_{\circ} - a \times b + \underbrace{b \times a}_{-a \times b} - \underbrace{b \times b}_{\circ} \right| = |-2a \times b| = 2 |a \times b| = 2S \\ d = a + b \\ d' = a - b \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow |d \times d'| = 2S \rightarrow S = \frac{1}{2} |d \times d'|$$

۲۷۱

$$\text{فرض: } \begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) \\ b = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

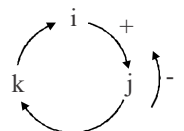
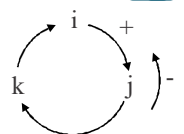
$$\Rightarrow a \cdot (a \times b) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= \underbrace{a_1 a_2 b_3}_{\circ} - \underbrace{a_1 a_3 b_2}_{\circ} + \underbrace{a_2 a_3 b_1}_{\circ} - \underbrace{a_2 a_1 b_3}_{\circ} + \underbrace{a_3 a_1 b_2}_{\circ} - \underbrace{a_3 a_2 b_1}_{\circ} = 0 \Rightarrow a \cdot (a \times b) = 0$$

$$(3j - k) \cdot [(2k - i) \times (2i - j)]$$

$$= (3j - k) \cdot [4j + 2i + k] = \underbrace{12j \cdot j}_{|j|^2=1} + \underbrace{6j \cdot i}_{\circ} + \underbrace{3j \cdot k}_{\circ} - \underbrace{4k \cdot j}_{\circ} - \underbrace{2k \cdot i}_{\circ} - \underbrace{k \cdot k}_{|k|^2=1} = 2$$

۲۷۳



$$1) k \times j = i \xrightarrow{\text{زیرا}} k \times j = -i \quad \text{(نادرست)}$$

$$\text{یا: } \begin{cases} k = (0, 0, 1) \\ j = (0, 1, 0) \end{cases} \times \Rightarrow k \times j = (-1, 0, 0) = -i$$

$$2) j \times j = 0 \xrightarrow{\text{درست}} \text{زیرا دو برابر موازیند}$$

$$\text{یا: } \begin{cases} j = (0, 1, 0) \\ j = (0, 1, 0) \end{cases} \times \Rightarrow j \times j = (0, 0, 0) = 0$$

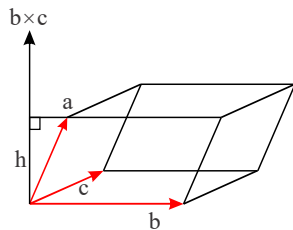


$$\text{۳) } k \times (i \times j) = \vec{0} \text{ (درست)} \xrightarrow[\text{طبق شکل}]{\text{زیرا}} k \times \underbrace{(i \times j)}_k = \underbrace{k \times k}_{k \parallel k} = \vec{0}$$

$$\text{۴) } k \cdot (j \times i) = -1 \text{ (درست)} \rightarrow k \cdot \underbrace{(j \times i)}_{-k} = -k \cdot k = -|k|^2 = -(1)^2 = -1$$

$$\text{۵) } i \times (k - j) = (0, -1, -1) \text{ (درست)}$$

$$\text{زیرا: } i \times (k - j) = i \times k - i \times j = -j - k = (0, -1, -) - (0, 0, 1) = (0, -1, -1)$$



اثبات: می‌دانیم اندازه تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b از رابطه $|a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|}$ به دست می‌آید.

مطابق شکل h اندازه تصویر قائم بردار a در امتداد بردار $b \times c$ است.
بنابراین داریم:

$$h = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|b \times c|}$$

$$\text{حجم } V = \text{مساحت قاعده} \times h = |b \times c| \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|b \times c|} \Rightarrow V = |a \cdot (b \times c)|$$

$$V = 0 \text{ (حجم)} \Rightarrow \text{سه بردار هم‌صفحه‌اند.}$$

$$V = |a \cdot (b \times c)| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & m+1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|(4 - m - 1 + 0) - (6 + 2 + 0)| = 0 \Rightarrow m = -5$$

۲۷۴

۲۷۵

حل دترمینان 3×3 به روش ساروس: