



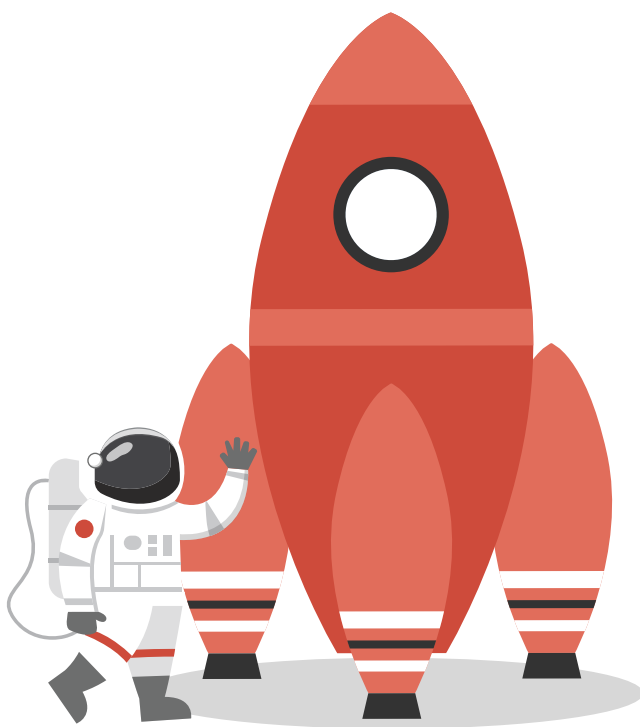
سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

دستگرمی

حسابان ۲



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات دست گرمی

حسابان ۲ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان حسابان : محمدرضا اصغریان

تابع

برد توابع (دهم و یازدهم)

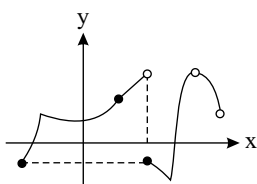
۱) تابع f نمودار آن به شکل زیر است، نقطه بحرانی و ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد.

۱) ۱, ۱, ۶

۲) ۲, ۱, ۶

۳) ۱, ۱, ۵

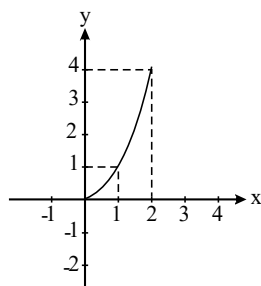
۴) ۱, ۲, ۵



تبدیل نمودار توابع

۲) نمودار تابع $y = \log_8(x + 2)$ را به کمک قوانین انتقال از روی نمودار $f(x) = \log_8 x$ رسم کنید.

۳) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.



الف

$$y = f(-x)$$



ب

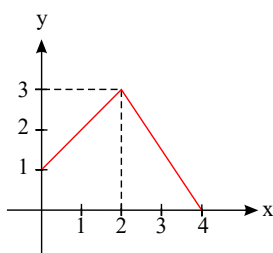
$$y = -f(x)$$

پ

$$y = -f(-x)$$

۴ نمودار تابع $y = 2 \sin(2x) + 1$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

۵ نمودار تابع $y = 2 \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.



۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ را رسم کنید.

۷ با فرض $f(x) = x^2$ توضیح دهید نمودار تابع $g(x) = -2(3x + 4)^2 + 5$ چگونه از نمودار f رسم می شود؟

۸ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -\sqrt[3]{x} - 1$

ب) $y = -\sqrt[3]{x+1} + 1$

۹ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) نمودار تابع $y = (x + 2)^2$ را می توان با ۲ واحد انتقال نمودار $y = x^2$ به سمت چپ رسم کرد.

ب) تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ روی بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی است.

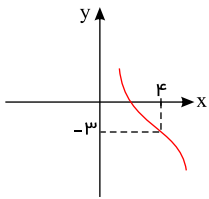
پ) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.

ت) آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابر هستند.

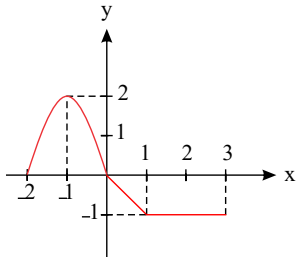
۱۰ نمودار $y = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم، سپس در راستای افقی با ضریب ۳ منقبض و در نهایت آن را ۲ واحد به چپ منتقل می کنیم. ضابطه تابع حاصل را بنویسید.



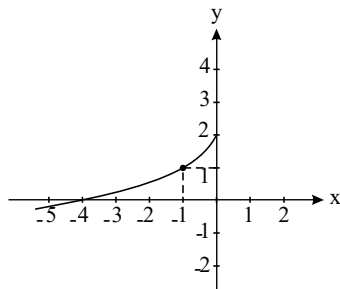
۱۱ اگر نمودار $y = -(x+a)^3 + b$ به صورت مقابل باشد، مقادیر a و b را بیابید.



۱۲ نمودار تابع $y = f(-2x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -2f(x-2)$ را رسم کنید.



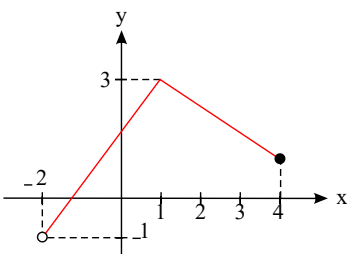
۱۳ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



۱۴ نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده‌ایم، سپس آن را ۳ واحد در جهت راست و ۶ واحد به پایین منتقل کرده‌ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

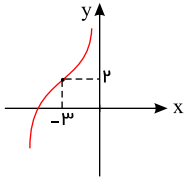
۱۵ تابع $f(x) = x + 4$ را با دامنه $D_f = [-4, 0]$ رسم کرده و سپس توابع $f(2x)$ و $f(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

۱۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $y = -3f(1 - \frac{x}{2}) + 1$ را بیابید.

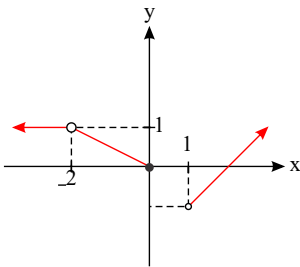




۱۷ اگر نمودار $y = (x + a)^3 + b$ به صورت مقابل باشد، مقادیر a و b را بیابید.

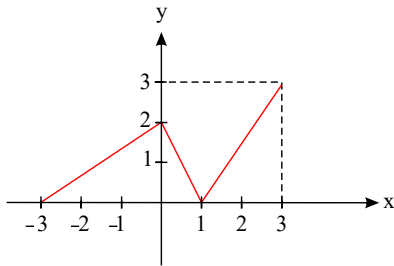


۱۸ اگر نقطه $A(1, 4)$ متعلق به تابع $y = f(x)$ باشد، این نقطه در تابع $g(x) = -3f(2x + 5) + 1$ به چه نقطه‌ای تبدیل می‌شود؟

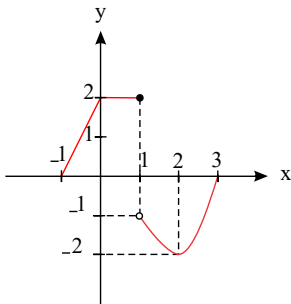


۱۹ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = f(3x + 1)$ را بیابید.

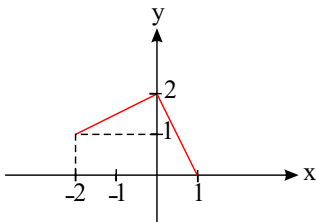
۲۰ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ را رسم کنید.



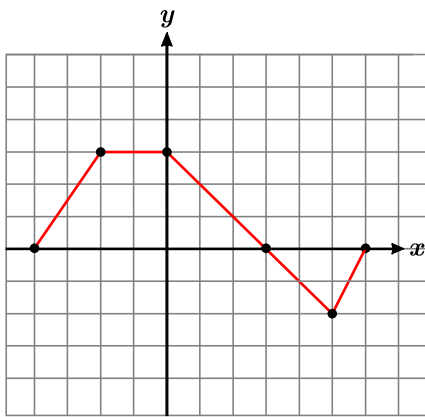
۲۱ نمودار تابع $y = f(x - 1)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(\frac{1}{2}x) - 1$ را رسم کنید.



۲۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(x + 1) + 2$ را رسم کنید.



۲۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.



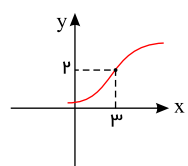
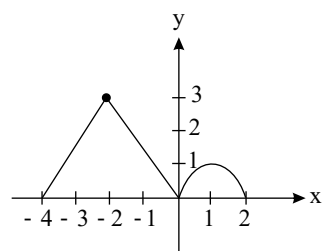
$$y = f(-x)$$

$$y = 2f(x - 1)$$

$$y = -f(x) + 2$$

$$y = f(2x - 1)$$

$$y = f(3 - x)$$



۲۴ اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = -2f(-\frac{x}{2}) + 1$ را رسم کنید.

۲۵ اگر نمودار $y = \sqrt[3]{x+a} + b$ به صورت مقابل باشد، مقادیر a و b را تعیین کنید.

الف

ب

پ

ت

ث



انواع تابع

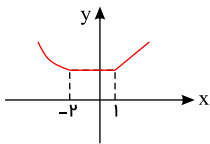
۲۶ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه‌اش هم صعودی باشد و هم نزولی، مقدار a باید برابر با باشد.

ب) دوره تناوب و مقدار مینیمم تابع $y = 2 \sin \frac{\pi}{2} x - 1$ به ترتیب برابر با و است.

پ) دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است.

۲۷ نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشخص کنید تابع در کدام فاصله اکیداً صعودی و در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



۲۸ تابع $f = \{(2, 3m - 10), (0, m), (4, -m + 2)\}$ اکیداً نزولی است، حدود m را بیابید.

۲۹ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف. تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ در تمام دامنه خود یکنواست.

ب. تابع $f(x) = [x]$ تابعی ثابت است.

۳۰ نمودار تابع $y = |x - 1| + |x + 1|$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه فاصله‌ای تابع صعودی و در چه فاصله‌ای اکیداً صعودی است؟

۳۱ اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و عبارت $f(-x + 2) - f(2x + 7)$ نامثبت باشد، حدود x را بیابید.

۳۲ اگر f و g در یک فاصله مشترک هردو اکیداً نزولی باشند، ثابت کنید تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً نزولی است.

۳۳ اگر f و g روی $\mathbb{R}$ توابعی اکیداً صعودی باشند، ثابت کنید تابع $f + g$ نیز روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۳۴ تابع f اکیداً نزولی و تابع $f \circ f$ تعریف شده است. ثابت کنید تابع $f \circ f$ اکیداً صعودی است.

۳۵ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟



الف

$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

ب

$$g(x) = 2^{-x}$$

پ

$$h(x) = \log_2^x$$

۳۶ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f - g$ چه می‌توان گفت؟

۳۷ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

۳۸ نمودار تابع $y = |\log_2(x+1)|$ را رسم و یکنوایی آن را بررسی کنید.

۳۹ نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{1-x}$ را رسم و یکنوایی آن را در دامنه‌اش بررسی کنید.

۴۰ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است، اگر عبارت $f(3x-1) - f(2x+1)$ نامنفی باشد، حدود x را بیابید.

۴۱ اگر تابع $f = \{(-1, 4m), (-3, m), (2, 3m+2)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m را بیابید.

۴۲ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -x^3 + 1$

ب) $y = -(x+1)^3 - 1$

۴۳ نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$$

بخش‌پذیری (دوازدهم)

۴۴ اگر $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax - b$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، نشان دهید:

$$2a + 4 = b$$

۴۵ اگر $f(x) = x^2 - mx + 2$ بر $2x - 4$ بخش‌پذیر باشد، m را بیابید.



۴۶ در چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ مقادیر a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ بوده و بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد.

۴۷ m و n را چنان بیابید که $f(x) = x^3 + mx - n$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده آن بر $x + 2$ برابر -3 باشد.

۴۸ مقدار خارج قسمت تقسیم $(x^8 - 256) \div (x - 2)$ را به ازای $x = 2$ به دست آورید.

۴۹ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + mx + n$ بر عبارت‌های $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر $\frac{x-1}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) $-\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{10}{3}$
(۴) -2

۵۰ عبارت $x^{24} + 1$ بر کدام عبارت همواره بخش‌پذیر است؟

- (۱) $x^{12} + 1$
(۲) $x^3 + 1$
(۳) $x^6 + 1$
(۴) $x^8 + 1$

۵۱ در صورتی که دو چندجمله‌ای $4x^2 - 5x + 2$ و $x^2 + ax$ در تقسیم بر $x - 1$ هم باقی‌مانده باشند، آنگاه مقدار a برابر است با

۵۲ چندجمله‌ای $x^5 + 1$ را برحسب عامل $(x + 1)$ تجزیه کنید.

۵۳ در چندجمله‌ای $y = x^3 + ax^2 + x + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد.

۵۴ مقادیر m و n را چنان بیابید که باقی‌مانده $x^3 + mx^2 - n$ بر $x^2 + x - 2$ برابر با $x + 1$ باشد.

۵۵ اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^3 - mx^2 + x + 3$ بر $x + 1$ برابر -3 باشد، آنگاه باقی‌مانده $P(x)$ بر $x - 2$ را بیابید.

۵۶ کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$ ب) $\frac{(x^8 + x^7 + \dots + 1)(x^8 - x^7 + \dots - x + 1)}{x^{18} - 1}$

۵۷ اگر باقی‌مانده $f(x)$ بر $x^2 - 1$ عبارت $2x + 7$ باشد، باقی‌مانده $f(x + 2)$ بر $x + 3$ را بیابید.

۵۸ m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^4 - 3x^3 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش‌پذیر باشد.



۵۹ در صورتی که دو چندجمله‌ای $x^2 + 3x - 2$ و $x^3 - 4x^2 + 5x + m$ در تقسیم بر $x + 2$ هم باقی‌مانده باشند، m را بیابید.

۶۰ هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته‌شده تجزیه کنید.

الف $x^6 - 1$ با عامل $x - 1$

ب $x^6 - 1$ با عامل $x + 1$

پ $x^5 + 32$ با عامل $x + 2$

مثلات

دوره تناوب و کاربرد آن

۶۱ اگر دوره تناوب تابع $f(x) = 3\cos(mx - \frac{\pi}{4})$ برابر با $\frac{\pi}{7}$ باشد، دوره تناوب تابع $g(x) = \sin(mx - x + \frac{\pi}{6})$ را بیابید. ($m > 0$)

۶۲ دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف

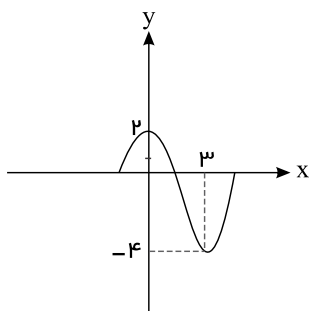
$$f(x) = 5\sin(6x) - 7$$

ب

$$g(x) = \frac{1}{2}\cos(3x) + 4$$

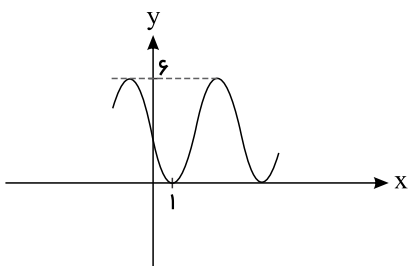
۶۳ دوره تناوب تابع $y = |\sin ax|$ و $y = |\cos ax|$ برابر است.

۶۴ نمودار تابع $f(x) = a\cos bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه این تابع را بیابید.

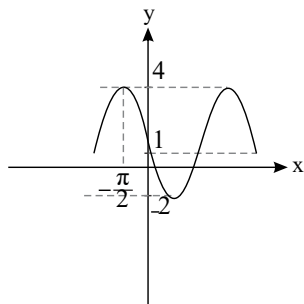




۶۵ اگر نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه آن را بیابید.



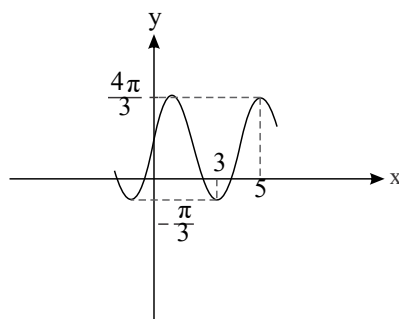
۶۶ نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه آن را بیابید.



۶۷ ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = |2 \sin 3x - 4|$ ب) $g(x) = |4 \cos 2x - 3|$

۶۸ اگر دوره تناوب $f(x) = 3 \cos(mx) + 4$ برابر با $\frac{\pi}{5}$ باشد، دوره تناوب تابع $g(x) = -\cos(m+2)x$ را بیابید. ($m > 0$)



۶۹ نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه آن را بیابید.

۷۰ اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sin(mx) + m$ برابر 4π باشد، ماکزیمم تابع را بیابید. ($m > 0$)

۷۱ در تابع $f(x) = \sqrt{2} \cos(\frac{1}{3}x) - 1$ ، دوره تناوب و نسبت ماکزیمم تابع به مینیمم آن را بیابید.

۷۲ کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.



پ تابع تناژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، معودی است.

۷۳ ضابطه تابع مثلثاتی به صورت $y = a \sin(bx) + c$ و یا $y = a \cos(bx) + c$ بنویسید که بیشترین و کمترین مقدار و دوره تناوب تابع برابر مقادیر داده شده باشد. ($b > 0$)

الف

$$T = \frac{\pi}{2}, \text{Min} = -2, \text{Max} = 4$$

ب

$$T = \frac{\pi}{6}, \text{Min} = -4, \text{Max} = 4$$

۷۴ با توجه به محورهای سینوس و تناژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید.

الف

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ب

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

۷۵ اگر $\tan \alpha \leq -1$ ، آنگاه حدود α را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

۷۶ اگر $\sin \alpha = 2m - 1$ و $\tan \alpha = m + 1$ و $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۷۷ اگر $\tan \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، آنگاه حدود α را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

۷۸ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف

$$y = 1 + 2 \sin 7x$$

ب

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$$

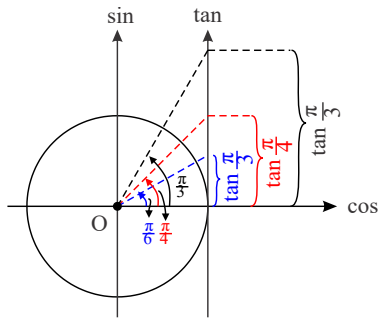


پ

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

ت

$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x$$



۷۹ با توجه به شکل مقابل جای خالی را در جمله داده شده به طور مناسب پر کنید. «اگر زاویه α تنها داخل یک ربع دستگاه مختصات تغییر کند در هر چهار ربع دایره مثلثاتی با افزایش زاویه α همواره تناژانت زاویه می یابد.»

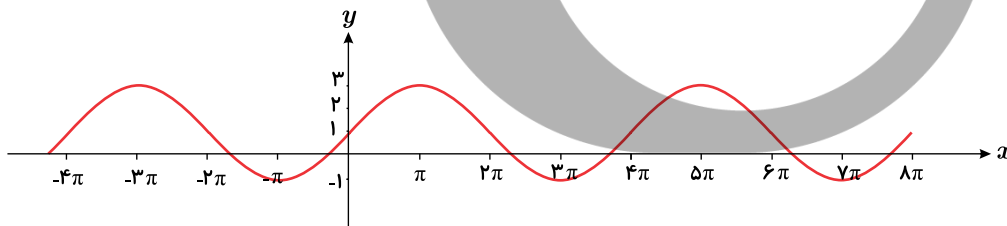
۸۰ با توجه به اطلاعات داده شده محدوده m را به دست آورید.

الف) $\tan \theta = 4 + 2m, \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$

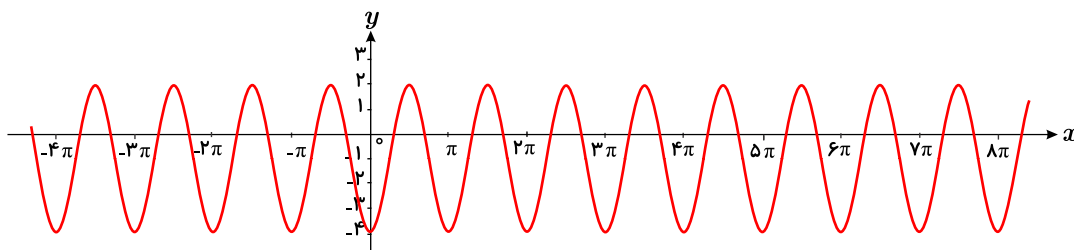
ب) $\tan \theta = -1 + 2m, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{6}$

۸۱ ضابطه مربوط به هریک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف



ب

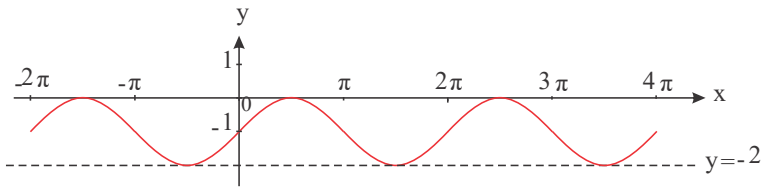


۸۲ برد تابع $f(x) = \left[\frac{3}{2} \sin 4x + 5\right]$ را بیابید. ([] جزء صحیح است)

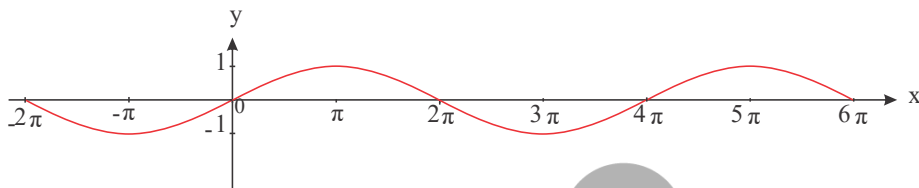


۸۳ ضابطهٔ هریک از توابع داده‌شده به‌صورت $y = \sin bx + c$ است. مقدار b, c و دورهٔ تناوب تابع را مشخص کنید.

الف



ب



۸۴ معادلات مثلثاتی (دوازدهم)

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0$

ب) $2 \cos 3x + 1 = 0$

۸۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\sin x + \cos x = 1 \quad [0, 2\pi]$

ب

$\sin 2x + \cos x = 0$

ج

$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$

د

$2 \sin(3\pi x) = \sqrt{3}$



ث

$$2 \cos 2x - 1 \cos x + 2 = 0$$

۸۶) معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\tan^2 x + \sqrt{2} \tan x = 0$$

۸۷) جوابهای کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$\sin^3 \pi x + \cos^3 \pi x = 0$$

۸۸) معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$2 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} + 1) \sin x + \sqrt{2} = 0$$

۸۹) جوابهای کلی معادلهٔ مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 3x = 0$$

۹۰) معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$$

ب

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

پ

$$\cos x = \cos 2x$$

ت

$$\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$$

ث

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

ج

$$\sin x - \cos 2x = 0$$



ج

$$\tan(2x - 1) = 0$$

ح

$$\tan 3x = \tan \pi x$$

۹۱) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0$

ب) $4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

۹۲) مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

۹۳) اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\cot 2\alpha$ را بیابید.

۹۴) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\tan^3 x - \tan^2 x + 1 = \tan x$$

۹۵) اگر α و β ریشه‌های معادله $\tan^2 x - (2m + 1) \tan x + 2m = 0$ باشند و $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{5}{3}$ ، آنگاه m را بیابید.

۹۶) معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$

ب) $\tan\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

۹۷) معادله زیر چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$$

۹۸) معادله $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ چند جواب دارد؟



۹۹ جواب‌های کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$\tan 3x = \cot\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$$

۱۰۰ جواب‌های کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$\cos 3x \cos x = \sin 3x \sin x + \frac{1}{2}$$

۱۰۱ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\tan x = 3 \cot x$$

$$2 \sin^2 x = 3 \cos x$$

$$\tan^2 x - 3 = 0$$

$$2 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$$

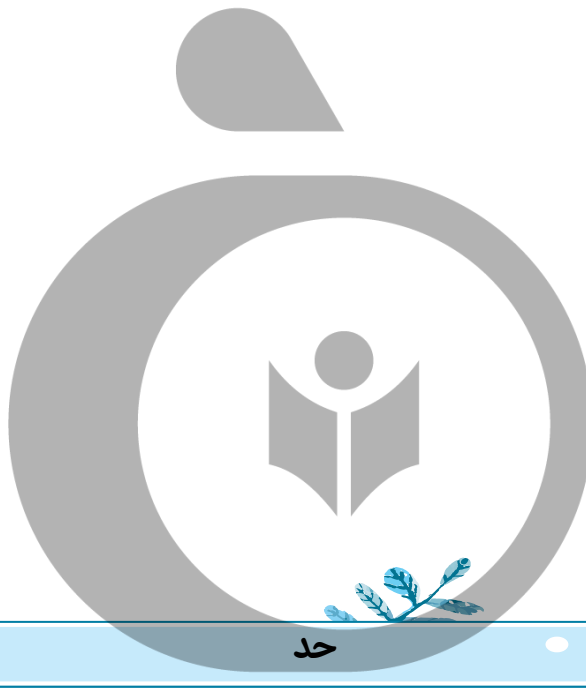
الف

ب

۱۰۲ معادلات زیر را حل کنید.

الف

ب



حد

حدهای نامتناهی

۱۰۳ تابع $f(x) = \log_3^x$ را در نظر بگیرید. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ را بیابید.

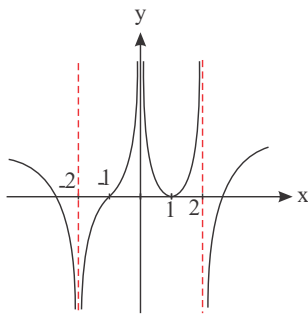
۱۰۴ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-x}{x-5}$



۱۰۵ نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

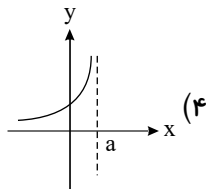
د) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$

ه) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$

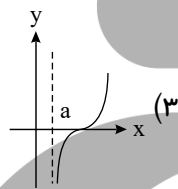
و) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

۱۰۶ با فرض $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x-2}{f(x)} \right]$ را بیابید. (نماد جزء صحیح است.)

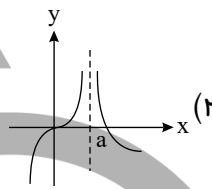
۱۰۷ نمودار کدام تابع، با حد محاسبه شده در پایین آن مطابقت ندارد؟



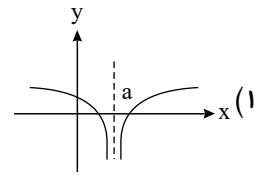
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$



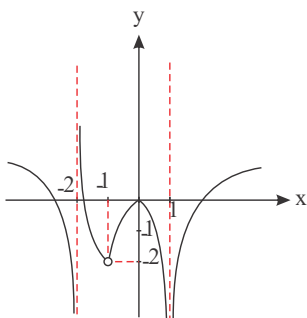
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

۱۰۸ نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f \circ f(x)$



۱۰۹ حاصل حدهای زیر را بیابید. (نماد جزء صحیح است.)

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{x+1}{\tan x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \left[\frac{3-x}{\tan x} \right]$

الف

ب

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



۱۱۰ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$$

۱۱۱ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} =$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$$

۱۱۲ حاصل حدهای زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \left[\frac{x+1}{\tan x} \right]$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \left[\frac{2-x}{\tan x} \right]$$

۱۱۳ حاصل حدهای زیر را بیابید.

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



الف

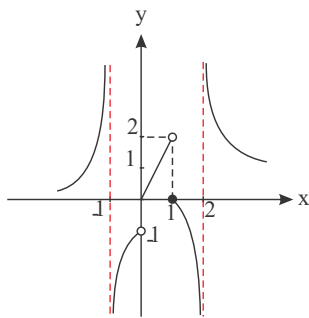
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos 2x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{1 - \cos x}$$

۱۱۴ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2+ax+b} = +\infty$ آنگاه مقادیر a و b را بیابید.

۱۱۵ نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f \circ f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x)$

۱۱۶ تابع $f(x) = \frac{1}{x+5}, x < -5$ مفروض است، برای آنکه $f(x)$ کمتر از -10000 باشد، x در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

۱۱۷ تابع $f(x) = \frac{1}{4-x}, x > 4$ مفروض است، برای آنکه $f(x)$ کمتر از -1000 باشد، x در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

۱۱۸ تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}, x > 3$ مفروض است، برای اینکه $f(x)$ بزرگتر از 1000 باشد، x در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

۱۱۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \tan 2x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin^2 3x}$$

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{(x - 3)^2}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

۱۲۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin x}{2 \cos x - 1}$$

۱۲۲ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 1}{x - 3}$$

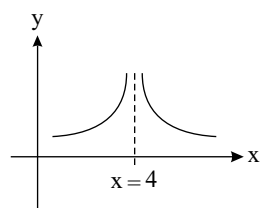
ب

$$\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{x - [-x]}{x + 5}$$

۱۲۳ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{4x^3 + 2x - 1}$$



۱۲۴ اگر نمودار $f(x) = \frac{\sin \frac{\pi x}{6}}{x^2 + ax + b}$ در همسایگی $x = 4$ مطابق شکل باشد، مقدار b کدام است؟

۱۶ (۱)
۴ (۳)
۸ (۲)
۴ (۴) یافت نمی‌شود.

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



۱۲۵ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{(x+3)^2}$ را در اطراف مجانب قائم خود رسم کنید.

۱۲۶ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\{1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

۱۲۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۱۲۸ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+2x}$ را بیابید.

۱۲۹ تابع $f(x) = \frac{x^2+mx+8}{x-2}$ مفروض است. m را چنان بیابید که تابع مجانب قائم نداشته باشد.

۱۳۰ تابع $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}-1} + \frac{x}{x+2}$ مفروض است، مجانب‌های قائم تابع را بیابید.

۱۳۱ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-x}$ را بیابید.

۱۳۲ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{1-x}{\sin x}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

۱۳۳ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف

$$f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$$

ب

$$g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$$

۱۳۴ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos x+1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

۱۳۵ تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+mx+1}$ مفروض است. m را چنان تعیین کنید که تابع مجانب قائم نداشته باشد.

۱۳۶ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-4}$ را بیابید.

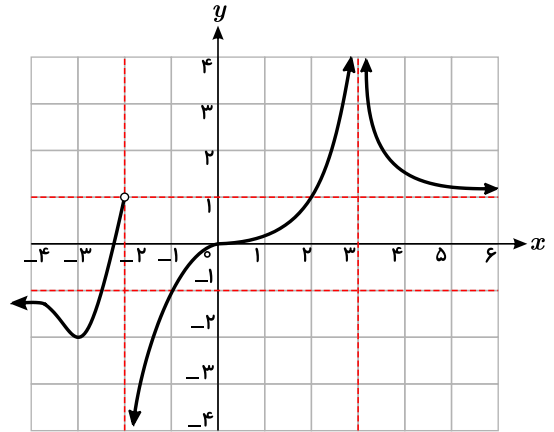


۱۳۷) مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$ را بیابید.

حد در بی نهایت

۱۳۸) برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:

- الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
 ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
 پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$
 ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$
 ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$
 ج) مجانب‌های افقی و قائم

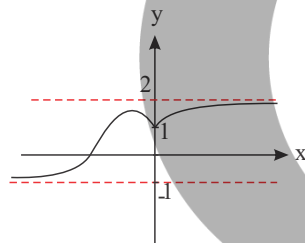


۱۳۹) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 - x^2 + 4)$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4 + 2x^3 + 7)$

۱۴۰) نمودار تابع f به صورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



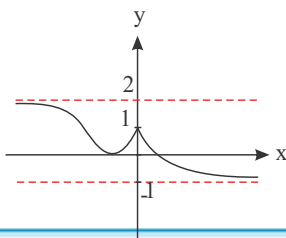
۱۴۱) اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^n + 2x^4 - x + 1}{3x^4 - x^2 + 5} = 3$ ، آنگاه m و n را بیابید. ($m \neq 0$)

۱۴۲) اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x - 3| + mx}{m|x + 2| + 4x} = -3$ ، آنگاه m را بیابید.

۱۴۳) اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^n - 2x^3 + 1}{3x^4 + x^3 + 7} = 5$ ، آنگاه m و n را بیابید.

۱۴۴) نمودار تابع f به صورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$





۱۴۵ تابع $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ مفروض است، برای این که فاصله $f(x)$ تا خط $y=1$ کمتر از $\frac{1}{1000}$ باشد، x را باید در چه محدوده‌ای در نظر بگیریم؟

۱۴۶ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{-x}}{2x + \sqrt{x^2+3}}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 2|x| + \sqrt{x^2+5}}{|x-2| + \sqrt{9x^2-1}}$$

۱۴۷ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3x-1| - x}{|2-x| + 3x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x+2| + x}{|5-x| + 2x}$$

۱۴۸ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - |x+2|}{|x-3| + 4x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x-1| - 3x}{4x - |x-2|}$$

۱۴۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

مثل آب خوردن بگیر



الف

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^3 + x^2 + 4}{x^5 + x^2 - 9x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^3 - x^3 + x^2}{-3x^2 + x - 1}$$

۱۵۰ اگر خط $y = -3$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{mx - |x+2|}{|2x+1|}$ در $+\infty$ باشد، m را بیابید.

۱۵۱ اگر خط $y = 3$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{mx^2 - (x+1)^2}{3x^2 + x}$ باشد، m را بیابید.

۱۵۲ مجانب‌های افقی توابع زیر را بیابید.

الف

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{-x^5 + 2x}$$

ب

$$g(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 + 2x}$$

۱۵۳ مجانب افقی تابع $f(x) = (2x-1)\sin(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۱۵۴ اگر نقطه $A(3, -2)$ محل برخورد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ax+2}{bx-9}$ باشد، a و b را بیابید.

۱۵۵ اگر خط $y = -3$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{2x-1}{mx+1}$ باشد، مجانب قائم تابع را بیابید. ($m \neq 0$)

۱۵۶ اگر خط $y = 5$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{|3x-2|+mx}{\sqrt{x^2-9}}$ در $-\infty$ باشد، مجانب افقی تابع در $+\infty$ را بیابید.

۱۵۷ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هریک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف $y = \frac{2x-1}{x-3}$

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



ب

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$y = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}$$

پ

ت

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}$$

۱۵۸ اگر خط $x = -2$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{3x - 1}{mx + 4}$ باشد، مجانب افقی تابع f را بیابید.

۱۵۹ مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$ را بیابید.

۱۶۰ مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 5}$ را بیابید.

۱۶۱ مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{2x + |x - 1|}{\sqrt{x^2 - 4}}$ را بیابید.

۱۶۲ مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{4x - |x - 1|}{x + |2x - 3|}$ را بیابید.

۱۶۳ مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x|x| + 3}$ را بیابید.

۱۶۴ مجانب‌های افقی توابع زیر را بیابید.

الف

$$f(x) = \frac{|x - 2| + \sqrt{x}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

ب

$$g(x) = \frac{x + \sqrt{9 - x^2}}{|x + 2|}$$

ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

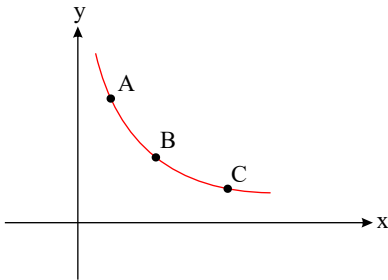


۱۶۵) مجانب‌های قائم و افقی تابع $y = \frac{1 + x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ را به دست آورید.

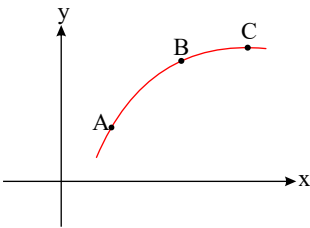
مشتق

تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق

۱۶۶) نمودار تابع f به صورت مقابل است. مقادیر مشتق تابع f در نقاط A, B, C را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



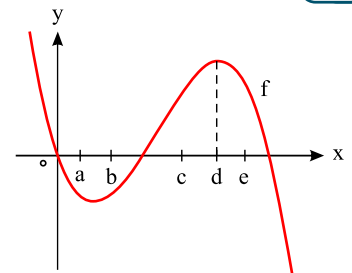
۱۶۷) نمودار تابع f به صورت مقابل است. شیب مماس در A را m_1 ، شیب وتر AB را m_2 ، شیب مماس در C را m_3 می‌نامیم، مقادیر m_1 ، m_2 و m_3 را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۱۶۸) اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

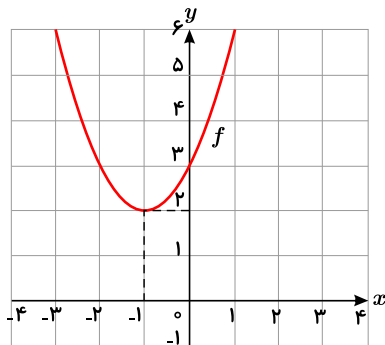
۱۶۹) با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰٫۵
	۲
	-۰٫۵
	-۲





۱۷۰ الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.



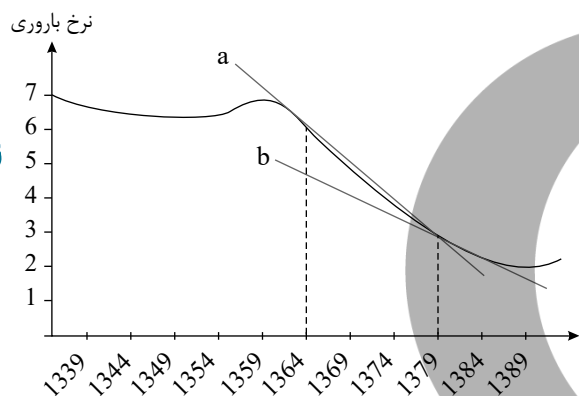
$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.
پ) تابع مشتق را رسم کنید.

۱۷۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۱۷۲ مشتق تابع $f(x) = -x^2 + 3x$ در نقطه $x = 2$ را به کمک تعریف مشتق بیابید.

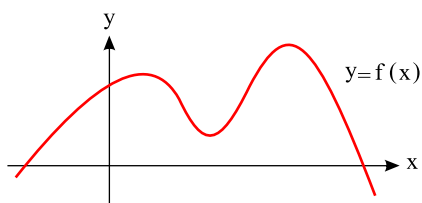
۱۷۳ نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می‌دهد.



الف) شیب‌های خطوط a و b چه چیزهایی را نشان می‌دهد؟

ب) نرخ جمعیت در کدامیک از زمان‌های $t = 1364$ ، $t = 1369$ ، $t = 1374$ ، $t = 1379$ و $t = 1384$ بیشتر است؟

۱۷۴ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به‌طوری‌که:



الف) نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۱۷۵ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \cos x$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ بیابید.

۱۷۶ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x}$ را در نقطه a بیابید.

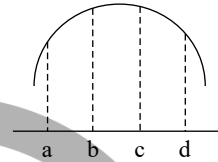
۱۷۷ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در نقطه $x = 9$ بیابید.

۱۷۸ به کمک تعریف، مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ را در نقطه a بیابید.

۱۷۹ به کمک تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^3 - 1$ را در نقطه $x = -2$ بیابید.

۱۸۰ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را در نقطه $x = 7$ بیابید.

باشد، کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟ (m شیب خط مماس در نقطه



۱۸۱ اگر نمودار تابع f به صورت

است.

الف $m_a < m_b < m_c < m_d$

ب $m_a > m_b > m_c > m_d$

پ $m_b > m_a > m_d > m_c$

ت $m_a > m_b > m_d > m_c$

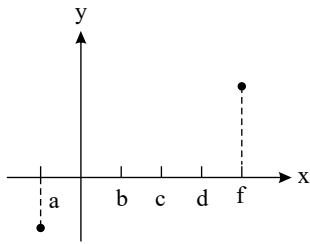
ث شیب منحنی در نقاط c و d منفی است.

۱۸۲ با توجه به مقادیر داده شده برای تابع f در جدول زیر f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	۴٫۲	۴٫۱	۴٫۲	۴٫۵	۵
مقدار تقریبی $f'(x)$	-۰٫۱	?	?	?	?

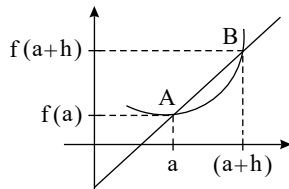


۱۸۳ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازه $[a, f]$ به‌گونه‌ای رسم کنید که دارای همه ویژگی‌های زیر باشد. ۱. تابع f در بازه (a, f) مشتق‌پذیر است.



۲. مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a, b) و (b, c) و (c, d) و (d, f) به‌ترتیب مثبت، منفی و صفر و مثبت باشد.

تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.



۱۸۴ با توجه به شکل مقابل چند تا از موارد زیر درست است؟

الف. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ب. $f'(a) = \frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A}$

پ. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(x_A)}{x - x_A}$

۴ (صفر)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۸۵ در تابع $f(x) = (2x^2 + 4x + 3)^2$ حاصل $f'(0)$ را بیابید.

۱۸۶ مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف

$$y = (x^5 - 6x)^4$$

ب

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{5x}}$$

پ

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2 + x^2}$$

ت

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$$

۱۸۷ مشتق تابع $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ در $x = -1$ را بیابید.

۱۸۸ مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست)



الف

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x} \times \sin 3x$$

ب

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

۱۸۹ مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست)

الف

$$y = \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos(\sin x)$$

ب

$$y = \sin^3 x + \sqrt[3]{\cos x}$$

۱۹۰ مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست)

الف

$$f(x) = 3x^2 \sqrt[3]{5x^2 - 2}$$

ب

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{1 - 3x}}$$

۱۹۱ مشتق توابع زیر را بیابید (ساده کردن الزامی نیست).

الف

$$y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

ب

$$y = 5 \sin^3(2x - 1) + \tan \sqrt{x}$$

ج

$$y = \cos^3(x^2 + x) + \tan 4x$$



ت

$$y = \sin 2x \cos 7x$$

۱۹۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف

$$f(x) = 2\sqrt{x}(5x^2 - 3x)$$

ب

$$g(x) = \sin 3x + \cos^2(4x^2 - 2)$$

۱۹۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف

$$y = \sqrt[3]{\sin^2 7x} + 4 \tan^3 x$$

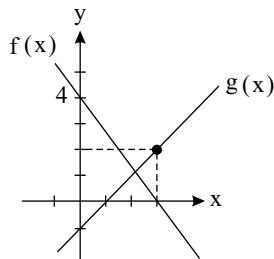
ب

$$y = 3x^2 \sin^2(\cos x)$$

پ

$$y = 3(2x - 5)^4 + \sqrt[3]{x}$$

۱۹۴ نمودار f و g در شکل رسم شده است اگر $h(x) = f(x)g(x)$ مطلوب است $h'(3)$ ؟



۱۹۵ معادله خطی را بیابید که بر منحنی $y = 2x^2 + 3$ مماس و با خط $8x - y + 4 = 0$ موازی باشد.

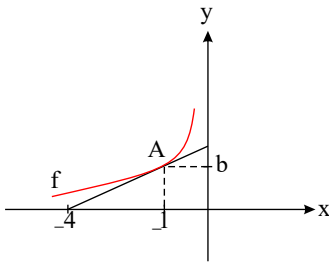
۱۹۶ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x\sqrt{x-3}$ در نقطه $x = 4$ را بیابید.

۱۹۷ نقاطی روی منحنی تابع $f(x) = -x^3 + 2x + 5$ بیابید که مماس در آن نقاط عمود بر نیمساز ربع اول و سوم باشد.

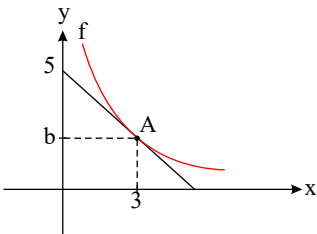
۱۹۸ نقاطی از نمودار تابع $y = x^3 - 2x - 6$ را بیابید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم است.



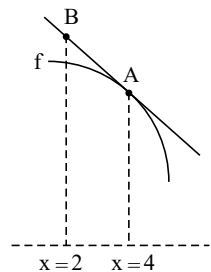
۱۹۹ در شکل مقابل اگر $f'(-1) = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار b را بیابید.



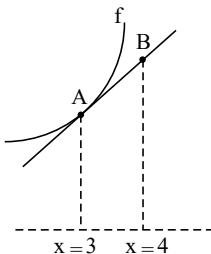
۲۰۰ در شکل مقابل اگر $f'(3) = -1$ باشد، مقدار b را بیابید.



۲۰۱ در شکل مقابل اگر $f(4) = 5$ و $f'(4) = -3$ باشد، مختصات نقطه B را بیابید.



۲۰۲ در نمودار شکل مقابل اگر $f(3) = 7$ ، $f'(3) = 6$ باشد، مختصات نقطه B را بیابید.



۲۰۳ با استفاده از تعریف مشتق معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x} - 2$ را در نقطه $x = 3$ به دست آورید.

۲۰۴ اگر $f(x) = g(x^2 + x)$ و $f'(2) = 5$ ، آنگاه $g'(6)$ را بیابید.

۲۰۵ اگر $g(x) = f(x^3 + x - 1)$ و $f'(-1) = 12$ ، آنگاه $g'(0)$ را بیابید.

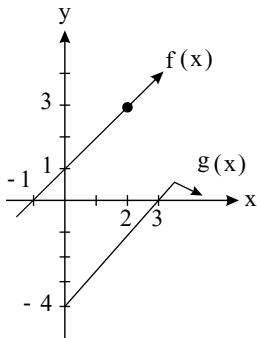
۲۰۶ اگر $f(x) = g(4x^3 - 3x)$ و $g'(1) = 4$ ، آنگاه $f'(1)$ را بیابید.



۲۰۷ اگر $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ و $g(x) = f(\frac{1}{x})$ ، حاصل $g'(\frac{3}{4})$ را بیابید.

۲۰۸ اگر $g(x) = 2f(\cos^2 x)$ و $g'(\frac{3\pi}{4}) = 1$ ، آنگاه حاصل $f'(\frac{1}{2})$ را بیابید.

۲۰۹ اگر نمودار f و g به صورت مقابل باشد و $h(x) = g(f(x))$ ، آنگاه $h'(2)$ را به دست آورید.



۲۱۰ اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ ، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f''(\frac{\pi}{6})$

ب) $f''(\frac{\pi}{2}) - f'(\frac{\pi}{2})$

۲۱۱ در تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ حاصل $f''(0)$ را بیابید.

۲۱۲ در تابع $f(x) = x^3 + mx^2 - 2x$ اگر $f''(2) = 8$ ، آنگاه $f'(3)$ را بیابید.

۲۱۳ مشتق دوم $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ را بیابید.

۲۱۴ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

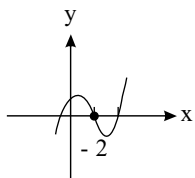
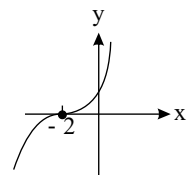
الف) تابع نزولی اکید، نقطه عطف ندارد.

ب) هر نقطه مانند $x = c$ که تابع در آن پیوسته باشد و در آن جهت تغییر تغییر کند، نقطه عطف است.

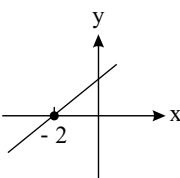
پ) اگر f'' در یک بازه مثبت باشد، شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه افزایش می‌یابد.



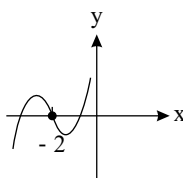
۲۱۵ اگر x مربوط به نمودار تابع $f''(x)$ باشد، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع $f(x)$ باشد؟



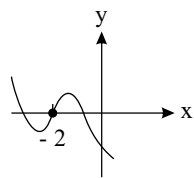
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

بررسی مشتق‌پذیری

۲۱۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجود هستند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۲۱۷ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۲۱۸ تابع $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.
(ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.
(پ) ضابطه مشتق را بنویسید.

۲۱۹ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 0 \\ a|x| + b & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد.

۲۲۰ در تابع $f(x) = (x^2 - 4)[x + 1]$ حاصل $f'_-(2) + f'_+(2)$ را بیابید.

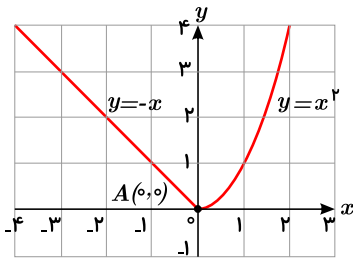
۲۲۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = (x - 3)[2x]$ در نقطه $x = 3$ را بررسی کنید.

۲۲۲ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x[x]$ در نقطه $x = 0$ را بررسی کنید.

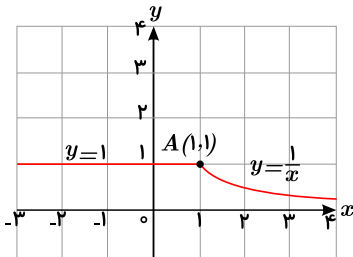
۲۲۳ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



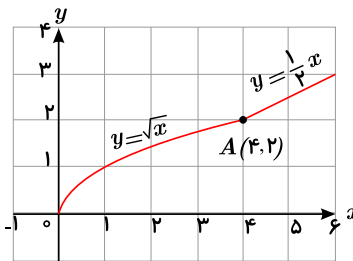
الف



ب



پ



۲۲۴ تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 1 \\ x^3 - 2x & x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. حاصل $a - b$ را به دست آورید.

۲۲۵ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ باشد، دامنه f' ، $\mathbb{R}$ است.

ب فقط سه تابع مختلف می توان مثال زد که مشتق آنها با هم برابر باشند.



آهنگ تغییر (دوازدهم)

۲۲۶ جدول زیر درجه حرارت T (ساتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

(الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

(ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

(پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

۲۲۷ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از

مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶
ثانیه s							
$f(t)$	۱۱	۱۲٫۴	۱۳٫۸	۱۵٫۱	۱۶٫۳	۱۷٫۴	۱۸٫۴
متر m							

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰٫۴ ثانیه است نشان دهد؟

(الف) $۱٫۲۳ m/s$ (ب) $۱۴٫۹۱ m/s$ (ج) $۱۱٫۵ m/s$ (د) $۱۶٫۰۳ m/s$

۲۲۸ آهنگ تغییر مساحت دایره‌ای به شعاع R را در $R_0 = ۲$ حساب کنید.

۲۲۹ اگر شعاع دایره‌ای از ۲ سانتی‌متر تا ۴ سانتی‌متر تغییر کند، آهنگ تغییر مساحت آن را بیابید.

۲۳۰ در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به‌طوری که $j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان

مسافت طی‌شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

(الف) علی $s - j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ب) علی $s \cdot j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ت) علی $s \cdot j$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

۲۳۱ آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم یک کره به شعاع R نسبت به تغییر مساحت سطح همان کره را برحسب R بیابید.



۲۳۲ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = ۴۰(1 - \frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست آید:

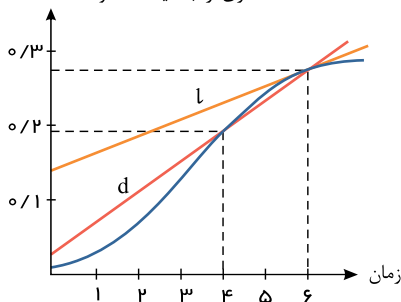
الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰, ۱]$ چقدر است؟
 ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰, ۱۰۰]$ می‌شود؟

۲۳۳ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
 ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = ۳$ چقدر است؟

۲۳۴ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

کسری از جمعیت که آلوده شده‌اند



الف) شیب‌های خطوط d و l چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t = ۱, t = ۲$ یا $t = ۳$ بیشتر است؟
 پ) قسمت «ب» را برای $t = ۴, t = ۵$ و $t = ۶$ بررسی کنید.

۲۳۵ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = x^۳ - ۲x + ۱$ در چه نقطه‌ای برابر آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱ = ۰$ تا $x_۲ = ۱$ است؟

۲۳۶ اگر شعاع کره‌ای با آهنگ آنی ۴ سانتی‌متر در ثانیه زیاد شود، در لحظه‌ای که شعاع کره برابر ۲ سانتی‌متر است، حجم کره با چه آهنگی زیاد می‌شود؟

۲۳۷ یک سنگ‌ریزه را داخل آب استخری می‌اندازیم. موج دایره‌شکلی ایجاد می‌شود که شعاع آن با سرعت $۲ \frac{cm}{sec}$ افزایش می‌یابد. آهنگ تغییر مساحت را وقتی که شعاع ۲ سانتی‌متر باشد حساب کنید.

۲۳۸ اگر شعاع دایره‌ای با آهنگ لحظه‌ای ۳ سانتی‌متر بر ثانیه بزرگ شود، در لحظه‌ای که مساحت دایره برابر با ۴π باشد، آهنگ آنی تغییر مساحت آن چقدر است؟

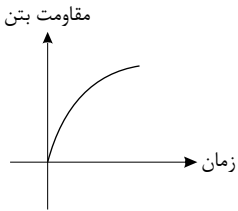
۲۳۹ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^۲$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟



ب آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری در لحظه $t = 9$ چقدر است؟

۲۴۰ نمودار افزایش مقاومت بتن با گذشت زمان به صورت زیر است. آهنگ تغییرات وقتی مقادیر t افزایش می‌یابد چگونه تغییر می‌کند و معنای آن چیست؟



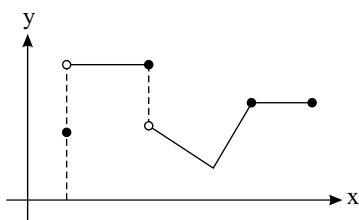
۲۴۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ آهنگ تغییر متوسط تابع وقتی متغیر از (2) به $(2+h)$ تغییر کند، $\frac{h}{9}$ است، h کدام است؟

- | | |
|-------|---------|
| ۲ (۲) | ۱٫۵ (۱) |
| ۳ (۴) | ۲٫۵ (۳) |

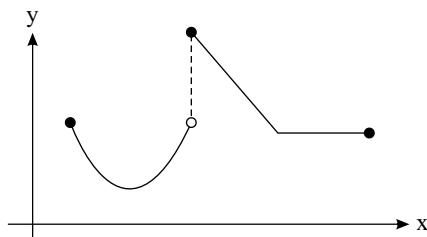
کاربرد مشتق

بررسی اکسترم‌های (نسبی و مطلق) تابع از روی نمودار (دوازدهم)

۲۴۲ نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را داشته باشد.
نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.
نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد؛ ولی مشتق نداشته باشد.
نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.
نقطه‌ای داشته باشد که اکسترم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



۲۴۳ در نمودار مقابل نقاط اکسترم نسبی و مطلق را مشخص کنید.



۲۴۴ در تابع مقابل اکسترم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.

۲۴۵ نمودار تابع f به صورت مقابل است. اکسترم‌های نسبی تابع را مشخص کنید.



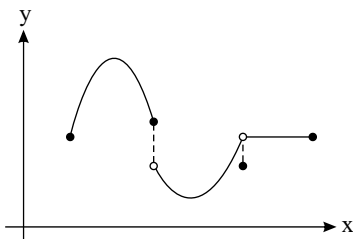
۲۴۶ نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۲۴۷ نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که مینیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ مینیمم مطلق نداشته باشد.

۲۴۸ نمودار تابعی را رسم کنید که تمام شرایط زیر را داشته باشد.

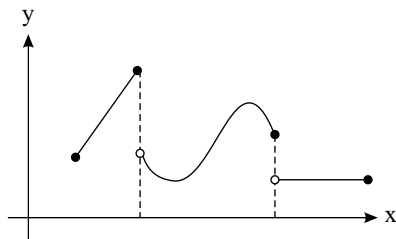
- ۱ - نقطه مینیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.
- ۲ - نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.
- ۳ - نقطه ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر باشد.

۲۴۹ در شکل مقابل نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را مشخص کنید.



نقاط بحرانی (دوازدهم)

۲۵۰ نقاط بحرانی تابع مقابل را مشخص کنید.



۲۵۱ نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ را بیابید.

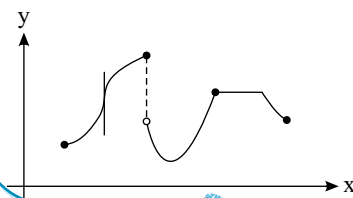
۲۵۲ نقاط بحرانی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq -1 \\ 2x + 4 & x < -1 \end{cases}$$

۲۵۳ نقاط بحرانی تابع مقابل را بیابید.

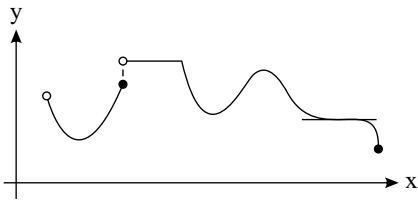
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 1 \\ x^2 + 5x & x < 1 \end{cases}$$

۲۵۴ در شکل مقابل نقاط بحرانی، اکسترمم های نسبی و مطلق را مشخص کنید.

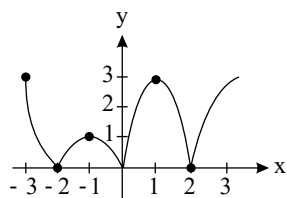
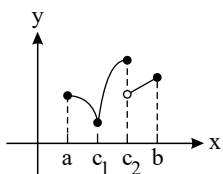
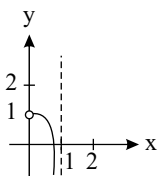
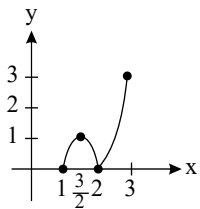
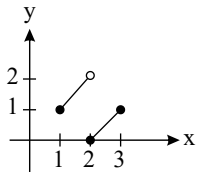




۲۵۵ نقاط بحرانی تابع مقابل را مشخص کرده و دلیل هر کدام را بیان کنید.



۲۵۶ در هریک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول اکسترمم‌های نسبی و مطلق بحرانی را مشخص کنید.



الف

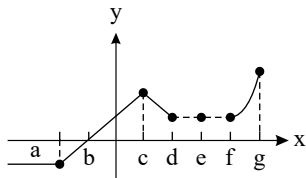
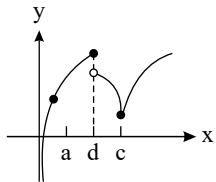
ب

ج

د

ه

مثل آب خوردن بگیر



ج

ج

۲۵۷ نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ را مشخص کنید.

اکسترمم‌های مطلق

۲۵۸ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = (x-1)|x-2|$ را در بازه $[1, 4]$ بیابید.

۲۵۹ مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$ را در بازه $[-2, 3]$ بیابید.

۲۶۰ مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ در بازه $[-2, 3]$ را بیابید.

۲۶۱ به کمک رسم نمودار تابع زیر، اکسترمم‌های مطلق آن را بیابید.

$$f(x) = |x-2| + 1, \quad -1 \leq x \leq 4$$

بهینه‌سازی (دوازدهم)

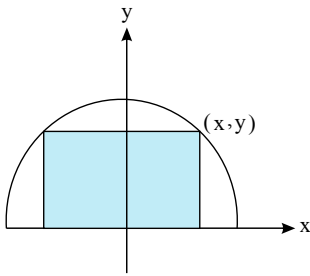
۲۶۲ اگر مجموع دو عدد ۲۰۰ باشد، آن دو عدد را چنان بیابید که مجموع مربعات آنها مینیمم شود.

۲۶۳ یک برگه کاغذی مستطیل‌شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = 100 \text{ cm}^2$ و $h = 2 \text{ cm}$ ، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

۲۶۴ استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع قاعده r مفروض است. اگر $h + 2r = 3$ باشد، بیشترین حجم استوانه را بیابید.



۲۶۵ نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ مفروض است. مطابق شکل زیر، مستطیلی در آن محاط شده است. ابعاد مستطیل را چنان بیابید که محیط آن ماکزیمم باشد.



۲۶۶ از بین استوانه‌هایی با حجم 2π سانتی‌متر مکعب، کمترین سطح کل چقدر است؟

۲۶۷ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن 20 سانتی‌متر است، مثلی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکزیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۲۶۸ در بین مثلث‌های قائم‌الزاویه به طول وتر 5 ، بیشترین مساحت را بیابید.

۲۶۹ کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از نقاط منحنی $y = \frac{4}{x}$ را بیابید.

۲۷۰ سطح کل استوانه‌ای 150π سانتی‌متر مربع است. شعاع قاعده استوانه چقدر باشد تا حجم آن ماکزیمم گردد؟

بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق (دوازدهم)

۲۷۱ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

۲۷۲ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

ب) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

۲۷۳ تابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2}$$

۲۷۴ تابع زیر در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟



۲۷۵ تابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$$

اکسترم‌های نسبی

۲۷۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

الف

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad [-2, 1]$$

ب

$$f(x) = x^3 - 3x \quad [-1, 2]$$

پ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$$

۲۷۷ نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$$

۲۷۸ نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = (x-1)^3(x+4)$ را بیابید.

۲۷۹ اگر نقطه $A(-2, 3)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = ax^3 + x^2 - b$ باشد، a, b را بیابید.

۲۸۰ نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ را در صورت وجود بیابید.

تقعر و نقطه‌ی عطف

۲۸۱ جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ را بررسی کنید.

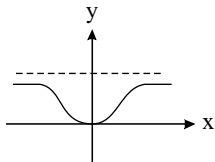
۲۸۲ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه‌ی عطف نباشد.

۲۸۳ نقاط عطف و تقعر تابع $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + x - 2$ را بررسی کنید.

۲۸۴ برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بزنید که نقطه‌ی داده‌شده نقطه‌ی عطف آن باشد.

الف) نقطه $(0, 0)$ ب) نقطه $(1, 0)$ پ) نقطه $(0, 1)$ ت) نقطه $(2, 2)$

مثال آب خوردن ۲۰ بگیر



۲۸۵ اگر تابع f به صورت مقابل باشد، آنگاه f چند نقطه عطف دارد؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ بی شمار

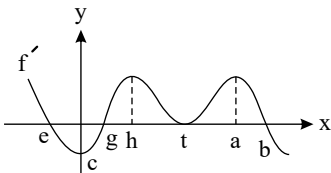
۲۸۶ اگر معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = -x^3 + ax^2$ در نقطه عطف موازی خط $3y = 4x$ باشد، مقدار a را بیابید.

۲۸۷ نقاط عطف و تقعر تابع $f(x) = (x+3)^5 - 2x - 1$ را بررسی کنید.

۲۸۸ اگر نقطه $A(1, -2)$ نقطه عطف تابع $f(x) = ax^3 + bx^2$ باشد، مقدار مینیمم نسبی تابع را بیابید.

رابطه‌ی بین f و f' (دوازدهم)

۲۸۹ نمودار مشتق f به صورت مقابل است. صعودی و نزولی بودن تابع f را بررسی کنید و تابع f چند نقطه عطف دارد؟



رسم توابع

۲۹۰ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$ را رسم کنید.

۲۹۱ تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ مفروض است. ضرایب a, b, c را چنان بیابید که نمودار تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع کند و در نقطه‌ای به طول 2 دارای ماکزیمم یا مینیمم برابر -4 باشد.

۲۹۲ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ را رسم کنید.

۲۹۳ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x + 2$ را رسم کنید.

۲۹۴ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

ب

$$f(x) = x^3 - 5x + 5$$



پ

$$f(x) = -x(x+2)^2$$

ت

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$$

ث

$$f(x) = \frac{-x}{x+3}$$

ج

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$$

۲۹۵ تابع $f(x) = \frac{2x+b}{ax-b}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه $(-2, -\frac{1}{2})$ مرکز تقارن آن باشد.

۲۹۶ اگر مرکز تقارن توابع $y = x^3 + 6x^2 + a$ و $y = \frac{2x+1}{x+b}$ بر هم منطبق باشند، a و b را بیابید.

۲۹۷ تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ مفروض است. ضرایب a ، b و c را چنان بیابید که تابع از مبدأ مختصات گذشته و نقطه $(1, -1)$ مرکز تقارن آن باشد.

۲۹۸ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x}$ را رسم کنید.

۲۹۹ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+1}{-x+1}$ را رسم کنید.

۳۰۰ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ را رسم کنید.



پاسخنامه تشریحی

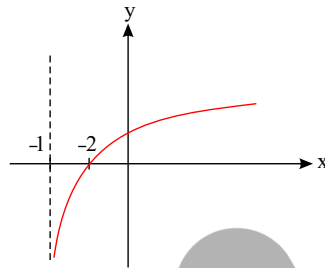
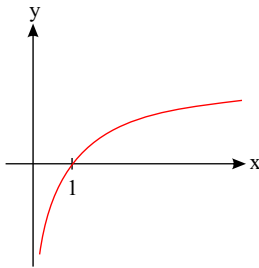
گزینه «۳» ۱

۲

برای رسم $y = \log_5(x+2)$ باید نمودار $f(x) = \log_5 x$ را ۲ واحد به چپ منتقل کنیم.

$$f(x) = \log_5 x \quad x \rightarrow x+2$$

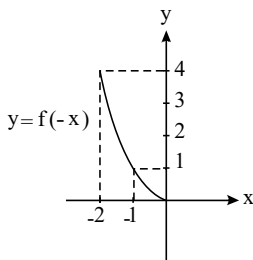
$$f(x+2) = y = \log_5(x+2)$$



۳

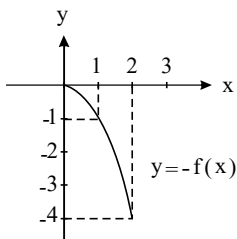
الف

برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.



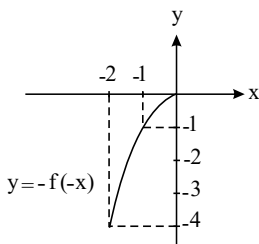
ب

برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



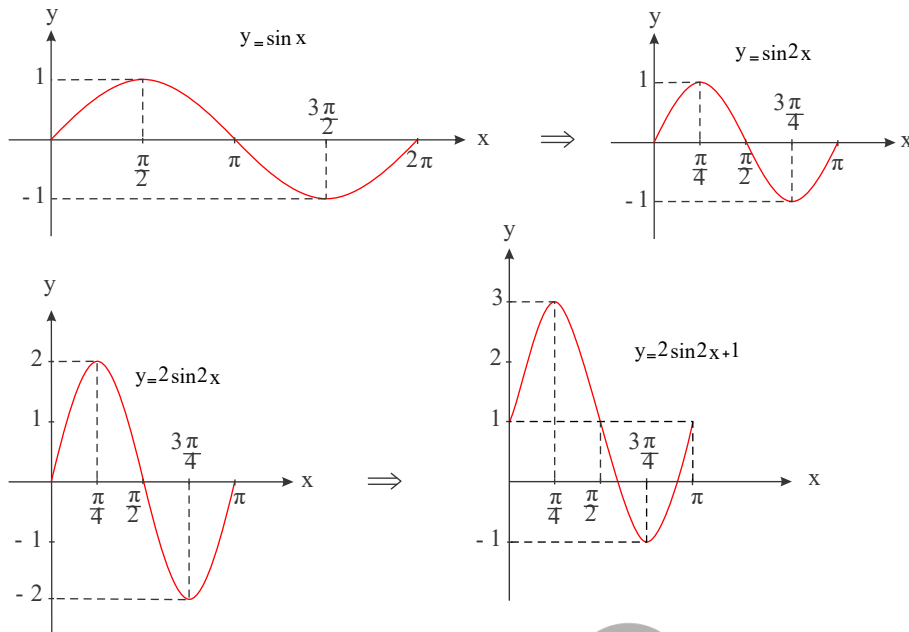
پ

برای رسم نمودار تابع $y = -f(-x)$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه کنیم که نتیجه آن این است که نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.



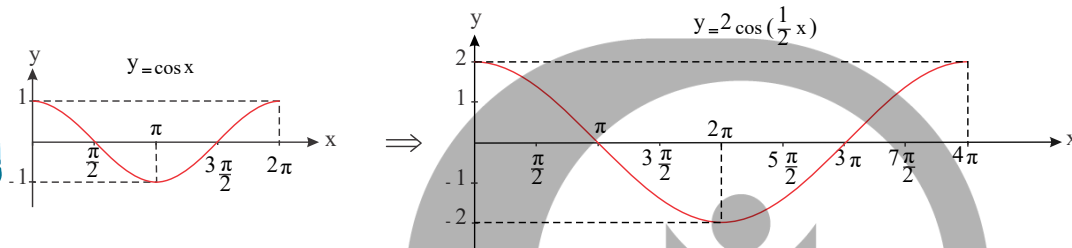
۴ برای رسم $y = 2 \sin(2x) + 1$ از روی $y = \sin x$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- ۱- طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.
- ۲- عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم.
- ۳- نمودار حاصل را یک واحد به بالا می‌بریم.



۵

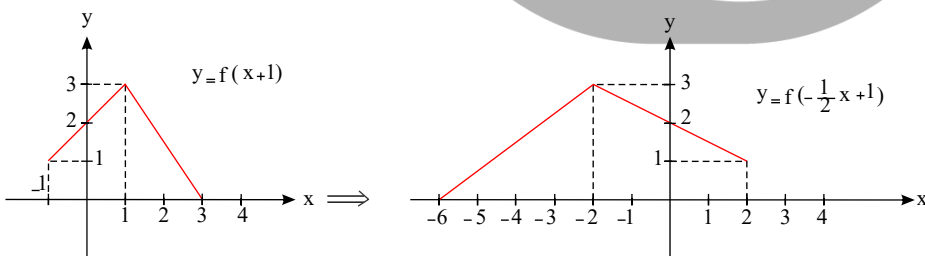
برای رسم $y = 2 \cos(\frac{1}{2}x)$ ، در نمودار $y = \cos x$ باید طول نقاط را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم (در ۲ ضرب کنیم) و عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



۶

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{1}{2}x} y = f(-\frac{1}{2}x+1)$$

با توجه به تبدیلهای فوق برای رسم $y = f(-\frac{1}{2}x+1)$ ، نمودار $y = f(x)$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس طول نقاط را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنیم (در ۲ ضرب می‌کنیم).



۷

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow x+4} y = (x+4)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 3x} y = (3x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -(3x+4)^2 \xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب ۲}} y = -2(3x+4)^2 \xrightarrow{\text{واحد بالا}} y = -2(3x+4)^2 + 5$$

برای رسم g از روی f باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱- f را ۴ واحد به چپ منتقل می‌کنیم.

۲- در نمودار حاصل طول نقاط را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

۳- سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

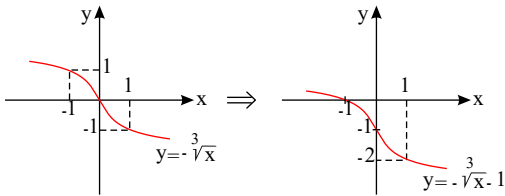
۴- نمودار حاصل را در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم.

۵- در نهایت نمودار حاصل را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

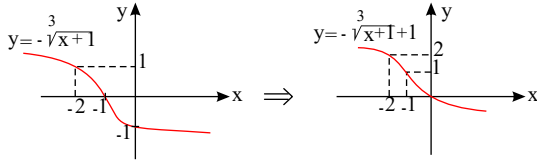
۸



الف) برای رسم $y = -\sqrt[3]{x} - 1$ باید نمودار $y = -\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم.



ب) برای رسم $y = -\sqrt[3]{x+1} + 1$ ، نمودار $y = -\sqrt[3]{x}$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



۹

الف درست

ب

$$f'(x) = -2x + 2$$

نادرست. زیرا با توجه به جدول در بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی نیست.

در بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی است.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

پ

نادرست. زیرا باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

ت

درست

۱۰

$$y = |x| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}} y = -|x| \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۳}]{x \rightarrow 3x} y = -|3x|$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{x \rightarrow x+2} y = -|3(x+2)| = -|3x+6|$$

ضابطه تابع حاصل به صورت $y = -|3x+6|$ است.

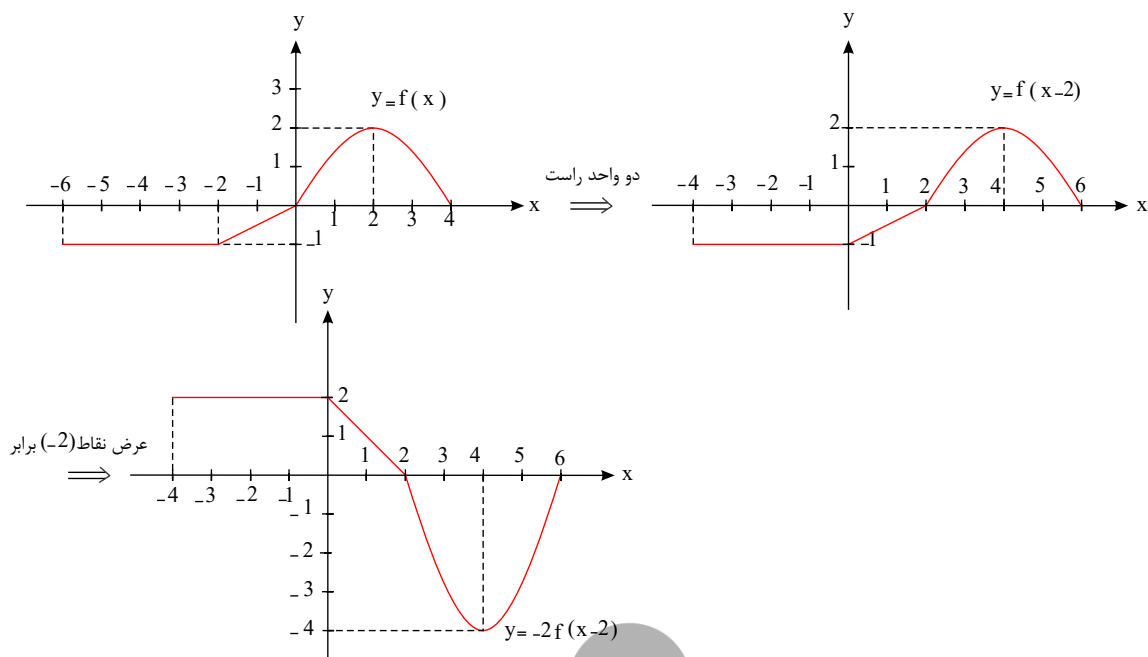
۱۱

نمودار $y = -x^3$ ابتدا ۴ واحد به راست و سپس ۳ واحد به پایین منتقل شده است. پس داریم:

$$y = -x^3 \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-4} y = -(x-4)^3 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{x \rightarrow x-4} y = -(x-4)^3 - 3$$

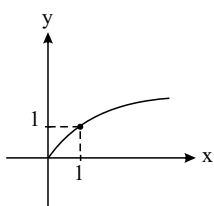
$$y = -(x+a)^3 + b = -(x-4)^3 - 3 \Rightarrow a = -4, b = -3$$

۱۲) با توجه به اینکه برای رسم $y = f(-2x)$ باید در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم، حال برای رسم $y = f(x)$ از روی $y = f(-2x)$ باید در نمودار $y = f(-2x)$ طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم.

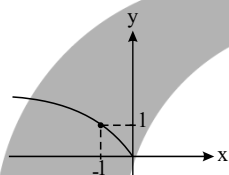


۱۳

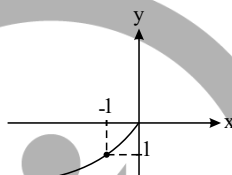
$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow -x}$$



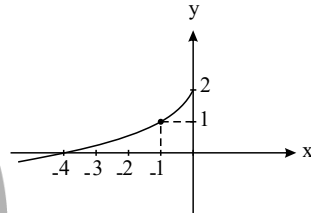
$$y = \sqrt{-x} \Rightarrow$$



$$y = -\sqrt{-x} \Rightarrow$$



$$y = -\sqrt{-x} + 2$$



۱۴

قرینه نسبت به محور y ها

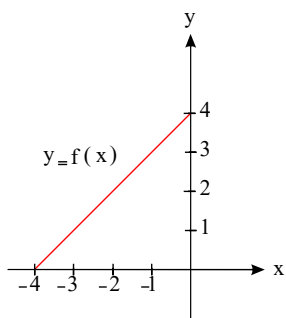
$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = \sqrt{-x}$$

۶ واحد پایین

$$y = \sqrt{-x} \xrightarrow{x \rightarrow x-3} y = \sqrt{-(x-3)} = \sqrt{-x+3} \xrightarrow{3 \text{ واحد به راست}} y = \sqrt{-x+3} - 6$$

ضابطه تابع حاصل به صورت $y = \sqrt{-x+3} - 6$ است.

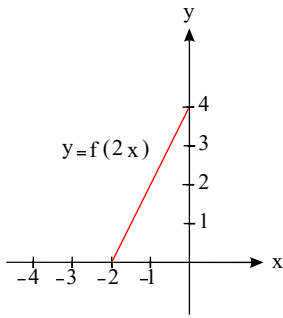
۱۵



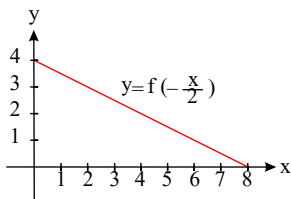
$$f(x) = x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array} \right|$$



برای رسم $y = f(2x)$ باید در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم.



برای رسم $y = f(-\frac{x}{2})$ باید در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را بر $-\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم (در ۲ ضرب کنیم).



۱۶ با توجه به نمودار تابع f ، دامنه و برد آن به صورت زیر است:

$$D_f = (-2, 4] \Rightarrow -2 < x \leq 4$$

$$y = -3f(1 - \frac{x}{2}) + 1 \Rightarrow -2 < 1 - \frac{x}{2} \leq 4 \xrightarrow{-1} -3 < -\frac{x}{2} \leq 3$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} 6 > x \geq -6 \Rightarrow -6 \leq x < 6 \Rightarrow D_y = [-6, 6)$$

$$R_f = (-1, 3] \Rightarrow -1 < f(x) \leq 3$$

برد توابع $y = f(x)$ و $y = f(1 - \frac{x}{2})$ یکسان است. پس داریم:

$$-1 < f(1 - \frac{x}{2}) \leq 3 \xrightarrow{\times(-3)} 3 > -3f(1 - \frac{x}{2}) \geq -9 \xrightarrow{+1} 4 > -3f(1 - \frac{x}{2}) + 1 \geq -8$$

$$\Rightarrow -8 \leq y < 4 \Rightarrow R_y = [-8, 4)$$

۱۷ نمودار $y = x^3$ ابتدا ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل شده است تا نمودار داده شده حاصل شود. پس داریم:

$$y = x^3 \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{x \rightarrow x+3} y = (x+3)^3 \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{y \rightarrow y+2} y = (x+3)^3 + 2$$

در مقایسه با تابع $y = (x+a)^3 + b$ داریم:

$$a = 3, b = 2$$

۱۸

$$A(1, 4) \in f \Rightarrow f(1) = 4$$

$$g(x) = -3f(2x+5) + 1 \Rightarrow 2x+5 = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$g(-2) = -3f(1) + 1 = -3 \times 4 + 1 = -11 \Rightarrow g(-2) = -11 \Rightarrow A'(-2, -11) \in g$$

نقطه A در تابع g به نقطه $A'(-2, -11)$ تبدیل می شود.

۱۹ با توجه به نمودار داده شده، دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است.

$$D_f: x \leq 0 \text{ یا } x > 1, x \neq -2$$

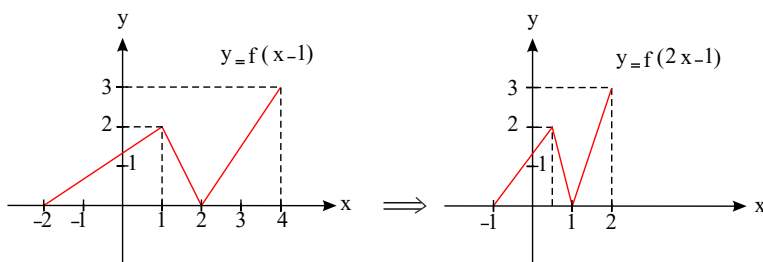
$$y = f(3x+1) \Rightarrow 3x+1 \leq 0 \text{ یا } 3x+1 > 1, 3x+1 \neq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{3} \text{ یا } x > 0, x \neq -1$$

$$D_g = ((-\infty, -\frac{1}{3}] - \{-1\}) \cup (0, +\infty)$$

۲۰

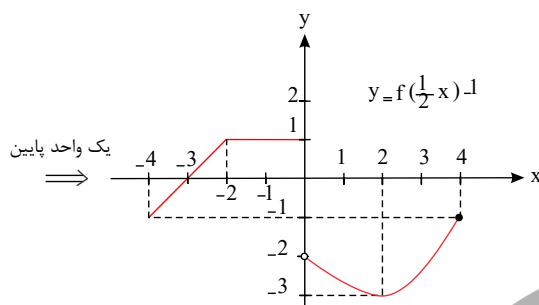
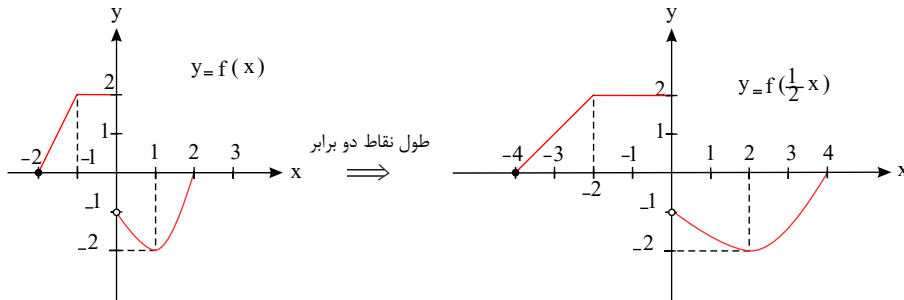
$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = f(2x-1)$$

با توجه به تبدیل های فوق برای رسم $y = f(2x-1)$ ، نمودار $y = f(x)$ را ابتدا یک واحد به راست منتقل کرده و سپس طول نقاط را بر ۲ تقسیم می کنیم.



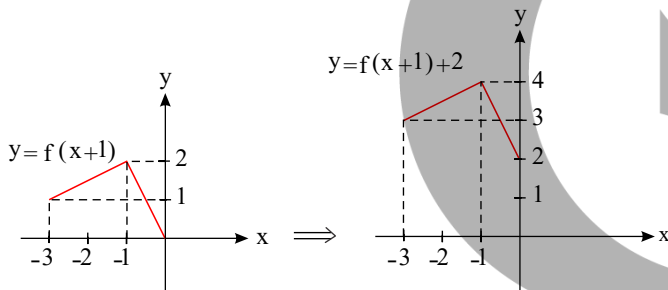


۲۱ با توجه به اینکه برای رسم $y = f(x - 1)$ باید $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، پس برای رسم $y = f(x)$ از روی $y = f(x - 1)$ باید نمودار $y = f(x - 1)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم. پس داریم:



۲۲

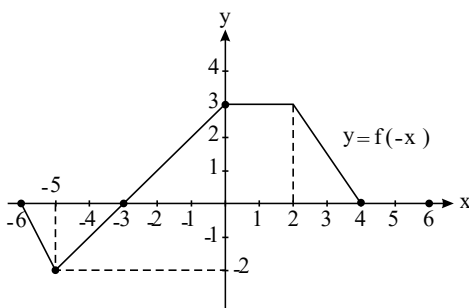
باید نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به چپ و ۲ واحد به بالا منتقل کنیم تا نمودار $y = f(x + 1) + 2$ حاصل شود.



۲۳

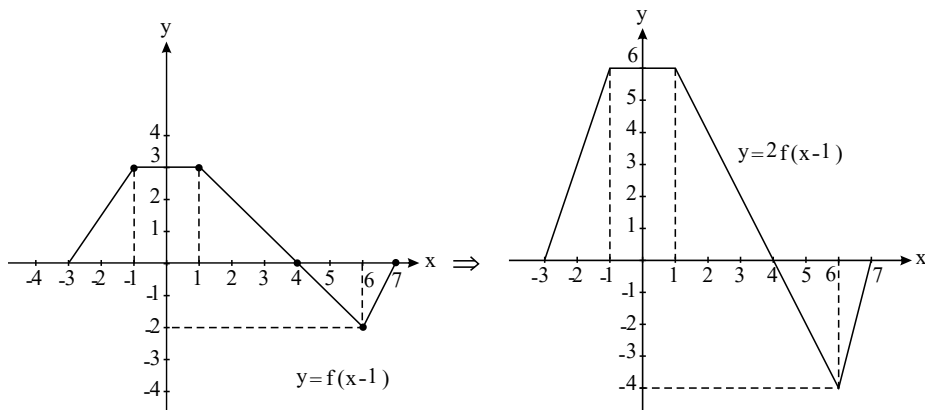
الف

برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ ، باید طول نقاط تابع $y = f(x)$ را بر ۱ - تقسیم کنیم که معنای آن این است که نمودار نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.

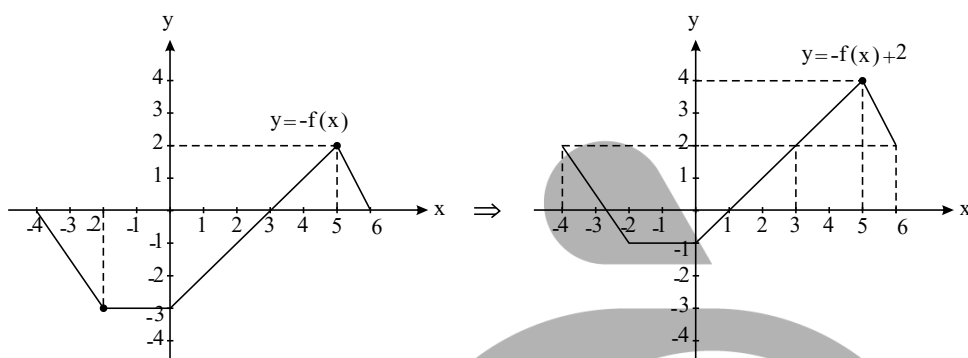


ب

برای رسم نمودار تابع $y = 2f(x - 1)$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کرده و سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



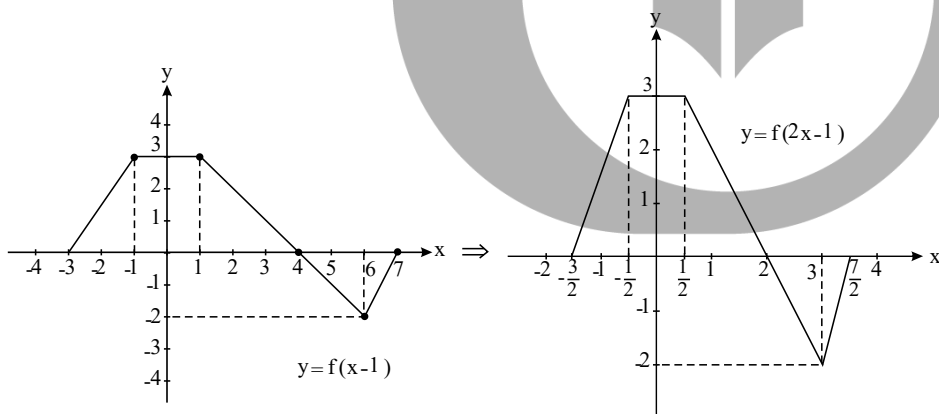
پ برای رسم نمودار تابع $y = -f(x) + 2$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس آن را ۲ واحد بالا ببریم.



ت برای رسم نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ باید در هر مرحله x را برداشته و عبارت مناسب به جای آن قرار دهیم تا $y = f(2x - 1)$ حاصل شود، داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = f(2x-1)$$

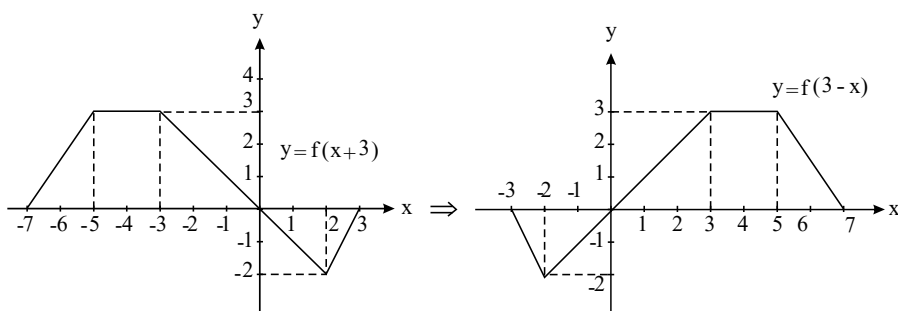
پس باید ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست و سپس طول نقاط حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم که داریم:



ث برای رسم نمودار تابع $y = f(3 - x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ داریم:

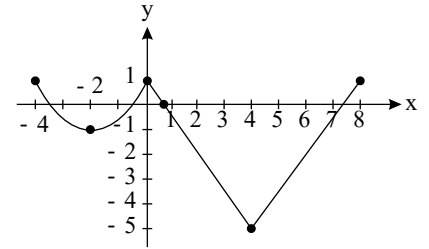
$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = f(x+3) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = f(-x+3) = f(3-x)$$

بنابراین باید ابتدا نمودار تابع f را ۳ واحد به چپ منتقل کرده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.





۲۴) x را -۲ برابر و y را -۲ برابر و به علاوه یک می‌کنیم تا نقاط جدید به دست بیاید.



$$\begin{aligned}(-۴, ۰) &\Rightarrow (۸, ۱) \\ (-۲, ۳) &\Rightarrow (۴, -۵) \\ (۰, ۰) &\Rightarrow (۰, ۱) \\ (۱, ۱) &\Rightarrow (-۲, -۱) \\ (۲, ۰) &\Rightarrow (-۴, ۱)\end{aligned}$$

۲۵) نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ ابتدا ۳ واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا منتقل شده است. پس داریم.

$$\begin{aligned}y = \sqrt[3]{x} &\xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-۳} y = \sqrt[3]{x-۳} \xrightarrow[\text{واحد بالا}]{y \rightarrow y+۲} y = \sqrt[3]{x-۳} + ۲ \\ y = \sqrt[3]{x+a} + b &= \sqrt[3]{x-۳} + ۲ \Rightarrow a = -۳, b = ۲\end{aligned}$$

۲۶)

الف) صفر، چون تبدیل به تابع ثابت به معادله $y = b$ می‌شود که هم صعودی و هم نزولی است.

ب) نکته: تابع $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = ۴$$

$$\text{مقدار مینیمم} : -۲ - ۱ = -۳$$

پ) دوره تناوب اصلی تابع $\tan x$ برابر π است.

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

۲۷)

$$\text{اکیداً صعودی} \rightarrow [1, +\infty) \quad \text{اکیداً نزولی} \rightarrow (-\infty, -۲]$$

$$f = \{(۲, ۳m - ۱), (۰, m), (۴, -m + ۲)\}$$

$$۰ < ۲ < ۴ \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} f(۰) > f(۲) > f(۴) \Rightarrow m > ۳m - ۱ > -m + ۲$$

$$\left\{ \begin{aligned} ۳m - ۱ < m &\Rightarrow ۲m < ۱ \Rightarrow m < \frac{۱}{۲} \\ ۳m - ۱ > -m + ۲ &\Rightarrow ۴m > ۳ \Rightarrow m > \frac{۳}{۴} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{۳}{۴} < m < \frac{۱}{۲}$$

اعضای دامنه تابع را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

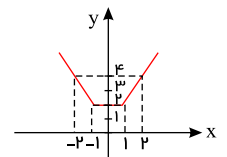
۲۸)

۲۹) الف. نادرست - در شاخه‌های خود یکنواست.

ب. نادرست - صعودی است.

۳۰)

$$\begin{aligned}y &= |x-۱| + |x+۱| \\ \left| \begin{array}{l} x=۱ \\ y=۲ \end{array} \right. & \quad \left| \begin{array}{l} x=-۱ \\ y=۲ \end{array} \right. & \quad \left| \begin{array}{l} x=-۲ \\ y=۴ \end{array} \right. & \quad \left| \begin{array}{l} x=۲ \\ y=۴ \end{array} \right.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}[-۱, +\infty) &\rightarrow \text{تابع صعودی است.} \\ [1, +\infty) &\rightarrow \text{تابع اکیداً صعودی است.}\end{aligned}$$

۳۱) نکته: اگر f اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \geq b$.

$$f(-x+۲) - f(۲x+۷) \leq ۰ \Rightarrow f(۲-x) \leq f(۲x+۷)$$

$$\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} ۲-x \geq ۲x+۷ \Rightarrow ۲-۷ \geq ۳x \Rightarrow ۳x \leq -۵ \Rightarrow x \leq -\frac{۵}{۳}$$

۳۲) برای هردو مقدار x_1, x_2 از این فاصله مشترک داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_1 < x_2 &\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 < x_2 &\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } g} g(x_1) > g(x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2) \Rightarrow f+g \text{ اکیداً نزولی است.}$$

۳۳) برای هردو مقدار x_1 و x_2 از $\mathbb{R}$ داریم:



$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیدا صعودی}} f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \xrightarrow{g \text{ اکیدا صعودی}} g(x_1) < g(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2) \Rightarrow f+g \text{ اکیدا صعودی است.}$$

۳۴ برای هر دو مقدار متمایز x_1, x_2 از دامنه $f \circ f$ داریم.

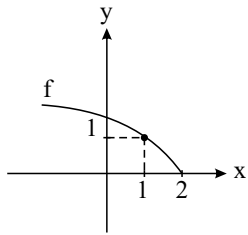
$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیدا نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{f \text{ اکیدا نزولی}} f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

$$\Rightarrow f \circ f(x_1) < f \circ f(x_2) \Rightarrow f \circ f \text{ اکیدا صعودی}$$

۳۵

الف

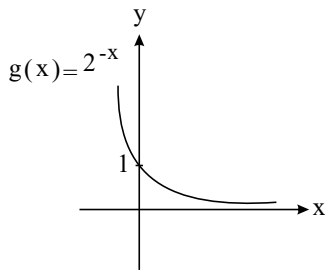
تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در دامنه‌اش یعنی بازه $(-\infty, 2]$ اکیدا نزولی است.



ب

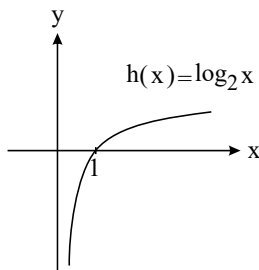
$$g(x) = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

نمودار تابع $g(x) = 2^{-x}$ به صورت زیر است. تابع g در کل $\mathbb{R}$ اکیدا نزولی است.



پ

نمودار تابع $h(x) = \log_2 x$ به صورت زیر است و دامنه آن $D_h = (0, +\infty)$ می‌باشد. تابع h در دامنه‌اش اکیدا صعودی است.



۳۶ می‌دانیم دو نامساوی هم‌جهت را فقط می‌توان باهم جمع کرد، بنابراین برای دو مقدار x_1 و x_2 از فاصله مورد نظر داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

بنابراین داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$$

اگر f و g در یک فاصله اکیدا صعودی باشند، تابع $f - g$ در این فاصله ممکن است اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی و یا اینکه غیریکنوا باشد. داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 4x \rightarrow \text{اکیدا صعودی} \\ g(x) = x \rightarrow \text{اکیدا صعودی} \end{array} \right. \Rightarrow (f-g)(x) = 4x - x = 3x \rightarrow \text{اکیدا صعودی}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2x \rightarrow \text{اکیدا صعودی} \\ g(x) = 5x \rightarrow \text{اکیدا صعودی} \end{array} \right. \Rightarrow (f-g)(x) = 2x - 5x = -3x \rightarrow \text{اکیدا نزولی}$$



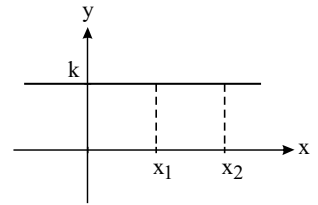
$$\begin{cases} f = \{(2, 1), (3, 6), (4, 11)\} \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ g = \{(2, 3), (3, 4), (4, 10)\} \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{cases} \Rightarrow (f - g) = \{(2, 1 - 3), (3, 6 - 4), (4, 11 - 10)\}$$

$$\Rightarrow f - g = \{(2, -2), (3, 2), (4, 1)\} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & -2 & 2 & 1 \end{array} \text{ غیر یکنوا}$$

۳۷) بله، تابع ثابت $f(x) = k$ هم صعودی و هم نزولی است، زیرا برای هر x_1 و x_2 از دامنه تابع ثابت داریم:

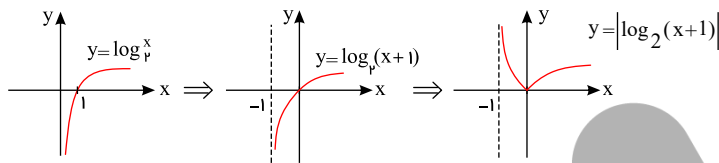
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f \text{ تابع صعودی است.}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f \text{ تابع نزولی است.}$$



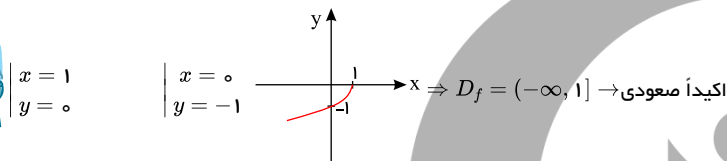
در هر دو تعریف فوق، حالت تساوی یعنی $f(x_1) = f(x_2)$ برقرار است.

۳۸)



اکیداً صعودی $\rightarrow [0, +\infty)$ ، اکیداً نزولی $\rightarrow (-1, 0]$

$$f(x) = -\sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$



۴۰) نکته: اگر f اکیداً صعودی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \leq b$.

$$f(3x-1) - f(2x+1) \geq 0 \Rightarrow f(3x-1) \geq f(2x+1) \Rightarrow 3x-1 \geq 2x+1 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, +\infty)$$

$$f = \{(-1, 4m), (-3, m), (2, 3m+2)\}$$

اعضای دامنه را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

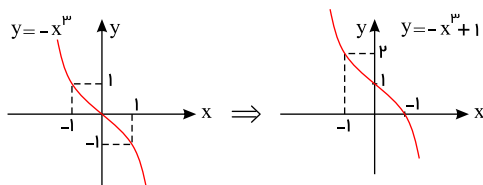
$$-3 < -1 < 2 \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f} f(-3) < f(-1) < f(2) \Rightarrow m < 4m < 3m+2$$

$$\begin{cases} m < 4m \Rightarrow 3m > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (1) \\ 4m < 3m+2 \Rightarrow m < 2 \quad (2) \end{cases}$$

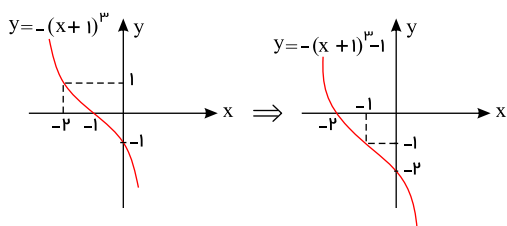
$$(1) \cap (2) \Rightarrow 0 < m < 2$$

۴۲)

الف) برای رسم $y = -x^3 + 1$ باید $y = -x^3$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم.



ب) برای رسم $y = -(x+1)^3 - 1$ باید $y = -x^3$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل کنیم.

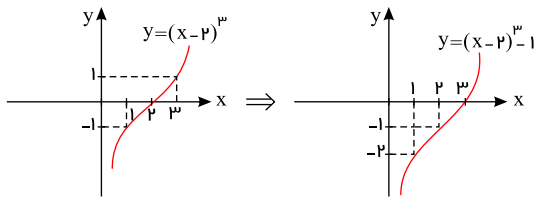




۴۳ با تشکیل اتحاد مکعب دوجمله‌ای یعنی $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ داریم:

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 1 = (x-2)^3 - 1$$

برای رسم $y = (x-2)^3 - 1$ باید $y = x^3$ را دو واحد به راست و سپس یک واحد به پایین منتقل کنیم.



۴۴ برای یافتن باقی‌مانده باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(2) = 0 \Rightarrow 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2a - b = 0 \\ \Rightarrow 16 - 12 + 2a - b = 0 \Rightarrow 2a - b = 0$$

۴۵ برای یافتن باقی‌مانده باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(2) = 0 \Rightarrow 4 - 2m + 2 = 0 \\ \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + x + b$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(1) = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4a - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 10$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 10 \end{cases}$$

$$3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3} \Rightarrow b = 2 - \frac{8}{3} \Rightarrow b = \frac{-2}{3}$$

$$f(x) = x^3 + mx - n$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(1) = 0 \Rightarrow 1 + m - n = 0 \Rightarrow m - n = -1$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(-2) = -3$$

$$\Rightarrow -8 - 2m - n = -3 \Rightarrow 2m + n = -5$$

$$\begin{cases} m - n = -1 \\ 2m + n = -5 \end{cases}$$

$$3m = -6 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow -2 - n = -1 \Rightarrow n = -1$$

$$x^8 - 256 = x^8 - 2^8 = (x-2) \times \underbrace{(x^7 + 2x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 64x + 128)}_{Q(x)} = (x-2)Q(x) \Rightarrow Q(2) = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 255$$

$$+ 2^7 + 2^6 = 8 \times 2^6 = 2^{10} = 1024$$

۴۹ گزینهٔ «۴» ریشه‌های مقسوم‌علیه ۲ و ۱ را در $p(x)$ می‌گذاریم و باید $p(2)$ و $p(-1)$ صفر باشد.

$$\begin{aligned} p(2) = 0 &\Rightarrow 4 + 2m + n = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 4 \\ -m + n = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \begin{cases} 3m = -3 \Rightarrow m = -1 \\ 1 + n = -1 \Rightarrow n = -2 \end{cases} \Rightarrow p(x) = x^2 - x - 2 \\ p(-1) = 0 &\Rightarrow 1 - m + n = 0 \end{aligned}$$

$$= 1^2 - 1 - 2 = -2$$

$$x^{24} + 1 = (x^8)^3 + 1 = (x^8 + 1)(\dots)$$

۵۰ می‌دانیم $x^n + 1$ در صورتی که n فرد باشد بر $x + 1$ بخش‌پذیر است پس x^{24} را به صورت توان فرد در می‌آوریم.

۵۱ ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی ۱ را در دو چندجمله‌ای قرار داده و سپس باقی‌مانده‌ها را باهم مساوی قرار می‌دهیم.

$$2(1)^2 - 5(1) + 4 = 1^2 + a(1) \Rightarrow 1 = 1 + a \Rightarrow a = 0$$

۵۲ نکته: می‌دانیم:

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

۵۳ نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از:

$$r(x) = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

با توجه به نکته بالا $y(1) = 4$ است.



$$1 + a + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{\text{تضع}} -\lambda + 4a - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 1. \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (1) و (2) داریم:

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1$$

با جای‌گذاری در رابطه (1) داریم:

$$a + b = 2 \xrightarrow{a=1} b = \frac{-2}{1}$$

با نوشتن رابطه تقسیم و استفاده از ریشه‌های مقسوم‌علیه داریم: (54)

$$x^5 + mx^2 - n = (x^2 + x - 2)q(x) + x + 1 \quad (1)$$

$$x^5 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

$$x = 1 \xrightarrow{(1)} 1 + m - n = 0 + 2 \Rightarrow m - n = 1$$

$$x = -2 \xrightarrow{(1)} -\lambda + 4m - n = 0 - 2 + 1 \Rightarrow 4m - n = 1$$

$$\begin{cases} m - n = 1 \\ 4m - n = 1 \end{cases}$$

$$3m = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow 2 - n = 1 \Rightarrow n = 1$$

(55)

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = P(-1) = -3 \Rightarrow -1 - m - 1 + 3 = -3$$

$$\Rightarrow -m + 1 = -3 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow P(x) = x^5 - 4x^2 + x + 3$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = P(2) = \lambda - 16 + 2 + 3 = -3$$

(56)

$$\text{الف)} \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \frac{(x^4 + x^3 + \dots + 1)(x^4 - x^3 + \dots - x + 1)}{x^{14} - 1} &= \frac{(x^4 + x^3 + \dots + 1)(x^4 - x^3 + \dots - x + 1)}{(x^7 - 1)(x^7 + 1)} \\ &= \frac{(x^4 + x^3 + \dots + x + 1)(x^4 - x^3 + \dots - x + 1)}{(x - 1)(x^4 + x^3 + \dots + x + 1)(x + 1)(x^4 - x^3 + \dots - x + 1)} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

با نوشتن رابطه تقسیم داریم: (57)

$$f(x) = (x^2 - 1)f(x) + 2x + 7 \quad (1)$$

برای یافتن باقی‌مانده $f(x + 2)$ بر $x + 3$ داریم:

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \rightarrow \text{باقی‌مانده} = f(-3 + 2) = f(-1)$$

$$x = -1 \xrightarrow{(1)} f(-1) = 0 - 2 + 7 = 5$$

با توجه به اینکه مقسوم‌علیه دو ریشه متمایز دارد، رابطه تقسیم را می‌نویسیم و از ریشه‌های مقسوم‌علیه در این رابطه استفاده می‌کنیم. (58)

$$x^5 - 3x^2 + mx + n = (x^2 - 5x + 6)q(x) + 0$$

$$x^5 - 3x^2 + mx + n = (x - 2)(x - 3)q(x)$$

$$x = 2 \Rightarrow 16 - 12 + 2m + n = 0 \Rightarrow 2m + n = 4$$

$$x = 3 \Rightarrow 243 - 27 + 3m + n = 0 \Rightarrow 3m + n = 0$$

$$\begin{cases} 2m + n = 4 \\ 3m + n = 0 \end{cases}$$

$$m = -4 \Rightarrow n = 12 \Rightarrow n = 12$$

فرض می‌کنیم: $f(x) = x^2 + 3x - 2$ و $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + m$ (59)

چون باقی‌مانده f و g بر $x + 2$ یکسان است، یعنی $f(-2) = g(-2)$ پس:

$$f(-2) = g(-2) \Rightarrow 4 - 6 - 2 = -8 - 16 - 10 + m \Rightarrow -4 = -34 + m \Rightarrow m = 30$$

(60)

الف

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$



ب

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 = (x + 2)(x^4 - x^3 + x^2 + 2x + 4)$$

$$\Rightarrow x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

۶۱

می‌دانیم: $f(x) = a \cos(bx + k) + c$ و $g(x) = a \sin(bx + k) + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$

$$f(x) = 3 \cos\left(mx - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = 4$$

$$\Rightarrow g(x) = \sin(12x - x + \frac{\pi}{6}) = \sin(11x + \frac{\pi}{6}) \rightarrow T = \frac{2\pi}{11}$$

۶۲

الف در توابعی به فرم $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

$$f(x) = 5 \sin(2x) - 7 \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\max f = |5| - 7 = -2, \quad \min f = -|5| - 7 = -12$$

ب

در توابعی به فرم $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + 2 \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\max g = \left|\frac{1}{2}\right| + 2 = \frac{9}{2}, \quad \min g = -\left|\frac{1}{2}\right| + 2 = \frac{7}{2}$$

۶۳

$$\frac{\pi}{|a|}$$

۶۴ تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{b>0} b = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max f = |a| + c = 2 \\ \min f = -|a| + c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a>0} a = 3$$

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 1$$

۶۵

$$\frac{T}{2} = 1 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \xrightarrow{b>0} b = \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = |a| + c = 6 \\ \min = -|a| + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a<0} a = -3$$

$$f(x) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$$

۶۶

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{b>0} b = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a<0} a = -3$$

$$f(x) = -3 \sin x + 1$$

۶۷

الف $f(x) = |2 \sin 3x - 4|$

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 3x \leq 2 \Rightarrow -2 - 4 \leq 2 \sin 3x - 4 \leq 2 - 4$$

$$\Rightarrow -6 \leq 2 \sin 3x - 4 \leq -2 \Rightarrow 2 \leq |2 \sin 3x - 4| \leq 6 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} \max f = 6 \\ \min f = 2 \end{cases}$$



ب) $g(x) = |\sqrt{2} \cos 2x - 3|$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos 2x \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} - 3 \leq \sqrt{2} \cos 2x - 3 \leq \sqrt{2} - 3$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\sqrt{2} \cos 2x - 3| \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \min g = 0 \\ \max g = \sqrt{2} \end{cases}$$

۶۸

می‌دانیم: $f(x) = a \cos bx + c$ و $f(x) = a \sin bx + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$

$$f(x) = 3 \cos(mx) + 4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow m = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = -\cos 12x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

۶۹ تفاضل طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است، پس:

$$\frac{T}{2} = 5 - 3 \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{b>0} b = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \max f &= |a| + c = \frac{4\pi}{2} \\ \min f &= -|a| + c = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4\pi = \pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |a| = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$a > 0 \Rightarrow a = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}$$

۷۰

در تابع $y = a \sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sin(mx) + m \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow \max f = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۷۱

در تابع $y = a \cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

$$\max f = \sqrt{2} - 1, \min f = -\sqrt{2} - 1$$

$$\frac{\max f}{\min f} = \frac{\sqrt{2} - 1}{-\sqrt{2} - 1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 2 - 1 + \sqrt{2}}{2 - 1} = -3 + 2\sqrt{2}$$

۷۲

الف نادرست، تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

ب نادرست، تابع تانژانت در هیچ بازه‌ای نزولی نمی‌باشد.

پ درست، تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم نباشد یعنی بازه‌ای که تابع تانژانت در آن بازه تعریف شده باشد، صعودی (اکیداً صعودی) است.

۷۳

الف

$$T = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \xrightarrow{b>0} b = 4$$

$$-1 \leq \sin bx \leq 1 \Rightarrow c - a \leq a \sin bx + c \leq c + a \Rightarrow \begin{cases} \max = c + a = 4 \\ \min = c - a = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4c = 2 \rightarrow c = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \sin 4x + 1 \\ y = 3 \cos 4x + 1 \end{cases}$$

ب



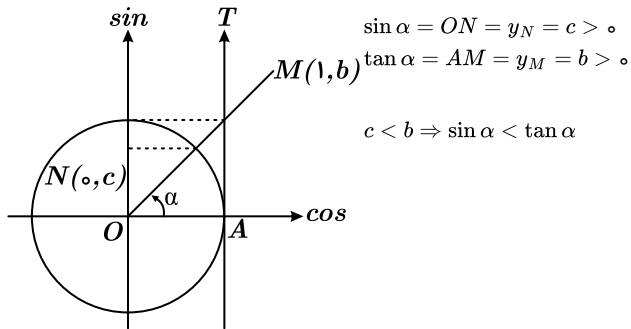
$$T = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow |b| = 12 \xrightarrow{b > 0} b = 12$$

$$\begin{cases} c + a = \text{Max} = 2 \\ c - a = \text{Min} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \cos 12x \\ y = 2 \sin 12x \end{cases}$$

۷۴

الف

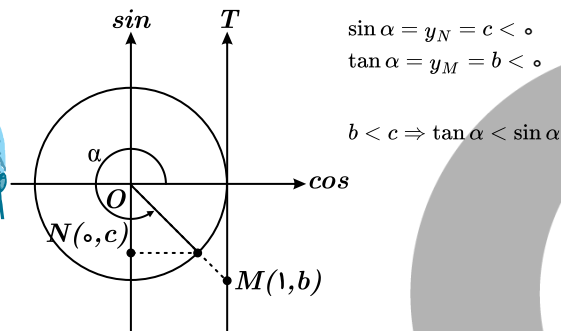
در دایره مثلثاتی زیر زاویه α را در ناحیه اول در نظر می‌گیریم، داریم:



از روی شکل واضح است که:

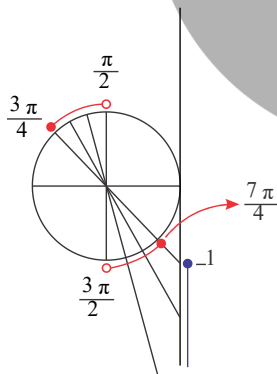
ب

در دایره مثلثاتی زیر زاویه α را در ناحیه چهارم در نظر می‌گیریم، داریم:



از روی شکل واضح است که:

در دایره مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها کوچکتر یا مساوی ۱- است. (۷۵)



$$\tan \alpha \leq -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha \leq \frac{7\pi}{4}$$

۷۶

نکته: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < \tan \alpha$

توجه کنید که در ناحیه اول سینوس و تانژانت هر دو مثبت هستند، پس داریم:

$$0 < \sin \alpha < 1 \Rightarrow 0 < 2m - 1 < 1 \Rightarrow 1 < 2m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1 \quad (1)$$

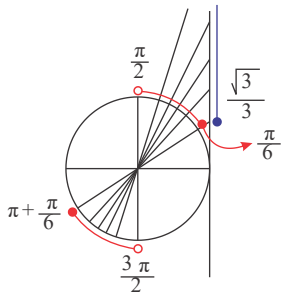
$$\tan \alpha > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \quad (2)$$

$$\sin \alpha < \tan \alpha \Rightarrow 2m - 1 < m + 1 \Rightarrow m < 2 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1$$



در دایره مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها بزرگتر یا مساوی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، که داریم:



$$\tan \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{7\pi}{6} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

۷۸

الف

ب

پ

ت

۷۹

افزایش

$$y = 1 + 2 \sin 2x \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad \max = 1 + |2| = 1 + 2 = 3, \quad \min = 1 - |2| = 1 - 2 = -1$$

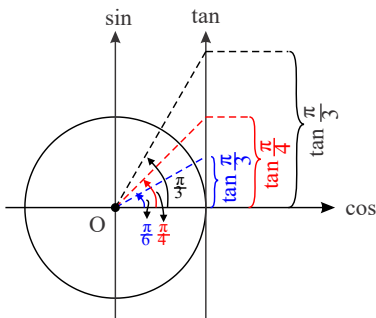
$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\max = \sqrt{3} + |-1| = \sqrt{3} + 1, \quad \min = \sqrt{3} - |-1| = \sqrt{3} - 1$$

$$y = -\pi \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\max = |-\pi| - 2 = \pi - 2, \quad \min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$$

$$y = -\frac{3}{4} \cos 2x \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad \max = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}, \quad \min = -\left|-\frac{3}{4}\right| = -\frac{3}{4}$$



$$\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \tan \theta < +\infty \Rightarrow 4 + 2m \geq 0 \Rightarrow m \geq -2$$

ب

$$\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow -1 < \tan \theta < \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -1 < 2m - 1 < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < 2m < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۸۱

الف ۸۰

الف

ضابطه مربوط به این نمودار به صورت $f(x) = a \sin bx + c$ می‌باشد که داریم:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = |a| + c = 3 \\ \min = -|a| + c = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = 2$$



با توجه به نمودار، a و b هر دو مثبت هستند، پس داریم:

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

ب

ضابطه مربوط به این نمودار به صورت $f(x) = a \cos bx + c$ می‌باشد که داریم:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = |a| + c = 2 \\ \min = -|a| + c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = -3$$

با توجه به نمودار، a منفی و b مثبت است، پس داریم:

$$f(x) = -3 \cos(2x) - 1$$

۸۲

$$\text{نکته: } n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x + n] = [x] + n$$

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \sin 3x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{3}{2} \sin 3x\right] = -2, -1, 0, 1$$

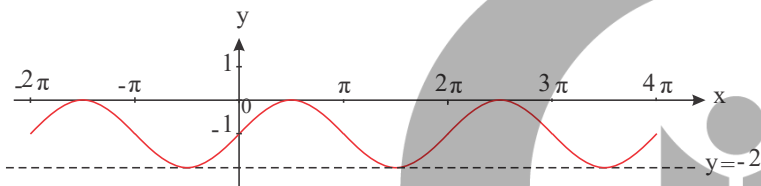
$$f(x) = \left[\frac{3}{2} \sin 3x + 5\right] = \left[\frac{3}{2} \sin 3x\right] + 5 = -2 + 5, -1 + 5, 0 + 5, 1 + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = 3, 4, 5, 6 \Rightarrow R_f = \{3, 4, 5, 6\}$$

۸۳

الف

از نمودار تابع نتیجه می‌گیریم که دوره تناوب تابع برابر 2π است؛ یعنی داریم:

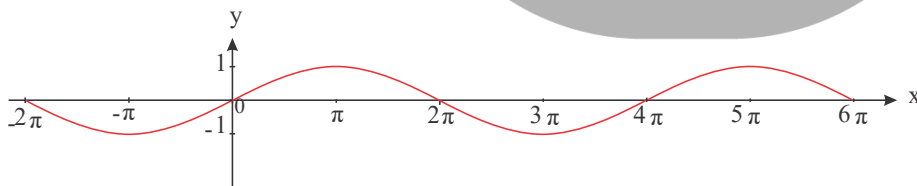


از روی نمودار معلوم می‌شود که $b = 1$ است (زیرا $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 0$)؛ داریم:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

$$x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow c = -1$$

ب



از روی نمودار واضح است که:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

از شکل نمودار معلوم می‌شود که $b = +\frac{1}{2}$ است و داریم:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow c = 0$$

۸۴

$$\text{نکته: } \cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$$

$$\text{الف) } 2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$$



$$\begin{aligned} \text{ب) } 2 \cos 3x + 1 &= 0 \Rightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ \Rightarrow \cos 3x &= \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$$

۸۵

الف دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

چون طرفین را به توان ۲ رساندیم، باید ریشه‌ها را در معادله اصلی امتحان کنیم. π و $\frac{3\pi}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند پس دو جواب دارد.

$$x = \frac{\pi}{2}, 2\pi$$

ب می‌دانیم: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ بنابراین:

$$\sin 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x(2 \sin x + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2) 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{array} \right.$$

پ

$$\cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$1) \cos(x + \frac{\pi}{2}) = +\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$2) \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{5\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ت با تقسیم طرفین معادله بر ۲ داریم:

$$\sin(3\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow 3\pi x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2k}{3} + \frac{1}{9} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{2k}{3} + \frac{2}{9} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث معادله داده‌شده را به معادله‌ای درجه ۲ تبدیل می‌کنیم به کمک رابطه $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ بنابراین:

$$2 \cos 2x - \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2(\cos 2x + 1) - \cos x = 0$$

$$2(2\cos^2 x - 1) - \cos x = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$1) \cos x = 0 = \cos(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 = \cos(0) \Rightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته: $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = 0 \Rightarrow \tan x(\tan x + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \tan x = 0, \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

۸۶



$$\tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{3}}$$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

$$\begin{aligned} \sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 0 &\Rightarrow \sin^2 \pi x = -\cos^2 \pi x \Rightarrow \sin \pi x = -\cos \pi x \\ &\Rightarrow \cos \pi x = -\sin \pi x \Rightarrow \cos \pi x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) \\ &\begin{cases} \pi x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ جواب ندارد} \\ \pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \pi x \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k - \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + u, u = 2k\pi + \pi - v$

$$2 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} + 1) \sin x + \sqrt{2} = 0, \sin x = t$$

$$2t^2 - 2(\sqrt{2} + 1)t + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 2(\sqrt{2} + 1)^2 - 1 \times 2\sqrt{2} = 2(2 + 1 + 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}$$

$$\Delta = 12 + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 12 + 2\sqrt{2} = 2(6 + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} + 1)^2$$

$$t = \frac{2(\sqrt{2} + 1) \pm 2(\sqrt{2} - 1)}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 2}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

۸۹ نکته: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 3x = 0 \Rightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$3x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$3x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$3x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 6x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۸۷

۸۸

۹۰

الف

ج



$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x - 2 \sin x + 2 = 0 \quad \Delta = 20 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3+5}{-2} = -2 \text{ غ ق } \\ \sin x = \frac{3-5}{-2} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow (x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{2} = 0$$

با فرض $\sin x = t$ داریم:

$$t^2 + t - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-\frac{3}{2}) = 7 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

$$\sin x = -\frac{3}{2} \text{ غ ق } , \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$if: \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\tan(2x - 1) = 0 = \tan(0) \Rightarrow 2x - 1 = k\pi$$

$$x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{1}{2}$$

$$if: \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow x(3 - \pi) = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3 - \pi}$$

۹۱

$$\text{نکته: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{نکته: } \sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v, u = 2k\pi + \pi - v$$

$$\text{الف) } \sin 2x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x + 3) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, 2 \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غ ق }$$

$$\text{ب) } 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) = 1 \Rightarrow 2 \times 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) = 1 \Rightarrow 2 \sin 2(\frac{x}{2}) = 1$$

ب

ت

میدانیم:

ث

ج

میدانیم: ج

میدانیم: ح



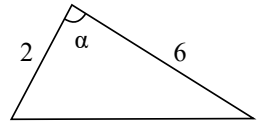
$$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}, x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = \boxed{2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$$

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع، پس داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \sin \alpha = 3 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (1), \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (2)$$



با توجه به اینکه زاویه مثلث بین صفر تا 180° می‌باشد، داریم:

$$(1) k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}, (2) k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

بنابراین دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

می‌دانیم: $a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ ؛ بنابراین:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2}$$

$$= 1 - \frac{(\sin 2\alpha)^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2\alpha = 1 \quad (1)$$

$$1 + \cot^2 2\alpha = \frac{1}{\sin^2 2\alpha} \xrightarrow{(1)} 1 + \cot^2 2\alpha = 1 \Rightarrow \cot 2\alpha = 0$$

نکته ۹۴: $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan^2 x - \tan^2 x + 1 - \tan x = 0 \Rightarrow \tan^2 x (\tan x - 1) - (\tan x - 1) = 0$$

$$(\tan x - 1)(\tan^2 x - 1) = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)(\tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\tan x - 1)^2 (\tan x + 1) = 0 \Rightarrow \tan x = 1, \tan x = -1$$

$$\tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

۹۵

$\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه‌های معادله درجه دوم زیر هستند، پس داریم:

$$\tan^2 x - (2m + 1) \tan x + 2m = 0$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = S = -\frac{b}{a} = -\frac{-(2m + 1)}{1} = 2m + 1$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = P = \frac{c}{a} = 2m$$

$$\tan(\alpha + \beta) = -\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{2m + 1}{1 - 2m} = -\frac{5}{3}$$

$$6m + 3 = -5 + 10m \Rightarrow 8 = 4m \Rightarrow m = 2$$

۹۶ می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$

می‌دانیم: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2ku + v$, $u = 2k\pi + \pi - v$

می‌دانیم: $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

الف) $\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \cos 2x \Rightarrow \sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$



$$x - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18}$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{7\pi}{6}$$

$$\hookrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \left(\frac{x}{2} + \pi\right)$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{x}{2} + \pi \Rightarrow x - \frac{x}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \boxed{x = \pi}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{x}{2} - \pi \Rightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi - \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{4k\pi}{3} - \pi \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} x = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}$$

معادله در بازه $[0, \pi]$ دارای ۲ جواب است.

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ نادرست} \\ \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ جواب} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \text{ [جوابهای واقع در بازه } [0, 2\pi] \text{]}$$

نکته: $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$, $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan 3x = \cot\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) \Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)\right)$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{3} - 2x$$

$$\Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{15}$$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$ ۱۰۰



$$\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(3x + x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos 5x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 5x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{15}$$

$$\tan u = \tan v \Rightarrow u = ku + v \text{ نکته:}$$

$$\tan x = 3 \cot x \xrightarrow{\times \tan x} \tan^2 x = 3 \cot x \tan x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k \pm v \text{ نکته:}$$

$$3 \sin^2 x = 3 \cos x \Rightarrow 3(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \Rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 3 \cos x$$

$$\Rightarrow 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0, \cos x = t \Rightarrow 3t^2 + 3t - 3 = 0, \Delta = 9 + 12 = 21$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6} \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \text{ غ ق ق} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \tan x = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = a$$

$$2a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۰۱

الف

ب

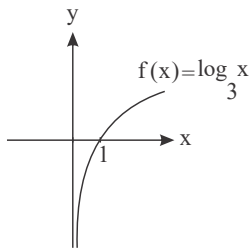
۱۰۲

الف

ب

ج

۱۰۳ مثل آب خوردن ۲۰ بگیر با رسم نمودار $f(x) = \log_3^x$ داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_3 x = -\infty$$

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3}$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3-\varepsilon-3} = \frac{3}{-\varepsilon} = -\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3+\varepsilon-3} = \frac{3}{\varepsilon} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

ابتدا حد راست و چپ تابع در نقطه ۳ را به دست می آوریم:

ابتدا حد راست و چپ تابع در نقطه ۵ را به دست می آوریم:

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-x}{x-5}$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1-x}{x-5} = \frac{1-5}{5-\varepsilon-5} = \frac{-4}{-\varepsilon} = \frac{-4}{\varepsilon} = +\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1-x}{x-5} = \frac{1-5}{5+\varepsilon-5} = \frac{-4}{\varepsilon} = \frac{-4}{\varepsilon} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ ۱۰۵

با نزدیکتر شدن مقادیر x به ۲ از چپ، $f(x)$ به $+\infty$ میل می کند.

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

با نزدیکتر شدن مقادیر x به ۲ از راست، $f(x)$ به $-\infty$ میل می کند.

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

با نزدیکتر شدن مقادیر x به صفر، $f(x)$ به $+\infty$ میل می کند. (چه از چپ و چه از راست)

د) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty$

با نزدیکتر شدن مقادیر x به -۲ از چپ $f(x)$ به $-\infty$ میل می کند.

و) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$

با توجه به ۲ قسمت قبلی، با نزدیکتر شدن x به -۲ چه از راست و چه از چپ $f(x)$ به $-\infty$ میل می کند.

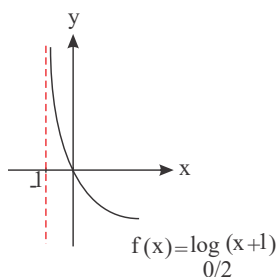
ه) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$

با نزدیکتر شدن مقادیر x به -۲ از راست $f(x)$ به $-\infty$ میل می کند.

۱۰۶ با رسم نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ داریم:

با توجه به نمودار هر چه x از راست به -۱ نزدیکتر می شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می کنند.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x-2}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1-2}{+\infty} \right] = \left[\frac{-3}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$$



گزینه «۴» زیرا با توجه به شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

۱۰۸

با نزدیکتر شدن x به ۱ از چپ و چپ از راست، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند. پس داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

با نزدیکتر شدن مقادیر x به ۲- از چپ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty$

هرچه x به ۱- نزدیکتر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به سمت 2^+ میل می‌کنند. پس داریم:

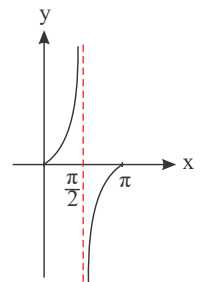
ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(f(x)) = f((-2)^+) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty$

۱۰۹

الف) با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

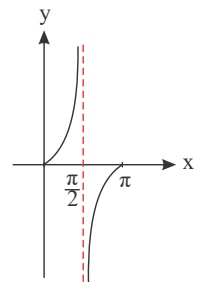
$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{x+1}{\tan x} \right) = \frac{\frac{\pi}{2} + 1}{+\infty} = 0$$



ب) با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \left[\frac{3-x}{\tan x} \right] = \left[\frac{3-\frac{\pi}{2}}{-\infty} \right] = [0^-] = -1$$



۱۱۰

الف) با فرض $f(x) = \sqrt{3+x^2}$ و $g(x) = x^2$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3+x^2} = \sqrt{3} > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad g(x) = x^2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$$

ب) با فرض $f(x) = 1$ و $g(x) = (x-2)^2$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0, \quad g(x) = (x-2)^2 \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پ) با فرض $f(x) = |5-x|$ و $g(x) = |2+x|$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} |5-x| = |5-(-2)| = 7 \\ \lim_{x \rightarrow -2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} |2+x| = 0, \quad g(x) = |2+x| \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{|2+x|} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

۱۱۱

الف) با تجزیه مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2 \times 2}{(2-\varepsilon-2) \times 4} = \frac{4}{-4\varepsilon} = \frac{+4}{0^-} = -\infty$$



ب با تجزیه مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x - 3)(x + 4)} = \frac{9 + 6 - 1}{(3 - \varepsilon - 3) \times 7} = \frac{14}{-7\varepsilon} = \frac{14}{0^-} = -\infty$$

پ با تجزیه مخرج کسر داریم:

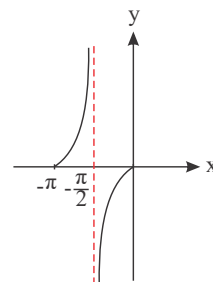
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 1}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 1}{(3 - x)(3 + x)} = \frac{4}{(3 - (3 + \varepsilon)) \times 6} = \frac{2}{-\varepsilon \times 3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

۱۱۲

الف با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

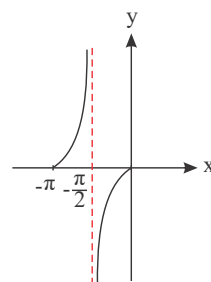
$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \left[\frac{x + 1}{\tan x} \right] = \left[\frac{-\frac{\pi}{2} + 1}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$$



ب با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \left[\frac{2 - x}{\tan x} \right] = \left[\frac{2 - (-\frac{\pi}{2})}{-\infty} \right] = \left[\frac{2 + \frac{\pi}{2}}{-\infty} \right] = [0^-] = -1$$



۱۱۳

الف با توجه به اینکه $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2\left(\frac{\sin x}{x} \times x\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

نکته وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، $\sin x \sim x$ پس داریم:

ب با توجه به $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2\sin^2(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2x}{2x} \times 2x}{2\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \times \frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2 \times \frac{x^2}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

نکته وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، $\sin x \sim x$ پس داریم:

۱۱۴ حد صورت عددی مثبت است و چون در هر دو حالت $x \rightarrow 2^-$ و $x \rightarrow 2^+$ حاصل حد $+\infty$ است، پس $x = 2$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد.

$$x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف } x = 2 \Rightarrow -\frac{a}{2 \times 1} = 2 \Rightarrow a = -4$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4b = 0 \Rightarrow 16 - 4b = 0 \Rightarrow b = 4$$

روش دوم: چون در عبارت $x^2 + ax + b$ ضریب x^2 برابر یک است و $x = 2$ ریشه مضاعف این عبارت است، پس $x^2 + ax + b$ همان $(x - 2)^2$ است. یعنی:

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

۱۱۵



هر چه x به ۲ از راست نزدیکتر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

هر چه x به ۱- از راست نزدیکتر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

با نزدیکتر شدن x به ۱ از چپ مقادیر $f(x)$ به 2^- میل می‌کنند پس داریم:

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

با نزدیکتر شدن x به ۰ از چپ مقادیر $f(x)$ به 1^- میل می‌کنند پس داریم:

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x)) = f((-1)^-) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

۱۱۶) باید نامعادله $f(x) < -10000$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x) < -10000 \Rightarrow \frac{1}{x+5} < -10000 \xrightarrow{x < -5} x+5 < -\frac{1}{10000}$$

$$\Rightarrow x > -5 - 0.0001 \Rightarrow x > -5.0001, x < -5 \Rightarrow -5.0001 < x < -5$$

۱۱۷) باید نامعادله $f(x) < -1000$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x) < -1000 \Rightarrow \frac{1}{x-4} < -1000 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{1}{x-4} > 1000$$

$$\xrightarrow{x > 4} x-4 < \frac{1}{1000} \Rightarrow x < 4 + 0.001 \Rightarrow x < 4.001, x > 4 \Rightarrow 4 < x < 4.001$$

۱۱۸) باید نامعادله $f(x) > 1000$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x) > 1000 \Rightarrow \frac{1}{x-3} > 1000 \xrightarrow{x > 3} x-3 < \frac{1}{1000} \Rightarrow x < 3 + 0.001$$

$$\Rightarrow x < 3.001, x > 3 \Rightarrow 3 < x < 3.001$$

۱۱۹)

الف) نکته: وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، می‌توانیم $\tan x$ و $\sin x$ را هم‌ارز با x در نظر بگیریم، به عبارتی دیگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \tan 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \times x}{x \times \frac{\tan 2x}{2x} \times 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \times 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \times 0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

ب) نکته: وقتی x به سمت صفر میل کند، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2x}{2x} \times 2x}{\left(\frac{\sin 3x}{3x} \times 3x\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{9x}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{9x} = \frac{2}{9 \times 0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{9x} = \frac{2}{9 \times 0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

۱۲۰)

الف) با تجزیه صورت تابع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{(x-3)^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-3}$$



$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+4}{x-3} = \frac{3+4}{3-\varepsilon-3} = \frac{7}{\circ^-} = -\infty$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+4}{x-3} = \frac{3+4}{3+\varepsilon-3} = \frac{7}{\circ^+} = +\infty \rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

ب با تجزیه صورت و مخرج تابع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{\circ}{\circ} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-2-2}{-2-\varepsilon+2} = \frac{-4}{\circ^-} = +\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-2-2}{-2+\varepsilon+2} = \frac{-4}{\circ^+} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

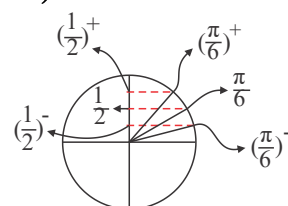
۱۲۱

الف

با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

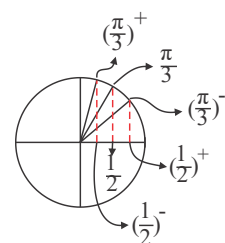
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2(\frac{1}{2}-\varepsilon)-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-2\varepsilon-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\varepsilon} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\circ^-} = -\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2(\frac{1}{2}+\varepsilon)-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\varepsilon-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\circ^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



ب با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{1-\sin x}{2 \cos x - 1} = \frac{1-\sin \frac{\pi}{3}}{2(\frac{1}{2}-\varepsilon)-1} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-2\varepsilon-1} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\varepsilon} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\circ^-} = +\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{1-\sin x}{2 \cos x - 1} = \frac{1-\sin \frac{\pi}{3}}{2(\frac{1}{2}+\varepsilon)-1} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\varepsilon-1} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\circ^+} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

۱۲۲

الف

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$ داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 1}{x - 3} = \frac{[3 + \varepsilon] - 1}{3 + \varepsilon - 3} = \frac{3 - 1}{+\varepsilon} = \frac{2}{+\varepsilon} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

ب) با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 5^+} [x] = 5$ و $\lim_{x \rightarrow (-5)^-} [-x] = 5$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{x - [-x]}{x + 5} = \frac{-5 - [-(-5 - \varepsilon)]}{-5 - \varepsilon + 5} = \frac{-5 - [5 + \varepsilon]}{-\varepsilon} = \frac{-5 - 5}{-\varepsilon} = \frac{-10}{0^-} = +\infty$$

۱۲۳

الف

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{4x^3 + 2x - 1} \stackrel{\text{قاعده پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x} = 0$$

۱۲۴) گزینه «۱» با توجه به شکل تابع در همسایگی ۴، حد تابع $+\infty$ است و چون در $x = 4$ حد صورت کسر عددی مثبت می‌شود، پس باید مخرج هم چه از راست و چه از چپ عدد چهار بر 0^+ میل کند تا حاصل کسر $+\infty$ شود. پس یعنی $x = 4$ هم ریشه مخرج است و هم به‌ازای آن مخرج ریشه مضاعف دارد. بنابراین:

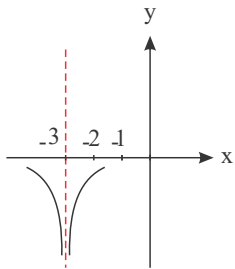
$$\begin{aligned} 16 + 4a + b &= 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4b &= 0 \Rightarrow a^2 - 4(-16 - 4a) = 0 \Rightarrow a^2 + 64 + 16a = 0 \Rightarrow (a + 8)^2 = 0 \Rightarrow a = -8 \\ b = -4a - 16 \Rightarrow b = 32 - 16 &= 16 \end{aligned}$$

۱۲۵) ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}, \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

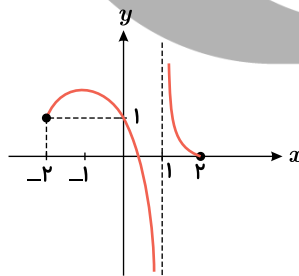
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 2}{(x + 3)^2} = \frac{-3 + 2}{(-3 \pm \varepsilon + 3)^2} = \frac{-1}{(\pm \varepsilon)^2} = \frac{-1}{+\varepsilon^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

نمودار تابع در اطراف خط $x = -3$ به صورت مقابل است.



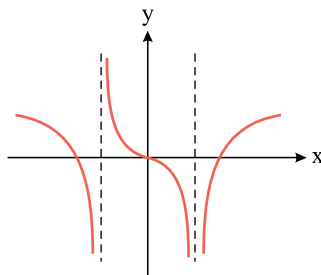
۱۲۶

تابع مقابل در $x = 1$ مجانب قائم دارد.



۱۲۷

تابع مقابل در $x = -1$ و $x = 1$ مجانب قائم دارد.



۱۲۸

ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}, \quad x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$



خط $x = 0$ مجانب قائم نمی‌باشد. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2-\varepsilon+2} = \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+\varepsilon+2} = \frac{1}{\varepsilon} = +\infty \end{cases}$$

خط $x = -2$ تنها مجانب قائم تابع است.

۱۲۹ برای اینکه این تابع مجانب قائم نداشته باشد، باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، پس داریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x - 2}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 + mx + n = 0 \Rightarrow 4 + 2m + n = 0 \Rightarrow m = -6$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + n}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = x - 4, \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

تابع مجانب قائم ندارد.

۱۳۰

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} + \frac{x}{x+2} = \frac{1}{\frac{1-x}{x}} + \frac{x}{x+2} = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+2}, x \neq 0$$

البته باید دانش‌آموز دقت کند که تابع در $x = 0$ به صورت یک نقطه توخالی است نه اینکه مجانب دارد.

این همان $f(x)$ است نه $\frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+2}$ چون در این $x = 0$ هم جزو دامنه است که در $f(x)$ اینطور نیست.

ابتدا تابع را به حالت ساده‌شده‌تری درمی‌آوریم، سپس ریشه‌های مخرج را پیدا کرده و مجانب داشتن تابع در آنها را بررسی می‌کنیم:

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+2} \right) = \left(\frac{1}{1-(1-\varepsilon)} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{+\varepsilon} + \frac{1}{3} = +\infty + \frac{1}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+2} \right) = \left(\frac{1}{1-(1+\varepsilon)} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{-\varepsilon} + \frac{1}{3} = -\infty + \frac{1}{3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+2} \right) = \frac{-2}{3} + \frac{-2}{-2-\varepsilon+2} = -\frac{2}{3} + \frac{-2}{-\varepsilon} = -\frac{2}{3} + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{x}{x+2} \right) = \frac{-2}{3} + \frac{-2}{-2+\varepsilon+2} = -\frac{2}{3} + \frac{-2}{+\varepsilon} = -\frac{2}{3} - \infty = -\infty$$

خطهای $x = 1$ و $x = -2$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

۱۳۱ ابتدا ریشه‌های مخرج و دامنه تابع را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - x}, \quad x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \quad (1)$$

$$\text{شرط رادیکال: } x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow |x| \geq 2 \Rightarrow x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

تابع در همسایگی هیچ‌کدام از نقاط $x = 1$ و $x = 0$ تعریف نشده است، پس این تابع مجانب قائم ندارد.

۱۳۲ ابتدا ریشه‌های مخرج تابع را در بازه داده‌شده پیدا می‌کنیم:

با توجه به دایره مثلثاتی زیر داریم:



$$f(x) = \frac{1-x}{\sin x}, \quad [0, 2\pi]$$

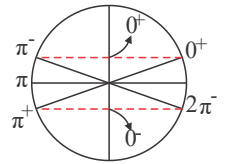
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \pi, 2\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{\sin x} = \frac{1-0}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1-x}{\sin x} = \frac{1-\pi}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1-x}{\sin x} = \frac{1-\pi}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (2\pi)^-} \frac{1-x}{\sin x} = \frac{1-2\pi}{0^-} = +\infty$$



خطهای $x = 0$ و $x = \pi$ و $x = 2\pi$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

۱۳۳

الف ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$3-x=0 \Rightarrow x=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x-1}{3-x} = \frac{3 \times 3 - 1}{3 - (3 - \varepsilon)} = \frac{8}{+\varepsilon} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-1}{3-x} = \frac{3 \times 3 - 1}{3 - (3 + \varepsilon)} = \frac{8}{-\varepsilon} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

بنابراین خط $x = 3$ مجانب قائم تابع است.

ب

ابتدا ریشه‌های مخرج را می‌یابیم.

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-\varepsilon-1} = \frac{2}{-\varepsilon} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1+\varepsilon-1} = \frac{2}{+\varepsilon} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

خط $x = 0$ مجانب قائم تابع نیست.

خط $x = 1$ مجانب قائم تابع است.

۱۳۴ ابتدا ریشه‌های مخرج تابع را در بازه داده‌شده پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2} \cos x + 1}, \quad \sqrt{2} \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{3\pi}{4}, 2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

با توجه به اینکه $x = \frac{3\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$ صورت کسر را صفر نمی‌کنند، هر دو مجانب قائم هستند.

۱۳۵ برای اینکه تابع مجانب قائم نداشته باشد، مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد، یعنی:

$$x^2 + mx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow |m| < 2 \Rightarrow -2 < m < 2$$

۱۳۶ ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم سپس مجانب داشتن تابع در آنها را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 4}, \quad x = 0, x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 4} \right) = \frac{1}{0^-} - \frac{0}{-4} = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 4} \right) = \frac{1}{0^+} - \frac{0}{-4} = +\infty - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{4 - 4} = \frac{1}{2} - \frac{2}{0^-} = \frac{1}{2} - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{4^+ - 4} = \frac{1}{2} - \frac{2}{0^+} = \frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} \right) = \frac{1}{-2} - \frac{-2}{-4(-2-\varepsilon+2)} = -\frac{1}{2} - \frac{-2}{+4\varepsilon} = -\frac{1}{2} + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} \right) = \frac{1}{-2} - \frac{-2}{-4(-2+\varepsilon+2)} = -\frac{1}{2} - \frac{-2}{-4\varepsilon} = -\frac{1}{2} - \infty = -\infty$$

خطوط $x = 0$ و $x = \pm 2$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

ابتدا ریشه‌های مخرج و دامنه تابع را می‌یابیم. ۱۳۷

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}, \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{ریشه‌های مخرج}$$

$$\text{شرط رادیکال: } x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty) - \{1\}$$

تابع در اطراف $x = -1$ تعریف نشده است، پس خط $x = -1$ مجانب قائم نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(1-\varepsilon-1) \times 2} = \frac{1}{-2\varepsilon} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(1+\varepsilon-1) \times 2} = \frac{1}{+2\varepsilon} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پس تنها مجانب قائم این تابع $x = 1$ است.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

هرچه x به $+\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به سمت ۱ نزدیکتر می‌شوند.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

هرچه x به $-\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به سمت -۱ نزدیکتر می‌شوند.

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

هرچه x به ۳ از سمت راست نزدیکتر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

هرچه x به ۳ از سمت چپ نزدیکتر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

هرچه x به -۲ از سمت راست نزدیکتر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $-\infty$ میل می‌کنند.

ج) مجانب‌های افقی و قائم

خطوط $x = 3$ و $x = -2$ مجانب‌های قائم تابع و خطوط $y = 1$ و $y = -1$ مجانب‌های افقی تابع هستند زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

حد هر چند جمله‌ای در $x \rightarrow \pm\infty$ برابر با حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است. ۱۳۹

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 - x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = 2(+\infty)^3 = 2(+\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = 2(-\infty)^3 = 2(-\infty) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4 + 2x^3 + 7) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4) = -(\pm\infty)^4 = -(+\infty) = -\infty$$



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

هر چه x به $+\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به 2 نزدیکتر می‌شوند.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

هر چه x به $-\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به -1 نزدیکتر می‌شوند.

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm\infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^n + 2x^f - x + 1}{3x^f - x^2 + 5} = 3$$

غیر قابل قبول $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^f}{3x^f} = \frac{2}{3} \neq 3 \Rightarrow$ حالت 1

حالت 2 $n = f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m+2)x^f}{3x^f} = \frac{m+2}{3} = 3 \Rightarrow m+2=9 \Rightarrow m=7$

حالت 3 $n > f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^n}{3x^f} = \pm\infty \rightarrow$ غیر قابل قبول

$m=7$ و $n=f$ جواب هستند.

با توجه به اینکه $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm\infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{|2x-3|}^{\text{منفی}} + mx}{\underbrace{m|x+2|}_{\text{منفی}} + 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(2x-3) + mx}{-m(x+2) + 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3+mx}{-mx-2m+4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(m-2)x}{(-m+4)x} = \frac{m-2}{4-m} = -3 \Rightarrow m-2 = -12 + 3m \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

با توجه به این که حاصل حد عدد 5 شده و بزرگترین درجه مخرج برابر 4 است، پس باید بزرگترین درجه صورت هم برابر 4 باشد، داریم:

$n = f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^f - 2x^3 + 1}{3x^f + x^3 + 7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^f}{3x^f} = \frac{m}{3} = 5 \Rightarrow m = 15$

۱۴۴

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = [2^-] = 1$

هر چه x به سمت $-\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ از پایین به 2 نزدیکتر می‌شوند. پس داریم:

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = [(-1)^+] = -1$

هر چه x به سمت $+\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ از بالا به -1 نزدیکتر می‌شوند. پس داریم:

۱۴۵ فاصله $f(x)$ تا خط $y=1$ برابر با $|f(x)-1|$ است، پس باید نامعادله $|f(x)-1| < \frac{1}{1000}$ را حل کنیم، که داریم:

$$\left| \frac{x-3}{x+1} - 1 \right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \left| \frac{x-3-x-1}{x+1} \right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{4}{|x+1|} < \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \frac{|x+1|}{4} > 1000 \Rightarrow |x+1| > 4000 \Rightarrow x+1 < -4000 \text{ یا } x+1 > 4000$$

$$\Rightarrow x < -4001 \text{ یا } x > 3999 \Rightarrow x \in (-\infty, -4001) \cup (3999, +\infty)$$

۱۴۶

الف) با توجه به قاعده پرتوان برای محاسبه حاصل این حد، توان‌های بزرگتر x را در صورت و مخرج نگه می‌داریم و بقیه را در نظر نمی‌گیریم. پس داریم:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm\infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{-x}}{2x + \sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x + \sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

ب) با توجه به قاعده پرتوان برای محاسبه حاصل این حد، توان‌های بزرگتر x را در صورت و مخرج نگه می‌داریم و بقیه را در نظر نمی‌گیریم. پس داریم:

ب



قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots x \rightarrow \pm\infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 2|x| + \sqrt{x^2 + 5}}{|x - 2| + \sqrt{9x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 2|x| + \sqrt{x^2}}{|x| + \sqrt{9x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 2|x| + |x|}{|x| + 3|x|} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - |x|}{|x| + 3|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - |x|}{|x| + 3|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x}{x + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{|x - 2| + 3|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - (-x)}{-(x - 2) + 3(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-4x} = -1$$

۱۴۷

الف

با توجه به اینکه $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots x \rightarrow \pm\infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{3x - 1}^{\text{مثبت}} - x}{\underbrace{2 - x}_{\text{منفی}} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1 - x}{-(2 - x) + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

ب

با توجه به اینکه $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots x \rightarrow \pm\infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{3x + 2}^{\text{منفی}} + x}{\underbrace{5 - x}_{\text{مثبت}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(3x + 2) + x}{5 - x + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 2 + x}{5 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

۱۴۸

الف

با توجه به اینکه $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots x \rightarrow \pm\infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \overbrace{|x + 2|}^{\text{مثبت}}}{\underbrace{|x - 3|}_{\text{مثبت}} + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - (x + 2)}{x - 3 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x - 2}{5x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

ب

با توجه به اینکه $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots x \rightarrow \pm\infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{2x - 1}^{\text{منفی}} - 3x}{\underbrace{4x - |x - 2|}_{\text{منفی}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(2x - 1) - 3x}{4x + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 1}{5x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{5x} = -1$$

۱۴۹

الف

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots x \rightarrow \pm\infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^2 + x^2 + 4}{x^5 + x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6}{x^3} = \frac{-6}{(\pm\infty)^3} = \frac{-6}{+\infty} = 0$$

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots x \rightarrow \pm\infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x + 1)^2 - x^2 + x^2}{-3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + x^2}{-3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 2x + 1}{-3x^2 + x - 1}$$



$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = -\frac{2}{3}$$

۱۵۰

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx - \overbrace{|x+2|}^{\text{مثبت}}}{\overbrace{2x+1}^{\text{مثبت}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx - (x+2)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m-1)x}{2x} \\ &= \frac{m-1}{2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m-1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

۱۵۱

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{mx^2 - x^2 - 2x - 1}{3x^2 + x} \Rightarrow f(x) = \frac{(m-1)x^2 - 2x - 1}{3x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m-1)x^2 - 2x - 1}{3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m-1)x^2}{3x^2} = \frac{m-1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow m-1 = 2 \Rightarrow m = 3$$

۱۵۲

الف

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(x+1)^2}{-x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \cdot x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{-x^2} = -\infty$$

خط $y = -1$ مجانب افقی تابع است.

ب

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{1} = 3$$

خط $y = 0$ مجانب افقی تابع است.

۱۵۳

هر وقت زاویه سینوس به صفر میل کند، داریم:

$$\begin{aligned} \sin u \sim u \quad u \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x-1) \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x-1) \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2 \end{aligned}$$

خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

۱۵۴

چون نقطه $A(3, -2)$ محل برخورد مجانب‌های تابع است، پس خط $x = 3$ مجانب قائم و خط $y = -2$ مجانب افقی تابع است.

$$f(x) = \frac{ax+2}{bx-9}, \quad bx-9=0 \Rightarrow x=\frac{9}{b}=3 \Rightarrow b=3$$

$$f(x) = \frac{ax+2}{3x-9} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+2}{3x-9} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax}{3x} = \frac{a}{3} = -2 \Rightarrow a = -6$$

۱۵۵

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{mx+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{mx} = \frac{2}{m} = -3 \Rightarrow m = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{-\frac{2}{3}x+1}$$

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{2}{3}x+1=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x-1}{-\frac{2}{3}x+1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

خط $x = \frac{3}{2}$ مجانب قائم تابع است.

۱۵۶

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{|3x-2|}^{\text{منفی}} + mx}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(3x-2) + mx}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(m-3)x+2}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(m-3)x}{-x} = -m+3=5 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow f(x) = \frac{|3x-2|-2x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{|3x-2|}^{\text{مثبت}} - 2x}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2-2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

خط $y=1$ مجانب افقی تابع در $+\infty$ است.

۱۵۷

الف

$$y = \frac{2x-1}{x-3}, \quad x-3=0 \Rightarrow x=3$$

۱- برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2 \times 3 - 1}{3 - \varepsilon - 3} = \frac{5}{-\varepsilon} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2 \times 3 - 1}{3 + \varepsilon - 3} = \frac{5}{+\varepsilon} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

۲- برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

خط $x=3$ مجانب قائم و خط $y=2$ مجانب افقی است.

ب

$$y = \frac{x}{x^2-4}, \quad x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(2-\varepsilon-2) \times 4} = \frac{1}{-2\varepsilon} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(2+\varepsilon-2) \times 4} = \frac{1}{+2\varepsilon} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4(-2-\varepsilon+2)} = \frac{1}{-2\varepsilon} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4(-2+\varepsilon+2)} = \frac{1}{+2\varepsilon} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

برای بررسی داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

خطوط $x=2$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم و خط $y=0$ مجانب افقی می‌باشند.

پ

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}, \quad 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{(1+1)(1-1+\varepsilon)} = \frac{3}{+2\varepsilon} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{2(1-1-\varepsilon)} = \frac{3}{-2\varepsilon} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{(1-(1-\varepsilon)) \times 2} = \frac{3}{+2\varepsilon} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+2}{(1-(1+\varepsilon)) \times 2} = \frac{3}{-2\varepsilon} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$$

برای بررسی داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:
خطوط $x = 1$ و $x = -1$ مجانب‌های قائم و خط $y = -2$ مجانب افقی می‌باشند.

ت برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad 1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

غیر قابل قبول

برای بررسی داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\pm\infty} = 0$$

چون مخرج ریشه ندارد، تابع مجانب قائم ندارد. خط $y = 0$ تنها مجانب افقی تابع است.

۱۵۸

$$f(x) = \frac{3x - 1}{mx + 4}$$

چون خط $x = -2$ مجانب قائم تابع است، پس مخرج به‌ازای $x = -2$ باید صفر شود، پس داریم:

$$mx + 4 = 0 \xrightarrow{x=-2} -2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 1}{2x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

خط $y = \frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع است.

۱۵۹

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}, \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow x \leq -3 \text{ یا } x \geq 3$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

با توجه به دامنه، تابع در همسایگی $x = 1$ تعریف نشده است، پس خط $x = 1$ مجانب قائم نمی‌باشد.

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

خطوط $y = \pm 1$ مجانب‌های افقی تابع هستند.

۱۶۰

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 5}, \quad x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 5} = \frac{\sqrt{25 - 1}}{5 - \varepsilon - 5} = \frac{\sqrt{24}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 5} = \frac{\sqrt{25 - 1}}{5 + \varepsilon - 5} = \frac{\sqrt{24}}{0^+} = +\infty$$

خط $x = 5$ مجانب قائم تابع است.

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

خطهای $y = 1$ و $y = -1$ مجانب‌های افقی تابع هستند.

۱۶۱



برای داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + |x-1|}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + |x-1|}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + |x-1|}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (x-1)}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

خطوط $y = 3$ و $y = -1$ مجانب‌های افقی تابع هستند.

۱۶۲

برای داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - |x-1|}{x + |2x-3|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - (x-1)}{x + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x} = 1$$

خط $y = 1$ مجانب افقی در $+\infty$ است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x-1|}{x + |2x-3|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x + 1}{x - (2x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{-x} = -3$$

خط $y = -3$ مجانب افقی در $-\infty$ است.

۱۶۳

برای داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x|x| + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x \cdot x} = 2$$

خط $y = 2$ مجانب افقی در $+\infty$ است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x|x| + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x(-x)} = -2$$

خط $y = -2$ مجانب افقی در $-\infty$ است.

۱۶۴

الف

برای داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{x}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

به‌دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، فقط حدتابع را در $+\infty$ می‌توان بررسی کرد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2| + \sqrt{x}}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2 + \sqrt{x}}{\sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

خط $y = \frac{1}{2}$ مجانب افقی تابع است.

ب

$$g(x) = \frac{x + \sqrt{9-x^2}}{|x+3|}, \quad x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \quad (1)$$

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow D_f = [-3, 3] - \{-3\}$$

با توجه به دامنه، حدتابع در $x \rightarrow \pm\infty$ وجود ندارد، پس تابع مجانب افقی ندارد.

۱۶۵

برای داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \quad \text{مجانب افقی}$$

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

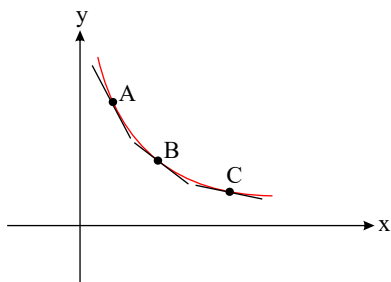
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow \text{پس } x = -1 \text{ مجانب قائم نیست.}$$



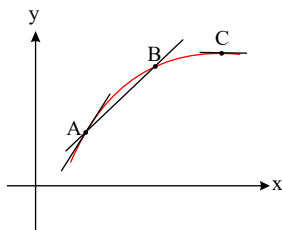
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow x = 1 \text{ مجانب قائم است.}$$

۱۶۶ با رسم خطوط مماس بر منحنی f در نقاط C, B, A داریم:



$$\text{شیب خط مماس در } C < \text{شیب خط مماس در } B < \text{شیب خط مماس در } A \\ \rightarrow f'(A) < f'(B) < f'(C)$$

۱۶۷ وتر AB و خطوط مماس بر منحنی f در نقاط A و C را رسم می‌کنیم.



$$\text{شیب خط مماس در } A < \text{شیب وتر } AB < \text{شیب خط مماس در } C \\ \rightarrow m_3 < m_2 < m_1$$

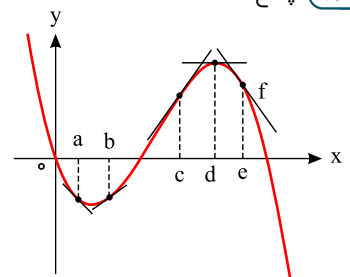
۱۶۸

$$f(x) = x^2 - 2, f(-1) = -3$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2 - (-3)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - x + 1)}{(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 1 - (-1) + 1 = 3 \Rightarrow f'(-1) = 3 \end{aligned}$$

x	$f'(x)$
d	0
b	0.5
c	2
a	-0.5
e	-2

۱۶۹ پاسخ:



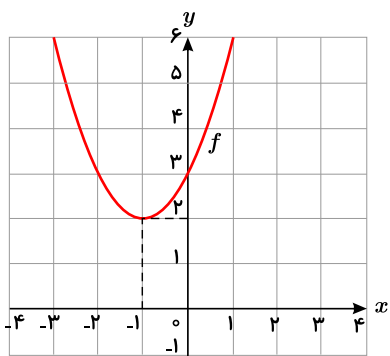
شیب خط مماس در نقاط $x = b$ و $x = c$ مثبت، در نقاط $x = a$ و $x = e$ منفی و در نقطه $x = d$ صفر است.

$$x = c < x = b \Rightarrow \text{شیب خط مماس در } x = c > \text{شیب خط مماس در } x = b \Rightarrow f'(c) > f'(b) \Rightarrow f'(c) = 2, f'(b) = 0.5$$

$$x = e < x = a \Rightarrow \text{شیب خط مماس در } x = e < \text{شیب خط مماس در } x = a \Rightarrow f'(e) < f'(a) \Rightarrow f'(e) = -2, f'(a) = -0.5$$

$$x = d \Rightarrow \text{شیب خط مماس در } x = d = 0 \Rightarrow f'(d) = 0$$

۱۷۰



الف) در $x = -1$ شیب خط مماس صفر است زیرا خط مماس خطی افقی است. در بازه $(-1, +\infty)$ با افزایش x شیب خط مماس افزایش می‌یابد، پس داریم:

$$f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

(ب)

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$$

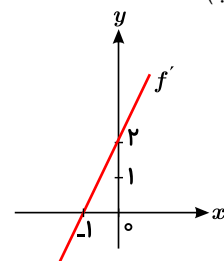
$$f'(-1) = 2(-1) + 2 = 0, f'(0) = 2 \times 0 + 2 = 2, f'(2) = 2 \times 2 + 2 = 6$$

$$f'(3) = 2 \times 3 + 2 = 8$$

$$\Rightarrow f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

(پ)

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline f'(x) & 0 & 2 \end{array}$$



۱۷۱

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1, x = 2 \Rightarrow f(2) = 12 - 4 + 1 = 9$$

شیب خط مماس برابر با مشتق تابع در نقطه $x = 2$ است.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(3x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 10$$

$$A(2, 9), m = 10 \Rightarrow y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11$$

۱۷۲

$$f(x) = -x^2 + 3x, f(2) = -4 + 6 = 2$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 - 3x + 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 1) = -2 + 1 = -1$$

۱۷۳

الف) شیب خط a متوسط نرخ جمعیت در سال ۱۳۶۴ تا سال ۱۳۷۹ و شیب خط b نرخ لحظه‌ای جمعیت در سال ۱۳۷۹ را نشان می‌دهد.

ب

با توجه به شیب خط مماس در سال‌های ۱۳۶۴، ۱۳۶۹ و ۱۳۷۴ در سال ۱۳۷۹ نرخ جمعیت بیشتر است.

۱۷۴

الف) شیب خط مماس در نقطه A منفی است یعنی مشتق در نقطه A منفی است.

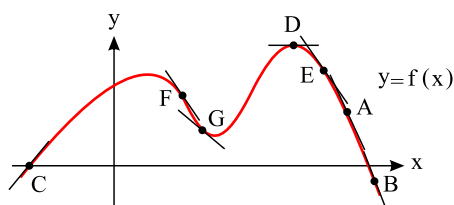
(ب) چون نقطه B زیر محور x قرار دارد پس مقدار تابع در B منفی است و $y_B < 0$ از طرفی شیب خط مماس در این نقطه نیز منفی است.

(پ) خط مماس در نقطه C با جهت مثبت محور x زاویه حاده دارد، پس مقدار مشتق در نقطه C مثبت است و از طرفی محل برخورد با محور x هاست. پس $f(C) = 0$.

(ت) خط مماس در نقطه D خطی افقی است یعنی مشتق در D صفر است.

(ث) خط مماس در نقاط E و F موازی هستند یعنی مشتق در E و F برابر هستند.

(ج) چون G بالای محور x است مقدار تابع در G مثبت است ولی چون شیب خط مماس در G منفی است یعنی مشتق در نقطه G منفی است



$$f(x) = \cos x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t, t \rightarrow 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1$$

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$f(x) = \sqrt[r]{rx}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[r]{rx} - \sqrt[r]{ra}}{x - a} \times \frac{\sqrt[r]{rx} + \sqrt[r]{ra} + \sqrt[r]{ra^r}}{\sqrt[r]{rx} + \sqrt[r]{ra} + \sqrt[r]{ra^r}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{rx - ra}{(x - a)(\sqrt[r]{rx} + \sqrt[r]{ra} + \sqrt[r]{ra^r})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r}{(\sqrt[r]{rx} + \sqrt[r]{ra} + \sqrt[r]{ra^r})} \\ &= \frac{r}{(\sqrt[r]{ra^r} + \sqrt[r]{ra^r} + \sqrt[r]{ra^r})} = \frac{r}{3\sqrt[r]{ra^r}} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt[r]{x-1}, f(1) = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[r]{x-1} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt[r]{x-1}^r + 1\sqrt[r]{x-1} + 1}{\sqrt[r]{x-1}^r + 1\sqrt[r]{x-1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt[r]{x-1}^r + 1\sqrt[r]{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[r]{x-1}^r + 1\sqrt[r]{x-1} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt[r]{6^r} + 1 + 1} = \frac{1}{6^{\frac{r}{r}} + 1 + 1} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{a}{a-1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x(a-1) - a(x-1)}{(x-1)(a-1)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax - x - ax + a}{(x-1)(a-1)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x-a)}{(x-1)(a-1)(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{(x-1)(a-1)} = \frac{-1}{(a-1)^2} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^r - 1, f(-1) = -1$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r - 1 - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^r - 1x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^r - 1x + 1) = 1 - 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{x+2}, f(1) = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

۱۷۵

۱۷۶

۱۷۷

۱۷۸

۱۷۹

۱۸۰



$$f'(v) = \lim_{x \rightarrow v} \frac{f(x) - f(v)}{x - v} = \lim_{x \rightarrow v} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - v} \times \frac{\sqrt{x+2} + 3}{\sqrt{x+2} + 3}$$

$$f'(v) = \lim_{x \rightarrow v} \frac{x+2-9}{(x-v)(\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x \rightarrow v} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{1}{6}$$

۱۸۱

الف

می‌دانیم نقاطی که در سر بالایی‌ها (تابع صعودی) هستند شیبشان مثبت است و در سرازیری‌ها (تابع نزولی) شیب نقاط منفی و در رأس سهمی شیب صفر است پس

داریم:

نادرست.

ب درست.

پ نادرست.

ت نادرست.

ث درست.

۱۸۲

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4,1 - 4,2}{1} = -0,1 \xrightarrow{\text{میانگین}} f'(2) = 0$$

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4,2 - 4,1}{1} = 0,1$$

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4,2 - 4,1}{1} = 0,1 \xrightarrow{\text{میانگین}} f'(3) = 0,2$$

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{4,5 - 4,2}{1} = 0,3$$

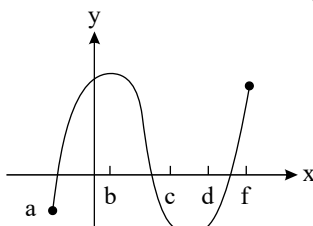
$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{4,5 - 4,2}{1} = 0,3 \xrightarrow{\text{میانگین}} f'(4) = 0,4$$

$$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{5 - 4,5}{1} = 0,5$$

$$\Rightarrow f'(5) = 0,5$$

۱۸۳

در بازه‌های (a, b) و (d, f) صعودی اکید و در بازه $[b, c]$ نزولی اکید است.



گزینه «۲» می‌دانیم:

۱۸۴

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{یا} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

پس موارد الف و پ درست هستند.

۱۸۵

$$f(x) = (2x^2 + 4x + 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(4x + 4)(2x^2 + 4x + 3)$$

$$f'(0) = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

۱۸۶

الف

$$y = (x^5 - 6x)^4 \Rightarrow y' = 4(x^5 - 6)(x^5 - 6x)^3$$

ب



$$y = \sqrt{\frac{x^r + 1}{\Delta x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{r x \times \Delta x - \Delta(x^r + 1)}{(\Delta x)^r}}{r \sqrt{\frac{x^r + 1}{\Delta x}}} = \frac{\Delta x^r - \Delta}{\Delta \circ x^r \sqrt{\frac{x^r + 1}{\Delta x}}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{r + x^r} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{r\sqrt{x}}(r + x^r) - rx\sqrt{x}}{(r + x^r)^r}$$

$$y = \sqrt{\frac{x - r}{x + r}} \Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{x - r}{x + r}\right)'}{r \sqrt{\frac{x - r}{x + r}}} = \frac{\frac{1 \times (x + r) - 1 \times (x - r)}{(x + r)^r}}{r \sqrt{\frac{x - r}{x + r}}} = \frac{\Delta}{r(x + r)^r \sqrt{\frac{x - r}{x + r}}}$$

$$f(x) = \frac{x^r + rx^r + rx + 1 + 1}{x + r} = \frac{(x + 1)^r + 1}{x + r}$$

$$f'(x) = \frac{r(x + 1)^{r-1}(x + r) - 1 \times ((x + 1)^r + 1)}{(x + r)^r} = \frac{r(x + 1)^r(x + r) - (x + 1)^r - 1}{(x + r)^r}$$

$$f'(-1) = \frac{0 - 0 - 1}{(-1 + r)^r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f(x) = \sqrt[r]{x^r - \Delta x} \times \sin rx$$

$$f'(x) = \frac{rx - \Delta}{r \sqrt[r]{(x^r - \Delta x)^{r-1}}} \times \sin rx + \sqrt[r]{x^r - \Delta x} \times r \cos rx$$

$$f(x) = \sin^r\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \Rightarrow f'(x) = r\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)' \cos\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \sin^r\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

$$f'(x) = r\left(\frac{1 \times (x - 1) - 1 \times (x + 1)}{(x - 1)^2}\right) \cos\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \sin^r\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

$$y = \sin^r\left(rx - \frac{\pi}{r}\right) + \cos(\sin x)$$

$$y' = r \cos\left(rx - \frac{\pi}{r}\right) \sin^r\left(rx - \frac{\pi}{r}\right) - (\sin x)' \sin(\sin x)$$

$$y' = r \cos\left(rx - \frac{\pi}{r}\right) \sin^r\left(rx - \frac{\pi}{r}\right) - \cos x \cdot \sin(\sin x)$$

$$y = \sin^r x + \sqrt[r]{\cos x} \Rightarrow y' = r \cos x \cdot \sin^{r-1} x + \frac{-\sin x}{r \sqrt[r]{\cos^r x}}$$

$$f(x) = rx^r \sqrt[r]{\Delta x^r - r}$$

$$f'(x) = rx \sqrt[r]{\Delta x^r - r} + \frac{1 \circ x \times rx^r}{r \sqrt[r]{(\Delta x^r - r)^{r-1}}}$$

$$f(x) = \sqrt[r]{\frac{x^r - 1}{1 - rx}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{x^r - 1}{1 - rx}\right)'}{r \sqrt[r]{\left(\frac{x^r - 1}{1 - rx}\right)^{r-1}}}$$

ب

ت

١٨٧

١٨٨

الف

ب

١٨٩

الف

ب

١٩٠

الف

ب



$$f'(x) = \frac{\frac{rx(1-rx)+r(x^r-1)}{(1-rx)^r}}{r\sqrt[r]{\left(\frac{x^r-1}{1-rx}\right)^r}}$$

$$y' = \frac{(1+\tan^r x)(1-\tan x) + (1+\tan^r x)(1+\tan x)}{(1-\tan x)^r}$$

$$y' = r \cos(rx-1) \sin^r(rx-1) + \frac{1}{r\sqrt{x}}(1+\tan^r \sqrt{x})$$

$$y' = -r(r x + 1) \sin(x^r + x) \cdot \cos^r(x^r + x) + r(1 + \tan^r r x)$$

$$y' = r \cos r x \cos r x - r \sin r x \sin r x$$

$$f'(r) = r\left(\frac{1}{r\sqrt{x}}(\Delta x^r - rx) + (1 \circ x - r)\sqrt{x}\right)$$

$$g'(m) = r \cos r x - r(1 r x^r) \cos(r x^r - r) \sin(r x^r - r)$$

$$y' = nu'(1 + \tan^r u) \tan^{n-1} u \text{ اگر } y = \tan^n u$$

$$y = \sqrt[r]{\sin^r r x} + r \tan^r x$$

$$y'_1 = \frac{r \times r \sin r x \cos r x}{r \sqrt[r]{\sin^r r x}} = \frac{r \cos r x}{\sqrt[r]{\sin r x}}, y_r = r \tan^r x \Rightarrow y'_r = r \times r \tan^r x (1 + \tan^r x) \Rightarrow y' = \frac{r \cos r x}{\sqrt[r]{\sin r x}} + r r \tan^r x (1 + \tan^r x)$$

$$y = r x^r \sin^r(\cos x) \Rightarrow y' = r x \sin^r(\cos x) - r \sin x \sin(\cos x)(r x^r)$$

$$y = r(r x - \Delta)^r + \sqrt[r]{x} \Rightarrow y' = r \times r \times r(r x - \Delta)^r + \frac{1}{r \sqrt[r]{x^r}}$$

$$g(r) = r \quad f(r) = 0 \quad f'(r) = -\frac{r}{r} \quad g'(r) = \frac{r}{r} = 1$$

$$h(x) = f(x)g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \Rightarrow h'(r) = f'(r)g(r) + g'(r)f(r) = \left(-\frac{r}{r}\right) \times r + 1 \times 0 = -\frac{r}{r}$$

$$\Delta x - y + r = 0 \Rightarrow y = \Delta x + r \Rightarrow \text{شیب} = \Delta$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \Delta$$

$$y = r x^r + r \Rightarrow y' = r x = \Delta \Rightarrow x = r \Rightarrow y = r \times r^r + r = 11$$

$$A(r, 11), m = \Delta \Rightarrow y - 11 = \Delta(x - r) \Rightarrow y = \Delta x - \Delta$$

$$f(x) = x\sqrt{x-r} \Rightarrow f(r) = r$$

$$f'(x) = \sqrt{x-r} + \frac{1}{r\sqrt{x-r}} \times x = \sqrt{x-r} + \frac{x}{r\sqrt{x-r}}$$

$$f'(r) = 1 + \frac{r}{r} = r \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = r$$

$$m = r, A(r, r) \rightarrow y - r = r(x - r) \Rightarrow y = r x - \Delta$$

۱۹۱

الف

ب

پ

ت

۱۹۲

الف

ب

۱۹۳

الف

ب

پ

۱۹۴

۱۹۵

۱۹۶

۱۹۷



$$y = x \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = -1$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط مماس} = -1$$

$$f(x) = -x^3 + 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = -1 + 2 + 5 = 6 \Rightarrow A(1, 6)$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 - 2 + 5 = 4 \Rightarrow B(-1, 4)$$

۱۹۸

$$y = x \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = 1 \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = -1$$

$$y = x^3 - 2x - 6 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 - 6 = -7 \Rightarrow A(1, -7)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 2 - 6 = -5 \Rightarrow B(-1, -5)$$

$$f'(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب خط مماس بر } f \text{ در نقطه } A \text{ برابر } \frac{1}{2} \text{ است و داریم.}$$

۱۹۹

$$m = \frac{1}{2}, (-4, 0) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

۲۰۰

$$f'(3) = -1 \Rightarrow \text{شیب خط مماس بر } f \text{ در نقطه } A \text{ برابر } -1 \text{ است و داریم:}$$

$$\text{شیب خط مماس} = -1, (0, 5) \Rightarrow y - 5 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 5$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -3 + 5 = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{باید ابتدا معادله خط مماس بر } f \text{ در نقطه } A \text{ را بیابیم.}$$

۲۰۱

$$f(4) = 5 \Rightarrow A = (4, 5), f'(4) = -3 \Rightarrow A \text{ در } f \text{ شیب خط مماس بر } -3$$

$$y - 5 = -3(x - 4) \Rightarrow y = -3x + 12 + 5 \Rightarrow y = -3x + 17$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -3 \times 2 + 17 = 11 \Rightarrow B(2, 11)$$

$$\text{باید ابتدا معادله خط مماس بر منحنی } f \text{ در نقطه } A \text{ را بیابیم.}$$

۲۰۲

$$f(3) = 7 \Rightarrow A(3, 7), f'(3) = 6 \Rightarrow A \text{ شیب خط مماس بر } f \text{ در نقطه } 6$$

$$y - 7 = 6(x - 3) \Rightarrow y = 6x - 18 + 7 \Rightarrow y = 6x - 11$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 6 \times 4 - 11 = 24 - 11 = 13 \Rightarrow B = (4, 13)$$

$$\text{در تعریف مشتق داریم:}$$

۲۰۳

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

از آنجایی که $\div$ است برای محاسبه حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x-2} + 1)}{(x - 3) \cdot (\sqrt{x-2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)}{(x - 3)(\sqrt{x-2} + 1)} = \frac{1}{2}$$

از طرفی:

$$x = 3 \rightarrow f(3) = 1$$

معادله خط مماس برابر است با:

$$y - y_0 = f'(3)(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

۲۰۴

$$f(x) = g(x^2 + x) \Rightarrow f'(x) = (2x + 1) \cdot g'(x^2 + x)$$

$$x = 2 \Rightarrow f'(2) = 5g'(6) \Rightarrow 5 = 5g'(6) \Rightarrow g'(6) = 1$$

۲۰۵

$$g(x) = f(x^3 + x - 1) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 1)f'(x^3 + x - 1)$$

$$x = 0 \Rightarrow g'(0) = 1 \times f'(-1) = f'(-1) = 12$$

۲۰۶

$$g'(1) = 4$$

$$f(x) = g(4x^2 - 3x) \Rightarrow f'(x) = (8x - 3)g'(4x^2 - 3x)$$

$$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 9g'(1) \Rightarrow f'(1) = 9 \times 4 = 36$$



۲۰۷

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{\frac{9}{16}} \times f'\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{9} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9} + 1}} = -\frac{16}{9} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}}$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{16}{9} \times \frac{1}{\frac{5}{3}} = -\frac{16}{9} \times \frac{3}{5} = -\frac{16}{15}$$

۲۰۸

$$g(x) = 2f(\cos^2 x) \Rightarrow g'(x) = 2 \times 2(-\sin x) \cos x f'(\cos^2 x)$$

$$g'(x) = -2 \sin 2x f'(\cos^2 x) \xrightarrow{x = \frac{3\pi}{4}} g'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{3\pi}{2} f'(\cos^2 \frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow 1 = -2(-1)f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow 1 = 2f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

۲۰۹

$$f(2) = 3 \quad g(f(2)) = g(3) = 0 \quad f'(2) = \frac{3}{2} = 1 \quad g'(3) = \frac{4}{3}$$

$$h(x) = g(f(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g'(f(x)) \Rightarrow h'(2) = f'(2)g'(f(2)) \Rightarrow h'(2) = 1 \times \frac{4}{3} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

۲۱۰

$$f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x + 2 \sin^2 x = \sin 2x + 2 \sin^2 x = 2 \sin^2 x$$

$$\text{الف} \quad f''(x) = 2 \cos 2x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{ب} \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos \pi = -2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \pi = 0 \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) - f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 - 0 = -2$$

۲۱۱

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times x}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \Rightarrow f''(0) = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

۲۱۲

$$f(x) = x^2 + mx^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x^2 + 2mx - 2$$

$$f''(x) = 4x + 2m \Rightarrow f''(2) = 12 + 2m = 8 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2$$

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 2 \Rightarrow f'(3) = 2 \times 9 - 12 - 2 = 18 - 12 - 2 = 4$$

۲۱۳

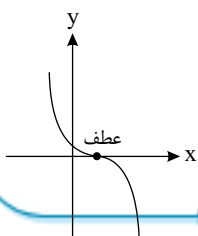
$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 2(x+2) \times 3}{(x+2)^4} = \frac{-6}{(x+2)^3}$$

۲۱۴

الف

نادرست - مانند شکل:





درست است.

۲۱۶

$$f(0) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

مشتق چپ در $x = 0$ برابر صفر است یعنی $f'_-(0)$ موجود است.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

مشتق راست در $x = 0$ برابر یک است یعنی $f'_+(0)$ موجود است.

چون $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ پس تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است یعنی $f'(0)$ وجود ندارد.

۲۱۷

$$f(1) = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 4}{x - 1} = \frac{2 - 4}{1^- - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

چون $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ تابع در $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است.

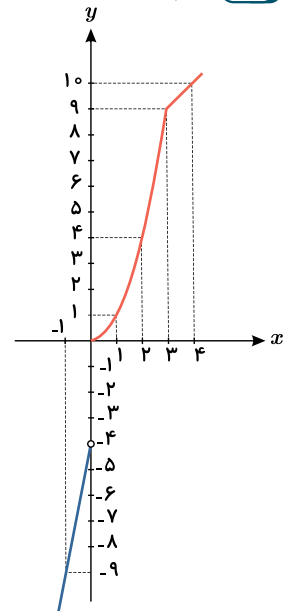
۲۱۸ الف

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$$

x	0	-1
y	-4	-9

x	0	3
y	0	9

x	3	4
y	9	10



ب

$$f(0) = 0, f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x - 4 - 0}{x} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

$$f(3) = 9, f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 6 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

تابع در $x = 3$ مشتق‌ناپذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

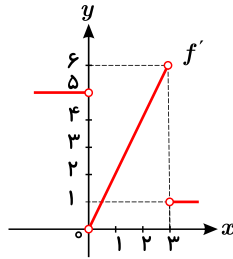
پ

تابع مشتق در نقاط $x = 0$ و $x = 3$ تعریف نشده است زیرا تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



ت) نمودار تابع مشتق یعنی f' به صورت مقابل است.



۲۱۹ چون تابع در $x = 0$ مشتق پذیر است، در این نقطه پیوسته هم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 0 \\ a|x| + b & x < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0, \text{ حد راست} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x) = 0$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a|x| + b) = 0 + b = b \Rightarrow b = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a|x| + b - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(-x)}{x} = -a$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

۲۲۰

$$f(x) = (x^2 - 4)[x + 1], f(2) = 0$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)[x + 1] - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)[x + 1]$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2)[x + 1] = 4[3^-] = 4 \times 2 = 8$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2)[x + 1] = 4[3^+] = 4 \times 3 = 12$$

$$f'_-(2) + f'_+(2) = 8 + 12 = 20$$

۲۲۱

$$f(x) = (x - 3)[2x], f(3) = 0$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)[2x] - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} [2x]$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [2x] = [6^-] = 5$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} [2x] = [6^+] = 6$$

تابع در $x = 3$ مشتق ناپذیر است.

۲۲۲

$$f(x) = x[x], f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[x] - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [x]$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = [0^-] = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = [0^+] = 0$$

تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

۲۲۳

الف

$$f(0) = 0, f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

ب

$$f(1) = 1, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{x - 1} = 0$$



$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1$$

تابع در $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است.

پ

$$f(4) = 2, f'_-(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

$$f'_+(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\frac{1}{4}x - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\frac{1}{4}(x - 4)}{x - 4} = \frac{1}{4}$$

تابع در $x = 4$ مشتق‌ناپذیر است.

۲۲۴ از آنجایی که در $x = 1$ مشتق‌پذیر است. پس در $x = 1$ پیوسته است؛ داریم:

$$f(1) = f_+(1) = f(1) \\ -1 = a + b \quad (1)$$

از طرفی برای مشتق‌پذیری داریم:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \quad (2) \\ f'(x) = \begin{cases} a & x > 1 \\ 3x^2 - 2 & x < 1 \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به (۲) داریم:

$$a = 1$$

با جایگذاری در رابطه (۱) داریم:

$$a + b = -1 \xrightarrow{a=1} b = -2$$

در نتیجه:

$$a - b = 1 - (-2) = 3$$

۲۲۵

الف

نادرست - f در یک پیوسته نیست پس مشتق‌پذیر نیست پس $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) = 2$$

نادرست - بی‌شمار تابع می‌توان مثال زد که عرض از مبدأهای متفاوت دارند و مشتق آنها با هم برابر است مثل $f(x) = x^2 + k$ که هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

۲۲۶

الف) اگر دما در ساعت h را با نماد $T(h)$ نشان دهیم، داریم:

$$\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$(ب) \quad \frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

پ) چون آهنگ تغییر متوسط دما از ساعت ۸ تا ۱۲ مثبت است پس در این بازه به‌طور متوسط دما در حال افزایش است و همچنین چون آهنگ تغییر متوسط دما از ۱۲ تا ۱۸ منفی است، پس در این بازه دما در حال کاهش است.

۲۲۷ سرعت متوسط توپ را در بازه‌های $[0.3, 0.4]$ و $[0.4, 0.5]$ یافته و میانگین آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{f(0.4) - f(0.3)}{0.4 - 0.3} = \frac{16.3 - 15.1}{0.1} = 12 \text{ m/s}$$

$$\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.5 - 0.4} = \frac{17.4 - 16.3}{0.1} = 11 \text{ m/s}$$

$$t = 0.4 \text{ سرعت توپ در } \frac{11 + 12}{2} = 11.5$$

۲۲۸ تابع مساحت دایره بر حسب شعاع آن به‌صورت زیر است:

$$S(R) = \pi R^2 \Rightarrow S'_R = 2\pi R \xrightarrow{R_0=2} S'_R = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

۲۲۹ تابع مساحت دایره بر حسب شعاع آن به‌صورت مقابل است:

$$S(r) = \pi r^2 \\ \frac{S(4) - S(2)}{4 - 2} = \frac{16\pi - 4\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} = 6\pi$$

۲۳۰ سرعت حرکت علی با دوچرخه z متر در ثانیه و سرعت حرکت رضا با پای پیاده s متر در ثانیه است. حال مسافت طی‌شده توسط علی و رضا را در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ یافته



و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$x_A = V_A \cdot \Delta t = j \cdot \Delta t$$

$$x_R = V_R \cdot \Delta t = s \cdot \Delta t$$

حال با محاسبهٔ اختلاف مسافت یا نسبت مسافت طی‌شده توسط این دو نفر داریم:

$$x_A - x_R = j \cdot \Delta t - s \cdot \Delta t = (j - s) \Delta t$$

$$\frac{x_A}{x_R} = \frac{j \cdot \Delta t}{s \cdot \Delta t} = \frac{j}{s} \Rightarrow x_A = \frac{j}{s} \cdot x_R$$

بنابراین مورد «ث» صحیح است.

آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم یک کره نسبت به تغییر مساحت سطح کره یعنی باید مشتق حجم کره را نسبت به سطح کره بیابیم.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, S = 4 \pi R^2$$

$$V'_S = ? \quad V'_R = V'_S \cdot S'_R \Rightarrow V'_S = \frac{V'_R}{S'_R} = \frac{4 \pi R^2}{4 \pi R} = \frac{1}{R}$$

(الف) ۲۳۱

$$V(t) = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2, t = 0 \Rightarrow V(0) = 40, t = 1 \Rightarrow V(1) = 40 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^2 = 39.204$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = \frac{39.204 - 40}{1} = -0.796$$

چون با گذشت زمان حجم باقی‌مانده در ظرف کاهش می‌یابد، آهنگ متوسط تغییر حجم منفی به دست آمده است.

(ب)

$$t = 0 \Rightarrow V(0) = 40, t = 100 \Rightarrow V(100) = 40 \left(1 - \frac{100}{100}\right)^2 = 0$$

$$\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = -\frac{2}{5}$$

$$V'(t) = 40 \times 2 \times \left(-\frac{1}{100}\right) \left(1 - \frac{t}{100}\right) = -\frac{80}{100} \left(1 - \frac{t}{100}\right) = -\frac{4}{5} \left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

$$V'(t) = -\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{4}{5} \left(1 - \frac{t}{100}\right) = -\frac{4}{5} \Rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{t}{100} \Rightarrow t = 50$$

(الف) ۲۳۳

$$m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$$

$$\left. \begin{aligned} t = 3 \Rightarrow m(3) &= \sqrt{3} + 2 \times 3^2 = 55.7 \\ t = 4 \Rightarrow m(4) &= \sqrt{4} + 2 \times 4^2 = 130 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta m = m(4) - m(3) = 130 - 55.7 = 74.3$$

جرم این توده ۷۴٫۳ گرم افزایش می‌یابد.

(ب) با محاسبهٔ مشتق تابع $m(t)$ بر حسب t داریم:

$$m(t) = \sqrt{t} + 2t^2 \Rightarrow m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \Rightarrow m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 12$$

$$\Rightarrow m'(3) = \frac{1}{2 \times 1.7} + 12 = 12.29$$

(الف) ۲۳۴ شیب خط d نشان‌دهندهٔ شیب وتر گذرنده از دو نقطه $t = 4$ و $t = 6$ است، یعنی شیب خط d برابر با آهنگ تغییر متوسط در بازه $[4, 6]$ است.

شیب خط l نشان‌دهندهٔ شیب خط مماس در نقطه $t = 6$ است، یعنی شیب خط l برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $t = 6$ است.

(ب) برای مقایسهٔ گسترش آلودگی در زمان‌های $t = 1, t = 2$ و $t = 3$ باید خط مماس بر تابع در این زمان‌ها را رسم کنیم، که داریم:

شیب خط مماس در $t = 1 >$ شیب خط مماس در $t = 2 >$ شیب خط مماس در $t = 3$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر یعنی سرعت گسترش آلودگی در $t = 3$ بیشتر است.

(پ) با رسم خط مماس در نقاط $t = 4, t = 5$ و $t = 6$ داریم:

شیب خط مماس در $t = 6 >$ شیب خط مماس در $t = 5 >$ شیب خط مماس در $t = 4$

بنابراین سرعت گسترش آلودگی در $t = 4$ بیشتر است.

۲۳۵

$$f(x) = x^3 - 2x + 1, f(x_1) = f(0) = 1, f(x_2) = f(1) = 0$$



$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 1}{1} = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = -1 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۳۶ شعاع کره با آهنگ آنی ۴ سانتی‌متر در ثانیه زیاد می‌شود یعنی مشتق شعاع نسبت به زمان برابر ۴ است.

$$r'_t = 4, V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V'_r = 4\pi r^2$$

$$V'_t = V'_r \cdot r'_t = 4\pi r^2 \times 4 = 16\pi r^2$$

$$r = 2 \Rightarrow V'_t = 16\pi \times 2^2 = 64\pi$$

۲۳۷ شعاع با سرعت $\frac{2}{s} \text{ cm}$ افزایش می‌یابد یعنی مشتق شعاع نسبت به زمان برابر ۲ است.

$$R'_t = 2, S = \pi R^2 \Rightarrow S'_R = 2\pi R$$

$$S'_t = S'_R \cdot R'_t = 2\pi R \times 2 = 4\pi R$$

$$R = 2 \Rightarrow S'_t = 4\pi \times 2 = 8\pi$$

۲۳۸ شعاع دایره با آهنگ لحظه‌ای ۳ سانتی‌متر بر ثانیه بزرگ می‌شود یعنی مشتق شعاع نسبت به زمان (r'_t) برابر ۳ است.

$$r'_t = 3$$

$$S = \pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 2$$

$$S'_r = 2\pi r \Rightarrow S'_t = S'_r \cdot r'_t = 2\pi r \times 3 = 6\pi r$$

$$r = 2 \Rightarrow S'_t = 6\pi \times 2 = 12\pi$$

۲۳۹

الف

$$m(4) - m(3) = (\sqrt{4} + 4^2) - (\sqrt{3} + 3^2) = 9 - \sqrt{3}$$

ب آهنگ رشد همان آهنگ شبیه لحظه‌ای است.

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t$$

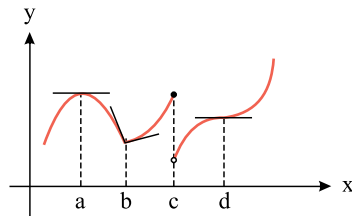
$$m'(9) = \frac{1}{2 \times 3} + 18 = \frac{109}{6}$$

۲۴۰ با رسم مماس بر منحنی تابع و مقایسه شیب آنها متوجه می‌شویم که شیب خطوط مماس بر منحنی در حال کاهش است؛ یعنی سرعت افزایش مقاومت بتن با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

۲۴۱ گزینه «۳»

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h) + \frac{1}{2+h} - (2 + \frac{1}{2})}{h} = \frac{2h(2+h) + \cancel{1} - \cancel{1} - h}{2(2+h)h} = \frac{h(4+2h-1)}{h(4+2h)} = \frac{2h+3}{4+2h} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{2h+3}{4+2h} = \frac{8}{9} \Rightarrow 18h + 27 = 32 + 16h \Rightarrow 2h = 5 \Rightarrow h = \frac{5}{2} = 2,5$$

۲۴۲



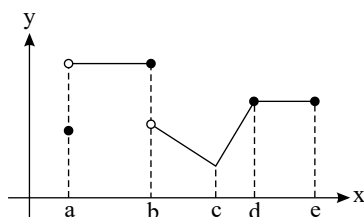
$x = a$ ماکزیمم نسبی و مشتق صفر است.

$x = b$ مینیمم نسبی که پیوسته است ولی مشتق ناپذیر است.

$x = c$ ماکزیمم نسبی که تابع در آن ناپیوسته است.

$x = d$ اکسترمم نسبی نیست ولی مشتق در این نقطه صفر است.

۲۴۳



کل بازه (a, b) ماکزیمم مطلق، ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است.

$x = b$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

$x = c$ نقطه مینیمم نسبی و مطلق است.

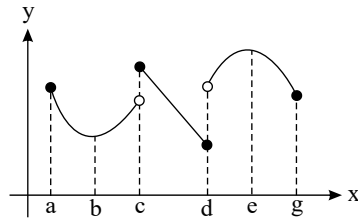
$x = d$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

کل بازه (d, e) هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

۲۴۴

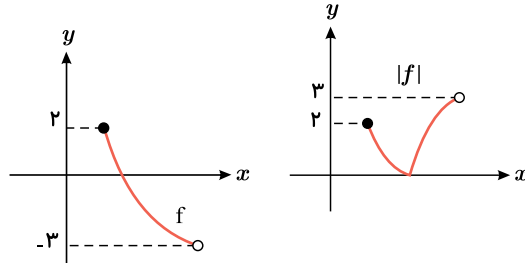


۲۴۵



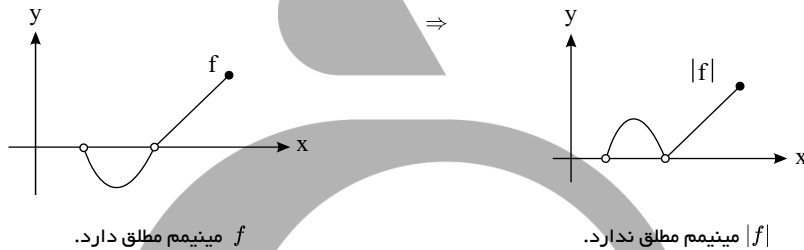
- $x = b$ نقطهٔ مینیمم نسبی است.
- $x = c$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.
- $x = d$ نقطهٔ مینیمم نسبی است.
- $x = e$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

۲۴۶



در نمودارهای بالا می‌بینیم که تابع f ماکزیمم مطلق دارد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق ندارد.

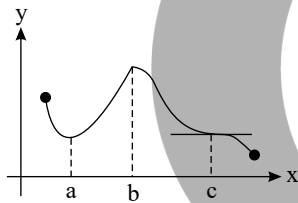
۲۴۷



f مینیمم مطلق دارد.

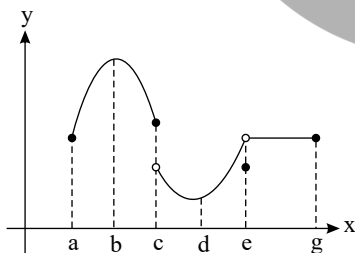
$|f|$ مینیمم مطلق ندارد.

۲۴۸



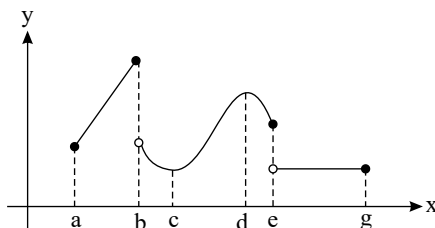
- $x = a$ نقطهٔ مینیمم نسبی و مشتق‌پذیر
- $x = b$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی، پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر
- در $x = c$ مشتق صفر است ولی اکسترم نسبی نیست.

۲۴۹



- در $x = b$ ماکزیمم نسبی و مطلق دارد.
- در $x = c$ اکسترم نسبی ندارد.
- در $x = d$ مینیمم نسبی و مطلق دارد.
- در $x = e$ مینیمم نسبی دارد.
- در کل بازهٔ (e, g) هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی دارد.

۲۵۰



- $x = a$ بحرانی است زیرا ابتدای بازه است.
- $x = b$ بحرانی است زیرا ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.
- $x = c$ بحرانی است زیرا $f'(c) = 0$
- $x = d$ بحرانی است زیرا $f'(d) = 0$
- $x = e$ بحرانی است زیرا ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.
- کل بازهٔ (e, g) بحرانی است زیرا مشتق صفر است.
- $x = g$ بحرانی است زیرا انتهای بازه است.

۲۵۱

تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}}$$



$$f'_-(-1) = 2, \quad f'_+(-1) = 2(-1) - 1 = -3 \Rightarrow f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$$

$x = -1$ مشتق‌ناپذیر و بحرانی است. پس تابع دو نقطه بحرانی $x = \frac{1}{2}$ و $x = -1$ دارد.

۲۵۳

$$f(1) = 1 - 3 = -2, \quad \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x) = 1 - 3 = -2$$

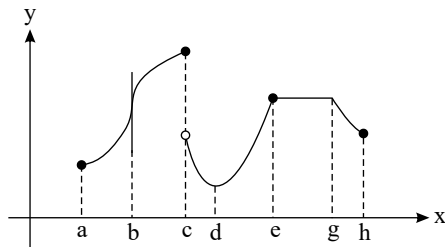
$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 5x) = 1 + 5 = 6$$

تابع در $x = 1$ ناپیوسته، مشتق‌ناپذیر و بحرانی است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x > 1 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{قابل قبول} \\ 2x + 5 & x < 1 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \quad \text{قابل قبول} \end{cases}$$

تابع ۳ نقطه بحرانی $x = -\frac{5}{2}, x = \frac{3}{2}, x = 1$ دارد.

۲۵۴



$x = b$ بحرانی است زیرا مشتق‌ناپذیر است ($f'(b) = +\infty$) ولی اکسترمم نسبی و مطلق نیست.

$x = c$ بحرانی است زیرا ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. ماکزیمم نسبی و مطلق است.

$x = d$ بحرانی است زیرا $f'(d) = 0$. مینیمم نسبی و مطلق است.

$x = e$ بحرانی است زیرا مشتق‌ناپذیر است ($f'_-(e) \neq f'_+(e)$). ماکزیمم نسبی است.

کل بازه (e, g) بحرانی است زیرا مشتق صفر است. کل بازه هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی است.

$x = g$ بحرانی است زیرا مشتق‌ناپذیر است ($f'_-(g) \neq f'_+(g)$). ماکزیمم نسبی است.

$x = a, x = h$ نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه هستند و بحرانی محسوب می‌شوند.

۲۵۵

$x = b$ بحرانی زیرا $f'(b) = 0$

$x = c$ بحرانی زیرا ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

کل بازه (c, d) بحرانی زیرا در کل این بازه مشتق صفر است.

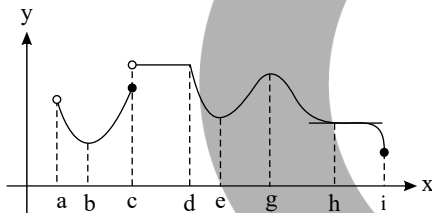
$x = d$ بحرانی زیرا مشتق‌ناپذیر است. $f'_-(d) \neq f'_+(d)$

$x = e$ بحرانی زیرا $f'(e) = 0$

$x = g$ بحرانی زیرا $f'(g) = 0$

$x = h$ بحرانی زیرا $f'(h) = 0$

$x = i$ بحرانی زیرا انتهای بازه است.



۲۵۶

الف $x = 2$ مینیمم مطلق و نسبی و مقدار آن صفر می‌باشد و نقطه بحرانی است.

ب در نقطه $(\frac{3}{2}, 1)$ ماکزیمم نسبی و در $(2, 0)$ مینیمم نسبی و مطلق است و هر دو نقطه بحرانی‌اند و مقدار مینیمم مطلق صفر که در $x = 2$ و $x = 1$ می‌باشد و مقدار ماکزیمم مطلق ۳ که در $x = 3$ است.

پ اکسترمم نسبی و مطلق و بحرانی ندارد چون تابع از طرف راست ادامه دارد، مینیمم مطلق نداریم.

ت نقاط به طول‌های c_1 و c_2 بحرانی‌اند که در $(c_1, f(c_1))$ و مینیمم نسبی و مطلق و در $(c_2, f(c_2))$ ماکزیمم نسبی و مطلق داریم.

ث نقاط به طول‌های -2 و -1 و 0 و 1 و 2 بحرانی‌اند. نقاط $(-2, 0)$ و $(0, 0)$ و $(2, 0)$ مینیمم مطلق و نسبی و نقاط $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ ماکزیمم نسبی است. صفر مقدار مینیمم مطلق و دارای مقدار ماکزیمم مطلق نیست چون شکل تابع از سمت راست ادامه دارد.

ج نقاط به طول‌های $x = d$ و $x = c$ بحرانی و اکسترمم نسبی‌اند که در d ماکزیمم نسبی و در c مینیمم نسبی داریم چون شکل نمودار در سمت راست ادامه دارد، ماکزیمم مطلق نداریم و چون شکل نمودار در سمت چپ هم ادامه دارد، مینیمم مطلق نداریم.

چ نقاط به طول‌های a و c و e بحرانی‌اند که $(a, f(a))$ مینیمم نسبی و مطلق و $(c, f(c))$ ماکزیمم نسبی است و در نقطه $(g, f(g))$ ماکزیمم مطلق داریم و کل نقاط بازه $(-\infty, a)$ بحرانی و اکسترمم نسبی و مطلق است.

۲۵۷

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow -x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$



جواب ندارد، پس نقطه بحرانی ندارد.

توجه: ریشه‌های مخرج چون در دامنه تابع قرار ندارند، نقطه بحرانی محسوب نمی‌شوند.

۲۵۸) تابع f پیوسته است.

$$f(x) = (x-1)|x-2| = \begin{cases} (x-1)(x-2) & 2 \leq x \leq 4 \\ -(x-1)(x-2) & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & 2 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 3x - 2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & 2 < x < 4 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ غلط} \\ -2x + 3 & 1 < x < 2 \Rightarrow -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ قابل قبول} \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه بحرانی}$$

$$f'_-(2) = -2 \times 2 + 3 = -1, \quad f'_+(2) = 2 \times 2 - 3 = 1 \Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

$x = 2$ مشتق ناپذیر و بحرانی است.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \left|\frac{3}{2} - 2\right| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 3 \times 2 = 6$$

ماکزیمم مطلق برابر ۶ و مینیمم مطلق برابر صفر است.

۲۵۹

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2} \quad -2 \leq x \leq 3$$

$$f'(x) = \frac{0 - 2x \times 1}{(2+x^2)^2} = \frac{-2x}{(2+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{2+4} = \frac{1}{6}$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{1}{2+9} = \frac{1}{11}$$

$$\max \text{ مطلق} = \frac{1}{2}, \quad \min \text{ مطلق} = \frac{1}{11}$$

۲۶۰

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 1, \quad -2 \leq x \leq 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 4$$

$x = 4$ در محدوده $[-2, 3]$ قرار ندارد.

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 - 24 + 1 = -31$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 27 - 54 + 1 = -26$$

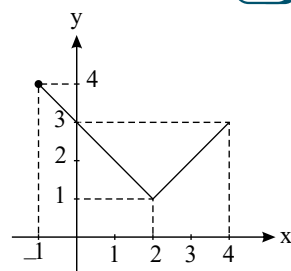


مطلق $\min = -31$, مطلق $\max = 1$

$$f(x) = |x - 2| + 1, \quad -1 \leq x \leq 4$$

x	2	-1	4
y	1	4	3

مطلق $\min = 1$, مطلق $\max = 4$



۲۶۱

$$x + y = 200 \Rightarrow y = 200 - x$$

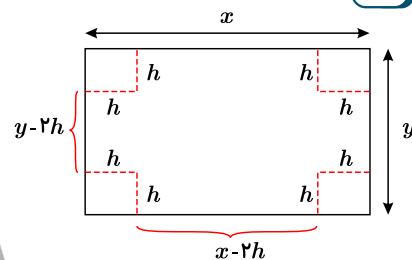
$$f = x^2 + y^2 = x^2 + (200 - x)^2 = x^2 + 40000 - 400x + x^2$$

$$f = 2x^2 - 400x + 40000 \Rightarrow f' = 4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow y = 100$$

$$xy = 100, \quad h = 2$$

$$V = (x - 2h)(y - 2h) \times h$$

$$V = (x - 4)(y - 4) \times 2 = 2(x - 4)(y - 4)$$



۲۶۲

$$xy = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x} \Rightarrow V = 2(x - 4)\left(\frac{100}{x} - 4\right) = (2x - 8)\left(\frac{100}{x} - 4\right)$$

$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4, \quad y - 4 \geq 0 \Rightarrow y \geq 4 \xrightarrow{y = \frac{100}{x}} \frac{100}{x} \geq 4 \Rightarrow \frac{100 - 4x}{x} \geq 0$$

x	0	25
$\frac{100 - 4x}{x}$	-	+

$$\Rightarrow 0 < x \leq 25 \xrightarrow{(1)} 4 \leq x \leq 25 \Rightarrow \text{دامنه} = [4, 25]$$

$$V(x) = (2x - 8)\left(\frac{100}{x} - 4\right) \quad 4 \leq x \leq 25$$

$$V'(x) = 2\left(\frac{100}{x} - 4\right) + \left(-\frac{100}{x^2}\right)(2x - 8) = 2\left(\frac{100 - 4x^2}{x}\right) - \frac{100(2x - 8)}{x^2}$$

$$V'(x) = \frac{2x(100 - 4x^2) - 100(2x - 8)}{x^2} = \frac{-8x^3 + 200x + 800}{x^2}$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow -8x^3 + 200x + 800 = 0 \Rightarrow x^3 = 25x + 100 \xrightarrow{4 \leq x \leq 25} x = 10$$

$$x = 4 \Rightarrow V(4) = 0, \quad x = 10 \Rightarrow V(10) = (20 - 8)(10 - 4) = 12 \times 6 = 72$$

$$V(25) = 0$$

$$x = 10 \Rightarrow y = \frac{100}{10} = 10$$

به ازای $x = 10$, بیشترین حجم ایجاد می شود، پس داریم:

۲۶۴

$$h + 2r = 3 \Rightarrow h = 3 - 2r$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (3 - 2r) = \pi(3r^2 - 2r^3)$$

$$h \geq 0 \Rightarrow 3 - 2r \geq 0 \Rightarrow r \leq \frac{3}{2}, \quad r \geq 0 \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{3}{2}$$

$$V' = \pi(6r - 6r^2) = 0 \Rightarrow 6r(1 - r) = 0 \Rightarrow r = 0, \quad r = 1$$

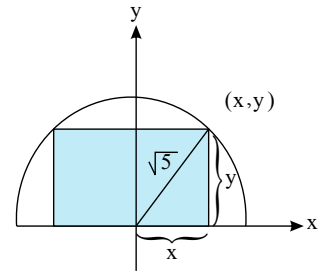
$$r = 0 \Rightarrow V = 0, \quad r = \frac{3}{2} \Rightarrow V = \pi\left(\frac{27}{4} - \frac{27}{4}\right) = 0$$



$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 5 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow 5 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{5}$$



معین $P = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{5}$

$$P' = 4 + 2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = \frac{4\sqrt{5 - x^2} - 2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$$

$$4\sqrt{5 - x^2} = 2x \Rightarrow 2\sqrt{5 - x^2} = x \Rightarrow 4(5 - x^2) = x^2$$

$$20 - 4x^2 = x^2 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow P = 0 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} , \quad x = \sqrt{5} \Rightarrow P = 4\sqrt{5}$$

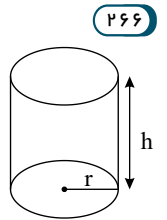
$$x = 2 \Rightarrow P = 8 + 2\sqrt{5 - 4} = 8 + 2 = 10 \Rightarrow P_{\max} = 10$$

$$\pi r^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{2}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{4\pi}{r}$$

$$S' = 4\pi r - \frac{4\pi}{r^3} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{4\pi}{r^3} \Rightarrow r^4 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow S_{\min} = 2\pi + 4\pi = 6\pi$$



$$a + h = 20 \Rightarrow a = 20 - h$$

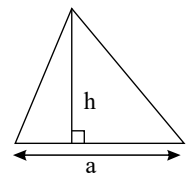
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} h(20 - h) = 10h - \frac{1}{2} h^2$$

$$a \geq 0 \Rightarrow 20 - h \geq 0 \Rightarrow h \leq 20 , \quad h \geq 0 \Rightarrow 0 \leq h \leq 20$$

$$S' = 10 - h = 0 \Rightarrow h = 10$$

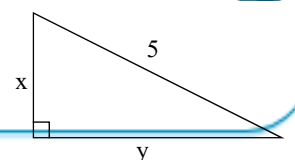
$$h = 0 \Rightarrow S = 0 , \quad h = 20 \Rightarrow S = 0$$

$$h = 10 \Rightarrow S = 100 - 50 = 50 \Rightarrow S_{\max} = 50$$



$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$





$$S' = \frac{1}{2} \times \frac{\Delta \circ x - \sqrt{x^2}}{2\sqrt{2\Delta x^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow \Delta \circ x - \sqrt{x^2} = 0 \Rightarrow x(\Delta \circ - \sqrt{x^2}) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \Delta \circ - \sqrt{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{\Delta \circ}{2} = \frac{2\Delta}{2} \Rightarrow x = \frac{\Delta\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow S = 0, x = \Delta \Rightarrow S = 0$$

$$x = \frac{\Delta\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{\Delta\sqrt{2}}{2} \sqrt{2\Delta - \frac{\Delta^2}{2}} = \frac{\Delta\sqrt{2}}{4} \times \frac{\Delta}{\sqrt{2}} = \frac{2\Delta}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{2\Delta}{4}$$

$$y = \frac{r}{x} \Rightarrow A(x, y), O(0, 0) \Rightarrow OA = d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} \Rightarrow d' = \frac{2x + \frac{0 - 2x \times 16}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{2x - \frac{32}{x^2}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x - \frac{16}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$d_{\min} = \sqrt{4 + \frac{16}{4}} = \sqrt{8}$$

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 150\pi$$

$$2\pi(r^2 + rh) = 150\pi \Rightarrow r^2 + rh = 75 \Rightarrow h = \frac{75 - r^2}{r}$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{75 - r^2}{r} \right) = \pi r(75 - r^2)$$

$$V(r) = \pi(75r - r^3) \Rightarrow V'(r) = \pi(75 - 3r^2) = 0$$

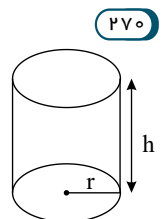
$$75 - 3r^2 = 0 \Rightarrow 3r^2 = 75 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

$$h \geq 0 \Rightarrow \frac{75 - r^2}{r} \geq 0 \Rightarrow 75 - r^2 \geq 0 \Rightarrow r^2 \leq 75 \Rightarrow -\Delta\sqrt{3} \leq r \leq \Delta\sqrt{3}$$

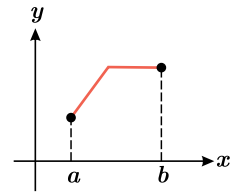
$$r \geq 0 \Rightarrow 0 \leq r \leq \Delta\sqrt{3}$$

$$r = 0 \Rightarrow V(0) = 0, r = \Delta\sqrt{3} \Rightarrow V(\Delta\sqrt{3}) = 0$$

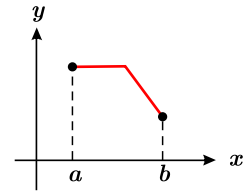
$$r = 5 \Rightarrow V(5) = \pi(75 \times 5 - 5^3) = 250\pi$$



به ازای $r = 5$ حجم ماکزیمم می شود.

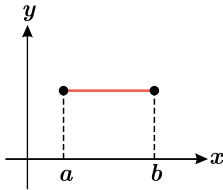


(الف)



(ب)

(پ) تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت می‌باشد.



(الف) ۲۷۲

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

حال مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$		+	-	+
		↗	↘	↗

تابع f در بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $[-1, 2]$ اکیداً نزولی است.

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad (\text{ب})$$

$$f'(x) = \frac{1(x-2) - 1 \times x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{مشتق همواره منفی است}$$

توجه کنید که خط $x = 2$ مجانب قائم تابع است و چون مشتق همواره منفی است، پس تابع در بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است. تابع در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R} - \{2\}$ غیریکنوا است.

۲۷۳

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ مجانب قائم}$$

$$f'(x) = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

مشتق همواره منفی است. پس تابع در بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است. تابع در $R - \{2\}$ غیر یکنوا است.

۲۷۴ تابع f در کل R پیوسته است:

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 2x \times 1}{(2+x^2)^2} = \frac{-2x}{(2+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

علامت مشتق فقط به صورت بستگی دارد زیرا مخرج عبارتی همواره مثبت است.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-2x}{(2+x^2)^2}$		+	-
		↗	↘

تابع در بازه $[-\infty, 0]$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۲۷۵ تابع f در کل R مشتق‌پذیر است:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$



$$f'(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{نقطه بحرانی} \Rightarrow y = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = f(-2) = 12 + 4 + 5 = 21$$

$$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 3 - 2 + 5 = 6$$

$$\frac{14}{3} = \text{مقدار مینیمم مطلق}, 21 = \text{مقدار ماکزیمم مطلق}$$

x	-2	$\frac{1}{3}$	1
$f'(x) = 6x - 2$	-	0	+
y	21 ↘	$\frac{14}{3}$ ↗	6

نقطه $\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$ نقطه بحرانی تابع است.

نقطه $\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$ مینیمم نسبی و مطلق تابع است و نقطه $(-2, 21)$ ماکزیمم مطلق تابع است.

ب

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \text{ نقطه بحرانی}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = -1 + 3 = 2, x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1 - 3 = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 8 - 6 = 2 \quad \text{مقدار ماکزیمم مطلق} = -2 \text{ و مینیمم مطلق} = 2$$

x	-1	1	2
$f'(x) = 3x^2 - 3$	0	0	+
y	2	-2	2

نقاط $(-1, 2)$ و $(2, 2)$ ماکزیمم مطلق و نقطه $(1, -2)$ مینیمم نسبی و مطلق است. در ضمن نقطه $(1, -2)$ نقطه بحرانی تابع است.

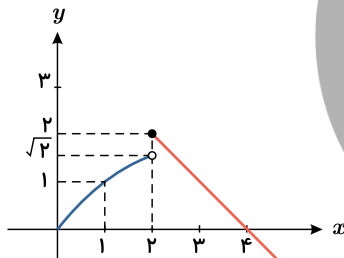
پ

با رسم تابع داده شده داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$$

نقطه $(2, 2)$ نقطه بحرانی تابع است زیرا تابع در این نقطه ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

در ضمن نقطه $(2, 2)$ ، نقطه ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق تابع است. تابع مینیمم مطلق ندارد.



روش دوم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$$

$f'(x)$ همواره مخالف صفر است، پس نقاط بحرانی نقاطی خواهند بود که مشتق تابع در آن تعریف نشده است.

$$f'_+(2) = -1, f'_-(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

x	0	2	$+\infty$
f'		تن	-
f	0	2	$-\infty$

پس نقطه $x = 2$ تنها نقطه بحرانی تابع است.

$$f(2) = 2, f(0) = 0$$

با توجه به جدول بالا نقطه $(2, 2)$ نقطه ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق تابع f است. پس این نقطه هم ماکزیمم نسبی و هم ماکزیمم مطلق است.

تابع f در کل R پیوسته است.

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1) = \frac{3x + 2x - 2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \\ x = 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = (x-1)^2(4x+11)$$

مشتق در $x = 1$ تغییر علامت نمی‌دهد زیرا توان $x - 1$ برابر عدد زوج ۲ است.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2(4x+11) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -\frac{11}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{11}{4}$	1	$+\infty$
$f'(x) = (x-1)^2(4x+11)$	$-$	0	$+$	$+$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$$x = -\frac{11}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{11}{4}\right) = \left(-\frac{11}{4} - 1\right)^2 \left(-\frac{11}{4} + 4\right) = \left(-\frac{15}{4}\right)^2 \times \frac{5}{4}$$

نقطه $\left(-\frac{11}{4}, \left(-\frac{15}{4}\right)^2 \times \frac{5}{4}\right)$ مینیمم نسبی تابع است.

۲۷۹

$f(x) = ax^3 + x^2 - b$ اکسترمم نسبی $A(-2, 3)$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2x \Rightarrow f'(-2) = 0 \Rightarrow 12a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$f(-2) = 3 \Rightarrow -8a + 4 - b = 3 \Rightarrow -\frac{8}{3} + 4 - b = 3 \Rightarrow b = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$$

۲۸۰

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	-2	0	2
$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$	$+$	0	$-$
	$\nearrow$	2	$\searrow$

علامت مشتق به صورت آن بستگی دارد.

نقطه $(0, 2)$ ماکزیمم نسبی تابع است.

۲۸۱

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}, x+2=0 \Rightarrow x=-2 \text{ مجانب قائم}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0-2(x+2) \times 3}{(x+2)^4} = \frac{-6}{(x+2)^3}$$

علامت مشتق دوم به عبارت $x+2$ بستگی دارد، پس داریم:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

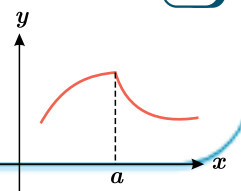
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3}$	$+$	تن	$-$
	$\cup$		$\cap$

در بازه $(-\infty, -2)$ تقعر رو به بالا و در بازه $(-2, +\infty)$ تقعر رو به پایین است.

۲۸۲

تقعر رو به پایین $x < a \Rightarrow$

تقعر رو به بالا $x > a \Rightarrow$



مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



۲۸۳

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + x - 2$$

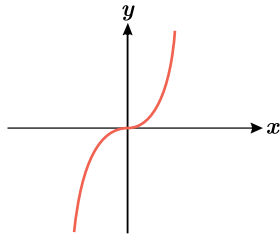
$$f'(x) = 5x^2 - 10x + 1 \Rightarrow f''(x) = 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x) = 10x - 10$		$-$	$+$
		$($	$)$

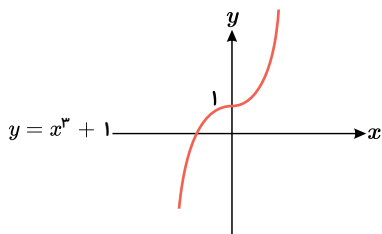
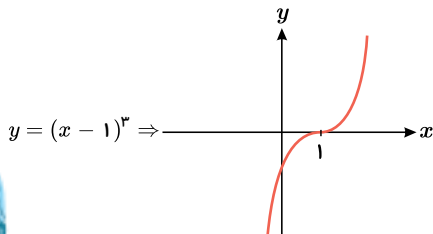
$x = 1$ نقطه عطف تابع بوده و در بازه $(-\infty, 1)$ تقعر نمودار رو به پایین و در بازه $(1, +\infty)$ تقعر نمودار رو به بالا است.

۲۸۴

الف) در تابع $y = x^3$ نقطه $(0, 0)$ نقطه عطف تابع است.

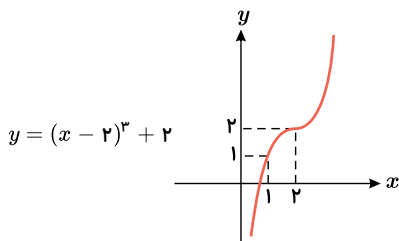


ب) با انتقال تابع $y = x^3$ به اندازه یک واحد به راست، تابع درجه سوم می‌آید که نقطه $(1, 0)$ عطف آن باشد.



پ) اگر تابع $y = x^3$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم، تابع درجه سوم می‌آید که نقطه $(0, 1)$ عطف آن است.

ت) اگر تابع $y = x^3$ را دو واحد به راست و ۲ واحد هم به بالا انتقال دهیم، تابع درجه سوم می‌آید که نقطه $(2, 2)$ عطف آن است.



گزینه «۲» ۲۸۵

۲۸۶

$$3y = 4x \Rightarrow y = \frac{4}{3}x \Rightarrow \text{شیب} = \frac{4}{3}$$

$$y = -x^3 + ax^2 \Rightarrow y' = -3x^2 + 2ax \Rightarrow y'' = -6x + 2a = 0$$

$$\Rightarrow 6x = 2a \Rightarrow x = \frac{a}{3} \quad \text{نقطه عطف}$$

$$\text{شیب مماس در عطف} = y'\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3} \Rightarrow -3\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2a \times \frac{a}{3} = \frac{4}{3}$$



$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1, b = -3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 6x$		+	-	+
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x = 2$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است، داریم:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 12 = -4 \Rightarrow \min(2, -4) \text{ نسبی}$$

۲۸۹ در بازه‌های $(-\infty, e)$ و (g, t) و (t, b) و $(b, +\infty)$ ، $f' > 0$ است در نتیجه f صعودی است. در بازه‌های (e, g) و (t, b) و $(b, +\infty)$ ، $f' < 0$ است در نتیجه f نزولی است. نقاط اکسترم نسبی تابع f' ، نقاط عطف تابع f هستند، یعنی c و h و t و a .

۲۹۰

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9, D_f = \mathbb{R}$$

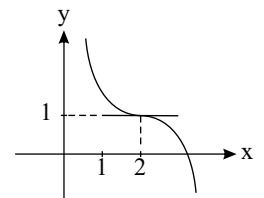
$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x^2 - 4x + 4) = -3(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f'(x) = -3(x - 2)^2 \leq 0 \text{ مشتق نامثبت و تابع اکیداً نزولی است.}$$

$$f''(x) = -6(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = -8 + 24 - 24 + 9 = 1 \Rightarrow (2, 1) \text{ نقطهٔ عطف}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^3) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x) = -3(x - 2)^2$	-	0	-
$f''(x) = -6(x - 2)$	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	1	$-\infty$



$$f'(2) = 0 = \text{شیب مماس در عطف}$$

۲۹۱

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$(0, -2) \in f \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$$

$$\text{نقطهٔ } (2, -4) \text{ اکسترم نسبی} \Rightarrow f(2) = -4 \Rightarrow 8 + 4a + 2b - 2 = -4$$

$$\Rightarrow 4a + 2b = -10 \Rightarrow 2a + b = -5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4a + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12$$

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \\ 4a + b = -12 \end{cases}$$

$$2a = -7 \Rightarrow a = -\frac{7}{2} \Rightarrow 2a + b = -5 \Rightarrow -7 + b = -5 \Rightarrow b = 2$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, D_f = \mathbb{R}, x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

۲۹۲

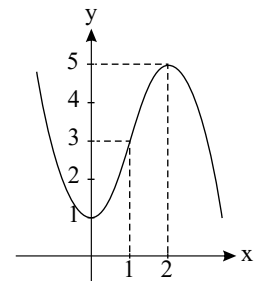


$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1, x = 2 \Rightarrow f(2) = -8 + 12 + 1 = 5$$

$$f''(x) = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = -1 + 3 + 1 = 3 \Rightarrow (1, 3) \text{ نقطه عطف}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^3) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x) = -3x^2 + 6x$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
$f''(x) = -6x + 6$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$



۲۹۳

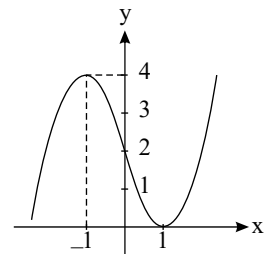
$$f(x) = x^3 - 3x + 2, D_f = \mathbb{R}, x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2) \text{ محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2) \text{ نقطه عطف}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$f''(x) = 6x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$+\infty$



۲۹۴

الف

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 1, D_f = \mathbb{R}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x^3 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ محل برخورد با محور } x \text{ ها}$$

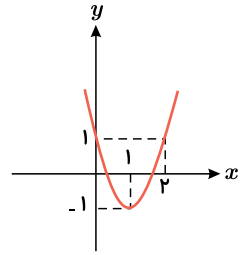
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 = 2(\pm\infty)^3 = 2(+\infty) = +\infty$$

$$f'(x) = 6x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 2 - 4 + 1 = -1 \Rightarrow (1, -1) \text{ اکسترمم نسبی}$$

$$f''(x) = 12x > 0 \Rightarrow \text{همواره تقعر رو به بالا دارد.}$$



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x) = 3x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x) = 3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$1 \searrow$	$-1 \nearrow$	$+\infty$



ب

$$f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

محل برخورد با محور y ها $(0, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

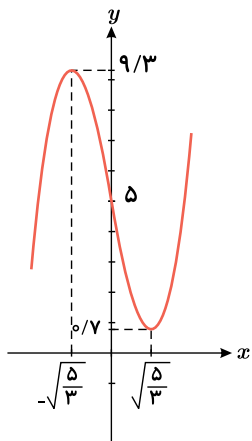
$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \approx 0.7$$

$$x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \approx 1.3$$

نقاط $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0.7)$ و $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 1.3)$ اکسترمم‌های نسبی هستند.

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ نقطه عطف}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 2$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$f''(x) = 6x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$



ج

$$f(x) = -x(x+2)^2 = -x(x^2 + 4x + 4) = -x^3 - 4x^2 - 4x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0), y = 0 \Rightarrow -x(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^3 - 4x^2 - 4x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^3) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty \end{cases}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 8x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 48 = 16 \Rightarrow x = \frac{8 \pm 4}{-6} \Rightarrow x = -2, -\frac{2}{3}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = f(-2) = 0, x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3} + 2\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

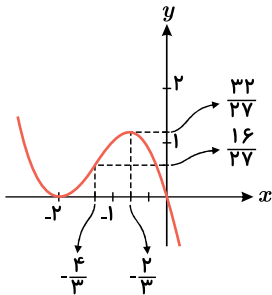


نقاط $(-2, 0)$ و $(-\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ اکسترم‌های نسبی تابع هستند.

$$f''(x) = -6x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}(-\frac{2}{3} + 2)^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{27} \Rightarrow (-\frac{2}{3}, \frac{16}{27}) \text{ نقطهٔ عطف}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x) = -3x^2 - 4x - 4$		-	+	+	-	-
$f''(x) = -6x - 4$		+	+	-	-	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$



$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x-1}{x-2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x=2 \text{ مجانب قائم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow y=2 \text{ مجانب افقی}$$

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ محل برخورد با محور } x \text{ ها}$$

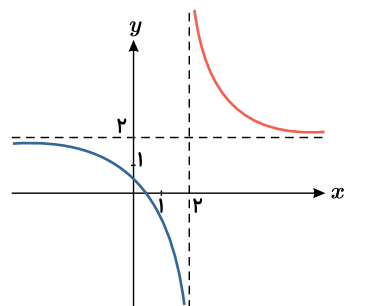
$$f'(x) = \frac{2(x-2) - 1(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{مشتق همواره منفی}$$

تابع اکسترم نسبی ندارد.

$$f''(x) = \frac{0 - 2(x-2)(-3)}{(x-2)^4} = \frac{6}{(x-2)^4} \Rightarrow x < 2 \Rightarrow f'' < 0, \quad x > 2 \Rightarrow f'' > 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$		-	-	-	-
$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^4}$		-	-	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

تقعر منحنی در نقطه $x=2$ عوض می‌شود.



مثل آب خوردن بگیر



ث

$$f(x) = \frac{-x}{x+3}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x}{x+3} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{-x}{x+3} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{-x}{x+3} = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad x = -3 \text{ مجانب قائم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ مجانب افقی}$$

محل برخورد با محور x ها و y ها $(0, 0)$

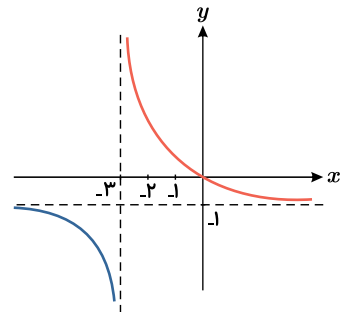
$$f'(x) = \frac{-1(x+3) - 1(-x)}{(x+3)^2} = \frac{-x-3+x}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(x+3)^2} < 0 \text{ مشتق همواره منفی}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 2(x+3)(-3)}{(x+3)^4} = \frac{6}{(x+3)^3} \Rightarrow x < -3 \Rightarrow f'' < 0, x > -3 \Rightarrow f'' > 0$$

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-3}{(x+3)^2}$	-	-	-	-
$f''(x) = \frac{6}{(x+3)^3}$	-	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$

تابع اکسترمم نسبی ندارد.

تقعر منحنی در $x = -3$ عوض می‌شود.



ج

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

محل برخورد با محور y ها $(0, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 - 9x^2 + 12x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \end{cases}$$

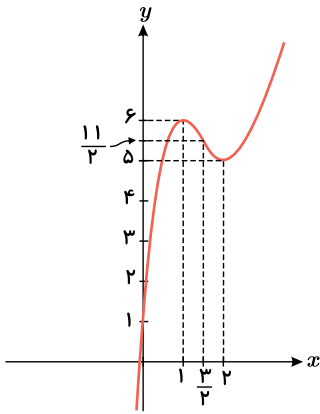
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow y = f(1) = 2 - 9 + 12 + 1 = 6 \Rightarrow (1, 6) \\ x = 2 &\Rightarrow y = f(2) = 16 - 36 + 24 + 1 = 5 \Rightarrow (2, 5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نقاط اکسترمم نسبی}$$

$$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{27}{8} - \frac{81}{4} + 18 + 1 = \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right) \text{ نقطه عطف}$$

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$	+	+	-	-	+	+
$f''(x) = 12x - 18$	-	-	-	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	1	6	$\frac{11}{2}$	5	$+\infty$



۲۹۵ در تابع هموگرافیک مرکز تقارن نقطه برخورد مجانب‌های قائم و افقی تابع است.

$$f(x) = \frac{2x+b}{ax-b}, \text{ مرکز تقارن } (-2, -\frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{مجانب قائم} \\ y = -\frac{1}{2} & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -4$$

$$ax - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a} = -2 \Rightarrow \frac{b}{-4} = -2 \Rightarrow b = 8$$

$$y = x'' + 6x' + a \Rightarrow y' = 3x' + 12x \Rightarrow y'' = 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$y = -8 + 24 + a = 16 + a \Rightarrow \text{مرکز تقارن } (-2, 16 + a)$$

$$y = \frac{2x+1}{x+b}, \quad x+b=0 \Rightarrow x=-b, \quad y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \text{مرکز تقارن } (-b, 2)$$

$$(-2, 16+a) = (-b, 2) \Rightarrow \begin{cases} -b = -2 \Rightarrow b = 2 \\ 16+a = 2 \Rightarrow a = -14 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}, \quad (0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \frac{0+b}{0+1} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = \frac{ax}{cx+1} \Rightarrow \text{مرکز تقارن } W(-1,1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{مجانب قائم} \\ y = 1 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

$$cx+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{c} = -1 \Rightarrow c = 1$$

$$y = \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x}, \quad x=0 \text{ مجانب قائم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

$$f'(x) = \frac{x-x+2}{x^2} = \frac{2}{x^2} > 0 \Rightarrow \text{مشتق همواره مثبت}$$

$$f''(x) = \frac{0-2x \times 2}{x^4} = \frac{-4}{x^3}. \text{ مشتق دوم در } x=0 \text{ تغییر علامت می‌دهد.}$$

$$y=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$$

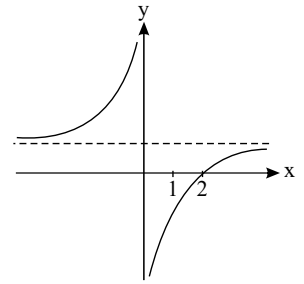
۲۹۶

۲۹۷

۲۹۸



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x) = \frac{2}{x^2}$	+	+	+	+
$f''(x) = \frac{-4}{x^3}$	+	-	-	-
f (x)	1	$+\infty$	0	1



۲۹۹

مجانِب قائم $f(x) = \frac{2x+1}{-x+1}$ ، $-x+1=0 \Rightarrow x=1$

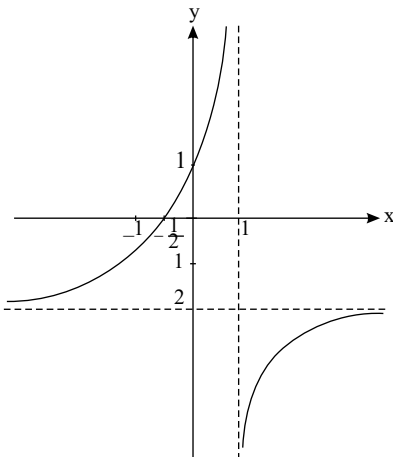
مجانِب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2 \Rightarrow y = -2$

مشتق همواره مثبت $f'(x) = \frac{2(-x+1) - (-1)(2x+1)}{(-x+1)^2} = \frac{3}{(-x+1)^2} > 0 \Rightarrow$

مشتق دوم در $x=1$ تغییر علامت می‌دهد. $f''(x) = \frac{0 - 2(-1)(-x+1) \times 3}{(-x+1)^3} = \frac{6}{(-x+1)^3}$

$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$ ، $y=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 0)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{3}{(-x+1)^2}$	+	+	+	+	+
$f''(x) = \frac{6}{(-x+1)^3}$	+	+	+	-	-
f (x)	-2	0	1	$+\infty$	-2



مجانِب قائم $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ، $x=0$

مجانِب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$

اکسترمم نسبی ندارد $\Rightarrow$ مشتق همواره منفی $f'(x) = \frac{x-x-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$

مشتق دوم در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد. $f''(x) = \frac{0 - 2x(-1)}{x^3} = \frac{2}{x^3}$