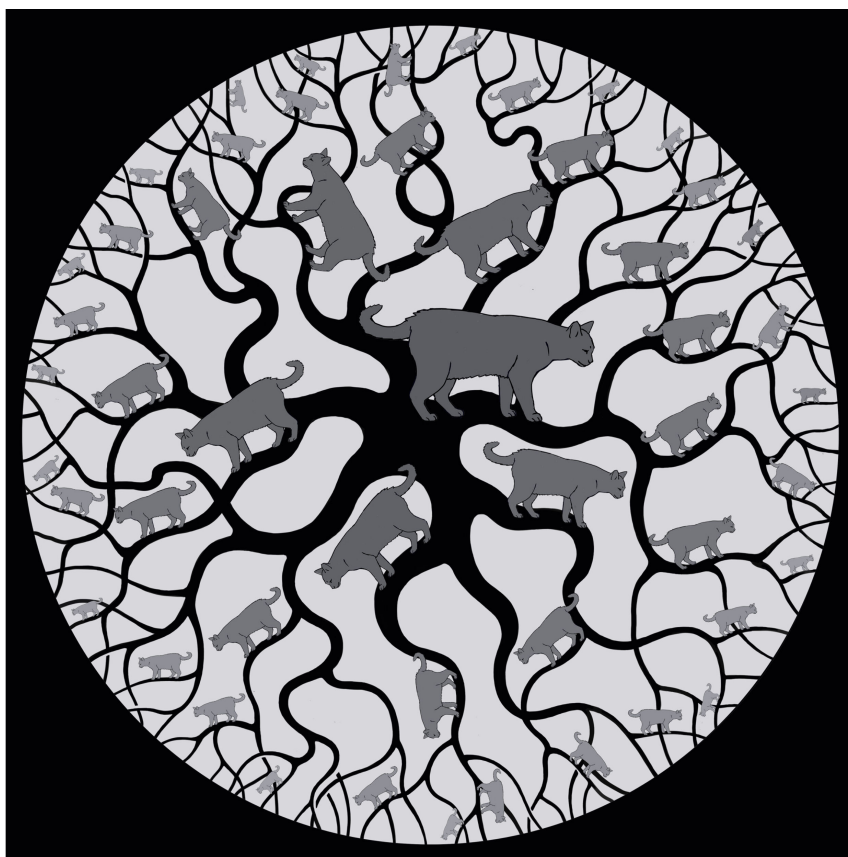


Лекции по грубой геометрии

Андроник Арутюнов

2025



Оглавление

Введение	v
Вместо предисловия	vi
Лекция 0: Обзорная	viii
I Теорема Шварца-Милнора	1
1 Лекция I: грубые отображения	2
1.1 Грубые отображения метрических пространств	3
1.2 Геодезические пространства	5
1.3 Грубая эквивалентность пространств	8
1.4 Графы	10
1.4.1 Графы Кэли	10
1.4.2 Геометрическая реализация графов	13
2 Лекция II: теорема Шварца-Милнора	15
2.1 Метрическая связность	16
2.2 Псевдометрика	17
2.3 Теорема Шварца-Милнора	21
2.3.1 Доказательство теоремы	21
2.3.2 Следствия теоремы Шварца-Милнора	23
Задачи	24
II Грубые пространства и компактификации	26
3 Лекция III: грубые структуры	27
3.1 Определение грубых структур	27
3.1.1 Грубое пространство	28
3.1.2 Метрические грубые структуры	29
3.2 Свойства грубых структур	31
3.2.1 Метризуемость грубых структур	32
3.2.2 Моногенные грубые структуры и геодезичность	35
3.2.3 Геодезичность и моногенность	36
3.3 Грубые отображения и ограниченные множества	38

4	Лекция IV: компактификации и концы	41
4.1	Топологические компактификации	41
4.1.1	Регулярность и нормальность	41
4.1.2	Компактификации Хаусдорфова пространства	43
4.1.3	Минимальная и максимальная компактификации	43
4.2	Грубые компактификации	45
4.2.1	Грубая топологическая структура	45
4.3	Концы	48
4.3.1	Пространства Фрейден탈я	48
4.3.2	Концы пространства	49
4.3.3	Концы графов	50
4.3.4	Классификация концов в графе	50
5	Лекция V: грубые компактификации	53
5.1	Компактификация по Фрейденталю	53
5.1.1	Бинарное дерево	54
5.1.2	Локально конечные графы	55
5.1.3	Граница $f(X)$ и метризуемость	57
5.2	Компактификация по Хигсону	58
5.2.1	Функции Хигсона на метрическом пространстве	59
5.2.2	Компактификация Хигсона	60
5.2.3	Универсальность	61
	Задачи	63
III	Рост и аменабельность	64
6	Лекция VI: функции роста	65
6.1	Функции роста в графе	65
6.1.1	Тип роста	65
6.1.2	Функции роста графов	66
6.2	Теорема Басса-Гиварка	68
6.2.1	Доказательство верхней оценки теоремы Басса-Гиварка	69
6.2.2	Следствия и обобщения	72
6.3	Рост в грубых пространствах	73
6.3.1	Емкость и энтропия	73
6.3.2	Пространства ограниченной геометрии	75
6.3.3	Немного о мере	76
7	Лекция VII: аменабельность и теорема Фёльнера	79
7.1	Фёльнеровость	79
7.1.1	Фёльнеровы системы множеств	79
7.1.2	Условия неаменабельности	80
7.2	Случай групп	83
7.2.1	Инвариантное среднее	83
7.2.2	Доказательство теоремы Фёльнера	84
7.3	Парадоксальные декомпозиции	87
7.3.1	Частичные сдвиги	87

7.3.2	Парадоксальные декомпозиции	89
Задачи		90
IV	Гиперболичность	91
8	Лекция VIII: гиперболичность по Громову	92
8.1	Гиперболические пространства	92
8.1.1	Произведение Громова	92
8.1.2	Определения гиперболических пространств	95
8.1.3	Пространство Лобачевского	96
8.2	Грубость гиперболичности	99
8.3	Гиперболические группы	101
8.3.1	Классификация гиперболических групп	102
9	Лекция IX: САТ-классификация	105
9.1	Модельные пространства	105
9.1.1	Геометрическое определение	105
9.1.2	Модельные треугольники	107
9.2	САТ-классификация	109
9.2.1	Видимость и невидимость	110
9.2.2	О грубости	112
9.3	Об изометриях	113
Задачи		115
V	Вложения	117
10	Лекция X: асимптотическая размерность	118
10.1	Вложения	118
10.1.1	Немного об аналогиях	119
10.1.2	Вложения деревьев	120
10.2	Асимптотическая размерность	122
10.3	Асимптотическая размерность	122
10.3.1	Определение	122
10.3.2	Монотонность asdim	124
10.3.3	Асимптотическая размерность групп	125
10.3.4	Общий случай грубых пространств	126
10.4	Свойство A	127
11	Лекция XI: препятствия к вложимости	130
11.1	Экспандеры	130
11.1.1	Препятствие к вложимости	131
11.1.2	T -свойство Каждана	133
11.1.3	Пример экспандера	134
11.2	Вложимость в $\mathbb{R}^n$	135
11.2.1	Условие удвоения	136

11.2.2	Снежинка пространства	137
11.2.3	Теоремы Ассуада и Наора-Неймана	138
12	Лекция XII: неподвижные точки	141
12.1	Борнологические группы	141
12.1.1	Свойства борнологических групп	141
12.1.2	T-свойство в борнологических группах	142
12.2	Грубая неподвижная точка	143
12.2.1	Классическая теорема Брауэра	143
12.2.2	Действие группы	144
12.3	Классификация грубых точек	146
	Задачи	148
VI	Дополнения	149
13	Теорема Халина о решётке	150
13.1	Определения и вспомогательные утверждения	150
13.2	Формулировка и доказательство	152
14	Концы вершинно-транзитивных графов	157
14.1	Тонкость концов линейных графов	157
14.2	Вершинно-транзитивные графы	158
15	Диаграммы сопряжённости	162
15.1	Геометрия диаграмм сопряжённости	162
15.2	Нильпотентные группы ранга 2	165
15.3	Число концов диаграмм сопряжённости	166

Введение

Вместо предисловия

Этот курс посвящён сравнительно новому разделу математики — грубой геометрии (её также называют крупномасштабной геометрией). Что же подразумевается под грубостью? В стандартных курсах дифференциальной геометрии и анализа исследуются алгебраические многообразия, где основное внимание уделяется маленькой окрестности каждой точки, которая по определению гомеоморфна евклидову пространству. В грубой геометрии, напротив, мы ничего не знаем о том, что происходит в малых окрестностях точек, но фокусируемся на глобальных свойствах пространства.

Визуально грубую эквивалентность пространств можно понимать как отношение при котором пространства «не отличимые с большого расстояния» будут эквивалентны, а непохожие друг на друга — нет. Главный наглядный пример грубой эквивалентности это $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой. В тоже время пучок лучей с общим началом, евклидова плоскость, плоскость Лобачевского и бесконечное бинарное дерево это примеры попарно не эквивалентных пространств.

Для формализации это отношения эквивалентности нам потребуются грубые отображения и грубая структура пространств. Грубая структура не формально выражаясь описывает какие пары точек находятся «равномерно недалеко» друг от друга в пространстве. В тоже время как более привычная топологическая структура скорее оперирует близкими точками.

Для понимания возникающей грубой геометрии нам потребует изучить грубые инварианты — характеристики пространства, сохраняющиеся при грубых отображениях. Они позволят нам и различать пространства. Поясним идею на примере: чтобы доказать, что отрезок не гомеоморфен прямой, нужно заметить, что отрезок компактен, а прямая — нет. Компактность в этом случае — инвариант непрерывных отображений. Однако ограниченность, напротив, не является инвариантом: интервал гомеоморфен прямой.

Ситуация для грубой геометрии такова. Ни компактность (или даже замкнутость), ни мощность, не являются грубыми инвариантами. В то же время грубые инвариантами будут: метрическая связность, число концов, скорость роста пространства и его асимптотическая размерность. Вообще, изучение грубых инвариантов приводит нас к самым разным разделам современной математики.

Немного о библиографической ситуации. Мы опираемся на три основные работы, которые могут служить методической базой: записки лекций Джона Роу [Roe03], монография Альвареса Лопеса и Альберто Канделла [LC14], книга Петра Новака и Гуоляна Ю [NY23]. Основная структура курса наследует запискам лекций Роу, наиболее популярному методическому тексту по грубой геометрии. Однако, во многих местах мы используем и разные другие источники, в том числе и недавние статьи.

Этот текст представляет собой конспект лекций. В некоторых случаях мы опускаем детали доказательств, чтобы сосредоточиться на ключевых идеях, особенно если доказательства содержат значительные вычислительные выкладки. Во всех таких случаях мы указываем источник, где можно найти полные доказательства и надеемся, что читатель самостоятельно ознакомится с ними или заполнит пробелы

самостоятельно.

Благодарности

Этот конспект основан на лекциях, которые читались в Независимом университете в 2022, 2023 и 2024 годах. Автор признателен соавтору первого года чтения Александру Алексееву за помощь в подготовке и чтении курса в 2022 году, а также Артёму Бельскому за подготовку части конспекта в 2023 году и помощникам 2024 года — Алексею Наянзину, Игорю Жильцову и Олегу Муравьёву за их предложения, замечания и вопросы.

Автор выражает благодарность слушателям курса за их вопросы, замечания и помощь с опечатками, особенно Александру Чекменёву, Роману Олейнику и Артёму Перелыгину.

Первые две части дополнения основаны на совместной работе с Татьяной Казанцевой, которая получила основные результаты. В третьей части дополнения неоценимую помощь в вычислениях и подготовке рисунков оказал Николай Хитрин.

С точки зрения мотивировок и выбора тем, автор выражает свою признательность участникам семинара *Некоммутативная геометрия и топология* Московского университета и особенно проф. А.С. Мищенко и проф. В.М. Мануйлову.

При окончании подготовки этих записей, их проинспектировала кошка Кнопочка, и оставила свои рекомендации и некоторые не вполне формальные замечания, которые мы приводим в тексте.

Обложка картины: Екатерина Савушкина.

Лекция 0: Обзорная

Откуда мы пришли? Кто мы? Куда мы идём?

Поль Гоген

Этот курс лекций рассказывает о грубой (или крупно-масштабной) геометрии. Мы обсудим этот раздел математики в его современном виде, который сформировался благодаря работам Михаила Громова, Джона Роу, Гаоляна Ю и других исследователей.

Первым значимым результатом в этой области можно считать теорему Шварца-Милнора, независимо доказанную Альбертом Соломоновичем Шварцем в 1955 году [Шва55] и Джоном Милнором в 1968 году [Mil68]. При этом самым ранним грубым инвариантом можно считать предложенное Хансом Фрейденталем в 1931 году понятие конца топологического пространства ([Fre31]).

Главная идея

В основе грубой геометрии, как она излагается в этом курсе, лежат несколько ключевых целей:

- Перейти от работы с «большим» метрическим или топологическим пространством к работе с его решёткой: дискретным подпространством, более-менее просто устроенным.
- Ввести отношение эквивалентности, которое делало бы различные решётки на одном многообразии эквивалентными (например, разбиение плоскости на квадраты и равнобедренные треугольники).
- Найти способы различать пространства по их грубым инвариантам.

Решётка в метрическом пространстве представляет собой дискретное множество точек, таких что расстояние между любыми двумя точками не менее C (где C фиксировано для всей решётки), а каждая точка пространства находится на расстоянии не более D (фиксированного для всей решётки) от некоторой точки решётки.

Ключевым инструментом для нас является понятие грубого отображения (см. определение 1.12). Неформально грубое отображение можно понимать так: точки в метрическом пространстве ведут себя «контролируемо». То есть образы точек не удаляются слишком далеко, и не слишком много точек слипается в одну. Причём оба этих условия должны выполняться равномерно.

Главным примером грубых отображений служат естественные взаимные отображения $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$.

Один из важных грубых инвариантов является понятие роста. Идея в следующем. Независимо от способа введения решётки на прямой, количество точек в шаре радиуса N зависит от N линейно. На плоскости же эта зависимость квадратична, какую бы решётку мы ни использовали. Таким образом, функция роста решётки является инвариантом крупного масштаба.

Оговоримся, что различать конечные множества грубыми методами не удастся. Мы изучаем макроструктуру пространства, игнорируя локальные особенности. То есть с точки зрения грубой геометрии есть понятие ограниченного множества, но нет (адекватного) понятия сходящейся последовательности.

Возможным прикладным смыслом грубых отображений является их интерпретация как «приблизительных» изоморфизмов. Например, для пространств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ зададим следующую конструкцию. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, определённое как $\alpha \in [n - 1/2; n + 1/2) \mapsto n$, и его обратное $\varphi^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, переводящее $n \mapsto n$. Тогда $|\varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) - \alpha| \leq 1/2$, то есть α возвращается в себя с погрешностью, не зависящей от её значения.

По аналогичной логике можно огрубить задачу о неподвижной точке. В таком смысле, параллельные переносы на прямой имеют грубую неподвижную точку в бесконечности.

План курса

Мы разбили наше повествование на несколько частей.

1. Сначала мы введём понятие грубого отображения на метрических пространствах, в частности на графах Кэли (один из главных полигонов для наших испытаний) и докажем теорему Шварца-Милнора: покажем, что при «хорошем» действии группы на метрическом пространстве, её граф Кэли эквивалентен пространству.
2. Мы обобщим понятие грубости на общий случай (грубую структуру можно вводить и без метрики) и выясним, когда грубая структура метризуема. Затем мы введём несколько способов «грубой» компактификации пространства. В частности, рассмотрим универсальную компактификацию по Хигсону.
3. После этого мы займёмся понятием роста пространства, что естественным образом выведет нас на понятие аменабельности.
4. Вооружившись этими знаниями, мы поговорим о гиперболичности и предложим Громовскую CAT-классификацию пространств.
5. Затем мы перейдём к понятию грубой вложимости. Начнём с понятия асимптотической размерности, которое делает размерность грубым инвариантом (и устраняет необходимость говорить о векторных пространствах). Мы разобьём обсуждение на вложимость в конечномерные и бесконечномерные пространства и завершим его рассмотрением грубых неподвижных точек.

В заключение приведены три дополнения, которые иллюстрируют многие из обсуждаемых вопросов:

1. Доказательство теоремы Халина о решётке, что заодно продемонстрирует некоторые дополнительные инструменты работы с графами.
2. Изучение вершинно-транзитивных графов.
3. Обсуждение диаграмм сопряжённости, аналогов графов Кэли.

Часть I

Теорема Шварца-Милнора

Лекция I: грубые отображения

Начнем с некоторых стандартных определений. Сразу скажем, что далее мы не всегда будем определять понятия, которые входят в стандартный набор учебных курсов, изучаемых на мат.специальностях первых курсов. Но по необходимости будем стараться давать библиографические ссылки на стандартные книги. Выбор этих книг, честно говоря, достаточно субъективен, так что читатели по необходимости могут пользоваться другой, более привычной, литературой.

Определение 1.1. Будем называть множество X — метрическим пространством, если на X определена метрика, то есть такая функция $\rho_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ что

- i $\rho_X(x; y) = 0 \iff x = y$;
- ii $\rho_X(x; y) = \rho_X(y; x), \forall x, y \in X$;
- iii $\rho_X(x; y) \leq \rho_X(x; z) + \rho_X(z; y), \forall x, y, z \in X$.

Замечание 1. Небольшое соглашение. Если это не вызывает недопонимая, мы будем пропускать индекс, обозначающий пространство, то есть писать ρ вместо ρ_X . Если речь идет при этом о прямой, плоскости, целых числах и так далее, и не сказано иное, то метрика понимается как естественная евклидова метрика.

Определение 1.2. Метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называют изометричными, если $\exists \alpha : X \rightarrow Y$ т. ч.
$$\begin{cases} \alpha - \text{биекция} \\ \rho_X(x; x') = \rho_Y(\alpha(x); \alpha(x')) \end{cases}$$

В этом смысле прямая с обычной евклидовой метрикой и синусоида в $\mathbb{R}^2$ с метрикой, определяющей расстояние между точками изометричны. Однако очень похожие друг на друга пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ не изометричны, хотя бы из соображений мощностей.

Упражнение 1.1. Образ какого числа точек в $\mathbb{R}^n$ нужно знать, чтобы полностью задать изометрию?

Приведём ещё один полезный пример метрических пространств.

Определение 1.3. Будем обозначать через $\ell_p(\mathbb{R}^n), p \geq 1$ пространство $\mathbb{R}^n$ оснащенное метрикой

$$\rho_p(x, x') := \sqrt[p]{|x_1 - x'_1|^p + \dots + |x_n - x'_n|^p}. \quad (1.1)$$

В случае $p = 1$ будем называть такую метрику *манхеттенской*.

Упражнение 1.2. Проверьте, что ρ_p действительно задаёт метрику.

Отметим, что $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ не изометрично евклидовому пространству. Забегая вперёд скажем, что $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ грубо эквивалентно $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой, причём соответствующую грубую эквивалентность (ожидаемо) осуществит тождественное отображение id .

Приведём ещё один пример «расстояния» которое не является метрикой. Пусть A, B некоторые подмножества метрического пространства X .

$$\rho(A; B) := \inf_{a \in A; b \in B} \rho_X(a; b). \quad (1.2)$$

Упражнение 1.3. Покажите, что для так заданной функции на множестве компактных подмножеств метрического пространства X не выполнено неравенство треугольника.

Впрочем, ввести метрику на компактах всё-таки можно, о чём см. пример 2.6 в следующей лекции.

1.1 Грубые отображения метрических пространств

Пусть теперь у нас есть два метрических пространства X и Y и отображение между ними $f : X \rightarrow Y$. Тогда определим понятия собственности и борнологичности такого отображения f (позже, в 3-й лекции мы обобщим эти понятия на более общий случай).

Определение 1.4. Отображение f — называется *собственным* (proper), если для каждого ограниченного подмножества $U \subset Y$, его прообраз $f^{-1}(U)$ тоже ограничен.

Определение 1.5. Отображение f — называется *борнологическим*, если для всякого неотрицательного $R > 0$, найдётся такое $S_R > 0$, что из $\rho_X(x, x') < R$ следует, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < S_R$.

Сразу подчеркнем «равномерность» обоих понятий. Они должны выполняться именно глобально, на всем пространстве.

Приведем несколько примеров.

Пример 1.1. Рассмотрим отображение $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\star, \rho \equiv 0)$ (здесь и далее в книге $\star$ означает точку). Отображение f является борнологическим, но не собственным.

Доказательство. i f не собственное так как для ограниченного $U = \star \subset \star$ его прообраз $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$, а значит не ограничено.

ii f борнологическое так как $\forall R \in \mathbb{R}_{>0}$ найдётся $S_R := 1 > 0$ такое что

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} (\rho(x; x') = |x - x'| < R \Rightarrow \rho(\star, \star) = 0 < 1 = S_R).$$

□

Пример 1.2. Отображение $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{N}, |\cdot|)$ определённое как $f : n \mapsto n^2$ является собственным, но не является борнологическим.

Доказательство. Собственность отображения очевидна: прообразы ограниченных множеств ограничены. Разберемся с борнологичностью. Возьмем $R = 1$. Тогда для точек $n, n + 1$ на расстоянии $R = 1$ имеем

$$\rho(f(n); f(n + 1)) = |n^2 - (n + 1)^2| = 2n + 1.$$

И понятно, что не найдется такого S , что $2n + 1 < S$, для любого n . Значит борнологичность не выполняется. $\square$

Пример 1.3. Отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ задаваемое формулой $f : n \mapsto 5n + 9$ собственное и борнологическое.

Доказательство. Собственность такого отображения очевидна. Борнологичность же следует из того, что расстояния между точками увеличиваются всегда в одинаковое число раз. $\square$

Перед тем как двинуться дальше, определим два очень близких к борнологичности понятия.

Определение 1.6. 1. Отображение метрических пространств $f : X \rightarrow Y$ называют крупномасштабным Липшицевым если есть положительные константы A, c такие, что

$$\rho(f(x); f(y)) \leq c\rho(x; y) + A \quad \forall x, y \in X.$$

2. Отображение метрических пространств $f : X \rightarrow Y$ называют Липшицевым если есть константа c такая, что

$$\rho(f(x); f(y)) \leq c\rho(x; y), \quad \forall x, y \in X.$$

Упражнение 1.4. Изучите на Липшицевость и крупномасштабную Липшицевость отображения из предыдущих примеров.

Несложно видеть, что липшицевость влечет крупномасштабная липшицевость, а липшицевость влечет борнологичность. Приведем доказательство для графов¹

Предложение 1.1. Для пары графов X, Y из крупномасштабной липшицевости и биективности следует обычная Липшицевость.

Доказательство. • Положим $f : X \rightarrow Y$ – биективное крупно-масштабно липшицево, то есть для некоторых констант K, C выполнено

$$\frac{1}{K}\rho_X(x; x') - C \leq \rho_Y(f(x); f(x')) \leq K\rho_X(x; x') + C. \quad (1.3)$$

Не теряя общности, можно считать, что $K, C > 1$.

• Проверим, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{2KC}\rho_X(x, x') \leq \rho_Y(f(x); f(x')).$$

– Если $\rho_Y(f(x); f(x')) = 0$, то $f(x) = f(x')$ и, следовательно в силу биективности f , имеем $x = x'$. Значит неравенство обращается в равенство.

¹Доказательство предоставлено А.В. Наянзиным

- Перейдём к случаю $\rho_Y(f(x); f(x')) \neq 0$. В силу предположения $KC > 1$, а значит имеем

$$\begin{aligned} 2KC\rho_Y(f(x); f(x')) &\geq KC(\rho_Y(f(x); f(x')) + 1) \geq \\ &\geq K\rho_Y(f(x); f(x')) + KC \geq \rho_X(x; x'). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В последнем переходе мы воспользовались левым неравенством из (1.3) в котором мы обе части домножили на K , а затем сократили KC .

- Таким образом мы проверили левую часть липшицевости. Аналогично проверяется и правая часть оценки

$$\rho_Y(f(x); f(x')) \leq 2KC\rho_X(x; x').$$

□

В общем случае это утверждение не имеет места. Соответствующие примеры см. в [BK97; Дым10]. Впрочем, для «хороших пространств» обратное всё же справедливо. О таких пространствах мы сейчас и поговорим.

1.2 Геодезические пространства

Пусть X — метрическое пространство. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ — непрерывная кривая (т.е. отображение γ непрерывно). Тогда для пары точек $x, x' \in X$, будем говорить, что $\gamma(x, x')$ — непрерывная кривая соединяющая точки x, x' , если $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = x'$.

Определение 1.7. Кривая $\gamma(x, x')$ называется *геодезической*, если для некоторого $C > 0$ для любого $t \in [a, b]$ в некоторой окрестности $U(t)$ для любых точек $t, t' \in U(t)$ выполнено, что

$$\rho(\gamma(t); \gamma(t')) = C|t - t'|.$$

С точностью до репараметризации кривой можно считать $C = 1$. В таком случае геодезическая в указанной окрестности является изометрическим вложением отрезка $[t; t']$. Что можно понимать как эквивалентное определение геодезической.

На гладких Римановых многообразиях более популярно (и эквивалентно предыдущему) определение геодезической как кривой $\gamma(x, x')$ минимизирующей функционал длины $l(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$ для фиксированных точек x, x' .

Мы также будем рассматривать *геодезические лучи* и *геодезические прямые*, определяемые аналогично определению геодезической кривой.

Отметим, что в «школьной» евклидовой геометрии геодезическая, соединяющая две заданные точки единственна. А вот уже в ℓ_1 метрике (манхеттенской) геодезических между двумя точками сколько угодно (см. рис. 1.1).

Упражнение 1.5. Как устроены геодезические на сфере (со стандартной сферической метрикой)? Сколько существует геодезических соединяющих две данные точки на сфере в зависимости от выбора точек?

В нашей науке также полезно рассматривать следующие метрические пространства:

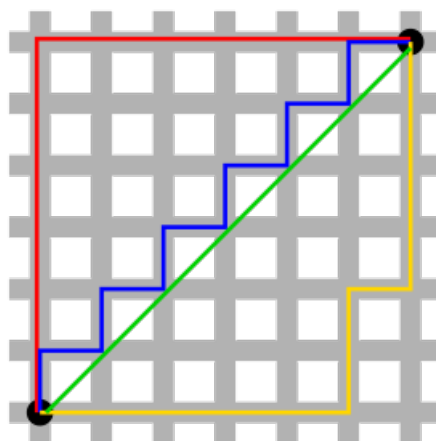


Рис. I.I: Разные геодезические в манхеттенской метрике

Определение 1.8. X — это *пространство длин*, если X линейно связно и

$$\rho(A; B) = \inf_{\gamma(A, B)} \{l(\gamma(A, B))\}.$$

Определение 1.9. Метрическое пространство X называется *геодезическим пространством*, если для любых $A, B \in X$ существует геодезическая $\gamma(A, B)$.

Приведём пример полного пространства длин, которое не будет при этом геодезическим.

Пример 1.4. Пространство N состоящие из набора отрезков c_i таких, что $|c_i| = 1 + \frac{1}{k}$ со склеенными левыми (в точке A) и правыми (в точке B) концами (см. рис. I.II) будет пространством длин, но не будет геодезическим.

Доказательство. Расстояние $\rho(A; B)$ равняется единице, и является инфимумом по всем отрезкам c_i однако не реализуется никакой геодезической. Так что пространство N не будет геодезическим. $\square$

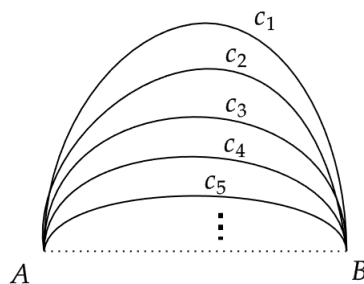


Рис. I.II: Не геодезическое пространство длин

Упражнение 1.6. Проверьте, что пространство $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ — геодезическое.

Мы надеемся, что читатель в курсе, что подпространство топологического (в частности метрического) пространства называется *компактным* если из всякого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Хорошо известна лемма

Гейне-Бореля, что в $\mathbb{R}^n$ компактность равносильна замкнутости и ограниченности. В то же время в бесконечномерных пространствах это уже не так. За подробностями отошлём читателя к [Кол04] или любому другому учебнику по функциональному анализу. Нам же часто будут встречаться следующий класс метрических пространств.

Определение 1.10. Метрическое пространство X называется *собственным пространством*, если замкнутые ограниченные множества – компактны.

Через ℓ_p мы далее будем обозначать пространство вещественных последовательностей $\{x_i\}$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Метрика в таких пространствах вводится аналогично формуле (1.1).

Упражнение 1.7. Проверьте, что пространство ℓ_p не является собственным.

Неформально можно сказать, что когда мы требуем от пространства «собственность», мы в некотором смысле требуем, чтобы оно было похоже на конечномерное. То же самое относится и к следующему понятию.

Определение 1.11. Пространство X *локально компактно*, если для любого $x \in X$ существует окрестность $U(x)$ такая, что её замыкание – компактно.

Упражнение 1.8. Докажите, что пространство N из примера 1.4 не является локально компактным.

Приведем (без доказательства) теорему Хопфа-Ринова.

Hopf-Rinow's Theorem. Каждое полное, локально компактное пространство длин – собственное. Обратно: каждое собственное пространство длин полное и локально компактное.

Такие пространства (полные, локально компактные пространства длин) – геодезические.

Доказательство см. в [Roe03] (Theorem 1.5.).

Предложение 1.2. В пространствах длин крупномасштабная Липшицевость равносильна борнологичности.

Доказательство. оставим в качестве упражнения. □

В качестве завершения разговора о билипшицевости кажется полезным упомянуть знаменитую теорему Салливана

[Sul79], **Sullivan's Theorem.** Два гладких n -мерных многообразия, при $n \neq 4$, билипшицево гомеоморфны тогда и только тогда, когда они топологически гомеоморфны.

Ну, а вообще к понятию билипшицевости мы вернёмся в конце, когда будем говорить в 11-й лекции о грубых вложениях и теореме Ассуада.

1.3 Грубая эквивалентность пространств

Наконец дадим ключевое определение в нашем курсе.

Определение 1.12. Отображение $f : (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ называется *грубым*, если оно является одновременно собственным и борнологическим.

Легко видеть, что композиция грубых отображений — это снова грубое отображение. Этот факт даёт нам возможность говорить о грубой категории метрических пространств, в которой объекты — это метрические пространства, а морфизмы — грубые отображения.

Наша ближайшая цель — понять, какую эквивалентность можно ввести на метрических пространствах с помощью понятия грубости.

Определение 1.13. Про два отображения метрических пространств $f : X \rightarrow Y$ и $g : X \rightarrow Y$ будем говорить, что они *близки*, если найдётся $C > 0$ такое, что $\rho_Y(f(x); g(x)) < C$ для каждого $x \in X$.

Упражнение 1.9. Докажите, что «близость» есть отношение эквивалентности и, в частности, транзитивна: если f близко к g , а g к h , то f близко к h .

Наконец дадим определение грубой эквивалентности метрических пространств.

Определение 1.14. Метрическое пространство X *грубо эквивалентно метрическому пространству* Y ($X \sim Y$), если найдётся пара отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ т. ч. f, g — грубые, и отображение $f \circ g$ близко к id_Y , а отображение $g \circ f$ близко к id_X .

Кошачьи советы. Кошка грубо эквивалентна тигру и мыши. Но не грубо эквивалентна питону.

Упражнение 1.10. На плоскости $\mathbb{R}^2$ зададим ℓ_p -метрику

$$\rho_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p}$$

для $p \geq 1$. Докажите грубую эквивалентность пространств $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$ и $(\mathbb{R}^2, \rho_q)$ для любых $p, q \geq 1$.

Важным источником грубо эквивалентных (или, как говорят, грубо изометрических) является теорема Шварца-Милнора, о которой мы поговорим на следующей лекции. А пока приведем несколько примеров.

Пример 1.5. Пространства $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ и $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ грубо эквивалентны.

Доказательство. Достаточно рассмотреть отображения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ такие что $f : [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \mapsto n$ и $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ т. ч. $g : n \mapsto n$, I.III. Грубость этих отображений очевидна. В то же время отображение $f \circ g : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ близко к $\text{id}_{\mathbb{R}}$, а $g \circ f : (\mathbb{Z}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{Z}, |\cdot|)$ близко к $\text{id}_{\mathbb{Z}}$. $\square$

Из этого примера видно, что счётное множество вполне может быть грубо эквивалентно несчётному. Вообще, важная идея которая лежит в основе подхода грубой геометрии состоит в следующем. Пусть в метрическом пространстве X можно выбрать решётку Γ . Т.е. подмножество $\Gamma \subset X$, состоящее из точек, удовлетворяющих двум условиям

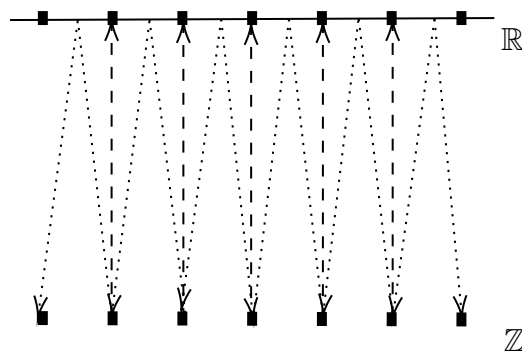


Рис. I.III: Эквивалентность $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$

1. Для некоторых констант $A, B > 0$ и для любых $g, g' \in \Gamma$ имеем, что $A \leq \rho(g; g') \leq B$;
2. Существует $C > 0$ такое, что $\forall x \in X$ найдется $g_x \in \Gamma$ такое, что $\rho(x; g_x) < C$.

Тогда $X \stackrel{\circ}{\sim} \Gamma$. Или коротко: пространство грубо эквивалентно своей решётке. Такая дискретизация пространства (или, как сказали бы физики, квантование) достаточно естественная процедура. К этой идее мы часто будем обращаться по ходу курса, например рассуждая об аменабельности (Фёльнеровости) и о Т свойстве Каждана. А наша ближайшая цель это теорема Шварца-Милнора, которую можно понимать как источник решёток, порождаемых действием группы.

Нужно помнить, что в грубой геометрии все происходит с точностью до конечных подпространств.

Пример 1.6. Если X — это ограниченное метрическое пространство, то оно грубо эквивалентно ★.

Доказательство. Действительно, из ограниченности пространства следует конечность диаметра $\text{diam}(X) < +\infty$. Во всех неравенствах в определении борнологичности и близости можно использовать константу $\text{diam}(X) + 1$. Ну а собственность очевидна, поскольку все используемые пространства уже ограничены. $\square$

Заметим, что прямая и три луча из одной точки не являются грубо эквивалентными пространствами (см. рис. 1.3). Для хорошего доказательства нам потребуется понятие конца пространства, описание которого будет в главе 14.

Из других примеров метрических пространств, не являющихся попарно грубо эквивалентными отметим не эквивалентность евклидовой плоскости и геометрии Лобачевского (гиперболическое пространство), а также не эквивалентность евклидовых пространств разных размерностей. Но для доказательства того, что соответствующие пространства не будут грубо эквивалентными, нам предстоит многое узнать. В частности, нам понадобится понятие роста пространства, которое позволит различить евклидово пространство и гиперболическое, о чём будет сказано в лекции 6.

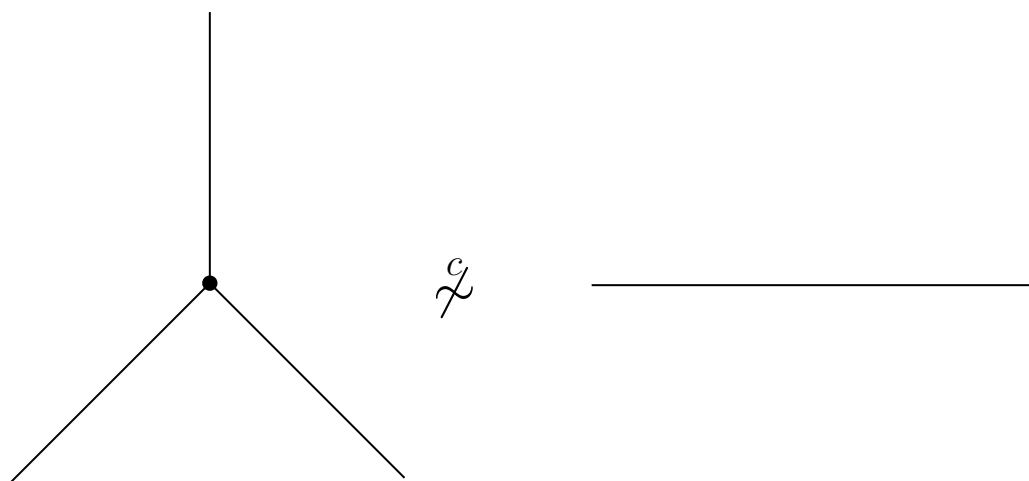


Рис. I.IV: Не эквивалентность прямой и трёх лучей с общей вершиной

1.4 Графы

Зачастую нам достаточно понимать граф как дискретное метрическое пространство вершин, в котором метрика определяется как минимальное расстояние. Эквивалентный взгляд на графы, это понимание их как одномерного симплициального комплекса или, если выразаться более геометрическим языком, как множество вершин, в котором соседние вершины заклеены ребром. Об этой геометрической реализации мы поговорим чуть-чуть ниже.

1.4.1 Графы Кэли

Для дальнейшего нам крайне полезен важный источник эквивалентных графов, а именно графы Кэли.

Пусть G — это группа с конечной системой образующих $\mathcal{X}$

Определение 1.15. Граф Кэли $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)$ — граф, чьи вершины это элементы группы G , а рёбра между вершинами $a, b \in G$ — $x \in \mathcal{X}$ т. ч. $ax = b$.

Мы, к сожалению, лишены возможности полноценно погрузиться в общую теорию графов Кэли и в целом комбинаторную теорию групп. Так что пока дадим несколько методических рекомендаций. Прежде всего, на русском языке это конспект лекций [Кля], учебники [ЛШ80; Bor02]. Также есть многочисленная англоязычная литература, например [Sap13; Löh18].

Сразу отметим несколько очевидных свойств графов Кэли

- Граф $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)$ — связан;
- Граф $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)$ вершинно-транзитивен, то есть для любых двух вершин a, b существует автоморфизм f графа Кэли, сохраняющий метки ребер.

Пример 1.7. Построим граф Кэли для аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$.

Построение графа Кэли для группы $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, оставим в качестве упражнения (это просто $\mathbb{Z}$). Гораздо интереснее посмотреть на граф Кэли с образующими $a = 2, b = 3$.

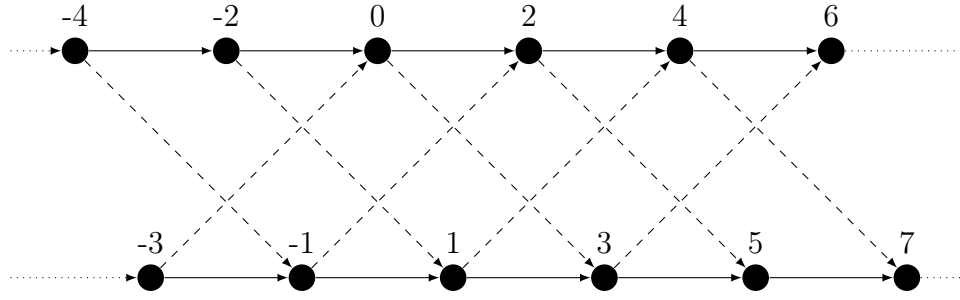


Рис. I.V: Группа $\mathbb{Z} = \langle 2, 3 \rangle$

Упражнение 1.11. Проверьте, что полученный граф грубо эквивалентен $\mathbb{Z}$.

Это упражнение обобщим до следующего утверждения.

Предложение 1.3. Графы Кэли $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)$ и $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{Y} \rangle)$ грубо эквивалентны для конечных систем образующих $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.

Это частный случай теоремы Шварца-Милнора 2.1 из второй лекции. Однако кажется полезным предъявить прямое доказательство этого предложения, что называется, «по определению».

Доказательство. • В качестве отображения, реализующего грубую эквивалентность ожидаемо выберем $\text{Id} : \text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle) \rightarrow \text{Cayley}(G, \langle \mathcal{Y} \rangle)$, которое тождественно на вершинах.

Собственность этого отображения очевидна, проверим борнологичность.

- Элемент группы $g \in G$ можно записать через образующие $\langle \mathcal{X} \rangle$, то есть

$$g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, x_i \in \langle \mathcal{X} \rangle.$$

Каждая образующая $x \in \langle \mathcal{X} \rangle$ также может быть записана в алфавите $\langle \mathcal{Y} \rangle$. Причем раз система образующих конечна, то для некоторого C длины таких выражений $\langle \mathcal{X} \rangle$ -образующих через $\langle \mathcal{Y} \rangle$ не длиннее чем C .

- Следовательно, когда мы перепишем g в новом $\langle \mathcal{Y} \rangle$ -алфавите, для длины нового слова будет выполнено неравенство

$$\|g\|_{\langle \mathcal{Y} \rangle} \leq C \|g\|_{\langle \mathcal{X} \rangle}.$$

Отсюда получаем, что

$$\rho_{\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)}(1; g) \leq C \rho_{\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{Y} \rangle)}(1; \text{Id}(g)).$$

- Вспоминая про вершинную-транзитивность графа Кэли, получаем что константа C годится для всех вершин, что и даёт чаямую борнологичность. $\square$

Обратное утверждение не верно: если графы Кэли грубо эквивалентны, то группы не обязаны быть изоморфными. Очевидным примером будет любая группа, у которой есть подгруппа конечного индекса изоморфная $\mathbb{Z}$ – ее граф Кэли будет грубо эквивалентен прямой. Впрочем справедлива следующая теорема, доказанная Громовым (см. [Gro93]).

M. Gromov's Theorem. Группы G_1 и G_2 грубо эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такое пространство длин X , что действия G_1 и G_2 на X коммутируют.

Предложение 1.3 позволяет сделать одно наблюдение. Возьмём по шары радиуса n в графах $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)$ и $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{Y} \rangle)$. Тогда

$$\frac{\#\text{ball}_{\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)}(1, n)}{\#\text{ball}_{\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{Y} \rangle)}(1, n)} \rightarrow \text{const}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В этом смысле можно говорить, что граф имеет линейный или полиномиальный рост, причем тип такого роста (как следует из доказанного предложения) не зависит от системы образующих. В главе 6 мы придадим этому наблюдению строгость и лоск, а также обобщим на куда более общий случай.

Далее мы будем понимать группу G как метрическое пространство со *словарной* метрикой.

Пусть $(G, \mathcal{X})$ — конечнопорождённая группа с конечным набором образующих $\mathcal{X}$ то есть $G = \langle \mathcal{X} \rangle$. Теперь зададим на G функцию

$$\rho_{\mathcal{X}}(g, h) := |g^{-1}h| = \min_{l \in \mathbb{N}} \{l \mid g^{-1}h = x_1 \cdot \dots \cdot x_l, x_i \in \mathcal{X}\}.$$

Предложение 1.4. Так заданная функция $\rho_{\mathcal{X}}$ — метрика, причем удовлетворяет условию левой инвариантности

$$\rho_{\mathcal{X}}(xg; xh) = \rho_{\mathcal{X}}(g; h), \quad \forall g \in G. \quad (1.5)$$

Доказательство. • Невырожденность метрики очевидна.

- Симметричность функции $\rho_{\mathcal{X}}$ получаем из того, что

$$h^{-1}g = (g^{-1}h)^{-1} = x_l^{-1} \dots x_1^{-1}$$

.

- Неравенство треугольника состоит в неравенстве $|gh| \leq |g| + |h|$, которое следует из того, что при умножении элементов группы, понимаемых, как слова в алфавите $\mathcal{X}$, образующие в суффиксе g могут сократиться с префиксом слова h , однако после всех таких сокращений мы получим слово, которое точно не длиннее чем сумма слов g и h .
- Остаётся проверить, что метрика $\rho_{\mathcal{X}}$ левоинвариантна. Для каждого f имеем понятную цепочку равенств

$$\rho_{\mathcal{X}}(fg; fh) = |g^{-1}f^{-1}fh| = |g^{-1}h| = \rho_{\mathcal{X}}(g; h).$$

□

Остается сказать, что дословное повторение рассуждений из доказательства предложения 1.3 показывает, что при выборе любой *конечной* системы образующих мы будем получать эквивалентные метрики.

Предложение 1.5. Для разных конечных систем образующих $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ метрики $\rho_{\mathcal{X}}, \rho_{\mathcal{Y}}$ задают грубо эквивалентные метрические пространства

$$(G; \rho_{\mathcal{X}}) \stackrel{c}{\sim} (G; \rho_{\mathcal{Y}}).$$

Ещё один пример графов схожего происхождения — диаграммы сопряженности. О них мы расскажем в дополнении, см. раздел 15.

1.4.2 Геометрическая реализация графов

Чтобы мы могли сказать, что граф Кэли есть геодезическое пространство и вообще удовлетворяет посылке теоремы Хопфа-Ринова нам полезно реализовать граф Кэли, не как дискретное метрическое пространство состоящее из вершин, но как линейно связное пространство, добавив к нему ребра.

Подходящая для этого конструкция, это реализация графа как клеточного пространства (подробнее о клеточных пространствах в [Пра04]).

Определение 1.16. Пусть γ – граф. Назовем *геометрическим графом* (или *геометрической реализацией*) γ^* метрическое пространство которое состоит из графа γ и набора ребер $I_{a,b}$ для соседних вершин. То есть это непрерывные кривые $I_{a,b}(t)$ такие, что

$$I_{a,b} \cong I_{[0;1]}, I_{a,b}(0) = a, I_{a,b}(1) = b \quad \forall \{a,b \in \gamma \mid \rho_{\mathcal{X}}(a;b) = 1\}.$$

Иными словами, у нас есть нульмерные клетки (вершины графа) и одномерные клетки (ребра графа) «заклеивающие» соседние вершины.

Например геометрический граф Кэли это

$$\text{Cayley}^*(G, \langle \mathcal{X} \rangle) = \text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle) \bigcup_{\{a,b \in G \mid \rho(a;b)=1\}} I_{a,b}.$$

Предложение 1.6. *Геометрический граф будет локально компактным пространством тогда и только тогда, когда степени всех его вершин ограничены.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть звезду вершины. То есть сама вершина и куски ребер. Локальная компактность значит что эта штука должна быть компактом. Если ребер бесконечно много, то нужно взять открытое покрытие так: вершина с окрестностью на каждом ребре интервал, который покрывает «остаток ребра» (см. картинку I.VI). Конечное подпокрытие выбрать не получится.

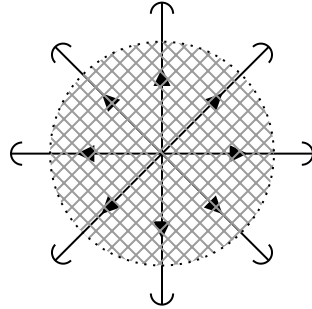


Рис. I.VI: Звезда вершины с окрестностью

Обратно, звезда вершины конечной степени изометрична орту в $\mathbb{R}^n$ (ноль + базисные векторы), а значит компактна. $\square$

Предложение 1.7. *Геометрический граф Кэли конечнопорождённой группы удовлетворяет посылке теоремы Хопфа-Ринова.*

Доказательство. Из предложения 1.6 получаем, что локальная компактность для графа Кэли равносильна конечной порожденности. То, что геометрический граф является пространством длин и полон – очевидно. $\square$

Остается заметить, что по нашему предложению 1.4 все геометрические реализации графа Кэли грубо эквивалентны друг другу. В дальнейшем мы не будем отличать геометрический граф от «дискретного» прародителя.

Частным случаем геометрической реализации являются $\mathbb{R}$ –деревья (метрические деревья).

Определение 1.17. Назовём $\mathbb{R}$ –*деревом* (или *метрическим деревом*) геодезическое пространство X такое, что

1. Для любых точек $a, b \in X$ существует единственная геодезическая $[a; b]$;
2. Если две геодезические имеют единственную общую точку, то их объединение – геодезическая;
3. X – локально-компактно.

Отметим, что метрическое дерево вообще говоря не является многообразием: окрестности точек, вообще говоря, не гомеоморфны прямой.

Пример 1.8. Геометрическая реализация всякого дерева, с конечными степенями вершин – будет метрическим деревом.

Упражнение 1.12. Докажите, что геометрическая реализация графа с циклом не может быть метрическим деревом.

В определении метрического дерева мы не требуем наличия некоего множества «вершин», однако понятно, что вершинами стоит назвать все такие точки, которые являются пересечением более чем двух геодезических пересекающихся только в этой точке. Если дополнительно потребовать, чтобы расстояние между такими вершинами было целочисленным, мы получим «обычный» граф, в котором вершины соединены отрезками.

Упражнение 1.13. Покажите, что метрическое дерево удовлетворяетсылке теоремы Хопфа-Ринова.

Лекция II: теорема Шварца-Милнора

Наша следующая задача — найти разумный источник грубо эквивалентных пространств. Часть этой залежи мы уже обнаружили: это различные графы Кэли одной и той же группы. Это можно понимать так. Мы берём множество элементов группы и действуем на нём группой. Причём действие мы задаем при помощи выбора образующих: мы соединяем две вершины направленным ребром с меткой данной образующей, если она переводит первую вершину во вторую. Такое действие задает нам структуру графа (и его геометрическую реализацию). Однако действовать группа может не только на своих вершинах. Например группу $\mathbb{Z}$ естественно понимать как целочисленные сдвиги прямой, а группу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ как движения плоскости. Эта мысль подсказывает, что «правильное» действие группы на некотором пространстве задаст грубую эквивалентность пространства группе.

Пусть у нас есть действие группы G на метрическом пространстве (X, ρ) то есть отображение $G \times X \rightarrow X$ такое, что $(gh, x) = (g, (h, x))$. Будем писать для краткости $(g, x) =: g(x)$.

Поясним, что мы по сути «кодируем» некоторое семейство преобразований пространства X при помощи группы G таким образом, что композиция отображений соответствует умножению элементов в группе.

Определение 2.1. Группа G действует на метрическом пространстве (X, ρ) *изометриями*, если для любых $x, y \in X$ и $g \in G$ справедливо $\rho(x; y) = \rho(g(x); g(y))$.

Проще говоря, каждый элемент группы «кодирует» изометрию пространства, и эти изометрии согласованы с точки зрения группы: их композиция соответствует групповому умножению.

Пример 2.1. Целые числа, как группа по сложению, действуют на действительных: $n(\alpha) = \alpha + n$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пример 2.2. Группа $\mathbb{Z}_3$ действует на пучке из трёх лучей с общим началом поворотами:

- 0 — поворот на 0°
- 1 — поворот на 120°
- 2 — поворот на 240°

Пример 2.3. Группа действует на своем графе Кэли левыми сдвигами

$$\lambda : G \times \text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle) \rightarrow \text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)$$

по формуле $\lambda : (g, a) \mapsto ga$.

Дальше мы будем писать действие группы на элементах коротко: $g(a)$, если это не вызовет (по мнению автора) путаницы.

Упражнение 2.1. Действует ли группа на своем графе Кэли и правыми сдвигами $g(a) := ag$?

Зафиксируем два важных типа действия группы на метрическом пространстве.

Определение 2.2. Действие $G \times X \rightarrow X$ называется *кокомпактным*, если существует такой компакт $K \subset X$, что $G \cdot K = \bigcup_{g \in G} g \cdot K = X$.

Кошачьи советы. Кокомпактное действие позволит кошке, побывать вблизи от каждой точки пространства.

Определение 2.3. Действие $G \times X \rightarrow X$ называется *собственным*, если для любого $x \in X$ существует такое открытое множество $U(x)$, что $g(U) \cap U = \emptyset$ почти всегда (то есть кроме конечного числа $g \in G$).

Кошачьи советы. Собственность действия значит, что кошка почти никогда не будет возвращаться обратно.

Упражнение 2.2. Какие из приведённых выше действий группы будут собственными и/или кокомпактными?

Основным утверждением этой лекции будет теорема Шварца–Милнора. При доказательстве мы будем следовать работе [BDM06].

Теорема 2.1. Пусть X — собственное метрическое пространство длин и группа G действует изометриями на X собственно и кокомпактно. Тогда $G \overset{L}{\sim} X$, а группа G — конечно порождена.

Перейдем к подготовке доказательства. Для начала поговорим о связности.

2.1 Метрическая связность

Рассмотрим небольшой пример. Понятно, что множество целых чисел не будет связным или линейно связным в обычном смысле, как и любое другое дискретное пространство. Однако, $\mathbb{Z}$ как граф Кэли группы целых чисел, будет связным.

Да и вообще, при грубых отображениях связность (традиционная) не сохраняется. Однако хотелось бы охарактеризовать метрические пространства, грубо эквивалентные некоторому связному метрическому пространству.

Для реализации этих пожеланий воспользуемся старой идеей: определим связность с некоторой (но обязательно равномерной по всему пространству!) точностью.

Определение 2.4. Если в метрическом пространстве (X, ρ) для $M > 0$ для любых $A, B \in X$ найдется набор точек $\{A_i\}_{i=1}^N$, $A_i \in X$, $\forall i$ такой что $A_1 = A$, $A_N = B$ и $\rho(A_i, A_{i+1}) \leq M$, то будем называть (ρ, X) *метрически связным* или *M -связным*.

Кошачьи советы. Пространство метрически связно, если кошка может допрыгать от любой точки до любой.

Пример 2.4. Натуральные числа $\mathbb{N}$ с естественной метрикой будут 1-связными.

Доказательство. Действительно, для пары A, B , с $A < B$ имеем

$$\{A_i\}_{i=1}^N = \{A, A+1, A+2, \dots, B-1, B\}.$$

Попарные расстояния равны единице, значит получаем 1-связность. $\square$

Рассмотрим пример множества, не являющегося метрически связным.

Пример 2.5. Последовательность $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, 2^{n+1}, \dots\}$ с индуцированной из $\mathbb{N}$ метрикой не будет метрически связным пространством.

Доказательство. Для любого $M > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такой, что $2^N > 2M$ и, следовательно, существуют $A = 2^N$, $B = A + 2^N = 2^{N+1} \in S$ тогда ближайшая точка из S к B будет находиться на расстоянии $2^N > M$. $\square$

Предложение 2.1. *Метрическая связность есть грубый инвариант. Иными словами, если два метрических пространства X, Y грубо эквивалентны $X \stackrel{c}{\sim} Y$, то они метрически связны или не связны одновременно.*

Доказательство оставим в качестве легкого упражнения. Отметим, что M -связность (для данного M) при грубых отображениях сохраняться не обязана.

Упражнение 2.3. Верно ли, что в бесконечном метрически связном пространстве всегда найдется метрически несвязное подпространство?

2.2 Псевдометрика

Нам будет удобно помимо метрики использовать более общее понятие псевдометрики.

Определение 2.5. Пара (X, ρ_X) называется *псевдометрическим пространством с псевдометрикой* $\rho_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, если выполнены следующие условия:

- i $\rho_X(x; x) = 0$, для всех $x \in X$;
- ii $\rho_X(x; x') = \rho_X(x'; x)$, для всех $x, x' \in X$;
- iii $\rho_X(x; x'') \leq \rho_X(x; x') + \rho_X(x'; x'')$, для всех $x, x', x'' \in X$.

То есть для пространства с псевдометрикой выполнены аксиомы метрического пространства за исключением, быть может, свойства невырожденности.

Упражнение 2.4. Докажите, что если $\rho(a; b) = 0$, то $\rho(a; x) = \rho(b; x)$ для любого x .

Далее нас будут интересовать псевдометрики порождённые действием групп (см. формулу (2.1)), а пока приведём пример псевдометрики на классе ограниченных множеств.

Определение 2.6. Назовём *расстоянием Хаусдорфа* (или *метрикой Хаусдорфа*) функцию ρ_H определяемую для двух ограниченных подмножеств A, B метрического пространства X по формуле

$$\rho_H(A; B) := \sup_{x \in X} \{|\rho(x; A) - \rho(x; B)|\}.$$

Иными словами, метрика Хаусдорфа это такое число r , что A содержится в r -окрестности множества B , а B содержится в r -окрестности A .

Упражнение 2.5. Докажите, что для метрики Хаусдорфа справедливо следующая формула

$$\rho_H(A, B) := \inf\{r > 0 \mid A \subseteq N_r(B), B \subseteq N_r(A)\}.$$

Пример 2.6.

- На множестве ограниченных подмножеств ρ_H – псевдометрика;
- На множестве компактных подмножеств ρ_H – метрика.

Теперь перейдём к классификации псевдометрик.

Определение 2.7. Псевдометрика $\rho_X(\cdot; \cdot)$ называется *крупномасштабной*, если для любого $x \in X$ выполняется

$$\#\{y \in X \mid \rho_X(x; y) = 0\} < \infty.$$

Или, другими словами, шары нулевого псевдометрического радиуса – конечны.

Замечание 2. Символом $\#$ мы будем обозначать мощность множества, особенно когда требуется подчеркнуть его конечность или избежать путаницы с понятием модуля или длины.

Определение 2.8. Псевдометрика $\rho_G(\cdot, \cdot)$ называется *собственной*, если для любого $R > 0$ и для любого $g \in G$ выполняется

$$\#\{h \in G \mid \rho_G(g; h) < R\} < \infty.$$

Условие собственности псевдометрики геометрически значит, что для каждой точки $x \in X$ шар ненулевого псевдометрического радиуса – конечен. Из этого сразу же следует крупномасштабность (поскольку шар нулевого радиуса содержится в шаре ненулевого радиуса).

Интересующие нас псевдометрики должны быть согласованы с действием группы.

Определение 2.9. Псевдометрика $\rho_G(\cdot; \cdot)$ называется *левоинвариантной* на группе G , если для любых $f, g, h \in G$ выполнено

$$\rho_G(g; h) = \rho_G(fg; fh).$$

Пример 2.7. Метрика ρ из предложения 1.4 на конечно порожденной группе левоинвариантная и собственная.

Доказательство. Левоинвариантность мы уже доказали в предложении 1.4.

Собственность же следует из конечнопорожденности группы G . А именно, число слов данной длины конечно, следовательно множество элементов в шаре данного радиуса конечно. $\square$

Упражнение 2.6. Проверьте, что если группа G несчетна (и, следовательно, не является конечно порожденной), то псевдометрика ρ_G не будет собственной.

Определение 2.10. Будем называть псевдометрику ρ *псевдометрикой Шварца–Милнора* (или коротко ШМ-псевдометрикой), если она собственная (в частности крупномасштабная) и левоинвариантная.

Начнём с того, что покажем связь между метрической связностью и конечной порожденностью. Это, фактически, кусок теоремы Шварца–Милнора.

Лемма 2.1. Пусть (G, ρ) — пространство с ШМ-псевдометрикой. Тогда (G, ρ) метрически связно тогда и только тогда, когда группа G — конечнопорождённая.

Доказательство. $\Leftarrow$ Итак, имеем конечно порожденную группу $G = \langle \mathcal{X} \rangle$. Выберем

$$M := \max\{\rho(e; x) \mid x \in \mathcal{X}\}.$$

Покажем связность нейтрального элемента e и элемента группы g , который записан в алфавите $\mathcal{X}$. То есть $g = x_1 \dots x_n$ для некоторых $x_i \in \mathcal{X}$. Возьмем множества $A_i = x_1 \dots x_i$ из определения метрической связности.

В силу левоинвариантности ρ получаем, что аналогично связаны и любые два элемента группы. Значит (G, ρ) — метрически связно.

$\Rightarrow$ За систему образующих в G можно взять множество

$$\mathcal{X} := \{g \in G \mid \rho(e; g) \leq M\}.$$

Из шварцмилноровости ρ имеем, что система $\mathcal{X}$ конечна. И легко видеть, что она порождает всю группу. □

Для доказательства теоремы Шварца–Милнора нам потребуется конкретное семейство псевдометрик на группе G , порождаемых её действием на пространстве X .

Пусть G действует изометриями на пространстве X и зафиксируем точку $x_0 \in X$. Зададим функцию $\rho_{x_0} : G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ по формуле

$$\rho_{x_0}(g; h) := \rho_X(g \cdot x_0; h \cdot x_0). \quad (2.1)$$

В правой части последней формулы, отметим, метрика в пространстве X .

Упражнение 2.7. Проверьте, что ρ_{x_0} — левоинвариантная псевдометрика.

Заметим, что метрикой эта функция быть не обязана: расстояние между двумя точками вполне может оказаться нулевым, если вдруг оказалась так, что $g(x_0) = h(x_0)$.

Лемма 2.2. Пусть ρ и ρ' две ШМ-псевдометрики на группе G , тогда $(G, \rho) \stackrel{c}{\sim} (G, \rho')$.

Доказательство. Достаточно проверить, что отображение $id : (G, \rho) \rightarrow (G, \rho')$ будет грубым. Собственность этого отображения следует из крупномасштабности и собственности: все шары конечны в обеих псевдометриках.

Проверим борнологичность. Пусть $r > 0$. Возьмем шар радиуса r относительно псевдометрики ρ

$$B(e, r) := \{g \mid \rho(e; g) \leq r\}.$$

Шар конечен (в силу шварцмилноровости), значит для некоторого S он содержится в шаре радиуса S относительно псевдометрики ρ' . То есть

$$\forall g \in B : \rho'(e; g) \leq S.$$

В силу левоинвариантности, та же самая константа S будет годиться и для шара с любым другим центром. Значит отображение борнологично. $\square$

Отсюда следует, конечно, что все такие псевдометрики будут эквивалентны и групповой метрике.

Лемму 2.2 можно вывести и из следующего, более общего, утверждения.

Предложение 2.2. Пусть G и H — группы, а (G, ρ_G) и (H, ρ_H) — пространства с ШМ-псевдометриками. Тогда отображение $f : (G, \rho_G) \rightarrow (H, \rho_H)$ борнологическое тогда и только тогда, когда для любого $F \subset G$ такого что $|F| < \infty$ существует $E \subset H$, $|E| < \infty$ такой что $\forall x, y \in F$ из $x^{-1}y \in F$ следует $f(x)^{-1}f(y) \in E$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $F \subset G$ причем $|F| < \infty$. Тогда для

$$R := (\max_{g \in F} \{\rho_G(e; g)\} + 1)$$

используя борнологичность отображения f выберем соответствующее $S_R = S$ так, что из неравенства $\rho_G(g, h) < R$ следует $\rho_H(f(g), f(h)) < S$. Теперь определим

$$E := \{x \in H \mid \rho_H(e; x) < S\}.$$

Видим, что из $x^{-1}y \in F$ следует $\rho_G(x; y) < R$ из чего

$$S > \rho_H(f(x); f(y)) = \rho_H(e; f(x)^{-1}f(y)).$$

Равенство получаем из левоинвариантности ρ_H , а значит $f(x)^{-1}f(y) \in E$.

$\Leftarrow$ Фиксируем $R > 0$ и замечаем, что для множества

$$F = \{x \in G \mid \rho_G(e; x) < R\}$$

в силу собственности ρ_G выполняется условие $|F| < \infty$ и существует множество E такое, что из $x^{-1}y \in F$ следует что $f(x)^{-1}f(y) \in E$.

Определяя $S_R := 1 + \max_{h \in E} \{\rho_H(e; h)\}$ и используя левоинвариантность ρ_H видим, что из $\rho_G(x; y) < R$ следует

$$\rho_H(f(x); f(y)) = \rho_H(e; f(x)^{-1}f(y)) < S_R.$$

$\square$

2.3 Теорема Шварца-Милнора

Напомним формулировку.

Теорема 2.1. Пусть X — собственное метрическое пространство длин и группа G действует изометриями на X собственнo и кокомпактно. Тогда $G \stackrel{c}{\sim} X$ и группа G — конечно порожденная.

План доказательства теоремы Шварца-Милнора таков.

- При помощи действия группы на пространстве X мы построим на группе левоинвариантную G псевдометрику.
- Из свойств действия (кокомпактность и собственность) мы получим, что эта псевдометрика удовлетворяет некоторым условиям, которые эквивалентны конечности всех шаров относительно псевдометрики (это определенные выше псевдометрики Шварца-Милнора).
- Ну и нам останется показать, что все такие псевдометрики на пространстве эквивалентны, и вывести конечную порожденность из метрической связности.

2.3.1 Доказательство теоремы

Для доказательства нам потребуется чуть глубже разобраться как устроено ШМ-псевдометрики, для чего дадим еще одно определение.

Определение 2.11. Подпространство $A \subset (X, \rho)$ называется

- метрически дискретным, если существует $s > 0$ такое, что $\rho_X(a, b) > s$ для любых $a, b \in A$, $a \neq b$;
- топологически дискретным, если у каждой точки есть окрестность, которая не содержит других точек множества.

Разница между этими понятиями демонстрируется следующим примером.

Упражнение 2.8. Множество $\{\frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой — дискретно топологически, но не метрически.

Перейдём к следующей лемме, характеризующей ШМ-псевдометрики.

Лемма 2.3. Функция ρ_{x_0} является ШМ-псевдометрикой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- Стабилизатор $St(x_0) = \{g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0\}$ конечен;
- Орбита $G \cdot x_0$ топологически дискретна;
- Каждое ограниченное множество $U \subset G \cdot x_0$ являющееся метрически дискретным — конечно.

Доказательство. $\Rightarrow$ Ясно, что если одно из условий не выполняется, то существует $r > 0$ такое, что шар $B(e, r)$ бесконечен, значит ρ_{x_0} не является ШМ-метрикой.

$\Leftarrow$ Предположим, что условия леммы выполнены. Пусть найдётся бесконечный шар $B(e, r)$ для какого-то $r > 0$. Выберем в нём какую-нибудь точку g_1 .

Рассмотрим множество точек $\{g_i\}_{i=1}^k \subset B(e, r)$ таких, что $\rho_X(g_i \cdot x_0; x_0) < \frac{r}{i}$. Определяя $A := B(e, r) \setminus \{g_i\}_{i=1}^k$ и замечаем, что множество $\{A \cdot x_0\}$ бесконечно (иначе стабилизатор x_0 был бы бесконечен). Следовательно, существуют два разных элемента $g, h \in A$ такие, что $g \cdot x_0 \neq h \cdot x_0$ и $\rho_X(g \cdot x_0, h \cdot x_0) < \frac{r}{k+1}$. Теперь продолжим набор элементом $g_{k+1} = g^{-1}h$ и повторим процедуру.

Получаем последовательность точек $\{g_i\}$ таких, что $g_i \cdot x_0 \rightarrow x_0$ — что и даёт противоречие. $\square$

В собственном пространстве длин (X, ρ_X) все бесконечные ограниченные подмножества содержат бесконечную последовательность Коши (в метрических пространствах секвенциальная компактность равносильна компактности).

Лемма 2.4. *Если группа G действует изометриями на X и $x_0 \in X$, то псевдометрика ρ_{x_0} шварцмилнорова тогда и только тогда, когда существует окрестность U точки x_0 такая, что множество $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ — конечно.*

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что множество $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ конечно. Тогда не существует сходящейся последовательности $g_n \cdot x_0 \rightarrow x_0$, чтобы все g_n были различны.

$\Rightarrow$ Выберем любой шар $U = B(x_0, r)$. Теперь $g \cdot U \cap U \neq \emptyset$ означает, что существует такой x_g , что $\rho_X(g \cdot x_g; x_0) < r$. Таким образом $\rho_{x_0}(g; e) = \rho_X(g \cdot x_0; x_0) \leq \rho_X(g \cdot x_0; g \cdot x_g) + \rho_X(g \cdot x_g; x_g) + \rho_X(x_g; x_0) \leq r + 2r + r = 4r$ и число таких g конечно в силу шварцмилноровости. $\square$

Остается свести всё вместе и доказать теорему 2.1.

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Группа G действует кокомпактно и собственно изометриями на пространстве длин X , являющимся собственным. Покажем, что отображение $g \rightarrow g \cdot x_0$ задаёт грубую эквивалентность $G \stackrel{c}{\sim} X$.

- По лемме 2.4 получаем, что псевдометрика ρ_{x_0} является ШМ-псевдометрикой.
- Из леммы 2.2 получаем, что любые две ШМ-псевдометрики эквивалентны, а значит они эквивалентны и обычной словарной метрике ρ_G .
- Орбита Gx_0 по лемме 2.3 грубо эквивалентна пространству X так что отображение $g \mapsto g \cdot x_0$ порождает грубую эквивалентность.
- Остается заметить, что из кокомпактности действия группы G следует метрическая связность пространства X и, следовательно, применима лемма 2.1, что и даёт конечную порожденность группы G .

$\square$

2.3.2 Следствия теоремы Шварца-Милнора

Мы уже доказывали (см. Предложение 1.3) что графы Кэли для разных конечным систем образующих грубо эквивалентны. Но теперь мы можем это получить и как следствие из теоремы Шварца-Милнора.

Следствие 2.1.1. *Для двух систем образующих $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ группы G выполняется $\text{Cayley}(G, \mathcal{X}) \stackrel{\circ}{\sim} \text{Cayley}(G, \mathcal{Y})$.*

Доказательство. Чтобы применить теорему нужно заметить, что G действует на $\text{Cayley}(G, \cdot)$ кокомпактно и собственнo. □

Для геометрической теории групп характерно рассматривать подгруппы конечного индекса, которые в некотором смысле «порождают» саму группу. Напомним, что подгруппа $H < G$ называется *подгруппой конечного индекса*, если множество правых (или левых, безразлично) классов смежности gH конечно. Их количество, называют *индексом подгруппы*.

Следствие 2.1.2. *Пусть $H < G$ подгруппа конечного индекса группы G , тогда $\text{Cayley}(H) \stackrel{\circ}{\sim} \text{Cayley}(G)$.*

Следствие 2.1.3. *Если $H_1 < G_1$ подгруппа конечного индекса группы G_1 и $H_2 < G_2$ подгруппа конечного индекса группы G_2 , и $H_1 \stackrel{\circ}{\sim} H_2$, то $G_1 \stackrel{\circ}{\sim} G_2$.*

Для доказательства обоих следствий нужно сообразить как группа действует на графе Кэли своей подгруппы и увидеть, что соответствие посылке теоремы Шварца-Милнора равносильно конечности индекса.

С грубой точки зрения эквивалентность группы своей подгруппе конечного индекса – штука крайне важная. Позже мы, к примеру, докажем что группа обладает полиномиальным ростом $\leftrightarrow$ у нее есть нильпотентная подгруппа конечного индекса (такие группы называют виртуально нильпотентными).

Ещё одним полезным следствием теоремы Шварца-Милнора является возможность строить решётки в пространстве, оснащённом действием группы G . Берём точку $x_0 \in X$ и рассматриваем орбиту действия для данной точки, т.е.

$$Gx_0 = \{g(x_0) \mid g \in G\}.$$

Следствие 2.1.4. *Для всякой точки $x_0 \in X$ её орбита Gx_0 относительно действия группы удовлетворяющего условию теоремы Шварца-Милнора, будет решёткой и грубо эквивалентна пространству X .*

Именно так дела и обстоят к примеру для группы Гейзенберга.

Пример 2.8. Непрерывная группа Гейзенберга (вещественные верхние унитреугольные матрицы) грубо эквивалентная дискретной группе Гейзенберга (целочисленные верхнеунитреугольные матрицы).

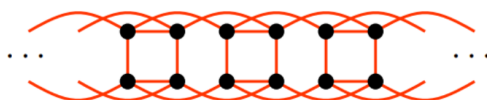
Многие приложения теоремы Шварца-Милнора связаны с гиперболическими пространствами (см. [ВН99]), о которых мы поговорим позже.

Задачи

1. Докажите, что граф Кэли конечнопорожденной группы G квазиизометричен прямой если и только если в G есть циклическая подгруппа конечного индекса.
2. а) Докажите, что банаховы пространства с эквивалентными нормами – грубо эквивалентны.
 б) Верно ли, что если тождественное отображение между банаховыми пространствами $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ является грубой эквивалентностью, то нормы эквивалентны?
 в) Верно ли, что если $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ грубо эквивалентны, то и нормы эквивалентны?
3. Докажите, что в геодезическом пространстве борнологичность и крупномасштабная липшецевость – эквивалентны.
4. Какие из указанных пространств будут грубо эквивалентны друг другу: $\ell_p(\mathbb{R}^2)$ для всевозможных $p \geq 1$, $\ell_\infty(\mathbb{R}^2)$.
5. Что можно сказать про группу G , если некоторый её граф Кэли
 - древесен;
 - двудолен;

Будут ли данные свойства сохраняться при выборе другой системы образующих? (иными словами: являются ли эти свойства грубыми).

6. Существует ли группа с графом Кэли как на рисунке?



7. Любая ли группа квазиизометрична некоторому своему остовному дереву (т.е. остову своего графа Кэли)?
8. Существует ли конечно порожденная группа, квазиизометричная ℓ_2 ?
9. Существует ли группа квазиизометричная лучу $[0; +\infty)$?
10. Имеем пространство с псевдометрикой (X, ρ) . Введем отношение $\sim$ так: $a \sim b \iff \rho(a, b) = 0$. Будет ли $\sim$ отношение эквивалентности? Будет ли X/ρ метрическим относительно порожденной метрики?

11. Покажите, что для *произвольной* группы G существует такое метрическое пространство, что G действует на нём изометриями, причём кокомпактно и собственнo.
12. Теорема Шварца-Милнора – достаточное условие конечнопорождённости и квазиизометричности. А является ли оно необходимым? Т.е. всегда ли для конечнопорождённой группы G и квазиизометричного ей пространства X , удовлетворяющегосылке теоремы Шв.-М., *существует* действие G на X , удовлетворяющеесылке Шварца-Милнора?
13. Пусть $\lambda : G \times G \rightarrow G$ – действие конечнопорожденной группы $G = \langle X \rangle$ на себе. Рассмотрим граф $sk(G; \lambda)$ в котором вершины $V(sk(G; \lambda)) = G$, а ребро с меткой $x \in X$ соединяет a и b если $x(a) = b$.
 - Докажите, что графы $sk(G; \lambda)$ для разных систем образующих грубо эквивалентны.
 - Опишите действия λ для которых граф $sk(G; \lambda)$ грубо эквивалентен группе.

Часть II

Грубые пространства и компактификации

Лекция III: грубые структуры

Еще раз скажем, что главная идея грубой геометрии состоит в том, что при грубом отображении близкие точки могут перестать быть близкими, но они должны остаться «недалекими» (не в ментальном, разумеется, смысле), то есть расстояние должно изменяться контролируемым образом. Эта идея подводит нас к понятию грубой структуры, которая в известном смысле аналогична понятию топологии. Неформально выражаясь, элементы грубой структуры представляют пары «недалеких точек» (тогда как открытое множество содержит в себе множество «близких точек»).

Наша ближайшая цель – дать определение грубой структуры и выяснить, при каких условиях грубая структура метризуема. В частности нам будет интересно выяснить вот что:

- Условия метризуемости: какой должна быть грубая структура, чтобы пространство было грубо эквивалентно метрическому?
- Условие геодезичности: какой должна быть метризуемая грубая структура, чтобы пространство было грубо эквивалентно геодезическому?

3.1 Определение грубых структур

Зафиксируем X — пространство (на этом месте можно было бы сказать — множество, поскольку X не обязано быть не только метрическим, но даже и топологическим пространством).

Грубая структура это удовлетворяющее определенным условиям систем подмножеств декартова квадрата $X \times X$. Чтобы её определить нам потребуются кое-какие обозначения. Для множеств $E, \tilde{E} \in 2^{X \times X}$, $K \subset X$ и $x \in X$ введём обозначения:

- $E^{-1} := \{(x', x) \in 2^{X \times X} \mid (x, x') \in E\}$;
- $E(K) := \{x' \in X \mid \exists x \in K : (x', x) \in E\}$;
- $E_x := E(x) = \{x' \in X \mid (x', x) \in E\}$;
- $E^x := E^{-1}(x) = \{x' \in X \mid (x, x') \in E\}$.

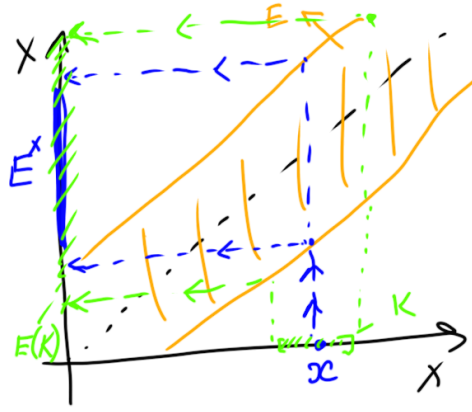
Множества E_x и E^x называют E -шарами.

Для прояснения геометрической ситуации см. рис. III.I. Симметричность значит отражение относительно диагонали. $E(x)$ – взятие окрестности, $E(K)$ тоже взятие окрестности, но уже множества K .

Также нам потребуется операция на элементах грубой структуры

$$E \circ \tilde{E} := \{(x, x'') \in 2^{X \times X} \mid \exists x' : (x, x') \in E \text{ и } (x', x'') \in \tilde{E}\}. \quad (3.1)$$

Мы будем пользоваться обозначением $E^n := E^{n-1} \circ E$.


 Рис. III.I: Геометрический смысл E^x и $E(K)$

Пример 3.1. Пусть $E_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — множество всех пар точек (x, x') расстояние между которыми не превышает единицы $\rho(x; x') < 1$.

- $E_1^2 = E_1 \circ E_1 = \{(y, y') \mid \rho(y; y') < 2\}$;
- И вообще E_1^n это множество пар всех таких точек (y, y') , что $\rho(y; y') < n$. То есть

$$E_1^n = \{(y, y') \mid \rho(y; y') < n\}.$$

Доказательство сразу следует из неравенства треугольника.

Упражнение 3.1. • Докажите, что операция $\circ$ будет ассоциативной;

- Докажите, что диагональ $\text{diag}_{X \times X} := \{(x, x) \mid x \in X\}$ является нейтральным элементом относительно операции $\circ$;
- Для каких множеств $E, \tilde{E}$ операция $\circ$ коммутативна?

3.1.1 Грубое пространство

Наконец настало время определить грубую структуру на произвольном (не обязательно метрическом!) пространстве.

Определение 3.1. Пространство $(X, \mathcal{E})$ называется *грубым*, а $\mathcal{E} \subset 2^{X \times X}$ — *грубой структурой*, если для $\mathcal{E}$ выполнены следующие условия:

- Если $E \in \mathcal{E}$, то для любого подмножества $E_1 \subset E$ имеем $E_1 \in \mathcal{E}$;
- Если $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$, то $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$;
- Если $E \in \mathcal{E}$, то $E^{-1} \in \mathcal{E}$;
- Если $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, то $E_1 \circ E_2 \in \mathcal{E}$;
- $\text{diag}_{X \times X} = \{(x, x) \mid x \in X\} \in \mathcal{E}$.

Элементы грубой структуры называют *контролируемыми множествами*.

То есть грубая структура замкнута относительно взятия подмножеств, конечных объединений и введённых выше операций $\cdot^{-1}$, $\circ$ и содержит диагональ.

Выполнившие упражнение 3.1, на самом деле доказали следующее

Предложение 3.1. *Грубая структура $\mathcal{E}$ с операцией $\circ$ образует моноид, то есть полугруппу с единицей*

Сразу из определения легко понять, что грубые структуры можно пересекать.

Предложение 3.2. *Пересечение грубых структур – грубая структура.*

Естественно ввести отношение порядка относительно включения. То есть если $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, то грубая структура $\mathcal{E}_1$ *слабее* чем $\mathcal{E}_2$. Как и в случае топологий есть самая сильная (максимальная) грубая структура и самая слабая (минимальная). Ну а всё интересное расположено, разумеется, между ними.

Пример 3.2. Максимальная грубая структура имеет вид

$$\mathcal{E}_{full} := 2^{X \times X}.$$

Пример 3.3. Дискретная (она же минимальная) грубая структура имеет вид

$$\mathcal{E}_{discr} := 2^{\text{diag} X \times X}.$$

3.1.2 Метрические грубые структуры

Приведём два примера поинтереснее, связанных с метрическими пространствами.

Пример 3.4. В метрическом пространстве (X, ρ) назовем *ограниченной грубой структурой* систему $\mathcal{E}$, состоящую из всех множеств E , таких что

$$E \in \mathcal{E} \iff \exists C : \forall (x, x') \in E \rightarrow \rho(x; x') < C. \quad (3.2)$$

Прежде чем проверить аксиомы грубой структуры, отметим, что нас не беспокоит возможное наличие каких-то «диких» множеств в $\mathcal{E}$. Главное чтобы множество состояло из пар точек расстояние между которыми равномерно ограничено.

Доказательство. • Первое условие из определения грубой структуры для $\mathcal{E}$ очевидно: если $E \in \mathcal{E}$, то и его подмножества такие же. Ну и проверка принадлежности для конечных объединений (второе условие) тоже очевидна. Третье свойство выполнено по свойству симметричности метрики.

- Четвертое условия достаточно проверить для множеств вида

$$E_\mu := \{(x, x') \mid \rho(x; x') \leq \mu\}. \quad (3.3)$$

Действительно, $E_{\mu_1} \circ E_{\mu_2} = \{(x, x'') \mid \exists x' : \rho(x; x') \leq \mu_1, \rho(x'; x'') \leq \mu_2\}$ и по неравенству треугольника для метрики $E_{\mu_1} \circ E_{\mu_2} \subseteq E_{\mu_1 + \mu_2}$.

- Остается заметить, что диагональ это как раз E_0 .

□

Кошачьи советы. Для пространства чьи точки это кошки, а метрика это расстояние между ними в определённый момент времени примерами контролируемых множеств будут:

- Множество пар кошек, проживающих в соседних квартирах;
- Множество пар кошек, проживающих в соседних домах.

Множество пар кошек-сестер уже не будет контролируемым, потому что всегда может найтись пара кошек-сестер, которые оказались сколь угодно далеко (во вселенной).

Чтобы лучше освоиться с понятием контролируемого множества, рассмотрим ещё один пример. Множество E_α для $\mathbb{R}$ можно изобразить в виде полосы параллельной диагонали (x, x) (см. картинку III.1).

Приведем пример множества, которое не является контролируемым для введенной только что ограниченной грубой структуры.

Пример 3.5. Рассмотрим пространство $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, где $x_i = 2^i$, $X \subset \mathbb{N}$ и на X есть метрика из $\mathbb{N}$, задающая грубую структуру. Рассмотрим множество

$$\hat{E} = \{(x_0, x_1); (x_1, x_2); (x_2, x_3); \dots\},$$

из $\rho(x_i; x_{i+1}) = 2^i$ следует, что $E \notin \mathcal{E}$.

Следующий тип грубой структуры был предложен N. Wright в работах [Wri02; Wri03]. Далее будем через $\mathcal{K}(X)$ обозначать все компактные подмножества в метрическом пространстве X .

Пример 3.6. В метрическом пространстве (X, ρ) назовем *грубой метрической структурой* систему $C_0(X)$ множеств таких, что для каждого $E \in C_0(X)$ выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K}(X) : \forall (x, x') \in E \setminus (K \times K) \rightarrow \rho(x; x') < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Проверку того, что C_0 является грубой структурой оставим читателю.

Ещё одним источником грубых структур являются борнологии групп (и соответствующие борнологические группы, см. определение 12.1), к которым мы вернёмся в самом конце нашего курса.

В заключение сделаем следующее замечание.

Предложение 3.3. Пусть X, Y – метрические пространства, эквивалентные как грубые пространства с ограниченными метрическими структурами. Тогда они являются грубо эквивалентными как метрические пространства.

Доказательство сразу следует из определения.

3.2 Свойства грубых структур

Чтобы немного освоиться, разберемся с некоторыми основными понятиями, связанными с грубыми структурами.

Начнём с определения грубо связной пространства.

Определение 3.2. Грубое пространство $(X, \mathcal{E})$ называется *грубо связным*, если каждая точка $X \times X$ принадлежит какому-то контролируемому множеству.

Понятно, что любое метрическое пространство будет грубо связным (но не обязательно будет метрически связным: см. пример 2.5).

Интуиция должна работать так: невыполнение условия грубой связности обозначает, что есть «несоизмеримые» точки, то есть такие, что расстояние между ними измерить нельзя (или оно бесконечно, что в общем-то является казуистикой).

Если на дизъюнктном (несвязном) объединении двух метрических пространств задать грубую структуру как дизъюнктное объединение ограниченных грубых структур – как раз и получится грубо несвязное пространство.

Теперь определим прямой аналог метрической связности. Для этого нам нужно *симметричное контролируемое множество* E . То есть такое, что

$$\forall (x, x') \in E \Rightarrow (x', x) \in E.$$

Итак, пусть $(X, \mathcal{E})$ — грубое пространство, $E \in \mathcal{E}$ — симметричное контролируемое множество.

Определение 3.3. Будем называть подпространство X — E -*связным*, если для любых $x, x' \in X$ существует такой набор точек $\{x_1, \dots, x_n\}$, что $(x_i, x_{i+1}) \in E \forall i$ и $x_1 = x, x_n = x'$.

Упражнение 3.2. Проверьте, что метрическая M -связность равносильна для ограниченной метрической грубой структуры E_M -связности.

Перейдем к тому, как определять грубые структуры. Зафиксируем какое-нибудь множество $S \subset 2^{X \times X}$.

Определение 3.4. Будем говорить, что S порождает грубую структуру $\mathcal{E}$ если

- $S \subset \mathcal{E}$;
- Структура $\mathcal{E}$ минимальная по включению среди всех структур, содержащих S .

В таком случае будем писать $\mathcal{E} = \langle S \rangle$.

Неиронично проверим корректность определения.

Предложение 3.4. Для всякого множества S грубая структура $\mathcal{E}$ определена и единственна.

Доказательство. • Пусть $\mathcal{E}_\alpha$ — семейство из всех грубых структур, содержащих множество S , проиндексированное $\alpha \in A$. Семейство таких $\mathcal{E}_\alpha$ не пусто, так как заведомо содержит $\mathcal{E}_{full}$.

- Рассмотрим $\mathcal{E}_S := \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{E}_\alpha$. Любое (хоть конечное, хоть бесконечное) пересечение грубых структур снова грубая структура.
- Из построения видно, что так определённая $\mathcal{E}_S$ минимальна по включению. $\square$

Идея порождающих множеством аналогична понятию базы топологии. Порождающая система это минимально необходимый набор множеств, из которых собирается всё остальное. Как и в случае с базой, можно взять порождающую систему избыточной. Ну, а вопрос определения (и существования) минимальных систем порождающих мы оставим для самостоятельного размышления.

3.2.1 Метризуемость грубых структур

Перейдём к важному вопросу: как по грубой структуре понять, является ли грубое пространство метрическим. Точнее, будет ли оно грубо эквивалентно некоторому метрическому пространству?

Прежде всего заметим, что ограниченная грубая структура является счётно порожденной.

Пример 3.7. Ограниченная грубая структура $\mathcal{E}$ для метрического пространства (X, ρ) порождена множествами $E_n, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При разборе примера 3.4 мы заметили, что для множеств E_μ , определённых формулой (3.3), справедливо включение

$$E_{\mu_1} \circ E_{\mu_2} \subseteq E_{\mu_1 + \mu_2}.$$

Остается заметить, что любой элемент ограниченной грубой структуры содержится в некотором E_n как подмножество. Дальнейшую проверку оставим читателю. $\square$

Оказывается, что верно и обратное: это и будет обещанным критерием метризуемости грубой структуры. Но перед этим дадим формальное определение.

Определение 3.5. Грубое пространство $(X, \mathcal{E})$ назовем *метризуемым*, если найдется такая метрика ρ , что $\mathcal{E}$ является ограниченной грубой структурой метрического пространства (X, ρ) .

Следует отметить, что соответствующих метрик существует много. И надеяться на какую-то однозначность восстановления метрики не приходится (не очень-то и хотелось).

Теорема 3.1. Грубое пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно не более чем счётно порождено и грубо связно.

Доказательство. $\Rightarrow$ Достаточно взглянуть на пример 3.7.

$\Leftarrow$ Пусть грубая структура счетно порождена системой множеств $\mathcal{E} = \langle E_i \rangle, i \in \mathbb{N}$. (не путайте с множествами, которые мы строили для ограниченной грубой структуры, здесь у нас общий вид и нижний индекс просто упорядочивает набор $\mathcal{E}$).

Доказательство теоремы в эту сторону мы проведём следующим образом. Сначала мы «симметризуем» систему E_i , построив новую систему $\mathcal{F}$, а потом с её помощью зададим метрику.

- Положим $F_0 := \text{diag}_{X \times X}$. Далее по индукции определим систему множеств $F_n \subset X \times X$ следующим образом

$$F_n := (F_{n-1} \circ F_{n-1}) \cup E_n \cup E_n^{-1}. \quad (3.5)$$

Отметим несколько свойств. Во-первых $F_n = F_n^{-1}$, то есть множества симметричны. Во-вторых

$$\text{diag}_{X \times X} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$$

Рассмотрим грубую структуру $\mathcal{F} := \langle F_i \rangle, i \in \mathbb{N}$.

- Покажем что $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.
 - * По определению все $E_i \subset F_i$, а значит $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.
 - * Диагональ $\text{diag}_{X \times X} = F_0 \in \mathcal{E}$. Если $F_i \in \mathcal{E}$, то и F_{i+1} тоже содержится в $\mathcal{E}$, поскольку в формуле (3.5) все операции оставляют наше множество внутри $\mathcal{E}$. Значит $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.
 - * Заключаем, что грубые структуры $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ совпадают и множество $\{F_i\}$ также порождает и грубую структуру $\mathcal{E}$.
- Теперь определим при помощи множества $\{F_i\}$ метрику на пространстве X для точек $x, x' \in X$ по формуле

$$\rho_{\mathcal{F}}(x; x') := \inf_{n \in \mathbb{N}} \{(x, x') \in F_n\}. \quad (3.6)$$

Убедимся, что это действительно метрика.

- i Симметричность следует из симметричности F_n ;
- ii $\rho_{\mathcal{F}}(x; x') = 0$ только если $(x, x') \in F_0$, но множество F_0 по определению диагональ, а значит равенство нулю бывает исключительно когда $x = x'$. Из грубой связности получаем, что любая пара (x, x') попадет в какое-то из контролируемых множеств $E \in \mathcal{E}$, а значит и в какое-то F_n ;
- iii Неравенство треугольника проверим для точек $x, x', x'' \in X$. Пусть $(x, x') \in F_n$ и $(x', x'') \in F_m$ причем $n \geq m$. Тогда $(x, x'') \in F_n \circ F_m \subset F_{n+1}$. Тогда имеем

$$\rho_{\mathcal{F}}(x; x'') \leq \max\{\rho_{\mathcal{F}}(x; x'), \rho_{\mathcal{F}}(x'; x'')\} + 1. \quad (3.7)$$

Это неравенство даже сильнее обычного неравенства треугольника.

- Остается заметить, что $\mathcal{F}$ является ограниченной грубой структурой для метрики $\rho_{\mathcal{F}}$.

□

Отметим, что метрика, которая у нас получилась удовлетворяет «усиленному» неравенству треугольника из формулы (3.7), но слабее чем достаточно известное понятие *ультраметрики*. Ультраметрическим неравенством треугольника называют соотношение

$$\rho(x; x'') \leq \max\{\rho(x; x'), \rho(x'; x'')\}.$$

Упражнение 3.3. Докажите, что для $\mathbb{R}$ -деревьев условие (3.7) можно усилить до ультраметрического неравенства треугольника.

Также отметим, что в формулировке теоремы 3.1 можно отказаться от грубой связности. Для этого нужно понимать понятие метрики в расширенном смысле: разрешить несоизмеримые точки x, x' такие, что $\rho(x; x') = \infty$. Для таких пар точек в формуле (3.6) как раз и получится бесконечность.

Разрешать ли метрике принимать бесконечные значения – дело вкуса. Нам такая вольность кажется излишней.

Следствие 3.1.1. *Грубое пространство представимо в виде дизъюнктного объединения метрических пространств тогда и только тогда, когда грубая структура счетно порождена.*

Примеры неметризуемых грубых пространств будут приведены позже, после обсуждения компактификаций. А пока ограничимся упражнением.

Упражнение 3.4. Для каких пространств X максимальная грубая структура не будет метризуемой?

О сравнении с топологическими пространствами

Топологически подкованный читатель наверняка увидел сходство между теоремой 3.1 и аналогичной теоремой о метризуемости пространств Фреше. Напомним, что Хаусдорфово топологическое векторное пространство (см. ниже определение 4.1), оснащенное *счетной разделяющей системой полунорм* (это и есть пространство Фреше) – метризуемо. При этом, пожалуй, единственным примером функционального пространства, встречающегося в курсе анализа, и не являющегося метризуемым – является пространство финитных функций (функции с компактным носителем).

Разумно вспомнить и про более тонкие результаты, которые касаются общего класса топологических пространств. Например, теорема Нагаты-Смирнова утверждает, что топологическое пространство метризуемо если и только если оно регулярно, Хаусдорфово и обладает счетной локально финитной базой. Другой известный результат (теорема Бинга) утверждает, что метризуемость равносильна регулярности, выполнению аксиомы T_0 и наличию σ -дискретной базы.

Отметим, что доказанный нами критерий метризуемости грубой структуры (счетная порожденность и грубая связность структуры) и для проверки проще, чем упомянутые результаты, и в целом куда прозрачнее.

Впрочем, как мы выясним дальше, свойство метризуемости для «полезных» грубых структур не выполняется чаще чем хотелось бы. Например грубые компактификации метризуемы не будут, о чём мы поговорим в разделе 5.1.3.

Однако прямо сейчас мы сосредоточимся на том, что ещё можно извлечь из того, как устроена система порождающая грубую структуру.

3.2.2 Моногенные грубые структуры и геодезичность

По теореме 3.1 счётная порождённость грубой структуры равносильна метризуемости. А что будет, если ужесточить это условие, потребовав конечной порождённости¹? Оказывается, что мы получим критерий грубой геодезичности пространства.

Начнём с того, что как следует из определения 3.4, конечная порождённость грубой структуры равносильна порождению её единственным множеством.

Предложение 3.5. *Если грубая структура конечно порождена, то она порождается единственным множеством.*

Так что далее будем использовать термин моногенность.

Определение 3.6. Грубая структура на пространстве X называется *моногенной*, если она порождена единственным подмножеством $E \subseteq X \times X$.

Конечно, по теореме 3.1 грубое пространство с моногенной грубой структурой (будем говорить коротко *моногенное пространство*) – метризуемо. Обратное не имеет места: грубая структура на пространстве $X = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, порожденная метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}$, не является моногенной.

Ожидаемый факт: моногенность является грубым инвариантом.

Лемма 3.1. *Моногенность пространств является грубым инвариантом.*

Иными словами, если X, Y – эквивалентные грубые пространства и одно из них моногенно, то и второе тоже будет моногенным.

Перед тем как доказывать эту лемму, проверим несколько общих утверждений касательно грубых структур.

Предложение 3.6. *Пусть отображение $f: X \rightarrow X$ близко к тождественному id , и множество $E \subseteq X \times X$ – контролируемо. Тогда множество $(f \times f)^{-1}(E)$ также контролируемо.*

Доказательство. Так как f близко к id , то множество $F = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ является контролируемым. Тогда множество $(f \times f)^{-1}(E)$ является контролируемым, так как

$$(f \times f)^{-1}(E) = F \circ E \circ F^{-1}$$

и все множители в правой части контролируемы. □

Предложение 3.7. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – грубая эквивалентность, $F \subseteq Y \times Y$ – контролируемое множество. Тогда множество $(f \times f)^{-1}(F)$ – контролируемо в X .*

Доказательство. Так как f грубая эквивалентность, существует грубое отображение $g: Y \rightarrow X$, такое что $g \circ f \sim \text{id}_X$, $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Обозначим $h := g \circ f$. Множество $(g \times g)(F)$ контролируемо так как g грубое. Получаем включение множеств

$$(f \times f)^{-1}(F) \subseteq (h \times h)^{-1}((g \times g)(F)),$$

причем $(h \times h)^{-1}((g \times g)(F))$ контролируемо в силу предыдущего предложения. □

¹Текст этого раздела подготовлен совместно с Алексеем Наянзиным, за что ему большое спасибо

Упражнение 3.5. Докажите, что для произвольного грубого отображения $f: X \rightarrow Y$ и контролируемого $F \subseteq Y \times Y$ множество $(f \times f)^{-1}(F)$ не обязательно контролируемо.

Доказательство леммы 3.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ – отображения, осуществляющие грубую эквивалентность. То есть грубые и такие, что их композиции близки к id .

- Пусть грубая структура Y порождается множеством $F \subseteq Y \times Y$. Так как система $F \cup \Delta_Y$ также порождает грубую структуру, можем не теряя общности считать, что F уже содержит диагональ Δ_Y .

Согласно предложению 3.7, множество $(f \times f)^{-1}(F)$ является контролируемым.

- Покажем, что множество $(f \times f)^{-1}(F)$ порождает грубую структуру X .

Действительно, пусть E – произвольное контролируемое множество в X . Заметим, что $E \subseteq (f \times f)^{-1}((f \times f)(E))$. Так как F порождает грубую структуру Y , найдется n , такое, что

$$(f \times f)(E) \subseteq \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{n \text{ раз}}.$$

Отсюда получаем, что

$$(f \times f)^{-1}((f \times f)(E)) \subseteq (f \times f)^{-1}(F) \circ \dots \circ (f \times f)^{-1}(F).$$

- Значит $(f \times f)^{-1}((f \times f)(E))$ принадлежит грубой структуре, порожденной $(f \times f)^{-1}(F)$, а потому и E , как подмножество, тоже.

□

Аналогично показывается, что и свойство счетной порожденности пространства является инвариантом грубых эквивалентностей.

Упражнение 3.6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – грубая эквивалентность. Пусть грубая структура X порождается множеством E . Покажите, что грубая структура Y не обязательно порождается множеством $(f \times f)(E)$.

3.2.3 Геодезичность и моногенность

Пора понять геометрический смысл моногенности. Понятно, что она даёт нечто более сильное, чем метризуемость. Оказывается, что моногенность равносильна геодезичности пространства.

Теорема 3.2. Грубая структура на пространстве X является моногенной тогда и только тогда, когда X грубо эквивалентно геодезическому метрическому пространству.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть (X, ρ) – геодезическое метрическое пространство. Тогда его грубая структура порождается множеством

$$E_1 = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < 1\}.$$

В самом деле, пусть $E \subseteq X \times X$ – контролируемо в ограниченной грубой структуре. Тогда существует константа C такая, что для каждой пары $(x, y) \in E$ верно, что $\rho(x; y) < C$.

Рассмотрим точку $(x, y) \in E$. Пусть γ – геодезическая, соединяющая x и y . Так как её длина меньше C , мы можем представить её как объединение на $[C] + 1$ геодезических, длина каждой из которых меньше 1. То есть на γ можно найти точки $x = x_0, x_1, \dots, x_{[C]}, x_{[C]+1} = y$, такие, что $\rho(x_i, x_{i+1}) < 1$, при $i = 0, 1, \dots, [C]$.

Отсюда получаем, что $E \subseteq E_1 \circ \dots \circ E_1$, где произведение взято $[C]$ раз. Тем самым, грубая структура порождается E_1 .

Мы показали, что геодезическое пространство моногенно. С учётом леммы 3.1 получаем, что и любое пространство эквивалентное геодезическому, также моногенно.

⇒ Пусть грубая структура пространства X порождена множеством E .

Рассмотрим метрический граф Γ следующего вида. В качестве множества вершин возьмем $V(\Gamma) = X$. Вершины $x, y \in V(\Gamma)$ соединим ребром длины 1, если $(x, y) \in E$. Граф Γ с естественной метрикой является геодезическим метрическим пространством.

Пусть $f: X \rightarrow \Gamma$ тождественно отображает точки X в соответствующие вершины графа. Пусть $g: \Gamma \rightarrow X$ действует тождественно на вершинах, а точки из ребер отображает в одну из вершин, которые соединяет ребро. Оставим в качестве упражнения проверку того, что f и g задают грубую эквивалентность между X и Γ .

□

Выясним, какой вывод из этой теоремы можно сделать для метрических пространств.

Следствие 3.2.1. *Если грубая структура метрического пространства X — моногенна, то X метрически связно.*

Доказательство. Пусть грубая структура порождается множеством E . Тогда существует $M > 0$ такое, что $E \subseteq E_M = \{(x, x') \in X \mid \rho(x; x') < M\}$.

Множество E_M также является порождающим для грубой структуры. Это значит, что для каждого контролируемого подмножества F верно, что $F \subseteq E_M \circ \dots \circ E_M$.

Отсюда получаем, что метрическое пространство X является M -связным.

□

Обратное места не имеет: метрическое пространство, даже метрически связное не всегда можно «исправить» так, чтобы оно стало геодезическим.

Если в доказательстве следствия 3.2.1 положить $E = E_M$, то геодезическое восстанавливается строится следующим образом: все точки на расстоянии не больше M друг от друга мы соединяем ребром длины 1. Полученное пространство грубо эквивалентно исходному и является по теореме 3.2 геодезическим.

Упражнение 3.7. • Приведите пример метризуемого пространства, не являющегося грубо эквивалентного никакому геодезическому пространству;

- Приведите пример метрически связного метрического пространства, чья грубая структура не будет моногенной.

3.3 Грубые отображения и ограниченные множества

Наша следующая цель — расширить понятия ограниченности, собственности и борнологичности на случай произвольного грубого пространства. Разумеется, при таком определении мы будем стремиться к тому, чтобы для метрических пространств эти определения совпадали с привычными.

Начнем с понятия близости отображений. Пусть M — произвольное множество, $(X, \mathcal{E})$ — грубое пространство.

Определение 3.7. Два отображения $f, f' : M \rightarrow X$ называются *близкими*, если множество $\{(f(m), f'(m)) \mid m \in M\}$ — контролируемо в $\mathcal{E}$.

Лемма 3.2. В грубом пространстве $(X, \mathcal{E})$ для подмножества $B \subset X$ следующие свойства эквивалентны:

1. $B \times B \in \mathcal{E}$;
2. $B \times \star \in \mathcal{E}$ для какой-то $\star \in X$;
3. $B = E_\star$ для каких-то $E \in \mathcal{E}$ и $\star \in X$;
4. Естественное вложение $B \rightarrow X$ близко к константному $b \mapsto \star$.

Доказательство. (1 $\Rightarrow$ 2) $B \times \star$ и $\star \times B$ — контролируемы, так как являются подмножествами контролируемого множества $B \times B$.

(2 $\Rightarrow$ 1) потому что $B \times B = (B \times \star) \circ (\star \times B)$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Выбирая $E = B \times \star$.

(3 $\Rightarrow$ 2) Из 3 $B \times \star \subseteq E \in \mathcal{E}$, тогда $B \times \star$ контролируемое.

(3 $\Longleftrightarrow$ 4) следует из определения близости. $\square$

Определение 3.8. Назовем подмножество B грубого пространства X *ограниченным*, если оно удовлетворяет условиям леммы 3.2.

Множество ограниченных относительно грубой структуры $\mathcal{E}$ подмножеств будем обозначать $\mathcal{B}(X, \mathcal{E})$. Если грубая структура ясна из контекста, то будем писать коротко $\mathcal{B}(X)$.

Предложение 3.8. Если $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, то $\mathcal{B}(X, \mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{B}(X, \mathcal{E}_2)$.

Доказательство. Из леммы 3.2 видно, что если $B \times B$ было ограниченным относительно $\mathcal{E}_1$ то и относительно $\mathcal{E}_2$ оно также будет ограниченным. $\square$

Упражнение 3.8. Опишите $\mathcal{B}(X, \mathcal{E}_{\text{full}}), \mathcal{B}(X, \mathcal{E}_{\text{discr}})$.

В случае метрического пространства пункт 2 из леммы 3.2 и, следовательно, все остальные, эквивалентны тому, что $B \times B \subset E_\mu$, для $\mu = \rho(B, \star)$. Где E_μ определено формулой (3.3). Так что грубая ограниченность в метрических пространствах совпадает с обычной ограниченностью.

Проверим ещё несколько полезных свойств ограниченных множеств.

Предложение 3.9. Пусть $B \in \mathcal{B}(X)$ и $E \in \mathcal{E}$, тогда множество

$$E(B) := \{x' \mid \exists b \in B : (x', b) \in E\}$$

будет ограниченным.

ii Пусть X — грубо связное грубое пространство, а B_1 и $B_2 \subset X$ ограниченные множества, тогда $B_1 \cup B_2$ тоже ограничено.

Естественно понимать $E(B)$ как «грубую окрестность» множества B .

Доказательство. Первое свойство оставим в качестве упражнения, и перейдем к доказательству второго.

Из ограниченности множеств B_1 и B_2 мы знаем, что по лемме 3.2 множества $B_1 \times p_1$ и $B_2 \times p_2$ — также контролируемые.

Из грубой связности пространства X множество $\{(p_1, p_2)\}$ тоже контролируемое. Значит и множество $(B_1 \times p_1) \circ \{(p_1, p_2)\} = B_1 \times p_2$ вновь контролируемо, а следовательно, объединение $(B_1 \times p_2) \cup (B_2 \times p_2) = (B_1 \cup B_2) \times p_2$ контролируемо.

Остается заключить, что $B_1 \cup B_2$ — ограниченное множество. $\square$

Пусть X, Y — грубые пространства, и выберем отображение $f : X \rightarrow Y$.

Определение 3.9. Отображение f называется *собственным*, если для любого ограниченного $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ также ограничено.

Определение 3.10. Отображение f называется *борнологическим*, если для любого контролируемого E , множество $(f \times f)(E)$ тоже контролируемо.

Поясним, что под $(f \times f)(E)$ мы подразумеваем (см. также рис. III.II) следующее

$$(f \times f)(E) := \{(f(x), f(x')) | (x, x') \in E\}. \quad (3.8)$$

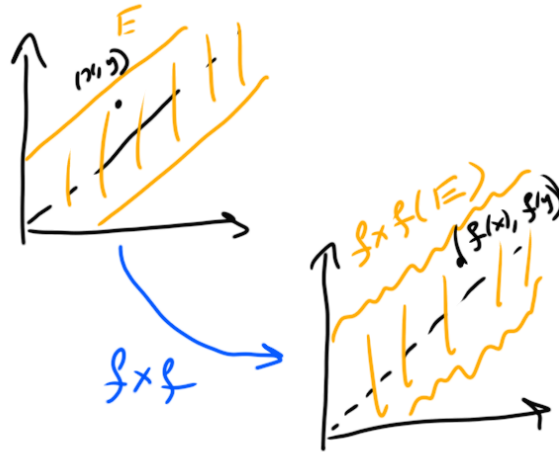


Рис. III.II: Отображение $(f \times f)(E)$

Определение 3.11. Отображение f называется *грубым*, если оно является собственным и борнологическим.

В случае метрических пространств получаем следующее.

Предложение 3.10. В случае грубой ограниченной структуры на метрическом пространстве понятия ограниченности, борнологичности и грубости совпадают с «метрическими» определениями.

От слова «грубость» наверное рябит в глазах, но что поделаешь.

Предложение 3.11. Грубый образ грубо связного пространства будет грубо связан.

Доказательство. Пусть X — грубо связное грубое пространство, и $f : X \rightarrow Y = f(X)$ грубое отображение. В силу грубой связности пространства X , любая точка $(p_1, p_2) \in X \times X$ является контролируемым множеством $\{(p_1, p_2)\} \in \mathcal{E}_X$. Из борнологичности имеем что образ $(f(p_1), f(p_2)) \in \mathcal{E}_Y$.

В тоже время каждая пара точек из пространства Y лежит в некоторой грубой окрестности точки $(f(p_1), f(p_2))$ для некоторых $p_1, p_2 \in X$. Следовательно

$$\forall (y_1, y_2) \in Y \times Y \Rightarrow (y_1, y_2) \in \{(y_1, y_2)\} \in \mathcal{E}_Y.$$

Отсюда получаем, что образ $Y = f(X)$ грубо связан. □

Дадим, наконец, финальное определение, завершающее обзор общей структуры грубых пространств.

Определение 3.12. Пространства X и Y называются грубо эквивалентными ($X \sim Y$), если существуют грубые отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ такие, что $f \circ g$ близко к id_Y , а $g \circ f$ к id_X .

Предложение 3.12. Для ограниченной метрической грубой структуры понятия грубой эквивалентности равносильно грубой эквивалентности в смысле определения 1.14.

Грубая структура не годится для изучения локальных особенностей — она их просто «не видит». В частности, понятия сходимости и фундаментальности в грубых пространствах теряют смысл: фундаментальная последовательность грубо эквивалентна последовательности в которой все элементы постоянны. Однако гораздо проще и естественнее выглядит понятие сходимости на бесконечность.

Лекция IV: компактификации и концы

Наша цель — построить компактификацию пространства так, чтобы она «уважала» грубую структуру. Иными словами, мы стремимся к тому, чтобы факторпространство компактификации по компактифицируемому (этот объект называется «короной») было грубым инвариантом. Здесь есть два подхода: один связан с C^* -алгебрами (по Хигсону), а второй, более геометричный, связан с понятием конца пространства (по Фрейденталу). Первый способ даёт «самую главную» универсальную компактификацию, а второй, во-первых, существенно проще, а во-вторых, пригодится позже, когда мы будем работать с гиперболическими пространствами.

4.1 Топологические компактификации

4.1.1 Регулярность и нормальность

Начнем с топологических определений. За более подробным введением в аксиомы отделимости см. почти любую книгу по общей топологии, например [Mun14].

Понятие локально-компактных пространств мы уже ввели выше (см. определение 1.11).

Определение 4.1. Пространство X называется *хаусдорфовым*, если в нём выполняется аксиома отделимости T_2 : для любых $x, x' \in X$ таких, что $x \neq x'$, найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(x')$, что $U(x) \cap U(x') = \emptyset$.

Хаусдорфовы пространства, которые дополнительно являются локально-компактными, мы будем называть LCH-пространствами.

В Хаусдорфовых пространствах одноточечные множества обязаны быть замкнутыми (это свойство называется аксиомой отделимости T_1) — рекомендуем проверить это самостоятельно. Среди Хаусдорфовых пространств выделим два полезных класса: регулярные и нормальные пространства.

Определение 4.2. Топологическое пространство X будем называть *регулярным*, если в нём выполняются аксиомы отделимости T_1 и T_3 :

T_1 Одноточечные множества являются замкнутыми;

T_3 Для любой точки $x \in X$ и замкнутого множества $B \subset X$, не содержащего точку x , $x \notin B$ найдутся открытые непересекающиеся окрестности $U(x), U(B)$.

Более сильным условием является т.н. нормальность пространства.

Определение 4.3. Топологическое пространство называется *нормальным*, если в нём выполняются аксиомы отделимости T_1 и T_4 :

T_1 Одноточечные множества являются замкнутыми;

T_4 Для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств A, B существуют их непересекающиеся окрестности $U(A), U(B)$.

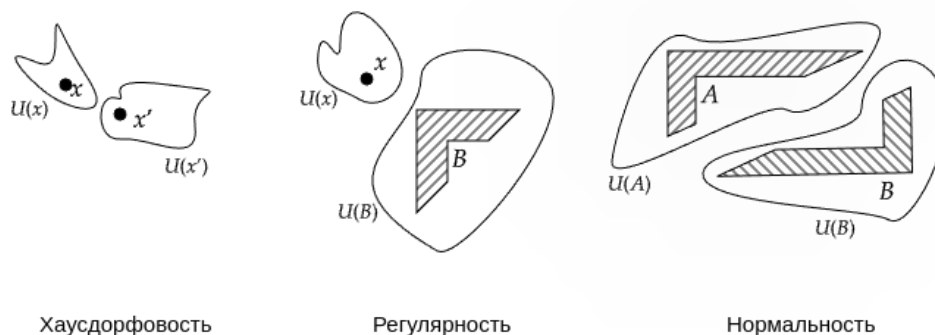


Рис. IV.I: Аксиомы отделимости

Упражнение 4.1. Приведите пример регулярного, но не нормального пространства.

Между нормальными и регулярными пространствами находится класс Тихоновских пространств.

Определение 4.4. Назовём пространство X *почти регулярным* (или Тихоновским) если все одноточечные множества замкнуты (аксиома T_1) и для всякого $x \in X$, и замкнутого множества $A \subset X$, не содержащего x , $x \notin A$ найдётся непрерывная функция $f : X \rightarrow [0; 1]$ такая, что $f(x) = 1, f(A) = \{0\}$.

Предложение 4.1. Из почти регулярности следует регулярность.

Доказательство. Достаточно заметить, что относительно непрерывного отображения прообразы полуинтервалов $[0; 1/2), (1/2; 1]$ — непересекающиеся открытые множества одно из которых содержит A , а другое x . Что и даёт нам искомые окрестности. $\square$

Упражнение 4.2. Докажите, что нормальное пространство — почти регулярно.

Для решения упражнения и некоторых дальнейших рассуждений понадобится лемма Урысона (см. напр. [Mun14], Theorem 33.1).

Urysohn's Theorem. В нормальном пространстве X замкнутые непересекающиеся множества A, B — функционально отделимы. То есть существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0; 1]$ такая, что

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A; \quad f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B.$$

4.1.2 Компактификации Хаусдорфова пространства

Главное определение в этой лекции это понятие компактификации, вводимое для LCH-пространств.

Определение 4.5. Компактификацией LCH-пространства X называется компактное LCH-пространство $\bar{X}$, такое что X всюду плотно в $\bar{X}$. Компактное множество $\partial X := \bar{X} \setminus X$ называется *границей*.

Всевозможные компактификации данного пространства можно упорядочить.

Определение 4.6. • Компактификация $\hat{X}$ *подчинена* компактификации $\bar{X}$, если существует такое непрерывное отображение $f : \bar{X} \rightarrow \hat{X}$, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \bar{X} & \xrightarrow{f} & \hat{X} \end{array}$$

Здесь α и β — естественные вложения. В этом случае будем писать $\bar{X} \succeq \hat{X}$.

- Компактификации называются *эквивалентными* (при этом пишем $\bar{X} \sim \hat{X}$), если $\bar{X} \succeq \hat{X}$ и $\bar{X} \preceq \hat{X}$.

Иными словами, две компактификации $\bar{X}$ и $\hat{X}$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм $q : \bar{X} \rightarrow \hat{X}$ такой, что $q|_X \equiv \text{id}$.

Относительно введённого порядка есть минимальная компактификация (одноточечная) и максимальная (компактификация Стоуна-Чеха), которые мы сейчас определим. Мы пока никак не соотносим компактификации с грубой структурой пространства, об этом речь впереди.

4.1.3 Минимальная и максимальная компактификации

Начнём с классической Александровской компактификации, предложенной в далёком 1924 году П. С. Александровым в [Ale24]. Предложенная конструкция состоит в добавлении единственной точки (бесконечности) и правильном определении топологии, которое можно понимать как добавление окрестностей бесконечности.

Пример 4.1 (Компактификация Александрова). У любого LCH-пространства есть *одноточечная компактификация*.

Иными словами, для любого LCH-пространства X можно определить топологию на $X \cup \{\star\}$ так, чтобы $X \cup \{\star\}$ стало компактным пространством.

Доказательство. • Определим топологию пространства $X \cup \{\star\}$. Для этого к открытым множествам X добавляются всевозможные множества вида $(\{\star\} \cup (X \setminus K))$, где K — произвольное компактное подмножество X .

- Для проверки того, что эта система действительно задаёт топологию, достаточно заметить, что дополнение к компактному множеству обязательно открыто (так как компакт замкнут). Остальное проверяется стандартными проверками аксиом топологии.

- Докажем компактность $X \cup \{\star\}$. Пусть $\{U_i \subseteq (X \cup \{\star\})\}_{i \in I}$ — открытое покрытие. Покажем, что оно обладает конечным подпокрытием.
 - Существует $i_\infty \in I$ такое, что $U_{i_\infty} \supseteq \{\infty\}$. По построению, единственные открытые множества, содержащие эту точку, имеют вид $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, следовательно, существует компактное множество $K \subseteq X$, такое что $X \setminus K \subseteq U_{i_\infty}$.
 - Покрытие $\{U_i \subseteq X\}_{i \in I}$ является открытым покрытием и компактного множества $K \subseteq X$. В силу компактности K существует конечное подмножество $J \subseteq I$, такое что $\{U_i \subseteq X\}_{i \in J}$ покрывает K .
- Следовательно, конечная система

$$\{U_i \subseteq X\}_{i \in J} \cup \{U_{i_\infty}\}$$

является конечным покрытием пространства $X \cup \{\star\}$.

□

Компактификация Александрова легко обобщается на «многоточечные компактификации» для несложно устроенных пространств. Например можно по аналогии построить компактификацию с n точками для пространства, состоящего из n лучей с общим началом (мы будем называть это букетом лучей). Общий случай этой идеи — компактификация концами (по Фрейденталу), о ней мы поговорим на следующей лекции.

Упражнение 4.3. Постройте двуточечную компактификацию вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Геометрически понятно, что Александровская компактификация минимальная в смысле введенного нами отношения в 4.6.

Предложение 4.2. *Одноточечная компактификация подчинена любой другой.*

Доказательство. Отображение f из определения 4.6 строится очевидным образом.

- На X отображение f тождественно, $f(x) = x, x \in X$.
- Все точки границы переводятся в единственную точку границы компактификации Александрова.

Так определенное отображение f — очевидно непрерывно.

□

Разумеется, если в новой компактификации состоит из более чем одной точки, подчинить её Александровской не получится. Но несложно проверить, что все одноточечные компактификации друг другу эквивалентны. Иными словами, одноточечная компактификация единственная (с точностью до гомеоморфизма) и является *слабейшей* из всех.

Упражнение 4.4. Докажите, что любые две одноточечные компактификации эквивалентны.

Максимальной компактификацией является компактификация Стоуна-Чеха, которую мы сейчас определим, опираясь на [Ho23]. Компактификацию Стоуна-Чеха (точнее соответствующее ей полное LCH -пространство) пространства X — традиционно обозначают $\beta(X)$.

Stone-Chech's Theorem. Пусть X — почти регулярное топологическое пространство. Тогда существует единственное с точностью до гомеоморфизма компактное Хаусдорфово пространство $\beta(X)$ такое, что каждая ограниченная непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ продолжается единственным образом до непрерывной функции $g : \beta(X) \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказательство см. в [Ho23], Theorem 5.12. Ожидаемо, любые две компактификации Стоуна-Чеха будут эквивалентны (proposition 5.15, [Ho23]). Максимальность $\beta(X)$ заключается в следующем утверждении (corollary 5.16, [Ho23]).

Предложение 4.3. Для всякой компактификации $\bar{X}$ почти регулярного пространства X существует непрерывное сюръективное замкнутое отображение $h : \beta(X) \rightarrow \bar{X}$ тождественное на X , $h|_X = id$.

Доказательство. • Пусть $i_X : X \rightarrow \bar{X}$ вложение в $\bar{X}$. Поскольку $\bar{X}$ — компактное хаусдорфово пространство, у него есть компактификация Стоуна-Чеха $\beta(X)$. Тогда существует следующее непрерывное продолжение $h : \beta(X) \rightarrow \bar{X}$. По определению, если $x \in X$, то $h(x) = i_X(x) = x$, значит h тождественно на X .

- Проверим, что h является замкнутым сюръективным отображением. Возьмем замкнутое множество C в $\beta(X)$, тогда C компактно, и, следовательно, $h(C)$ компактно. Поскольку $\bar{X}$ — компактное хаусдорфово пространство, то образ $h(C)$ — замкнут.
- Для проверки сюръективности заметим, что h равно i_X на X , и $\bar{X} = \overline{i_X(X)} \subset \overline{h(\beta(X))} \subset \bar{X}$. Поскольку $\beta(X)$ компактно, $h(\beta(X))$ — тоже компактно и, следовательно, замкнуто. Значит $\overline{h(\beta(X))} = h(\beta(X)) = \bar{X}$.

□

4.2 Грубые компактификации

Далее будем в основном работать с нормальными LCH пространствами. Мы хотим выделить среди всех компактификаций те, которые связаны с грубой структурой. Для этого нам нужно по топологии определить грубую структуру.

4.2.1 Грубая топологическая структура

Мы будем говорить, что множество $E \subset X \times X$ — *собственное*, если для каждого предкомпактного множества $K \subset X$, множество $E(K)$ также предкомпактно.

Лемма 4.1. В нормальном LCH -пространстве X с компактификацией $\bar{X}$ выберем подпространство $E \subset X \times X$. Следующие утверждения равносильны:

1. Замыкание $\overline{E}$ может пересекаться с $(\overline{X} \times \overline{X}) \setminus (X \times X)$ только на диагонали $\Delta_{\partial X} = \{(\omega, \omega) \mid \omega \in \partial X\}$. То есть

$$\overline{E} \cap ((\overline{X} \times \overline{X}) \setminus (X \times X)) \subset \Delta_{\partial X}.$$

2. Пространство E собственное, и для каждой неограниченной последовательности $\{x_\lambda, y_\lambda\}$ такой, что $(x_\lambda, y_\lambda) \in E$, если $x_\lambda \rightarrow \omega \in \partial X$, то и $y_\lambda \rightarrow \omega$.
3. Пространство E собственное, и для любого $\omega \in \partial X$ и любой окрестности $V(\omega)$ в $\overline{X}$ найдётся окрестность $U \subset V$ точки ω такая, что

$$E \cap (U \times (X \setminus V)) = \emptyset.$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ Замыкание $\overline{E}$ пересекается с границей в точках вида (ω, ω) , поэтому последовательность $x_n \rightarrow \omega$ начиная с некоторого номера полностью лежит в окрестности ω . Если бесконечно много элементов y_{n_j} в этой окрестности не лежит, то (в силу компактности $\overline{X}$) можно выделить сходящуюся подпоследовательность, пределом которой будет $\omega' \neq \omega$. Собственность E также следует из компактности $\overline{X}$.

$2 \Rightarrow 3$ От противного. Предположим, найдётся окрестность $V(\omega)$ такая, что для любой окрестности $U(\omega)$ существует точка $(x_U, y_U) \in E \cap (U \times X \setminus V)$. Тогда найдётся последовательность $\{x_{U_i}, y_{U_i}\}$, которая будет удовлетворять свойствам пункта 2. Однако в силу аксиомы T4, имеем, что $x_{U_i} \rightarrow \omega$, а $y_{U_i} \not\rightarrow \omega$. Противоречие.

$3 \Rightarrow 1$ Если $(\omega, \omega') \in \overline{E}$, где $\omega \neq \omega'$, то можно выбрать непересекающиеся окрестности $V(\omega)$ и $V'(\omega')$. Тогда для любой U окрестности ω такой, что $U \subset V$ имеем $(\omega, \omega') \in U \times V'$. Значит $U \times V \subset U \times (X \setminus V)$. Чего быть не может. $\square$

Определение 4.7. Множества, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3 леммы 4.1, образуют грубую структуру $\mathcal{E}_T$, называемую *грубой топологической структурой*.

Теорема 4.1. Пространство $(\overline{X}, \mathcal{E}_T)$ — грубое. Если пространство X собственное, связное и нормальное LCH-пространство, то грубая структура $\mathcal{E}_T$ является грубо связной и собственной.

Доказательство. • Проверим, что класс множеств $\mathcal{E}_T$ действительно образует грубую структуру.

- Воспользуемся леммой 4.1. Из пункта 1 следует, что любое $E \in \mathcal{E}_T$ замкнуто относительно взятия обратных, подмножеств и объединений.
- Проверим замкнутость относительно композиции $(\circ)$. Действительно, пусть $E = E' \circ E''$. Если $(x_\lambda, y_\lambda) \in E'$ и $(y_\lambda, z_\lambda) \in E''$, то из условия 2 следует, что $x_\lambda \rightarrow \omega \in \partial X$ влечёт $z_\lambda \rightarrow \omega$. Значит $E \in \mathcal{E}_T$.

Пусть теперь X — собственное, связное, нормальное LCH-пространство.

- Грубая связность следует из свойства собственных пространств. Для любого компакта K , множество $K \times K \in \mathcal{E}_T$, а значит каждая точка (x, x') компактна (это аксиома T1).

- Проверим собственность. Каждое контролируемое множество $E \in \mathcal{E}_T$ собствен-
но в $X \times X$, значит в силу собственности пространства X замыкание ограни-
ченного множества будет компактно.
- Остаётся предъявить контролируемую окрестность диагонали.

– Выберем непрерывные функции $f, g : \overline{X} \times \overline{X} \rightarrow [0; 1]$ такие, что

$$\begin{aligned} f(t) = 0 &\Leftrightarrow t \in \Delta_{X \times X}, \quad f(t) = 1 \Leftrightarrow t \in \overline{X} \times \partial X \cup \partial X \times \overline{X}; \\ g(t) = 1 &\Leftrightarrow t \in \Delta_{X \times X}, \quad g(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \overline{X} \times \partial X \cup \partial X \times \overline{X}. \end{aligned}$$

Существование таких функций следует из леммы Урысона.

– Рассмотрим множество $E_{f,g}$ определенное как

$$E_{f,g} := \{(x, x') \in X \times X \mid f(x, x') < g(x, x')\}.$$

По определению, $E_{f,g}$ открыто и содержит диагональ $X \times X$, то есть яв-
ляется открытой окрестностью диагонали.

– Проверим, что $E_{f,g} \in \mathcal{E}_T$.

Если последовательность $(x_\lambda, y_\lambda) \in E_{f,g}$ такова, что $x_\lambda \rightarrow \omega \in \partial X$, то $g(x_\lambda, y_\lambda) \rightarrow 0$, а значит и $f(x_\lambda, y_\lambda) \rightarrow 0$. Значит $y_\lambda \rightarrow \omega$. То есть $E_{f,g} \in \mathcal{E}_T$.

□

Теперь дадим наконец формальное определение грубой компактификации.

Определение 4.8. Пусть $(X, \mathcal{E})$ — собственное грубое пространство. Будем гово-
рить, что компактификация $\overline{X}$ *грубая*, если $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_T$.

Эквивалентно можно сказать, что пространство $(X, \mathcal{E})$ является грубым подпро-
странством в $(X, \mathcal{E}_T)$.

Упражнение 4.5. Будет ли отображение $id : (X, \mathcal{E}) \rightarrow (X, \mathcal{E}_T)$ грубым?

Всякое связное нормальное LCH пространство имеет хотя бы одну грубую ком-
пактификацию.

Пример 4.2. Одноточечная компактификация всегда является грубой.

Доказательство. Заметим, что $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$, и любое $E \subset X \times X$ автоматически
содержится в $\mathcal{E}_T$. □

Компактификация Стоуна-Чеха вообще говоря не обязана быть грубой компак-
тификацией. Однако и среди грубых компактификаций найдётся максимальная, это
компактификация Хигсона, о которой мы поговорим позже.

А пока займёмся построением более геометричной компактификации Фрейден-
таля, которая основана на понятии конца топологического пространства.

4.3 Концы

Само понятие конца является, наверное, первым грубым инвариантом, который изучался задолго до понятия грубой геометрии. В оборот его ввёл Ханс Фрейденталь в работе [Fre31]. Ниже будем опираться на работы [Har20] и [AC18]. Для начала нам понадобится определение Фрейденталева пространства.

4.3.1 Пространства Фрейдентала

Сначала дадим определение Фрейденталевых пространств, в которых определение конца наиболее продуктивно. Забегая вперёд отметим, что примерами таких пространств являются графы в которых все вершины имеют конечную степень и пространства, которые удовлетворяют посылке теоремы Шварца-Милнора. В общем, как и всегда, это некий класс «хороших» пространств. Что делать если пространство не очень-то хорошее мы оставим за кадром.

Определение 4.9. Топологическое пространство X назовём σ -компактным, если существует не более чем счётный набор компактов $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такой, что $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$.

Примером НЕ σ -компактного пространства служит континуальное множество с дискретной метрикой.

Определение 4.10. Пространство X называется *локально связным*, если для любого $x \in X$ для любой окрестности $U(x)$ существует связная подокрестность $U_0(x) \subset U(x)$.

Теперь можно дать определение Фрейденталева пространства

Определение 4.11. Локально связное, σ -компактное LCH пространство — называется *Фрейденталевым пространством*.

Наиболее естественным примером такого пространства, помимо многообразий, является геометрическая реализация графа Кэли конечно порождённой группы.

Упражнение 4.6. Всякое ли LCH-пространство будет Фрейденталевым?

Лемма 4.2. Если пространство X — Фрейденталево, то существует набор компактов $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такой что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$ и $K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$

Набор таких компактов $\{K_i\}$ будем называть *исчерпанием* пространства X .

Доказательство. Исчерпаемость пространства получаем из σ компактности. Из локальной связности получаем второе условие. $\square$

Из определения получаем основной пример Фрейденталевых пространств.

Пример 4.3. Собственное метрическое пространство Фрейденталево.

Важный частный случай это, как обычно, графы.

Пример 4.4. Граф со стандартной метрикой у которого все вершины имеют конечную степень будет пространством Фрейдентала.

Доказательство. Локальную компактность мы уже доказывали в предложении 1.6. Для непосредственной проверки Фрейденталевости достаточно взять последовательность шаров возрастающих радиусов n и воспользоваться леммой 4.2. $\square$

4.3.2 Концы пространства

Пусть теперь X — Фрейденталево пространство. Зафиксируем, пользуясь леммой 4.2, набор компактов $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ таких, что $K_i \subseteq \text{Int}(K_{i+1})$ и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$.

Возьмём (при помощи $\mathcal{K}$) такую систему неограниченных E -связных множеств $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что:

- $C_i \supseteq C_{i+1}$;
- $C_i \subset X \setminus K_i$.

В этом разделе C_i, C'_i и т.д. зарезервируем для обозначения таких систем. Интуиция должна работать так: система множеств C_i это некий способ «уйти на бесконечность», что и представляет собой «конец пространства».

Определение 4.12. Две системы $\{C_i\}$ и $\{C'_i\}$ назовём *эквивалентными* $\{C_i\} \sim \{C'_i\}$, если существует такая система $\{C''_i\}$, что для каждого i множество $C''_i \triangle (C'_i \cup C_i)$ ограничено.

Определение 4.13. Класс эквивалентности $[\{C_i\}]$ называется *концом по Фрейденталю* или просто *концом*.

Не будем создавать интригу, и сразу заметим, что концы имеют грубую природу.

Теорема 4.2. В Фрейденталевом пространстве число концов — грубый инвариант.

Доказательство. Достаточно заметить, что при грубом отображении эквивалентные системы C_i переходят в эквивалентные. $\square$

Геометрический смысл таков. Пусть X и Y — грубые пространства и $X \stackrel{c}{\sim} Y$, тогда $e(X) = e(Y)$. Более того, если $f: X \xrightarrow{\sim} Y$ — одно из отображений, реализующих грубую эквивалентность, то f обязательно отображает конец в конец.

Отсюда получаем, что если мы возьмём два метрических Фрейденталевых пространства с эквивалентными грубыми ограниченными структурами, то число концов в них одинаково. Так что можно корректно ввести следующее определение конца пространства.

Определение 4.14. Число концов Фрейденталева пространства X будем обозначать через $e(X)$.

Из теоремы получаем, что прямая и луч не грубо эквивалентны, поскольку у них разное число концов. И вообще, если мы возьмём n лучей с общим началом (назовём это *букетом* лучей), то у такого метрического пространства n концов. Откуда получаем

Следствие 4.2.1. Букеты из n лучей со стандартной метрикой для разных n не грубо эквивалентны.

Кошачьи советы. Конец кошки — это её хвост (точнее, направление её хвоста). Системы $\{C_i\}$ это, так сказать, способ погладить. Погладить хвост (и кошку) можно разными способами, но направление всегда одно и то же.

4.3.3 Концы графов

В качестве примера рассмотрим граф γ . Конец в графе это класс эквивалентности лучей $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \gamma$, где $\alpha(i)$ и $\alpha(i+1)$ соседние вершины. Чтобы сформулировать это более аккуратно дадим определение эквивалентных лучей.

Определение 4.15. Будем говорить, что два луча в графе *эквивалентны* $\alpha_1 \sim \alpha_2$, если существует такой луч α_3 , что $\alpha_3 \cap \alpha_1$ и $\alpha_3 \cap \alpha_2$ имеют бесконечно много общих вершин.

Классы эквивалентности графов естественно отождествляются с концами. Так что можно говорить, что класс эквивалентных лучей $[\alpha]$ это и есть конец графа γ .

Отметим, что число концов данного графа можно определить и без введения понятия конца.

Предложение 4.4. Пусть γ – граф, у которого степени вершин равномерно ограничены. Тогда

$$e(\gamma) = \max_{K \subset \gamma, |K| < \infty} \#\{\text{бесконечных компонент связности в } \gamma \setminus K\}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Из равномерной ограниченности степеней вершин получаем Фрейденталевость графа (как метрического пространства).

Для конечного подграфа $K \subset \gamma$ рассмотрим граф $\gamma \setminus K$ в котором есть хотя бы две разные (то есть непересекающиеся) компоненты связности. Они содержат не эквивалентные концы. В то же время система, содержащая в себе пару концов из разных компонент связности не будет ограниченной. $\square$

Проще говоря, число концов есть максимальное количество *бесконечных* компонент связности в графе $\gamma \setminus K$, по всевозможным конечным подграфам K .

Пример 4.5. В бесконечном бинарном дереве бесконечно много концов.

Доказательство. Вырезав шар радиуса n с центром в корне дерева, мы получаем $2n$ не связных компонент. $\square$

В следствии 4.2.1 мы указали, что букеты лучей имеют разное число концов. Заметим, что у плоскости один конец.

Пример 4.6. Граф $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ имеет один конец.

Как мы скоро увидим плоскость не грубо эквивалентна лучу. Прямо сейчас мы это докажем чем более тонкую классификацию концов. Забегая вперёд отметим, что есть и ещё два способа это проверить: через скорость роста пространств и асимптотические размерности. К чему мы вернёмся в соответствующих разделах.

4.3.4 Классификация концов в графе

Заговорив о концах в графах, стоит отметить, что конец луча явно не похож на конец плоскости, хотя и там, и там их по одному. Попробуем с этим разобраться.

Определение 4.16. Если в графе γ для конца $[\alpha]$ максимальное множество попарно не пересекающихся лучей $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, таких что $\alpha_i \in [\alpha]$ – конечно, то $[\alpha]$ называется *тонким концом*.

Кошачьи советы. *Кошачий хвост – тонкий.*

Позже, толкуя про гиперболические пространства, мы встретимся ещё с одним подходом к компактификациям — по Громову. Забегая вперёд (строго см. определение 8.11) скажем, что в геодезическом пространстве эквивалентными мы будем называть геодезические лучи γ_1, γ_2 такие, что $\gamma_1 \times \gamma_2$ будет контролируемым множеством. Для графов (точнее для их геометрической реализации) это определение эквивалентно определению тонкого конца.

Что не тонкое, то и толстое.

Определение 4.17. Если для конца $[\alpha]$ существует бесконечно попарно не пересекающихся лучей $\{\alpha_i\}$ таких что $\alpha_i \in [\alpha]$, то $[\alpha]$ называется *толстым концом*.

Примером толстого конца служат целочисленные решётки плоскости и пространств старших размеров.

Пример 4.7. У графа $\mathbb{Z}^n, n > 1$ со стандартной метрикой — один толстый конец.

Про толстые концы отметим замечательную теорему, доказанную Р. Халиным в [Hal64]. Достаточно простое (хоть и длинное) доказательство этой теоремы предложено в [Die04]. Перевод этого доказательства и некоторые следствия из неё см. в приложении 14.

Halin’s Theorem. *Если граф γ содержит толстый конец, то существует подграф γ_0 , который грубо эквивалентен гексагональной решётке.*

Рассмотрим отдельно случай графов Кэли. Класс эквивалентности $[\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)]_c$ не зависит от выбора конечной системы образующих $\mathcal{X}$. Число концов графа Кэли называют *числом концов группы*.

Hopf’s Theorem. *Для группы G число её концов может быть $\{0; 1; 2; \infty\}$.*

Поясним, что $e(G) = 0$, если группа G конечна. Случай $e(G) = 2$ достигается если в группе G есть бесконечная циклическая подгруппа H конечного индекса, т.е. такая, что $|G : H| < \infty$. Случай $e(G) = \infty$ определяется теоремой Столлинга, о которой чуть ниже. Ну а «общий случай» это $e(G) = 1$.

Набросок доказательства:

- Пусть γ — бесконечный вершинно-транзитивный граф у которого число концов $e(\gamma)$ не менее трех. Покажем, что на самом деле в нем бесконечно много концов. Рассмотрим конечный подграф K такой, что в графе $\gamma \setminus K$ не менее трех бесконечных непересекающихся компонент связности.
- Возьмем f — такой автоморфизм графа, что $f(K)$ не пересекается с K . Тогда число компонент связности в $\gamma \setminus f(K)$ также не менее трёх. Причем K полностью лежит в одной из них и «рассекает» ее на, по меньшей мере, 2 бесконечные компоненты не содержащие $f(K)$. Значит в графе $\gamma \setminus (K \cup f(K))$ не менее четырех различных бесконечных компонент связности.
- Далее по индукции.

Более аккуратно, эта теорема выводится из леммы 14.1 которую мы доказываем в дополнительном разделе 14.

Упражнение 4.7. Может ли у графа Кэли конечнопорождённой группы быть два и более толстых концов?

Число концов в группе может быть вычислено с использованием комбинаторной структуры группы. Это описание предоставляется известной теоремой Столлинга доказанной впервые в работах [Sta68; Sta71].

Stallings's Theorem. Для конечнопорождённой группы G справедливо:

- Группа имеет более одного конца если и только если она представима в виде свободного произведения с конечными объединёнными подгруппами либо представима как HNN-расширение над конечными подгруппами.
- Число концов равно двум если и только если группа содержит бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса.

Про свободные произведения с объединёнными подгруппами и HNN-расширения можно прочитать в [ЛШ80]. А современные доказательства теоремы Столлинга см. в [Dun82] и [Geo08].

Упражнение 4.8. Используя задачу 1 проверьте классификацию конечнопорождённых групп с двумя концами.

Лекция V: грубые компактификации

Вернемся к компактификациям. Напомним, что компактификацией топологического Хаусдорфова пространства X называется такое полное топологическое пространство $\bar{X}$, что X является плотным и открытым подмножеством в $\bar{X}$. В частности, открытые подмножества X также являются открытыми в $\bar{X}$.

Мы будем интересоваться грубыми компактификациями, то есть такими компактификациями, что грубая топологическая структура пространства $\bar{X}$ содержит грубую структуру исходного грубого пространства X .

5.1 Компактификация по Фрейденталю

Обозначим через $e(X)$ множество классов эквивалентных концов в метрическом фрейденталевом пространстве X . Напомним, что конец это класс эквивалентности систем вложенных множеств из раздела 4.3.2.

Определение 5.1. Компактификацией по Фрейденталю для Фрейденталева пространства X мы назовём топологическое пространство $\mathfrak{f}(X)$ определяемое следующим образом:

- Как множество $\mathfrak{f}(X)$, это объединение исходного пространства со всеми его концами $\mathfrak{f}(X) = X \cup e(X)$.
- Топология $\mathfrak{f}(X)$ определяется следующим образом.
 - Каждое открытое множество в X – открыто в $\mathfrak{f}(X)$;
 - Если $\{C_i\}$ последовательность открытых в X множеств, задающих конец $\omega \in e(X)$ (см. определение 4.13), то каждое $C_i \cup \omega$ – открытое множество в $\mathfrak{f}(X)$.
- Границу компактификации, множество $e(X)$, будем также называть *короной*.

Если в Фрейденталевом пространстве был один конец, то наше определение дословно повторяет одноточечную компактификацию из примера 4.1.

Пример 5.1. Компактификация по Фрейденталю пространства с одним концом совпадает с Александровской компактификацией.

Нужно отметить, что мы пока не доказали, что для Фрейденталева пространства X построено в определении 5.1 пространство $\mathfrak{f}(X)$ действительно будет компактным. Мы это проверим чуть позже (см. теорему 5.1), но пока сразу заметим, что если пространство $\mathfrak{f}(X)$ всё же компактно, то такая компактификация грубая.

Упражнение 5.1. Докажите, что Фрейденталева компактификация геодезического пространства — грубая.

Это упражнение можно существенно расширить. См. напр. Theorem 5.6.11, [Ras22]. Важно также заметить, что корона Фрейденталя является грубым инвариантом.

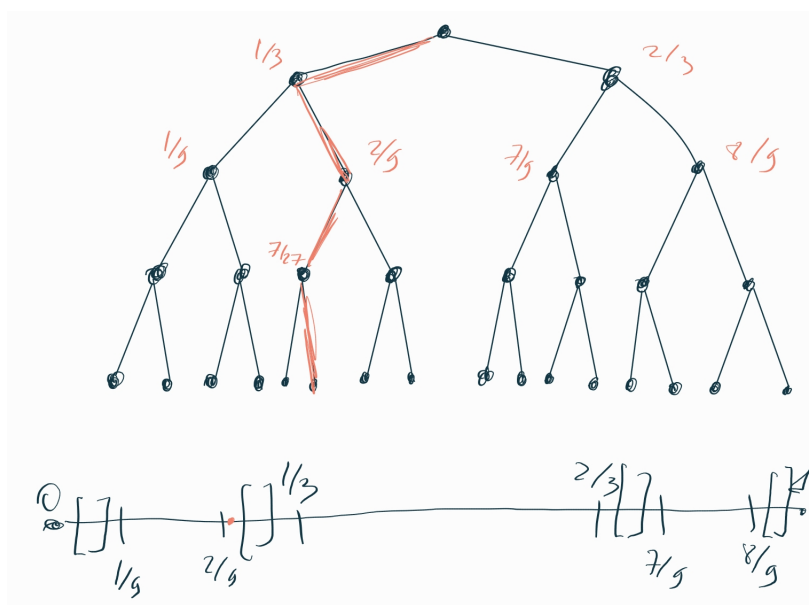
Rashed's Theorem. *Грубо эквивалентные геодезические метрические пространства имеют гомеоморфные короны Фрейденталя.*

Доказательство см. в [Ras22], Theorem 6.2.7.

5.1.1 Бинарное дерево

В качестве содержательного примера построим Фрейденталеву компактификацию для бинарного дерева.

Пример 5.2. Корона бинарного дерева гомеоморфна Канторову множеству.



Напомним, что *Канторово множество* это подмножество отрезка $[0; 1]$ определяемое так:

- На первом шаге выбрасываем из отрезка среднюю треть $(1/3; 2/3)$ и получаем объединение отрезков $[0; 1/3] \cup [2/3; 1]$.
- На k -м шаге имеем объединение 2^k отрезков. Из каждого удаляем среднюю треть.
- Пересечение этих множеств и есть искомое.

Хорошо известно, что Канторово множество компактно. Теперь перейдем к доказательству гомеоморфности короны бинарного дерева и Канторова множества.

Доказательство. Чтобы построить гомеоморфизм, мы должны каждому лучу дерева сопоставить точку Канторова множества.

- Выбрасываемые отрезки легко отождествить с бинарным деревом. Корню дерева ставим в соответствие отрезок $[1/3; 2/3]$. Затем вершины первого уровня ставим в соответствие отрезкам $[1/9; 2/9]$ и $[7/9; 8/9]$ и так далее.

- Каждому лучу, начинающемуся в корне дерева (например, как оранжевый луч на рисунке), соответствует точка Канторова множества.
 - Для этого пронумеруем вершины дерева на каждом уровне точками-границами выбрасываемых отрезков. Ну и, далее, когда наш луч движется по дереву «влево» мы выбираем левый «остающийся» отрезок, когда вправо – правый.
 - Например, числу 0 соответствует луч, который на каждом уровне ветвления уходит влево.
- Легко понять, что с точностью до эквивалентности, все лучи устроены как монотонный путь по дереву, начиная от корневой вершины.
- Остаётся отметить, что такое отождествление – гомеоморфизм.

□

Упражнение 5.2. Докажите что корона любого n -арного дерева, $n > 2$ тоже гомеоморфна канторову множеству.

5.1.2 Локально конечные графы

Теперь рассмотрим случай локально конечных графов.

Определение 5.2. Граф γ называется *локально конечным*, если все его вершины имеют конечную степень.

Как мы уже отмечали в предложении 1.6 такой граф будет локально компактным пространством. А значит и ЛСН-пространством. Причём, если граф связан, то такое пространство будет и Фрейдендалевым. Выясним как устроена его корона в общем случае, но сначала проверим, что $f(\gamma)$ корректно определено и действительно является компактным Хаусдорфовым пространством.

Для простоты рассуждений, мы будем понимать граф как дискретное пространство (а не как его геометрическую реализацию). Компактные подмножества локально конечного графа это его ограниченные подмножества.

Теорема 5.1 ([Die17], Proposition 8.6.1.). Пусть γ – связный, локально конечный граф. Тогда $f(\gamma)$ – компактное Хаусдорфово пространство.

Идея доказательства аналогична тому, как обычно доказывают компактность отрезка. Предполагаем, что из некоторого открытого покрытия отрезка нельзя выделить конечного подпокрытия. Отрезок делится пополам, выбирается половина, не имеющая конечного подпокрытия и так далее. В пересечении выбранных отрезков находится некая точка, покрываемая единственным множеством. В данной теореме главная идея — правильно организовать процедуру деления пополам.

Зафиксируем в графе γ вершину v_0 . Обозначим через S_n сферу радиуса n с центром в вершине v_0

$$S_n = \{v \in \gamma \mid \rho(v_0; v) = n\}.$$

Через B_n соответствующий шар

$$B_n = \{v \in \gamma \mid \rho(v_0; v) \leq n\}.$$

В силу локальной конечности графа множества S_n, B_n конечны.

Для $v \in S_n$ обозначим через $C(v)$ компоненту связности в $\gamma \setminus S_n$, порождённую элементом v . То есть все точки из S_{n+1} соседние с v , их соседи из S_{n+2} и так далее. Заметим, что в силу дискретности графа множество $C(v)$ является и замкнутым и открытым.

Перейдём к доказательству.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие $f(\gamma)$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия.

- Достаточно показать, что для некоторого n каждое из множеств $\hat{C}(v)$ для $v \in S_n$ содержится в одном из элементов покрытия $\mathcal{U}$. То есть найдётся окрестность $U(v) \in \mathcal{U}$ такая, что $C(v) \subset U(v)$.
- Предположим, что такого n не существует. То есть для каждого n множество $V_n \subset S_n$ состоящее из всех вершин $v \in S_n$ таких, что $C(v)$ не лежит в одной окрестности $U(v)$ — не пусто.
- Для каждой вершины $u \in S_{n-1}$ соседних с v имеем, что $C(v) \subseteq C(u)$ и значит $u \in V_{n-1}$.
- Воспользуемся леммой Кёнига: каждое бесконечное дерево содержит вершину бесконечной степени или бесконечный простой путь (доказательство см. в приложении 13.1).

По лемме, в графе γ найдётся луч $R = v_0 v_1, \dots$ такой, что $v_n \in V_n$.

- Пусть ω — конец луча R , то есть соответствующий класс эквивалентности из определения 4.15. Возьмём открытое множество $U \in \mathcal{U}$, которое содержит ω .
- В силу определения топологии пространства $f(\gamma)$, начиная с некоторого n все v_i будут лежать в U . Что и даёт противоречие.

□

Несложно понять, что без локальной конечности графа, которая как мы помним равносильна локальной компактности соответствующего метрического пространства, это доказательство не проходит, поскольку множества S_n и B_n бесконечны.

Упражнение 5.3. Докажите, что если граф не локально конечен, то $f(\gamma)$ не будет компактным пространством.

С учётом вышеупомянутой инвариантности короны Фрейденшталя получаем способ различать (в грубом смысле) некоторые графы.

Следствие 5.1.1. 1. Локально конечные графы с более чем двумя концами никогда не грубо эквивалентны прямой или плоскости.

2. Бинарное дерево не может быть грубо вложено ни в какое конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$.

В разделе 10.1.2 мы ещё вернёмся к вопросу вложимости графов и покажем, что деревья можно грубо вложить в Гильбертово пространство.

5.1.3 Граница $f(X)$ и метризуемость

Разберёмся как устроена граница компактификации $f(X)$.

Неформально выражаясь, в бинарном дереве разные концы порождают на границе точки которые связаны друг с другом только через внутренность множества. Значит граница на самом деле «очень разрывная», хоть и компактна.

Дадим правильный термин, который поможет нам сформулировать общее утверждение.

Определение 5.3. Пространство называется *тотально не связным*, если его связные подпространства состоят из одной точки.

Пример 5.3. Канторово множество тотально не связно.

Предложение 5.1. *Корона Фрейденталева пространства X тотально не связна.*

Доказательство. От противного.

Пусть ω, ω' две различные точки на короне, лежащие в одной компоненте связности. Пусть $\{C_n\}, \{C'_n\}$ последовательности из определения конца в разделе 4.3.2, которые соответствуют ω и ω' соответственно, а K_n — соответствующее исчерпание компактами.

Раз концы разные, то для некоторого N , при $n > N$ имеем, что $C_n \cap C'_n = \emptyset$. Рассмотрим множества C_{n+1} и $(X \setminus C_n) \setminus C_{n+1}$.

Оба они будут замкнутыми и открытыми одновременно (clopen) и, кроме того они будут не пересекающимися окрестностями ω и ω' в короне соответственно. Причём вся корона содержится в их объединении. Значит они не могли лежать в одной компоненте связности. $\square$

Обобщим наш пример с бинарным деревом 5.2.

Предложение 5.2. *Если компактификация $f(X)$ метризуема и корона не содержит изолированных точек, то граница компактификации гомеоморфна канторову множеству.*

Доказательство следует из предложения 5.1 и следующей известной теоремы (см. напр. [Das14]). См. также [Geo08], Theorem 13.5.7 и следствие из нее.

Brower's Theorem. *Непустое, компактное, тотально несвязное множество без изолированных точек — гомеоморфно Канторову множеству.*

Отсюда следует, что корона Фрейденталева не позволяет различать графы с тотально не связными бесконечными границами без изолированных точек. По теореме Брауэра они все друг другу гомеоморфны.

Пора перейти к вопросу метризуемости компактификаций.

Напомним про критерий метризуемости (теорема 3.1). Метризуемость грубой структуры равносильна её счётной порождённости. Сообщим ожидаемую новость: грубые компактификации обычно не метризуемы. Чтобы сформулировать точное утверждение дадим ещё одно топологическое определение.

Определение 5.4. Топологическое пространство называется *вторым счётным*, если у его топологии счетная база.

Хорошо известно (см. напр. [Mun14]) следующее свойство таких пространств (Теорема Урысона о метризуемости)

Urysohn's Theorem. *Хаусдорфово регулярное второе счётное пространство – метризуемо.*

Предложение 5.3. *Если X локально компактное пространство, и $\bar{X}$ его грубая компактификация, являющаяся вторым счётным пространством, то топологическая грубая структура для $\bar{X}$ не метризуема.*

Доказательство. Достаточно это доказать для одноточечной компактификации пространства $\mathbb{N}$.

Предположим, что $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ — метризуемо, и обозначим соответствующую метрику ρ . Тогда функция ρ не ограничена, и для любых двух неограниченных (то есть стремящихся к $\{\infty\}$) последовательностей $\{x_n\}, \{x'_n\}$ имеем, что $\rho(x_n; x'_n)$ — ограничена.

Из неограниченности, для каждого n найдётся x_n так чтобы $\rho(x_n; n) > n$. Но тогда получаем противоречие с тем, что $\rho(x_n; n)$ ограниченная. $\square$

Из всего сказанного получаем, наконец, следующий результат.

Теорема 5.2. *Фрейденталева компактификация неограниченного локально конечного графа — не метризуема.*

Упражнение 5.4. Подумайте, как эту теорему обобщить на другие Фрейденталевы пространства.

5.2 Компактификация по Хигсону

Теперь дадим достаточно краткое представление о компактификациях Хигсона, максимальной грубой компактификации. Мы будем опираться на работу [MY15].

Пусть $(X, \mathcal{E})$ — грубое пространство.

Определение 5.5. Ограниченная функция $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Хигсона* если для каждого контролируемого $E \in \mathcal{E}$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдётся ограниченное множество $B \subset X$ такое, что на множестве $E \setminus (B \times B)$ функция φ почти постоянна, т.е.

$$(x, y) \in E \setminus (B \times B) \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

Пространство всех (не обязательно непрерывных!) функций Хигсона обозначим через $B_h(X)$. Если X топологическое пространство (пока не обязательно LCH-пространство, но далее нам это понадобится), то через $C_h(X)$ обозначим подпространство непрерывных функций Хигсона.

Предложение 5.4. *Пространство $B_h(X)$ есть банахова унитарная алгебра.*

Если заменить в определении 5.5 вещественнозначные функции на комплекснозначные, то уместно будет сказать, что комплекснозначные функции Хигсона образуют C^* алгебру. И, следовательно, (согласно теореме Гельфанда-Наймарка) изоморфны некоторой подалгебре ограниченных операторов в Гильбертовом пространстве. Подробнее см. [Dix77].

Напомним, что в примере 3.6 на метрическом пространстве (X, ρ) мы определили грубую структуру $C_0(X)$, как класс множеств таких, что $E \in C_0(X)$ если выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K} : \forall (x, x') \in E \setminus (K \times K) \rightarrow \rho(x, x') < \varepsilon. \quad (5.2)$$

В случае собственного метрического пространства (т.е. когда ограниченность равносильна предкомпактности) формулу (5.1) можно переписать следующим образом

$$\varphi \in B_h(X) \iff (\varphi \times \varphi)(X \times X) \in C_0(X). \quad (5.3)$$

5.2.1 Функции Хигсона на метрическом пространстве

Дадим подробное описание функций Хигсона в LCH-пространстве.

Предложение 5.5. *В локально компактном метрическом пространстве функции Хигсона совпадают с ограниченными равномерно непрерывными функциями.*

$$\varphi \in C_h(X) \iff \{\varphi - \text{ограниченная равномерно непрерывная функция}\}.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть φ ограниченная равномерно непрерывная функция и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что если $\rho(x, x') < \delta$, то $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$. Ограниченное множество K выберем в соответствии с формулой (5.2).

$\Rightarrow$ В обратную сторону будем действовать от противного. То есть пусть найдется $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}, \{x'_n\}$ в X такие, что $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$, но при этом $|\varphi(x_n) - \varphi(x'_n)| > \varepsilon$.

- Последовательность $\{x_n\}$ не может полностью лежать в компактном множестве. Иначе множество $\{x_n, x'_n\}$ также содержалось бы в компакте. Но это невозможно, так как непрерывная функция на компакте является равномерно непрерывной.
- Рассмотрим множество $E := \{(x_n, x'_n)\}$, оно контролируемо. Значит найдется такой компакт в X , что для всех точек $(x, x') \in E \setminus (K \times K)$ справедливо неравенство $|\varphi(x_n) - \varphi(x'_n)| < \varepsilon$. Что противоречит предположению.

□

Предложение 5.6. *В локально компактном метрическом пространстве грубая структура $C_0(X)$ и ограниченная грубая структура $\mathcal{E}$ совпадают.*

Доказательство. Сразу следует из предложения 5.5. □

Пусть A, B непересекающиеся множества между которыми расстояние отлично от нуля в собственном метрическом пространстве.

Упражнение 5.5 ([Har20], proposition 45). Докажите, что функция

$$\varphi_{A,B} : x \in X \mapsto \frac{\rho(x; A)}{\rho(x; A) + \rho(x; B)}$$

будет функцией Хигсона для метрической грубой структуры.

5.2.2 Компактификация Хигсона

Лемма 5.1. Пусть X, Y – грубые пространства, $f : X \rightarrow Y$ – грубое отображение. Тогда, если $\varphi \in B_h(Y)$, то $\varphi \circ f \in B_h(X)$, а отображение

$$f^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f \quad (5.4)$$

есть гомоморфизм колец $f^* : B_h(Y) \rightarrow B_h(X)$. Если f непрерывно, то отображение f^* является гомоморфизмом $C_h(Y) \rightarrow C_h(X)$.

Доказательство. Следует из определений. $\square$

Нужно заметить, что ни о каком изоморфизме колец $C_h(X)$ и $C_h(Y)$ здесь речи не идёт, даже если отображение f это грубая эквивалентность. Максимум чего можно гарантировать, конечная коразмерность образа (т.е. что пространство $C_h(x)/\mathfrak{I}(f^*)$ — конечномерно).

Пусть X — грубое, не обязательно метрическое, LCH-пространство.

Определение 5.6. Назовем *компактификацией Хигсона* пространство hX такое, что $C(hX) = C_h(X)$. Границу $\nu X := hX/X$ будем называть *короной Хигсона*.

Явное описание компактификации Хигсона — дело вообще говоря очень трудное в силу того, что пространство $C_h(X)$ очень велико. Так что мы можем привести только один явный, но не очень интересный для грубой геометрии, пример.

Пример 5.4 ([MY15], Corollary 3.10). Пусть X компактное метрическое пространство, Y его открытое всюду плотное подпространство. Тогда $X = hY$.

Перейдём к основным свойствам короны Хигсона.

Теорема 5.3. Корона Хигсона — функториальна. То есть грубое отображения $f : X \rightarrow Y$ продолжается до непрерывного отображения $\nu f : \nu X \rightarrow \nu Y$. Если отображения $f, g : X \rightarrow Y$ близки, то $\nu f = \nu g$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu X & \xrightarrow{\nu f} & \nu Y \end{array}$$

Идея доказательства.

- По лемме 5.1 получаем, что f индуцирует гомоморфизм $f^* : B_h(Y) \rightarrow B_h(X)$, из чего получается функториальность.
- Если отображения $f, g : X \rightarrow Y$ — близки, то получаем равенство $\nu f = \nu g$, так как непрерывные функции могут быть близкими только если они совпадают. Откуда имеем, что $f^* \varphi - g^* \varphi \rightarrow 0$.

Следствие 5.3.1. Корона Хигсона — грубый инвариант. То есть у грубо эквивалентных пространств короны Хигсона гомеоморфны.

Важно, что компактификация по Хигсону не просто «очередная» компактификация, но обладает важным свойством универсальности: любая другая грубая компактификация (т.е. содержащая в себе грубую структуру X) «слабее» компактификация по Хигсону.

5.2.3 Универсальность

Среди всех грубых компактификаций данного LCH пространства, hX – максимальная и универсальная.

Следствие 5.3.2. Пусть X собственное связное и нормальное LCH пространство. Тогда

1. Компактификация Хигсона hX – грубая.
2. Для всякой грубой компактификации $\bar{X}$ отображение $id : X \rightarrow X$ однозначно продолжается до непрерывного отображения $id' : hX \rightarrow \bar{X}$.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & \searrow & \\ hX & \longrightarrow & \bar{X} \end{array}$$

Вообще, самая большая из всех компактификаций это компактификация Стоуна-Чеха (см. раздел 4.1.3), однако она не обязана быть грубой (и, следовательно, совпадать с компактификацией Хигсона). Однако иногда этого всё же можно добиться.

Пример 5.5. Компактификация Хигсона дискретной грубой структуры совпадает с компактификацией Стоуна-Чеха.

Проверим грубость компактификации Хигсона и её универсальность.

Доказательство следствия 5.3.2. • Начнём с проверки грубости.

Пусть $(X, \mathcal{E})$ – грубое пространство, удовлетворяющее посылке теоремы. Возьмем контролируемое множество $E \in \mathcal{E}$. Выберем последовательность $(x_\lambda, y_\lambda) \in E$. Если $x_\lambda \rightarrow \omega \in \partial X$, то и $y_\lambda \rightarrow \omega' \in \partial X$ в силу собственности пространства X . Значит для всякой функции Хигсона φ имеем, что $\varphi(x_\lambda - y_\lambda) \rightarrow 0$.

Следовательно $\varphi(\omega) = \varphi(\omega')$ для любой хигсоновской функции $\varphi \in C(hX)$. Значит $\omega = \omega'$ и по лемме 4.1 получаем, что $E \in \mathcal{E}_T$. Значит любое «старое» контролируемое множество будет контролируемым и в топологической грубой структуре.

То есть компактификация Хигсона — действительно грубая.

- Теперь докажем универсальность.

Пусть теперь $\bar{X}$ – произвольная грубая компактификация, и $f \in C(\bar{X})$. Функция $df : \bar{X} \times \bar{X}$ заданная как $df(x; x') := f(x) - f(x')$ также непрерывна. Причем на диагонали функция обнуляется $df(x, x) \equiv 0$. Кроме того, для любого контролируемого множества E имеем, что $df|_E$ стремится к нулю при приближении к границе, поскольку $E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_T$. Следовательно каждая непрерывная функция $f \in C(\bar{X})$ будет непрерывной и на hX . Значит имеется вложение $C(\bar{X}) \rightarrow C(hX)$.

Отсюда заключаем, что для всякого грубого замыкания $\bar{X}$ найдется и сюръекция $hX \rightarrow \bar{X}$.

□

Полезно смотреть на корону Хигсона как на способ сопоставления грубому пространству компактного (т.е. его короны). Более аккуратно, это утверждение звучит следующим образом.

Следствие 5.3.3. *Отображение ν задаёт функтор из категории грубых пространств в категорию компактных пространств.*

Общее доказательство см. в [Roe03].

Добавим несколько слов о связи между компактификацией Хигсона и концами пространства.

Предложение 5.7. *Пусть X метрическое собственное пространство. Если $e(X) = 1$, то корона νX связна.*

Доказательство. От противного. Несвязность короны значит, что $\nu X = A \sqcup B$, где множества A, B открыты и замкнуты (clopen). Значит, найдутся открытые непересекающиеся (это следствие нормальности и аксиомы T_4) множества $A' \supset A, B' \supset B$ в X .

Эта конструкция и порождает нужные нам концы: систему вложенных окрестностей A и B . Эквивалентными они быть, очевидно, не могут. $\square$

Отметим, следующее утверждение, доказанное в [Wei16] (Corollary 7.3).

Weighill's Theorem. *Граф Кэли конечно-порождённой группы G имеет связную корону Хигсона $\Leftrightarrow$ группа G имеет не более одного конца.*

Добавим, что корону Хигсона можно определить и без задания грубой компактификации. То есть определенный предыдущим следствием функтор ν расширяется на всю категорию грубых пространств, даже в тех случаях, когда пространство hX не существует. Больше подробностей об этой конструкции см. в [Har22].

Задачи

1. A, B – нетривиальные группы, и хотя бы одна из них не равна $\mathbb{Z}_2$. Докажите что число концов свободного произведения $A * B$ – бесконечно.
2. Приведите пример группы с бесконечным числом концов, не представимой в виде свободного произведения.
3. $\zeta : X \rightarrow Y$ – отображение двух метрических пространств такое, что $\rho(\zeta(x); \zeta(y)) < \rho(x; y)$. Верно ли, что число концов пространства Y не превосходит числа концов X ? А если заменить условие монотонности на грубость?
4. Докажите что у грубо-связного пространства с ограниченной геометрией граница (т.е. пространство концов) – компактна.
5. Пусть γ – граф, с равномерно ограниченными степенями вершин. $P(\gamma)$ пространство функций на $V(\gamma)$ таких, что $p(a) = p(b)$ для всех (кроме конечно числа пар соседних вершин a, b). P_0 – подпространство функций с компактным (ограниченным) носителем и констант. Докажите, что $\dim(P/P_0) = e(\gamma) - 1$.
6. Пусть (X, ρ) – локально компактное, связное, сепарабельное метрическое пространство. Проверьте, что C_0 действительно является грубой структурой на (X, ρ) , а также покажите, что C_0 грубая структура всегда является собственной.
7. Является ли C_0 топологической грубой структурой?
8. Пусть X – топологическое пространство, и пусть $\mathcal{E}$ – набор всех собственных подмножеств $X \times X$. Тогда $\mathcal{E}$ называется непрерывной грубой структурой на X . Покажите, что для локально компактных, хаусдорфовых, паракомпактных пространств непрерывная грубая структура всегда является собственной. Также покажите, что непрерывная грубая структура является топологической грубой структурой, ассоциированной с одноточечной компактификацией.
9. Являются ли плоскость и полуплоскость грубо эквивалентными?
10. Докажите, что грубое подпространство метризуемого пространства – метризуемо.

Часть III

Рост и аменабельность

Лекция VI: функции роста

Наша ближайшая цель — придать смысл таким (интуитивно понятным) выражениям, как: «прямая обладает линейным ростом» и «плоскость обладает квадратичным ростом». Понятие степени роста окажется ещё одним грубым инвариантом, который позволит, например, различать $\mathbb{R}^n$ при различных n .

Особый интерес представляет различие между пространствами полиномиального и экспоненциального роста; это станет важным при дальнейшем обсуждении аменабельности.

6.1 Функции роста в графе

Начнём с мотивирующего примера. Рассмотрим группу целых чисел $\mathbb{Z} = \langle \mathcal{X} \rangle$ с конечной системой образующих $\mathcal{X}$. В соответствующем графе Кэли рассмотрим семейство шаров

$$B_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid \rho_{\mathcal{X}}(e; n) \leq k\}.$$

Определим функцию $\text{gr}_{\mathcal{X}}(k) := \# \{B_k\}$.

Предложение 6.1. *Функция $\text{gr}_{\mathcal{X}}$ является линейной.*

Доказательство. Ограничимся общей идеей. Графы Кэли для различных систем образующих квазиизометричны. Значит найдутся такие константы C и D , что для шаров в разных системах образующих $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ выполнено неравенство

$$\# \{B_k(\mathcal{X})\} \leq C \# \{B_k(\mathcal{Y})\} + D. \quad (6.1)$$

Следовательно, $\text{gr}_{\mathcal{X}}(k) \leq C \text{gr}_{\mathcal{Y}}(k) + D$. Обратное неравенство получается аналогично. $\square$

Упражнение 6.1. Найдите явное выражение для функции роста в случае $\mathbb{Z} = \langle 2, 3 \rangle$ (см. пример 1.7).

6.1.1 Тип роста

Идея состоит в том, что грубая эквивалентность графов ограничивает функцию $\text{gr}_{\mathcal{X}}$ сверху функцией $\text{gr}_{\mathcal{Y}}$.

Сначала введём необходимые обозначения для понятия роста функции. Рассмотрим две функции $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Определение 6.1. Будем говорить, что функция f *подчинена* функции g $f \preceq g$, если для некоторых констант A, B начиная с некоторого K выполнено

$$|f(n)| \leq A|g(Bn)|, \quad \forall n > K.$$

Если $f \preceq g$ и $g \preceq f$, то будем называть функции *эквивалентными* и писать $f \approx g$.

Легко проверить, что $\approx$ — это отношение эквивалентности. Соответствующий класс эквивалентности будем обозначать через $[f]$ и называть *типом роста*.

Упражнение 6.2. Перепишите в терминах эквивалентности o -символику.

Пример 6.1. Многочлены имеют одинаковый тип роста, если и только если их степени совпадают.

Доказательство. Пусть имеем два многочлена $a = a_0x^m + \dots + a_m$, $b = b_0x^n + \dots + b_n$.

- Пусть $m = n$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^m + \dots + a_m}{b_0x^n + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Дальнейший выбор констант оставим в качестве упражнения.

- Если $m < n$ то $x^m \preceq x^n$. Остальное очевидно.

□

Бывают и функции промежуточного типа роста, попадающие «между» полиномиальными. Например между линейным и квадратичным типами лежит функция

$$n \preceq n \ln n \preceq n^2.$$

Пример 6.2. Любые две показательные функции a^x при $a > 1$ эквивалентны.

Проверку оставим в качестве упражнения. Далее будем называть функции с показательным ростом *экспоненциальными функциями*.

Определение 6.2. Функция обладает *субэкспоненциальным типом роста*, если она подчинена экспоненциальной.

В частности, любая функция полиномиального роста будет субэкспоненциальной.

Упражнение 6.3. Докажите, что в дереве, у которого все вершины имеют одинаковую степень — функция числа вершин в шаре от его радиуса — экспоненциальна.

6.1.2 Функции роста графов

Пусть теперь γ — **связный** граф, у которого все вершины имеют конечную степень, и $x \in \gamma$ — произвольная вершина. Понимая γ как метрическое пространство с обычной метрикой (длина кратчайшего пути по рёбрам), дадим следующее определение.

Определение 6.3. Функцией роста, связанной с вершиной x , назовём функцию

$$\text{gr}_x(n) := \#\{g \in \gamma \mid \rho_\gamma(x; g) \leq n\}. \quad (6.2)$$

Легко видеть, что $\text{gr}_x(n) \approx \text{gr}_x(Cn)$ для произвольной ненулевой константы C . То есть скорость роста не зависит от линейных замен радиусов шаров. Не зависит она и от выбора исходной точки роста.

Предложение 6.2. *Функции роста связного графа γ относительно различных вершин x и x' эквивалентны:*

$$\text{gr}_x \approx \text{gr}_{x'}.$$

Доказательство. Если x и x' — две различные точки, то, выбирая радиусы шаров вокруг x' кратными $\rho(x; x')$, получаем подчинённость $\text{gr}_x \preceq \text{gr}_{x'}$. $\square$

Предложение 6.3. *Если в графе γ степени вершин равномерно ограничены, то скорость роста не более чем экспоненциальная.*

Пример 6.3. Для вершинно-транзитивных графов (в частности, графов Кэли) скорость роста не может быть больше экспоненциальной.

Доказательство. Зафиксируем в качестве центра нейтральный элемент e . Степени всех вершин графа равны $\deg(e)$.

Мощность границы шара (т.е. сферы) радиуса n это количество точек на расстоянии ровно n от центра, т.е.

$$\#\{\text{ball}(e, n)\} - \#\{\text{ball}(e, n-1)\}.$$

У каждой точки сферы $\deg(e)$ соседей. Значит на сфере радиуса n не более чем $\deg(e) \cdot \#\{\text{ball}(e, n-1)\}$ точек. Откуда получаем оценку

$$\#\{\text{ball}(e, n)\} \leq \deg(e) \cdot \#\{\text{ball}(e, n-1)\} + \#\{\text{ball}(e, n-1)\} = (\deg(e)+1)\#\{\text{ball}(e, n-1)\}.$$

Следовательно

$$\#\{\text{ball}(e, n)\} \approx \deg(e)^n.$$

$\square$

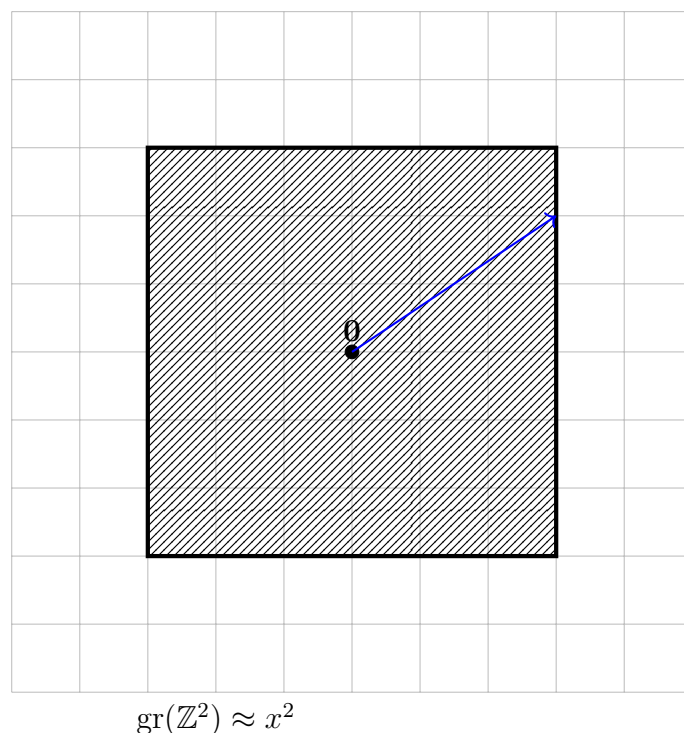
Ниже мы докажем (см. теорему 14.1), что тип роста является грубым инвариантом для очень широкого класса метрических пространств. А пока ограничимся уточнением примера 6.3 для вершинно-транзитивных графов.

Предложение 6.4. *Класс эквивалентности функции роста вершинно-транзитивного графа $[\text{gr}_x]$ является грубым инвариантом.*

Доказательство. Следует из пересчёта количества элементов данной длины, аналогичного проделанному при доказательстве предложения 1.3. $\square$

Разумеется, скорость роста графа Кэли называют *скоростью роста группы*.

Пример 6.4. Скорость роста абелевой конечнопорожденной группы полиномиальна. В частности, $\text{gr}(\mathbb{Z}^n) \approx x^n$.



Слушатели, знакомые с гипотезой $P = NP$ ожидают, что мы в какой-то момент скажем, что все группы имеют рост или субполиномиальный, или экспоненциальный.

Однако реальность более удивительна. Оказывается, что существуют группы промежуточного роста. Пример таких групп построил Р.И. Григорчук. Простой обзор его теоремы и конструктивный пример групп промежуточного роста см. в [GP06].

Мы ещё вернёмся к обсуждению типа роста вершинно-транзитивных графов (в частности графов Кэли) в дополнении 14. На самом деле, не так уж важно, работаем ли мы с графами Кэли или произвольными графами: даже условие равномерной ограниченности степеней вершин для изучения типа роста не требуется, нужна лишь связность (по сути исчерпаемость пространства ограниченными подмножествами).

А пока займёмся изучением групп полиномиального роста и постараемся их охарактеризовать как класс групп.

6.2 Теорема Басса-Гиварка

Напомним стандартное определение из теории групп.

Определение 6.4. Группа называется *нильпотентной степени k* , если её *нижний центральный ряд* G_j , где $G_0 := G$, $G_{j+1} := [G, G_j]$, обрывается на k -м номере.

Пример 6.5. Мультипликативная группа верхних унитреугольных целочисленных матриц 3×3 (а.к.а. группа Гейзенберга) является nilпотентной группой степени два.

Доказательство. Легко видеть, что коммутатор матриц из условия это матрица с нулевой побочной диагональю. А любые две такие матрицы коммутируют. $\square$

Непосредственными вычислениями легко показать, что группа Гейзенберга имеет полиномиальный рост. Однако справедливо куда более сильное утверждение.

Теорема 6.1 (Басса-Гиварка). *Нильпотентная группа G обладает полиномиальным ростом, причём $\text{gr}_G(n) \approx n^{\sigma(G)}$, где*

$$\sigma(G) := \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \dim(G_j/G_{j+1}). \quad (6.3)$$

Здесь $\dim(G_j/G_{j+1})$ обозначает размерность свободной абелевой части группы в следующем смысле. Абелева группа G_j/G_{j+1} является конечнопорождённой, поэтому (по теореме о классификации конечнопорождённых абелевых групп; см., например [Бог02]) представима в виде прямой суммы $\mathbb{Z}^{r_j} \oplus R$, где R — некоторая конечная абелева группа. Соответственно, $\dim(G_j/G_{j+1}) := r_j$.

Отметим, что бесконечность суммы в правой части формулы (6.3) является кажущейся. Начиная с номера, равного рангу нильпотентности, все размерности равны нулю.

Эта теорема верна и в общем случае, но мы ограничимся случаем, когда группа G свободна от кручения (т.е. $g^n = e$ для некоторого n только если $g = e$), и докажем только верхнюю оценку, поскольку это более сложная часть теоремы.

В доказательстве мы будем следовать работе [CD21].

6.2.1 Доказательство верхней оценки теоремы Басса-Гиварка

Разделим доказательство на несколько шагов. Сначала сформулируем и докажем общее утверждение для нильпотентных групп без кручения, которое определяет нормальную форму элементов таких групп. А потом, опираясь на неё, найдём верхнюю оценку числа элементов данной длины.

Нормальная форма в нильпотентных группах

Итак, пусть

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_k = \{e\}.$$

Фактор-группа G_i/G_{i+1} является абелевой и свободной от кручения (поскольку группа G свободна от кручения по предположению). Обозначим

$$\dim(G_i/G_{i+1}) =: r_i.$$

Фактор-группа G_i/G_{i+1} изоморфна $\mathbb{Z}^{r_i}$. Зафиксируем соответствующие образующие (речь идёт о фактор-группе, поэтому её образующими являются левые смежные классы)

$$G_i/G_{i+1} = \langle x_{ij}G_{i+1} \rangle, \quad j = 1, \dots, r_i.$$

Соберём элементы x_{ij} в множество $\mathcal{X} := \{x_{ij}\}$.

Предложение 6.5. *Множество $\mathcal{X}$ порождает группу G , причём для всякого $g \in G$ найдутся целые числа e_{ij} такие, что*

$$g = x_{11}^{e_{11}} x_{12}^{e_{12}} \dots x_{kr_k}^{e_{kr_k}}. \quad (6.4)$$

Запись элемента g как в формуле (6.4) будем называть *нормальной формой* элемента g .

Перед доказательством отметим, что система элементов x_{ij} выбирается неоднозначно. Каждый элемент является представителем класса смежности, и в качестве такого представителя можно выбрать любой другой элемент.

Доказательство. • Элемент $g \in G$ принадлежит классу $x_{i1}^{e_{i1}} x_{i2}^{e_{i2}} \dots x_{ir_i}^{e_{ir_i}} G_1$ для некоторого набора целых чисел e_{ij} , поскольку G_1 является нормальной подгруппой в G , а G/G_1 — абелева (что позволяет расположить образующие в указанном порядке). Иными словами, справедливо разложение

$$g = x_{11}^{e_{11}} x_{12}^{e_{12}} \dots x_{1r_1}^{e_{1r_1}} g_1,$$

где $g_1 \in G_1$.

- Аналогичные рассуждения применимы к элементам g_1, g_2 и так далее. Получаем, что

$$g_j = x_{j1}^{e_{j1}} x_{j2}^{e_{j2}} \dots x_{jr_j}^{e_{jr_j}} g_{j+1},$$

где $g_{j+1} \in G_{j+1}$.

- Повторяя эту процедуру k раз, в итоге получаем, что $g_k \in G_k = \{e\}$.

Таким образом, каждый элемент $g \in G$ разложен по базису $\mathcal{X}$ требуемым образом. $\square$

Упражнение 6.4. Докажите, что если $g, g' \in G_i$, то для некоторого $g'' \in G_{i+1}$ выполняется формула коммутирования по модулю G_{i+1} :

$$gg' = g'g \cdot g''.$$

Вычисление функции роста

Теперь аккуратно подсчитаем количество операций, выполненных в процессе приведения элемента к нормальной форме, что позволит определить радиус шара, содержащего данный элемент g . Отсюда получится верхняя оценка скорости роста группы.

Пусть $X_i := \{x_{ij} \mid 1 \leq j \leq r_i\}$. Очевидно, что $\mathcal{X} = \bigsqcup X_i$. Пусть

$$A := \max\{[y_1, \dots, y_s] \mid y_j \in \mathcal{X}, s \leq k\}. \quad (6.5)$$

Здесь A обозначает максимальную длину коммутаторов, составленных из образующих в алфавите $\mathcal{X}$.

Предложение 6.6. *Найдутся такие константы D и n , что в нормальной форме*

$$\sum_{j=1}^{r_i} |e_{ij}| \leq Dn^i.$$

Идея доказательства. Пусть $g \in G$ — произвольное слово, записанное в алфавите $\mathcal{X}$, и имеющее длину не более N . После приведения его к нормальной форме, его длина может измениться. Однако эти изменения имеют «измеримый» характер: каждый раз, когда мы переставляем буквы для построения нормальной формы, в

результатирующем слове появляется префикс, содержащий коммутатор образующих из алфавита $\mathcal{X}$.

Перемещая каждую образующую на место, соответствующее нормальной форме, в хвосте слова возникает коммутатор глубины не более k (ранг нильпотентности). Поскольку количество таких коммутаторов и их длины ограничены (см. A в формуле (6.5)), остаётся оценить, как изменяется длина нормальной формы относительно исходной длины. Это и доказывается ниже.

Доказательство. 1. Зафиксируем $g \in G$ — произвольное слово в алфавите $\mathcal{X}$.

Представим g в виде

$$g = x_{11}^{e_{11}} x_{12}^{e_{12}} \cdots x_{1r_1}^{e_{1r_1}} g^1, \quad (6.6)$$

где g^1 записано в алфавите $X \setminus X_1$. Эта запись получается путём перестановок, перемещающих образующие из X_1 влево. В результате слово g^1 будет начинаться с произведения коммутаторов вида $[x_{1j}, y]$, где $y \in X \setminus X_1$.

2. Продолжая процедуру по индукции, получаем представление для g^{l-1} :

$$g^{l-1} = x_{l1}^{e_{l1}} x_{l2}^{e_{l2}} \cdots x_{lr_l}^{e_{lr_l}} g^l, \quad (6.7)$$

где g^l начинается с коммутаторов вида $[x_{lj}, y]$, $y \in X \setminus (X_1 \cup \cdots \cup X_l)$.

3. При перемещении буквы x_{ij} в нормальную позицию в g^{i+1} возникает префикс, содержащий один коммутатор глубины $i + 1$.

Число коммутаторов глубины один равно числу образующих (обозначим его n). Число коммутаторов глубины два — не более n^2 , ..., глубины j — не более n^j .

4. Длина каждого коммутатора ограничена A (определённая в формуле (6.5)). Следовательно, число образующих из X_s , входящих в g^1 , ограничено сверху:

$$An + An^2 + \cdots + An^s \leq CAn^s,$$

для некоторой константы C .

5. Продолжим рассуждение по индукции для $1 \leq j < k$. Переместив все элементы из $X_1 \cup \cdots \cup X_l$ влево, получаем, что существует константа B , такая что число элементов из X_s , входящих в g^l , ограничено Bn^s для $s > k$.

6. Посчитаем число элементов из X_s , $s \geq l + 2$, которые входят в g^{l+1} . При этом возникают коммутаторы большей глубины. Оценим число коммутаторов вида $[x_{ij}^\pm, y_1, \dots, y_t]$. Для фиксированных i и t имеем верхнюю оценку:

$$(Bn^i)(Bn^{l+1})^t = B^{t+1}n^{i+t(k+1)}.$$

7. Для суммирования по $p = i + t(l + 1)$, ограничим число коммутаторов глубины p :

$$Bn^p + B^2n^p + \cdots + B^{\lfloor p/(k+1) \rfloor + 1}n^p \leq Bn^p + \cdots + B^{c+1}n^p \leq (c + 1)B^{c+1}n^p.$$

Суммируя по p , получаем, что число элементов из X_s , входящих в g^{l+1} , ограничено сверху $(c + 1)AB^{c+1}n^s$ для $s > l + 1$.

8. Итак, для некоторой константы $D > 0$, число коммутаторов глубины s в канонической форме слова g ограничено Dn^s для $1 \leq s \leq k$. Следовательно, для

$$g = x_{11}^{e_{11}} x_{12}^{e_{12}} \cdots x_{kr_k}^{e_{kr_k}}$$

выполняется $\sum_{j=1}^{r_i} |e_{ij}| \leq Dn^i$.

□

Закончим доказательство теоремы для верхней границы.

Предложение 6.7.

$$\text{gr}_G(n) \preceq n^{\sigma(G)}.$$

Доказательство. Понятно, что в абелевой группе $G_i/G_{i+1} \cong \mathbb{Z}^{r_i}$ число элементов длины m растёт как полином степени r_i .

Элементы внутри каждого «слоя» X_i можно переставлять. Следовательно, общее число элементов группы G , таких что $|g| \leq n$, не превышает:

$$(Dn)^{r_0} \cdot (Dn^2)^{r_1} \cdot \dots \cdot (Dn^k)^{r_k} \leq Cn^{\sigma(G)}.$$

Проверку корректности последнего суммирования оставляем в качестве упражнения. □

6.2.2 Следствия и обобщения

Прежде всего отметим, что для доказательства в обратную сторону нужно предъявить подгруппу с подходящей функцией роста. Подробнее см. в [CD21], стр. 124–125. Происхождение такой группы понятно: следует построить цепочку максимально свободных расширений коммутативной группы. Аналогично доказывается и случай, когда группа G содержит элементы конечного порядка: такие элементы не влияют на тип роста группы, так же, как и для конечно порождённых коммутативных групп.

Пример 6.6. Для группы Гейзенберга $\sigma(H)$ равно 4.

Доказательство. Мы уже отмечали, что группа Гейзенберга H является метабелевой (нильпотентной группы ранга 2). Коммутант $[H, H]$ является абелевой циклической группой и, следовательно, имеет ранг 1. Фактор-группа $H/[H, H]$ является абелевой группой ранга 2.

Применяя формулу Басса–Гиварка (6.3), получаем:

$$\sigma(H) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4.$$

□

Упражнение 6.5. Найдите степень роста группы верхних унитреугольных матриц размера 4.

Теорема Басса–Гиварка имеет глубокое обобщение: оказывается, что в грубом смысле nilпотентность эквивалентна полиномиальности роста группы.

Определение 6.5. Группу называют *виртуально nilпотентной*, если она содержит nilпотентную подгруппу конечного индекса.

Gromov’s Theorem. *Группа обладает полиномиальным ростом тогда и только тогда, когда она виртуально нильпотентна.*

Доказательство (если честно, то достаточно непростое) изложено, например, в [CD21] (глава 12). Следует отметить важное обобщение, сделанное Теренсом Тао и Йегудой Шаломом в [ST09].

Ещё одно смежное утверждение формулируется следующим образом:

Milnor-Wolf’s Theorem. *Конечно порождённая разрешимая группа субэкспоненциального роста является виртуально нильпотентной и, следовательно, имеет полиномиальный рост.*

Кстати, «виртуальные» свойства в грубой геометрии встречаются достаточно часто. Так, виртуальная цикличность (дайте соответствующее определение самостоятельно) влечёт за собой изометричность графа Кэли прямой. Обратим также внимание на задачу к первой главе 1, а также на теорему Столлинга о концах группы.

6.3 Рост в грубых пространствах

Ну, а теперь посмотрим как машинерию функций роста перенести на общий случай грубых пространств.

6.3.1 Емкость и энтропия

Пусть $(X, \mathcal{E})$ — грубое пространство, и $E \in \mathcal{E}$ — контролируемое симметричное множество. Тогда для $S \subset X$ определим:

Определение 6.6. • E -энтропией (см. рис. 6.3.1), $ent_E(S)$, назовем

$$ent_E(S) := \min_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \exists x_1, \dots, x_n \in X \mid S \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_{x_i} \right\}. \quad (6.8)$$

• E -емкостью, $cap_E(S)$, назовем

$$cap_E(S) := \max_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \exists y_1, \dots, y_m \in S \mid (y_i, y_j) \notin E \ \forall i \neq j \right\}. \quad (6.9)$$

Интуиция должна работать так. Энтропия представляет минимальное количество шаров в пространстве, которыми можно покрыть множество. Емкость, напротив, показывает, сколько шаров можно втиснуть в множество без пересечений.

Кошачьи советы. Ёмкость это максимальное количество пельменей, которые можно положить одним слоем в тарелку S так, чтобы они не сваливались.

А энтропия это минимальное количество пельменей, необходимое для того, чтобы полностью закрыть ими, возможно в несколько слоёв, тарелку S .

Непосредственное вычисление ёмкости и энтропии к примеру в евклидовой метрике — дело, ожидаемо, трудное. Непросто даже получить хорошие оценки для этих величин (см. напр. [KT59]). Впрочем для грубой геометрии нам хорошие оценки и не потребуются.

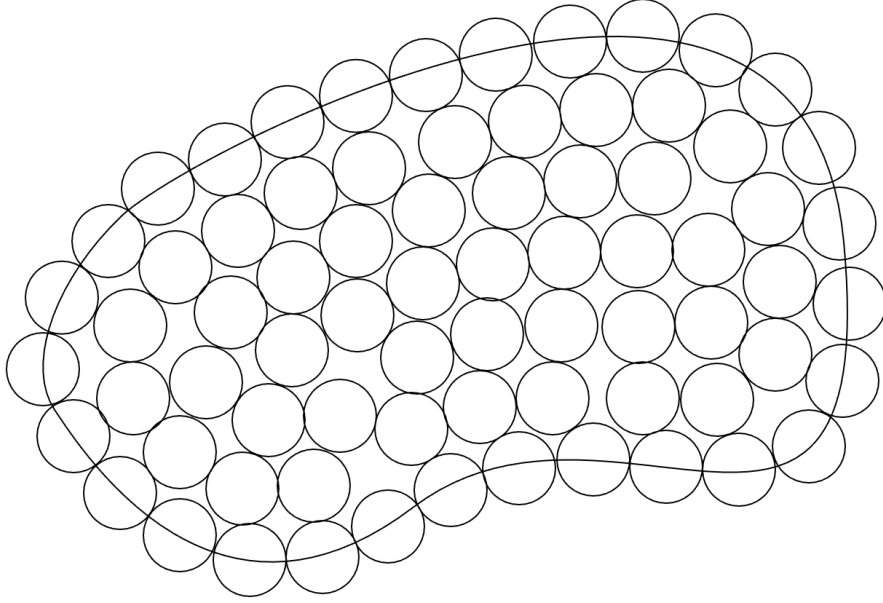


Рис. VI.I: Энтропия это максимальное количество непересекающихся шаров с центрами внутри области.

Упражнение 6.6. Сформулируйте в новых терминах задачу об упаковке шаров.

Предложение 6.8. Для $S, S' \subset X$ и $E, E' \in \mathcal{E}$ справедливы следующие свойства:

1. $S \subset S' \implies \text{ent}_E(S) \leq \text{ent}_E(S'), \text{cap}_E(S) \leq \text{cap}_E(S')$.
2. $E \subset E' \implies \text{ent}_{E'}(S) \leq \text{ent}_E(S), \text{cap}_{E'}(S) \leq \text{cap}_E(S)$.
3. $\text{ent}_E(S \cup S') \leq \text{ent}_E(S) + \text{ent}_E(S'), \text{cap}_E(S \cup S') \leq \text{cap}_E(S) + \text{cap}_E(S')$.
4. $\text{cap}_{E \circ E}(S) \leq \text{ent}_E(S) \leq \text{cap}_E(S)$.

Доказательство достигается методом пристального взгляда.

Пример 6.7. Для связного графа γ следующие утверждения эквивалентны:

1. Все степени вершин ограничены;
2. Геометрическая реализация графа локально компактна;
3. Энтропия и емкость ограниченного множества конечны.

Определение 6.7. Для симметричного $E \in \mathcal{E}$ и $x \in X$ назовем $\text{gr}_{E,x}$ функцией роста, связанной с E и точкой x :

$$\text{gr}_{E,x} : n \mapsto \text{cap}_E((E^n)_x). \quad (6.10)$$

В частности, для графа мы сразу получаем функцию роста, определённую нами выше в начале раздела 6.1. Однако корректность этого определения (т.е. независимость класса эквивалентности от выбора точки и контролируемого множества) выполняется не всегда. Приличный класс пространств, в которых определение корректно, — это т.н. пространства ограниченной геометрии, о которых мы сейчас и поговорим.

6.3.2 Пространства ограниченной геометрии

Введем обозначение для контролируемых множеств $E, F \in \mathcal{E}$:

$$\text{cap}_E(F) := \sup_{x \in X} \{ \text{cap}_E(F[E_x]), \text{cap}_E(F^{-1}[E_x]) \}. \quad (6.11)$$

Здесь E , как и выше, в определении емкости, предполагается симметричным.

Определение 6.8. Контролируемое множество F , для которого $\text{cap}_E(F) < \infty$, будем называть *однородным* относительно калибровки E .

Дадим следующее определение по [Bun11].

Определение 6.9. Грубое пространство $(X, \mathcal{E})$ называется пространством *ограниченной геометрии*, если существует такая калибровка E , что всякое контролируемое множество F однородно относительно E .

Упражнение 6.7 ([Bun11], теорема 3.25). Докажите, что обладание ограниченной грубой геометрией является грубым инвариантом.

Для грубо связных пространств с ограниченной геометрией определим *функцию роста* относительно калибровки E по формуле:

$$\text{gr}_{F,x} : n \mapsto \text{cap}_E((F^n)_x).$$

Нетрудно заметить, что при замене калибровки E на другую, функция $\text{gr}_{F,x}$ изменяется на функцию того же типа роста. С учётом этого дадим определение функции роста в общем случае.

Определение 6.10. Грубое пространство ограниченной геометрии имеет *тип роста* f , если:

- $\forall x \in X$ и контролируемого F выполнено $\text{gr}_{F,x} \preceq f$,
- $\exists x \in X, F \in \mathcal{E}$ такие, что $f \preceq \text{gr}_{F,x}$.

Первый понятный пример даёт теорема Шварца-Милнора.

Пример 6.8.

- Если на геодезическом пространстве X кокомпактно, собственно и свободно действует изометриями конечнопорожденная группа, то пространство и группа имеют одинаковый тип роста.
- Если действие несвободно, то тип роста пространства ограничен типом роста группы.

В частности, одинаковый тип роста будет у дискретной группы Гейзенберга и её непрерывного аналога.

Наконец сформулируем общую ситуацию с функцией роста. Тут, конечно, нужно сказать что мы уже всю работу по доказательству сделали, дав правильные определения.

Теорема 6.2. *Рост в грубо связном пространстве ограниченной геометрии – грубый инвариант.*

Доказательство. Чтобы проверить, что у двух грубо эквивалентных пространств, удовлетворяющих посылке теоремы тип роста одинаков достаточно заметить, что калибровка при грубой эквивалентности, переходит в калибровку. А все дальнейшие неравенства (для проверки эквивалентности функций) следуют из определений. $\square$

6.3.3 Немного о мере

Важным для дальнейшего исследования аменабельности источником функций роста оказывается мера. За подробностями относительно общей теории меры отошлём читателя к любому учебнику по функциональному анализу или теории меры, например [Кол04]. Сейчас мы ограничимся основными определениями.

Определение 6.11. Пусть X — некоторое множество, а Σ — σ -алгебра подмножеств X . Функция $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ называется *счётно-аддитивной мерой* (или просто *мерой*) на (X, Σ) , если выполнены следующие условия:

1. **Неотрицательность:** $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \Sigma$;
2. **Нулевое значение на пустом множестве:** $\mu(\emptyset) = 0$;
3. **Конечная аддитивность:** для любых попарно непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

4. **Счётная аддитивность:** для счётных объединений непересекающихся множеств справедливо аналогичное равенство.

Под σ -алгеброй мы подразумеваем систему подмножеств $\Sigma \subset 2^X$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. σ -алгебра содержит всё множество X ;
2. Если подмножество $A \subseteq X$ лежит в σ -алгебре, то и его дополнение $X \setminus A$ тоже лежит в ней;
3. Счётные объединения и пересечения элементов σ -алгебры также лежат в ней.

Элементы Σ на которых определена мера называют *измеримыми множествами*.

Упражнение 6.8. Проверьте **монотонность** меры. А именно, если $A \subseteq B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Конечно, в качестве σ -алгебры можно взять и 2^X , систему всех подмножеств. Но иногда это неудобно или невозможно, например, при определении меры Жордана или меры Лебега. Правда, в случае меры Лебега есть альтернативные подходы к аксиоматике, при которых уже все множества будут измеримы. Но это не наша война.

Геометрически меру можно (и нужно!) понимать как глубокое обобщение понятий площади и мощности.

Пример 6.9. Пусть X — метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек. Тогда, взяв в качестве σ -алгебры 2^X , можно определить меру μ_d как мощность. То есть для $A \subseteq X$

$$\mu_d(A) := \#(A).$$

Пусть (X, ρ, μ) — метрическое пространство с мерой.

Определение 6.12. Будем говорить, что мера μ *равномерна*, если найдутся такие монотонно растущие функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$0 < f(r) \leq \mu(B(x, r)) \leq g(r), \quad \forall x \in X, r > 0.$$

Замечание 3. Отметим, что в литературе *равномерной* называют меру, которая одинакова для любых двух шаров одинакового радиуса. Наше определение более слабое (т.е. из нашего определения следует упомянутое). Общее (и главное для нас) то, что в нашем определении функции f, g тоже не зависят от выбора центра шаров.

При этом, как повелось в грубой геометрии, наше определение не зависит от возможных «локальных безобразий».

Предложение 6.9. В геодезическом метрическом пространстве ограниченной геометрии с равномерной мерой функция

$$r \mapsto \mu(B(x, r))$$

является функцией роста.

Перед доказательством заметим, что если взять в геодезическом пространстве решётку (т.е. дискретное метрическое подпространство ограниченной геометрии, грубо эквивалентное пространству), то функция $r \mapsto \mu_d(B(x, r))$ — это в точности функция роста из (6.2).

Доказательство. Из геодезичности пространства имеем, что для каждого контролируемого E найдется $\alpha > 1$ такое, что

$$(x, y) \in E \Rightarrow \rho(x, y) < \alpha.$$

В наших старых обозначениях для ограниченной метрической структуры $E \subset E_\alpha$. И понятно, что E является калибровкой.

Определим

$$\nu := \inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha/2)),$$

$$V := \sup_{x \in X} \mu(B(x, \alpha)).$$

Для всякого подмножества $S \subset X$ имеем

$$\nu \operatorname{cap}_E(S) \leq \mu(S) \leq V \operatorname{ent}_E(S).$$

Значит

$$V^{-1}\mu((E^n)_x) \leq \operatorname{gr}_{E,x}(n) \leq \nu^{-1}\mu((E^n)_x).$$

Откуда

$$V^{-1}\mu(B(x, n)) \leq \operatorname{gr}_{E,x}(n) \leq \nu^{-1}\mu(B(x, \alpha n)).$$

Остаётся заметить, что из неравенства, используя монотонность мер, получаем

$$\mu(B(y, r)) \leq \mu(B(x, r + \rho(x, y))),$$

что от выбора исходной точки ничего не зависит, и функции эквивалентны. □

Это предложение можно немного уточнить.

Упражнение 6.9. Докажите, что метрическое пространство, оснащённое равномерной мерой, будет иметь ограниченную геометрию.

Лекция VII: аменабельность и теорема Фёльнера

Определение аменабельности можно давать разными способами. В частности, в книге [Roe03] определение вводится через схемы Понци (по англ. Ponzi schemes), и оно настоятельно рекомендуется к изучению. Однако, на наш взгляд, наиболее геометричное и интуитивно понятное определение – через свойство Фёльнеровости, которое мы подробно обсудим ниже.

Затем мы приведем определение через инвариантные средние и докажем их эквивалентность. Также установим связь с так называемыми парадоксальными разбиениями, такими, как парадокс Банаха-Тарского.

7.1 Фёльнеровость

Далее $(X, \mathcal{E})$ — грубое пространство ограниченной геометрии (см. наше определение 6.9).

7.1.1 Фёльнеровы системы множеств

Определение 7.1. Пусть $V \subseteq X$ — подмножество, $E \in \mathcal{E}$ — контролируемое множество. Тогда E -границей назовем множество

$$\partial_E V := \{x \in X \mid E_x \cap V \neq \emptyset, E_x \cap (X \setminus V) \neq \emptyset\}. \quad (7.1)$$

Геометрический смысл (см. рис. VII.I) толстой границы следующий: мы берём объединение всех E -шаров, которые пересекают «обычную» границу множества, и получаем E -толстую границу.

Пример 7.1. Для E_ε в ограниченной метрической структуре $\partial_{E_\varepsilon} V$ — это 2ε -окрестность границы множества V .

Вообще, E -границу геометрически удобнее понимать именно как «толстую» или, если угодно, «нечёткую» границу множества.

Определение 7.2. Назовём последовательность ограниченных множеств $\{V_n\}$ Фёльнеровой, если для всякого контролируемого $E \in \mathcal{E}$

$$\frac{\text{cap}(\partial_E(V_n))}{\text{cap}(V_n)} \rightarrow 0. \quad (7.2)$$

Иными словами, границы множеств V_n значительно тоньше их внутренностей.

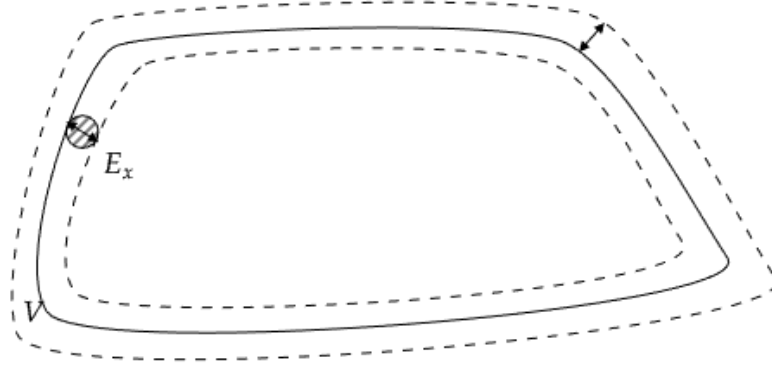


Рис. VII.I: V – сплошная линия, границы $\partial_E(V)$ – пунктир; шар E_x на рисунке

Определение 7.3. Будем называть пространство X *аменабельным*, если в нём найдётся Фёльнерова последовательность $\{V_n\}$, исчерпывающая X , т.е. $X = \cup V_n$.

Иногда такое пространство называют *собственным аменабельным*.

На всякий случай сразу скажем, что

Определение 7.4. Группу называют *аменабельной*, если её граф Кэли является аменабельным.

Упражнение 7.1. Докажите, что ограниченное пространство аменабельно.

Пример 7.2. Пространство $\mathbb{Z}^n$ с ограниченной метрической грубой структурой относительно «манхеттенской» метрики — аменабельно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть последовательность R_n кубов с центром в начале координат и стороной $2n$. Тогда числитель формулы (7.2) линейная функция, а знаменатель квадратичен.

Например, для E_ε имеем (для некоторой константы $C > 0$)

$$\frac{\text{cap}(\partial_{E_\varepsilon}(R_n))}{\text{cap}(R_n)} \sim C \frac{8n}{4n^2} \rightarrow 0.$$

□

Упражнение 7.2. Вычислите точные значения для $\partial_{E_\varepsilon}(R_n)$ и $\text{cap}(R_n)$.

7.1.2 Условия неаменабельности

Приведем пример неаменабельного пространства.

Пример 7.3. Свободная группа ранга 2 не аменабельна.

Строгое доказательство мы сейчас дадим, но сначала поясним, почему не работает конструкция из примера 7.2. На границе шара в графе Кэли для свободной группы $\partial_E(\text{Ball}(e, n))$ имеется порядка 2^n вершин, что сравнимо с их количеством внутри шара. Следовательно, такая последовательность шаров не является Фёльнеровой для контролируемого множества E_1 , содержащего пары соседних вершин.

Конечно, теоретически могла бы существовать какая-то другая Фёльнерова последовательность, не из шаров. Так что это не является достаточным препятствием к аменабельности, но анализ шаров это хороший аргумент в пользу неаменабельности.

Доказательство. Граф Кэли свободной группы ранга 2 является деревом, в котором все вершины имеют степень 4. Рассмотрим связный подграф, содержащий n вершин. Ясно, что его E_1 -граница содержит не менее чем $2n + 2$ вершины. Значит, для достаточно больших n построить Фёльнерову последовательность невозможно. $\square$

Интересно, что обратное утверждение неверно: существуют неаменабельные группы, не содержащие свободной подгруппы ранга 2. Соответствующий пример впервые построил А. Ольшанский в работе [Оль80].

Естественное предположение о необходимости для неаменабельности группы наличия свободной нециклической подгруппы называется «вопросом Дэя» или «гипотезой Неймана». На увлекательную тему атрибуции этого вопроса процитируем работу [АГЧ99], стр. 8:

Несмотря на призрачные иллюзии в литературе по поводу существования соответствующей этому вопросу «гипотезы фон Неймана», насколько мы знаем, фон Нейман сам никогда не формулировал этого предположения!

Мы также не знаем, кто первым сформулировал эту гипотезу, но отметим, что в литературе встречаются оба названия.

Упражнение 7.3. Докажите, что бинарное дерево неаменабельно.

Выведем простой критерий **не-Фёльнеровости**. Позже мы обсудим другие способы проверять, что пространство не является Фёльнеровым.

Лемма 7.1. *Пространство X не аменабельно тогда и только тогда, когда найдутся $\varepsilon > 0$ и контролируемое множество E , такие, что для всякого ограниченного множества V*

$$\text{cap } \partial_E V \geq \varepsilon \text{cap } V.$$

Доказательство. Это отрицание определения существования последовательности Фёльнера. Детали оставим в качестве упражнения. $\square$

Наше наблюдение о неаменабельности свободных групп ранга 2 можно значительно усилить.

Теорема 7.1. *Если грубое пространство $(X, \mathcal{E})$ не аменабельно, то оно имеет не менее чем экспоненциальный рост.*

Доказательство. Если пространство X не будет грубо связным, то дальнейшие рассуждения нужно провести для каждой компоненты связности. Таким образом, без потери общности будем считать пространство X грубо связным.

- Выберем E, ε из леммы 7.1. Пространство X не ограничено, значит найдётся точка $x \in X$ и шар $E_x =: V_0 \subset X$ с ненулевой E -ёмкостью. Рассмотрим последовательность подмножеств $\{V_n\}$, где $V_n := E(V_{n-1})$.

- $V_n \subset V_{n+1}$, причём в силу связности $X = \cup V_n$. Кроме того, $\partial_E(V_n) \subseteq V_{n+1} \setminus V_n$ по определению операции $\circ$.
- Используя формулу роста (6.10) и пользуясь леммой 7.1, оценим для $n > 2$:

$$\begin{aligned} \text{gr}_{E,x}(n) = \text{cap}_E(V_0^n) &\geq \text{cap}_E(V_{n-2}) + \text{cap}_E(\partial_E(V_{n-1})) \geq \\ &\geq \text{cap}_E(V_{n-2}) + \varepsilon \text{cap}_E(V_{n-1}) \geq (1 + \varepsilon) \text{cap}_E(V_{n-2}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{gr}_{E,x}(n) \geq (1 + \varepsilon)^{n-2} \text{cap}_E(V_0) \rightarrow \infty.$$

Что и требовалось доказать. □

Следствие 7.1.1. *Пространства менее чем экспоненциального роста аменабельны. В частности, к аменабельным пространствам относятся:*

- Конечно порожденные абелевы группы;
- Все другие группы полиномиального роста, то есть виртуально нильпотентные (см. теорему Громова из раздела 6.2.2);
- Группы промежуточного роста (в частности, группа Григорчука).

Интересно, что обратное утверждение неверно: экспоненциальный рост пространства не гарантирует, что пространство неаменабельно.

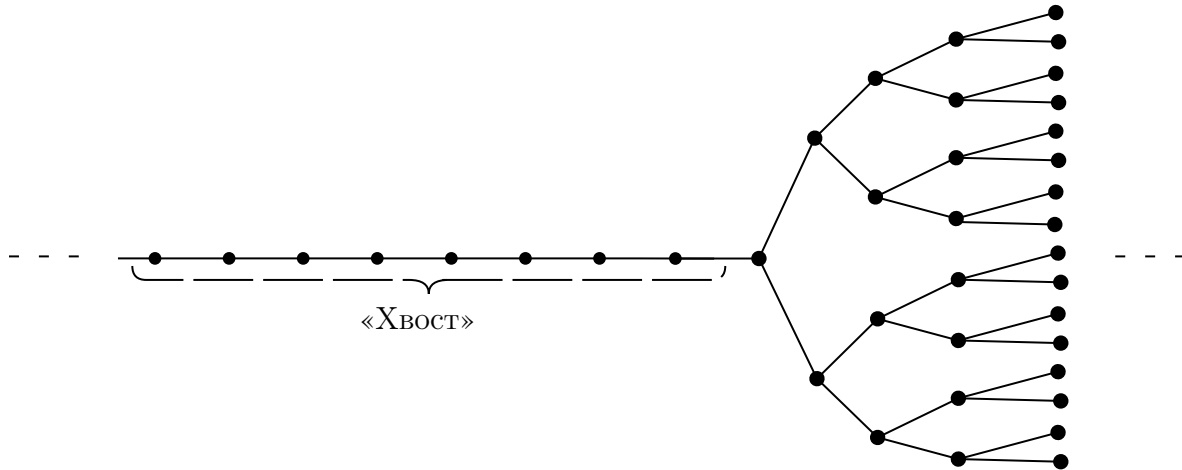


Рис. VII.II: Дерево с хвостом

Пример 7.4. Дерево с хвостом (бинарное дерево, к корню которого приклеили луч, см. рис. VII.II) — аменабельно, несмотря на экспоненциальный рост. Это также пример аменабельного пространства с неаменабельным подпространством (бинарным деревом).

На самом деле существуют даже аменабельные группы экспоненциального роста. Среди них есть разрешимые группы, которые, согласно теореме Милнора-Вульфа, либо виртуально нильпотентны (полиномиального роста), либо имеют экспоненциальный рост.

Предложение 7.1. *Аменабельность — грубый инвариант.*

Доказательство. Достаточно заметить, что и условие леммы 7.1 носит грубый характер, как и наличие последовательности Фёльнера. □

7.2 Случай групп

Аменабельность исторически появилась в контексте теории групп. И именно для них наиболее естественно вводится понятие *инвариантного среднего*, которое мы скоро определим. Начнем с переформулировки условий Фёльнера в более традиционную для теории групп форму.

Пусть G — конечно порожденная группа. Здесь под грубой структурой понимается стандартная ограниченная метрическая грубая структура.

Предложение 7.2. *Группа G аменабельна тогда и только тогда, когда найдётся последовательность $\{F_n\}$ конечных подмножеств $F_n \subset G$ таких, что $\forall g \in G$ выполняется*

$$\frac{\#(F_n \Delta g(F_n))}{\#F_n} \rightarrow 0. \quad (7.3)$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Возьмём в качестве F_n шары, аналогично доказательству теоремы 7.1. Заметим, что при достаточно больших n выполняется включение

$$F_n \Delta g(F_n) \subseteq \partial_{E|_g|}(F_n \cup g(F_n)).$$

Откуда, исходя из стандартной Фёльнеровости, следует искомое.

$\Leftarrow$ Отрицание условия (7.3) означает, что найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для всякого конечного множества F для почти всех n справедливо

$$\frac{\#(F_n \Delta g(F_n))}{\#F_n} > \varepsilon.$$

Выбираем в качестве контролируемого множества $E_{1/3}$ и пользуемся леммой 7.1. □

7.2.1 Инвариантное среднее

Пришло время углубиться в теорию меры. Конкретно, нас будут интересовать так называемые конечно-аддитивные меры. Пусть X — произвольное множество (в дальнейшем это будет группа, её граф Кэли или метрическое пространство).

Определение 7.5. Функция $\mu : 2^X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ называется конечно-аддитивной мерой, если для непересекающихся $A, B \subset X$

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Упражнение 7.4. Докажите, что конечная аддитивность эквивалентна условию

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Определение 7.6. Конечно-аддитивная мера μ на группе G называется *левоинвариантной*, если $\forall g \in G$ и для каждого множества $A \subset G$ выполняется

$$\mu(A) = \mu(g(A)).$$

Пример 7.5. Мощность является левоинвариантной конечно-аддитивной мерой на конечных группах.

В случае непрерывных групп (например $\mathbb{R}$), редкий случай, нельзя выбрать меру Лебега, так как она определена не на всех подмножествах. Тут нужно сделать замечание, что доказательство существования неизмеримых множеств опирается на аксиому выбора и возможно в стандартной с т.н. неконструктивной аксиомой выбора. Впрочем, можно аксиоматику и «подправить», но мы в эти детали вдаваться не будем.

Пример 7.6. Мера Лебега не может служить левоинвариантной мерой.

Определение 7.7. Назовём меру, определённую на пространстве X вероятностной, если

$$\mu(X) = 1.$$

Определение 7.8. *Левоинвариантным средним* называется конечно-аддитивная левоинвариантная мера, которая является вероятностной.

Разумеется, если группа G бесконечна, то левоинвариантное среднее конечных множеств равно нулю. Однако это не исключает возможности существования такой меры. Общую ситуацию описывает теорема Фёльнера.

Теорема 7.2 (Теорема Фёльнера). *Группа аменабельна тогда и только тогда, когда в ней есть левоинвариантное среднее.*

Мы ограничимся доказательством для случая конечно порождённых групп. Однако эта теорема может быть обобщена и на более широкий класс. Например, в случае *локально конечных метрических пространств* (пространств, в которых каждая ограниченная окрестность содержит конечное число точек), доказательство полностью аналогично нашему, с соответствующим изменением терминологии.

Добавим, что здесь остаётся пространство для исследований и обобщения этой теоремы на более общий класс грубых пространств. Подробнее об аменабельных группах и их свойствах см., например, в [АГЧ99].

7.2.2 Доказательство теоремы Фёльнера

При доказательстве мы будем следовать [Вер11]. Начнём с подготовки.

Предварительные сведения

Пусть G — конечно порождённая аменабельная группа, и $\{F_n\}$ — её последовательность Фёльнера. Группа G действует на себе левыми сдвигами, заданными отображением

$$g \mapsto (h \mapsto gh).$$

Обозначим через $\ell^\infty(G)$ пространство вещественнозначных ограниченных функций на G (т.е. ограниченных последовательностей, упорядоченных с использованием группы G). Это пространство является Банаховым (полным нормированным). Норма в этом пространстве определяется как супремумная:

$$\|f(\cdot)\| := \sup_{g \in G} |f(g)|.$$

Зададим действие группы G на пространстве $\ell^\infty(G)$ по формуле

$$G \times \ell^\infty(G) \rightarrow \ell^\infty(G);$$

$$(g, f(x)) \mapsto f(gx).$$

Для удобства введём обозначение:

$$g^*f := (g, f(x)).$$

Лемма 7.2. Пусть для аменабельной группы G функция $f \in \ell^\infty(G)$ является ограниченной. Тогда для любого $g \in G$ выполняется

$$\inf_{x \in G} (f(x) - [g^*f](x)) \leq 0. \quad (7.4)$$

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ — система Фёльнеровых подмножеств. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{x \in F_n} (f(x) - [g^*f](x))}{|F_n|} &= \frac{\sum_{x \in F_n} f(x) - \sum_{x \in g(F_n)} f(x)}{|F_n|} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{x \in F_n \Delta g(F_n)} |f(x)|}{|F_n|} \leq \sup_G |f| \frac{|F_n \Delta g(F_n)|}{|F_n|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в сумме $\sum_{x \in F_n} (f(x) - [g^*f](x))$ либо все слагаемые равны нулю, либо хотя бы одно из них отрицательно. $\square$

Для доказательства теоремы Фёльнера нам ещё понадобится знаменитая теорема Хана-Банаха в её «конической» формулировке.

Hahn–Banach’s Theorem. Пусть V — топологическое векторное пространство, $C \subset V$ — открытый выпуклый конус, не содержащий 0, а $W \subset V$ — замкнутое подпространство, которое не пересекает C . Тогда на V существует непрерывный линейный функционал $\theta \in V^*$ такой, что $\theta|_C > 0$, а $\theta|_W = 0$.

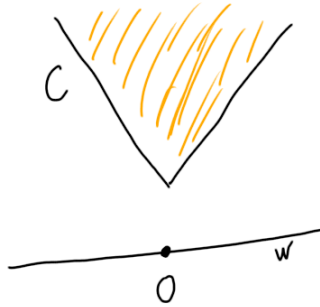


Рис. VII.III: Плоская конфигурация для теоремы Хана-Банаха

Здесь под конусом понимается множество, замкнутое относительно сложения и умножения на *положительные* константы.

Упражнение 7.5. Проверьте теорему Хана-Банаха для плоскости.

Доказательство теоремы Фёльнера

Теперь мы готовы доказать теорему 7.2 в одну сторону.

Предложение 7.3. *Если группа аменабельна, то она допускает левоинвариантное среднее.*

Доказательство. • Рассмотрим в пространстве $\ell^\infty(G)$ множество C следующего вида:

$$C := \{f \in \ell^\infty(G) \mid \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in G : f(x) > \varepsilon\}.$$

Множество C замкнуто относительно операций сложения и умножения на неотрицательные константы, поэтому оно является конусом.

- Пусть $W \subset \ell^\infty(G)$ — подпространство вида

$$W = \{f(\cdot) - [g^*f](\cdot) \mid f \in \ell^\infty(G), g \in G\}.$$

Согласно лемме 7.2, пересечение W и конуса C пусто.

- В силу сказанного, можем применить теорему Хана-Банаха и найти линейный функционал $\theta : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$, который строго положителен на C и тривиален на (очевидно замкнутом) подпространстве W .
- Тривиальность θ на W гарантирует, что θ инвариантен относительно сдвигов: $\theta(f) = \theta(g^*f)$. Положительность на C и глобальная ограниченность обеспечивают, что для некоторой константы D выполняется $0 < \varepsilon < \theta(f) < D$.
- Определим инвариантное среднее для $A \subset G$ формулой

$$\mu(A) := \frac{\theta(\chi_A)}{\theta(\chi_G)},$$

где χ_S — функция-индикатор множества S .

□

Несмотря на кажущуюся конструктивность доказательства, отметим, что для нахождения функционала θ алгоритма нет, и, вообще говоря, быть не может, поскольку доказательство теоремы Хана-Банаха существенно опирается на аксиому выбора. Также и вопрос об единственности такого функционала, вообще говоря, непрост.

Впрочем, если речь идёт о Гильбертовом пространстве, то эти проблемы разрешаются при помощи теоремы Риса-Фреше (см. [Кол04]). Есть аналогичный результат и для пространств ℓ_p .

Упражнение 7.6. Найдите левое инвариантное среднее на $\mathbb{Z}$.

Чтобы завершить доказательство теоремы Фёльнера и развернуть предложение 7.3 в обратную сторону, мы воспользуемся подходом из работы [Pil14] (теорема 1.6, стр. 5).

Предложение 7.4. *Если на группе существует левое инвариантное среднее, то группа аменабельна.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что если на группе существует μ — левоинвариантное среднее, то на ней найдётся последовательность Фёльнера.

- Для доказательства обратного утверждения воспользуемся тем, что множество $\ell^1(G)$ плотно в сопряжённом пространстве $\ell^\infty(G)^*$.
- Пусть μ — левоинвариантное среднее. Выберем последовательность $\phi_n \in \ell^1(G)$ ступенчатых функций с конечной поддержкой, которые сходятся к μ .
Иными словами, возьмём функции ϕ_n , так чтобы для некоторого $N > 0$ значения функции ϕ_n содержались в множестве $\{0, 1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N, 1\}$.
- Используя левоинвариантность μ , получаем, что

$$g^* \phi_n - \phi_n \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

- Теперь зададим множества

$$F_{k,n} := \{g \in G \mid \phi_n(g) \leq k/N\}.$$

По принципу Дирихле, по крайней мере одно из них является почти инвариантным относительно сдвигов g . Таким образом, из $F_{k,n}$ можно выбрать семейство Фёльнеровых подмножеств.

□

Тем самым доказательство теоремы 7.2 завершено.

7.3 Парадоксальные декомпозиции

Теперь обобщим понятие усреднения хотя бы на случай метрических пространств и поговорим о такой занятной штуке, как парадоксальные декомпозиции.

7.3.1 Частичные сдвиги

Мы будем следовать работе [Ara+16] и ограничимся случаем локально конечных пространств, которые во многом аналогичны дискретным.

Определение 7.9. Метрическое пространство называется *локально конечным*, если у каждой точки существует окрестность, содержащая конечное число точек.

Пусть (X, ρ) — локально конечное метрическое пространство с грубой структурой $\mathcal{E}$, порождённой метрикой.

Определение 7.10. Для $A, B \subset X$ и биекции $t : A \rightarrow B$ тройка (A, B, t) называется *частичным сдвигом*, если график

$$\text{graph}(t) := \{(x, t(x)) \mid x \in A\}$$

является контролируемым множеством, то есть $\text{graph}(t) \in \mathcal{E}$. Множество всех частичных сдвигов на X обозначим $PT(X)$.

Предложение 7.5. Операция композиции на $PT(X)$ порождает полугруппу, задаваемую следующим образом:

$$(A, B, t) * (A', B', t') := (t^{-1}(B \cap A'), t'(B \cap A'), t \circ t').$$

Доказательство. Ассоциативность операции $*$ очевидна. Проверим замкнутость, то есть что $graph(t \circ t')$ является контролируемым. Для этого достаточно заметить, что

$$graph(t \circ t') \subset graph(t) \circ graph(t'),$$

поэтому, согласно свойствам грубой структуры (замкнутость относительно взятия подмножеств и операции $\circ$), получаем, что $graph(t \circ t')$ является контролируемым. $\square$

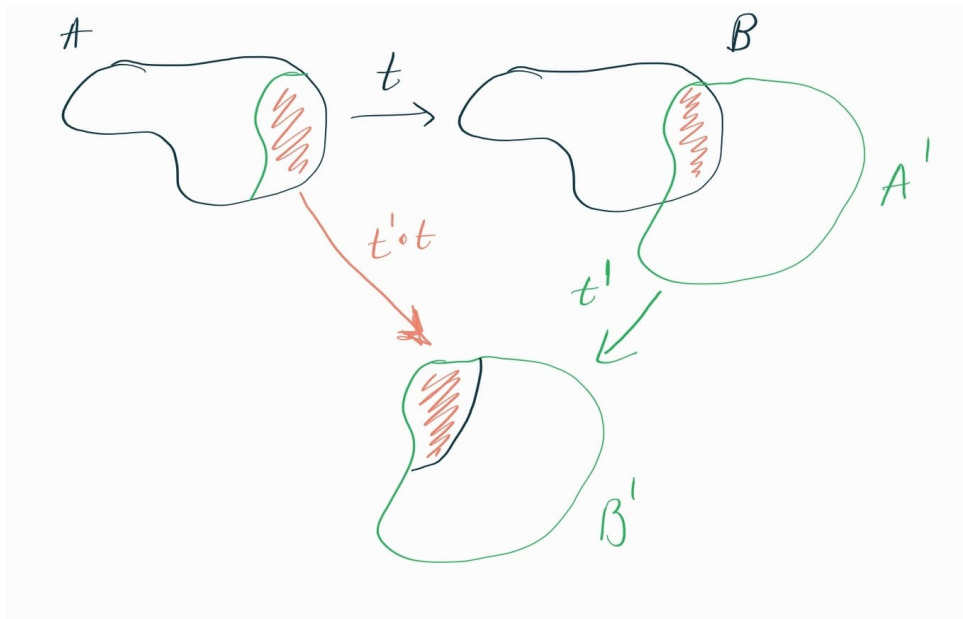


Рис. VII.IV: Операция в полугруппе $PT(X)$

Упражнение 7.7. Найдите единицу (нейтральный элемент) в полугруппе $PT(X)$.

Понятие вероятностной конечно-аддитивной меры на X мы уже ввели, а теперь введём определение инвариантности.

Определение 7.11. Конечно-аддитивная вероятностная мера μ называется *инвариантной*, если для любого частичного сдвига $(A, B, t) \in PT(X)$ выполняется

$$\mu(A) = \mu(B).$$

Ara, Li, Lledó, Wu's Theorem. Локально конечное метрическое пространство аменабельно тогда и только тогда, когда на нём существует инвариантная вероятностная конечно-аддитивная мера.

Объяснение и доказательство см. в [Ara+16] (теоремы 2.15 и 2.17).

Может показаться, что рассматривается лишь узкий класс локально конечных метрических пространств. Однако напомним, что аменабельность — грубое свойство. Поэтому всё, о чём мы говорим, справедливо и для любого другого грубого пространства, в котором существует локально конечная решётка.

7.3.2 Парадоксальные декомпозиции

Мы хотели обобщить понятие усреднения на метрические пространства и объяснить, что такое парадоксальные декомпозиции. И понятие усреднения мы уже обобщили.

Определение 7.12. Пространство X называется *парадоксально разложимым*, если найдётся разбиение X на подмножества $X_+, X_- \subset X$, такое что $X = X_+ \sqcup X_-$, и существуют частичные сдвиги (X, X_+, t_+) и (X, X_-, t_-) .

Пример 7.7 (Парадокс Банаха–Тарского). Единичный трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.

Важно отметить, что части, на которые нужно разбить шар, чтобы составить из них два шара, являются неизмеримыми (в смысле меры Лебега). Таким образом, на практике невозможно составить два шара из одного, что называется, при помощи лобзика.

Предложение 7.6. Аменабельное пространство не допускает парадоксальных разложений.

Доказательство. Если бы парадоксальное разбиение существовало, то нашлись бы подмножества X_+ и X_- , порождающие частичные сдвиги. Тогда

$$\mu(X) = \mu(X_+) + \mu(X_-) = \mu(X) + \mu(X).$$

Следовательно, мера μ была бы тривиальной. $\square$

Удивительно, но верно и обратное: аменабельность пространства эквивалентна отсутствию парадоксальных разложений. Это утверждение называется альтернативой Тарского.

Альтернатива Тарского’s Theorem. *Может быть верно ровно одно из следующих утверждений:*

- Пространство аменабельно;
- Пространство допускает парадоксальное разбиение.

Здесь речь идёт о локально конечных метрических пространствах, в частности о группах, а также о любых других грубых пространствах, грубо эквивалентных им.

Упражнение 7.8. Постройте парадоксальное разбиение для свободной группы ранга два.

Доказательство альтернативы Тарского для групп и псевдогрупп приведено в [AGC99]. Для более общего случая см. [Ara+16].

Насколько много существует неаменабельных (иногда их называют «парадоксальными», что теперь понятно) групп?

Пример 7.8 (См. [Bow96]). Существует бесконечно много квазиизометрических классов 2-порожденных групп.

В заключение отметим, что в разделе 10.4 мы рассмотрим более слабое условие, аналогичное аменабельности, которое называется условием А. Это важная часть общего контекста, связанная с поиском достаточных условий для неаменабельности, включая обсуждение свойства Каждана. Особенно интересен вопрос о вложимости в гильбертово пространство. Но об этом в следующих лекциях.

Задачи

1. Пусть конечнопорожденная группа G грубо эквивалентна $G \times G$, докажите, что G не может иметь полиномиальный рост.
2. Докажите, что бесконечный вершинно-транзитивный граф у которого больше одного конца или экспоненциального роста или линейного.
3. Приведите пример графа полиномиального роста, у которого степени вершин не будут равномерно ограничены.
4. Найдите скорость роста графа у которого конечное число концов, причем все они тонкие.
5. Вычислить функцию роста групп целочисленных верхнетреугольных матриц размера 4×4 с 1 на диагонали.
6. Пусть $H < G$ подгруппа конечного индекса и существует строго растягивающий (относительно словарной метрики G и ограничения этой же метрики на H) гомоморфизм из H в G такой, что образ тоже имеет конечный индекс. Докажите, что G имеет полиномиальный рост.
7. Докажите, что группа квазиизометричная абелевой – виртуально абелева.
8. Пусть γ – «дерево с хвостом». Приведите пример конечно аддитивной нетривиальной меры на этом графе такой, что она будет равна нулю на каждой конечном множестве.
9. Рассмотрим группу G с конечным множеством образующих S и линейный оператор $T: \ell_2(G) \rightarrow \ell_2(G)$, определенный по правилу

$$(Tf)(g) = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} f(gx).$$

Докажите, что если G аменабельна, то $\|T\| = 1$.

10. Покажите, что если G – аменабельная группа, то любая подгруппа $H < G$ аменабельна, а также любая факторгруппа G/N аменабельна.
11. Докажите, что если G, H – аменабельные группы, то и $G \times H$ тоже аменабельна.
12. Пусть $0 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ – точная последовательность конечнопорожденных групп, причем N и H аменабельны, верно ли что G аменабельна?
13. Доказать, что любая конечнопорожденная разрешимая группа аменабельна.
14. Доказать, что группа G аменабельна $\Leftrightarrow$ для любого конечного подмножества $S \subset G$ и $\varepsilon > 0$ существует $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ с конечным носителем, такая что $\|f - [s * f]\|_{\ell_1} < \varepsilon$, для каждого $s \in S$.

Часть IV

Гиперболичность

Лекция VIII: гиперболичность по Гро- мову

Одними из главных мотивирующих объектов в грубой геометрии являются гиперболические пространства и гиперболические группы. Мы рекомендуем для изучения книгу [ВН99] и лекционные записки [Hul], которые достаточно кратки, но достаточны для наших нужд. В отношении различных геометрических свойств пространства Лобачевского также рекомендуем работу [ВВ04].

Наша ближайшая цель состоит в определении гиперболических пространств и доказательстве того, что гиперболичность является грубым инвариантом, что, в отличие от многих других грубых инвариантов, не является самоочевидным. Затем, определив гиперболические группы, обсудим рост гиперболических пространств, их аменабельность и затронем вопрос их классификации.

8.1 Гиперболические пространства

Далее в этой лекции под $X = (M, \rho)$ будем понимать геодезическое метрическое пространство. Обозначим через $[a, b]$ геодезическую линию между точками a и b в X . Геодезический треугольник, состоящий из геодезических $[a, b]$, $[b, c]$, и $[c, a]$, обозначим как Δ_{abc} .

Все графы, рассматриваемые далее, понимаются как их геометрические реализации.

8.1.1 Произведение Громова

На геодезическом пространстве X введём операцию, предложенную Михаилом Громовым.

Определение 8.1. *Произведением Громова* называется тернарная операция

$$(\cdot|\cdot) : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

которая определяется формулой:

$$(y|z)_x := \frac{\rho(x; y) + \rho(x; z) - \rho(y; z)}{2}.$$

Геометрический смысл этой операции заключается в том, что произведение Громова представляет собой половину суммы длин сторон треугольника Δ_{xyz} , где стороны xu и xz берутся с плюсом, а сторона yz — с минусом.

На плоскости произведение Громова имеет простой геометрический смысл: это расстояние от точки x до точки касания вневписанной окружности (см. рис. VIII.1). Так эту формулу и запоминать удобнее.

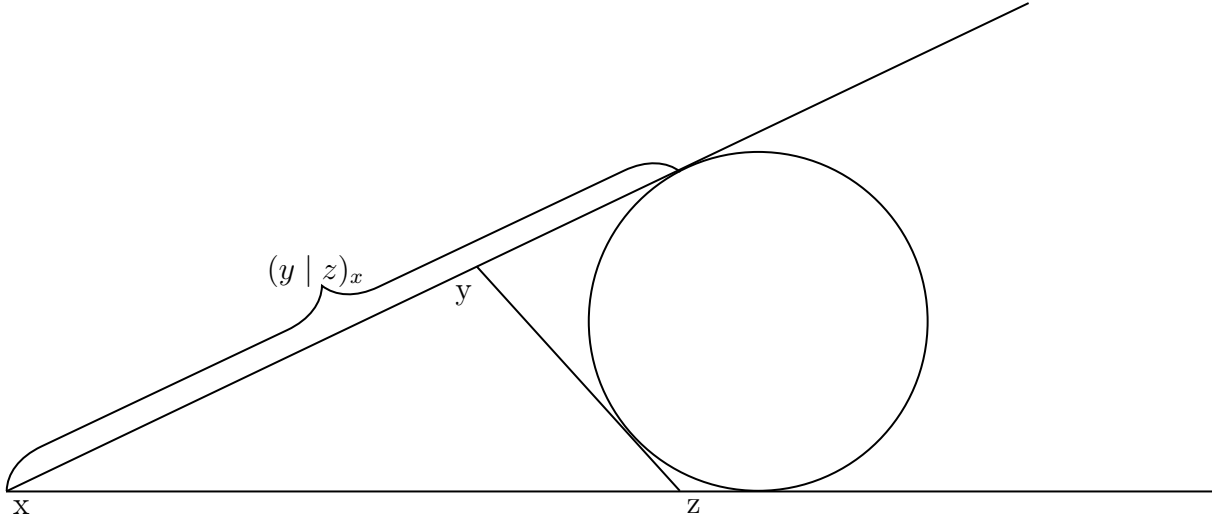


Рис. VIII.I: Геометрический смысл произведения Громова

Упражнение 8.1. Чему равно $(x|y)_z + (y|z)_x + (x|x)_y$?

Пример 8.1. На прямой $\mathbb{R}$ для точек x, y, z можно найти комбинацию, при которой громовское произведение равно нулю.

Доказательство. Выберем вершины так, чтобы отрезок $[y, z]$ представлял собой объединение $[y, x]$ и $[x, z]$. То есть вершина x находится «между» y и z . $\square$

Предложение 8.1. Для любых точек $x, y, z \in X$ выполняются следующие свойства:

1. $(y|z)_x = (z|y)_x \geq 0$,
2. $(y|z)_y = (y|z)_z = 0$,
3. $\rho(x, y) = (x|z)_y + (y|z)_x$,
4. $(y|z)_x \leq \min\{\rho(y; x), \rho(z; x)\}$.

Доказательство оставим в качестве упражнения. А вот следующее свойство мы докажем.

Лемма 8.1. Для любых $x, y, z \in X$ выполняется неравенство

$$(y|z)_x \leq \rho(x; [y, z]).$$

Напомним, что расстояние от точки до множества определяется как минимум расстояний до точек множества:

$$\rho(x; [y, z]) := \min_{p \in [y, z]} \{\rho(x; p)\}.$$

Доказательство. Для любой точки $p \in [y, z]$ выполняется равенство $\rho(y, p) + \rho(p, z) = \rho(y, z)$, так как $[y, z]$ — это геодезическая. Также из неравенства треугольника имеем:

$$\rho(x; y) \leq \rho(x; p) + \rho(y; p),$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x; p) + \rho(z; p).$$

Складывая эти неравенства и используя $\rho(y; p) + \rho(z; p) = \rho(y; z)$, получаем:

$$\rho(x; y) + \rho(x; z) - \rho(y; z) = 2\rho(x; p), \quad \forall p \in [y, z].$$

Следовательно, $(y|z)_x \leq \rho(x; p)$, $\forall p \in [y, z]$, и после взятия точной нижней грани по p получаем требуемое. $\square$

Предложение 8.2. В геометрической реализации дерева T лемма 8.1 принимает вид равенства. То есть для любых трёх точек $x, y, z \in T$ выполняется

$$(y|z)_x = \rho(x; [y, z]).$$

Доказательство. В дереве нет циклов, поэтому возможны два случая: либо точки лежат на одной прямой, либо они образуют *трипоид*, то есть найдётся такая точка P , что отрезки $[x, P]$, $[y, P]$, $[z, P]$ имеют единственную общую точку P .

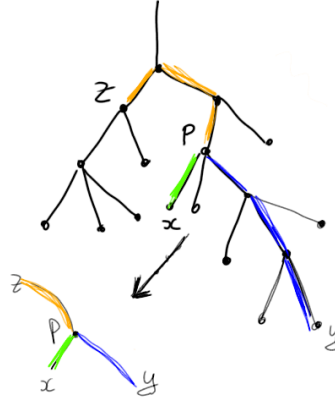


Рис. VIII.II: Случай трипоида

- Точки x, y, z лежат на одной прямой, то есть либо $y \in [x, z]$, либо $x \in [y, z]$, либо $z \in [x, y]$. Если $y \in [x, z]$, то

$$2(y|z)_x = \rho(x; y) + \rho(x; z) - \rho(y; z) = \rho(x; y) + \rho(x; y) = 2\rho(x; y),$$

то есть $2(y|z)_x = 2\rho(x; [y, z])$. Случай $z \in [x, y]$ аналогичен. А если $x \in [y, z]$, то точка x лежит на геодезической, и расстояние Громова равно нулю, как в примере 8.1.

- В случае трипоида имеем, что по лемме 8.1 произведение $(y|z)_x$ равно расстоянию до отрезка $[y, z]$. Что, в силу единственности пути между точками в дереве, равняется расстоянию до ближайшей точки этого отрезка, а это точка P . Значит $(y|z)_x = \rho(x; P)$.

$\square$

8.1.2 Определения гиперболических пространств

Теперь введём определение гиперболического по Громову пространства, или, как мы будем обозначать, δ -гиперболического пространства. Зафиксируем $\delta \in \mathbb{R}$ (положительность или отрицательность не требуются).

Определение 8.2. Геодезическое пространство X называется δ -гиперболическим, если для любых $x, y, z, w \in X$ выполняется

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta. \quad (8.1)$$

Существует эквивалентное определение, называемое *условием Рипса*.

Определение 8.3. Геодезическое пространство X называется δ -гиперболическим, если для любых $x, y, z \in X$ геодезическая $[y, z]$ содержится в δ -окрестности множества $[x, y] \cup [x, z]$.

Геодезический треугольник для которого выполнено условие Рипса при параметре δ называют δ -тонким

Предложение 8.3. Определения 8.2 и 8.3 эквивалентны.

Доказательство. Следует из леммы 8.1. □

Сразу же введём третье определение.

Определение 8.4. Пространство X называется δ -гиперболическим, если для любых $x, y, z \in X$ выполняется

$$\rho(x; [y, z]) - \delta \leq (y|z)_x.$$

Доказательство эквивалентности оставим в качестве упражнения.

Приведём очевидные примеры δ -гиперболических и не δ -гиперболических пространств.

Пример 8.2. $\mathbb{R}^n$ не является δ -гиперболическим для $n > 1$.

Доказательство. Для любого $\delta > 0$ можно найти точки y и z такие, что $\rho(y, z) > 3\delta$, и выбрать x достаточно далеко от обоих, так чтобы середина $[y, z]$ точно не была покрыта δ -окрестностью (см. рис. VIII.III). □

Пример 8.3. Ограниченное пространство (в частности, компактное) является гиперболическим.

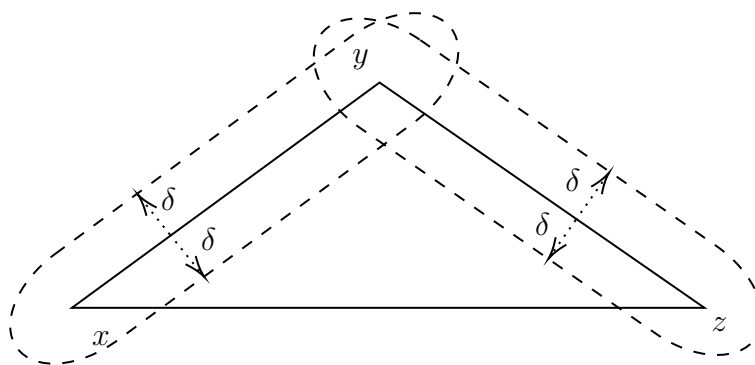
Доказательство. Ограниченность пространства X означает, что его диаметр конечен: $\text{diam}(X) < \infty$. Остаётся положить $\delta = 2 \text{diam}(X)$. □

Пример 8.4. Дерево является 0-гиперболическим.

Доказательство. Из предложения 8.2 следует, что

$$\rho(x; [y, z]) - 0 = (y|z)_x.$$

□


 Рис. VIII.III: Плоскость не является δ -гиперболической

Упражнение 8.2. Будет ли гиперболическим бесконечный граф с одним конечным циклом?

Упражнение 8.3. Докажите, что полоса (пространство, заключённое между двумя параллельными прямыми) является гиперболической.

Позже, когда мы докажем, что гиперболичность является грубым свойством, этот пример станет очевидным. Пока же предлагаем обобщить рассуждения из предыдущего примера.

Пример 8.5. ε -окрестность гиперболического пространства является гиперболическим пространством.

Те, кто не хочет ждать доказательства грубости, может проверить последний пример, воспользовавшись определением 8.4.

Неформально гиперболические пространства можно понимать как окрестности деревьев. Это наблюдение мы во многом реализуем позже, построив CAT классификацию гиперболических пространств.

Кошачьи советы. В гиперболическом пространстве растёт большое дерево, и кошка, бегающая по нему, непременно окажется рядом с каждой точкой пространства.

8.1.3 Пространство Лобачевского

Рассмотрим более сложный пример гиперболического пространства — геометрию Лобачевского.

Пространство $\mathbb{H}$ реализует геометрию, в которой выполнены все аксиомы Евклидовой геометрии, кроме пятого постулата. В геометрии Лобачевского пятый постулат принимает следующий вид:

Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной.

Подробное о геометрии Лобачевского и её удивительных свойствах можно прочитать например в [BV04]. Мы же, не углубляясь в доказательства, ограничимся демонстрацией того, что $\mathbb{H}$ является метрическим пространством, и укажем на удобные геометрические модели, реализующие аксиоматику Лобачевского.

Одной из моделей, реализующих геометрию Лобачевского, является следующая (отсюда и название «гиперболическая»):

Пример 8.6. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ билинейную форму $\langle x, y \rangle := x_0 y_0 - \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Зададим пространство, в котором мы реализуем геометрию Лобачевского, как гиперboloид, определяемый формулой

$$\mathbb{H}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, u \rangle = 1\}.$$

В этой модели геодезическая — это кривая, образованная пересечением $\mathbb{H}^n$ с плоскостью, проходящей через начало координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. Метрика на $\mathbb{H}^n$ задаётся соотношением

$$\text{ch}(\rho(x; y)) := \langle x, y \rangle.$$

Здесь ch это гиперболический косинус, то есть функция

$$\text{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Следующая теорема (Гаусса–Бонне) определяет объём треугольника в пространстве Лобачевского и показывает, что их площадь ограничена.

Гаусса–Бонне’s Theorem. Пусть H — пространство Лобачевского, и $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ (треугольник с углами α , β и γ) лежит в H . Тогда

$$\text{Vol}(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Доказательство см. в [BB04], стр. 33.

Для доказательства δ -гиперболичности пространства Лобачевского мы используем критерий δ -гиперболичности через свойство тонкости треугольников.

Лемма 8.2. Пространство X является δ -гиперболическим тогда и только тогда, когда существует $\tilde{\delta} > 0$, такое что для любого треугольника $\Delta_{ABC} \subset X$ и точки $p \in BC$ выполняется $\rho(p, AB \cup AC) < \tilde{\delta}$.

Доказательство. Для иллюстрации леммы подходит рисунок VIII.III.

- Полагая $\tilde{\delta} = 3\delta$ (где δ взято из определения гиперболичности), легко получить лемму в одну сторону.
- В обратную сторону видно, что для любого $\delta > 0$ пространство X не является δ -гиперболическим в силу определения 8.3. Противоречие.

□

Предложение 8.4. Пространство $\mathbb{H}$ является гиперболическим.

Доказательство. Полагая $\tilde{\delta} = \pi$ в лемме 8.2 и применяя теорему Гаусса–Бонне, заключаем, что пространство Лобачевского является δ -гиперболическим. □

В отличие от евклидовых пространств, обладающих полиномиальным ростом, геометрия Лобачевского характеризуется экспоненциальным ростом.

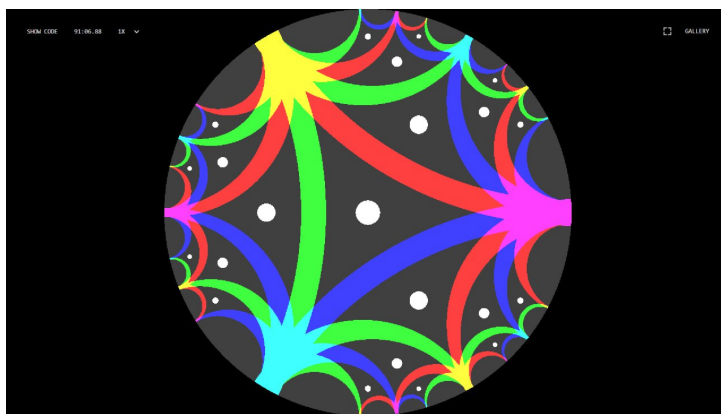


Рис. VIII.IV: Решётка в $\mathbb{H}$

Предложение 8.5. *Пространство $\mathbb{H}$ имеет экспоненциальный рост.*

Доказательство. • Построим решётку из точек, расстояния между которыми (в гиперболической метрике) постоянны.

- Построим «бесконечный» треугольник, вершины которого лежат на абсолюте (см. рис. VIII.IV).
- Отразим каждую его вершину относительно противоположащей стороны.
- Продолжим по индукции.
- Геометрические центры полученных треугольников образуют решётку, поскольку отражение является изометрией.
- Несложно видеть, что решётка эта имеет экспоненциальный рост.

□

Очень наглядно экспоненциальность роста полученной решётки иллюстрирует замечательная картина Морица Эшера «Ангелы и демоны» (см. рис. VIII.V) и другие его литографии, изучающие разные модели геометрии Лобачевского и мозаики в них. Кстати, количество ангелов и демонов на каждом уровне исчислено. См. работу [CP13].

Из доказанного предложения мы сразу получаем, что плоскость Лобачевского не будет грубо эквивалентна евклидовой плоскости.

Упражнение 8.4. Докажите, что все пространства $\mathbb{H}^n$ тоже имеют экспоненциальный рост.

Сделаем одно замечание относительно того, как различать разные грубые пространства. Чтобы различить два евклидовых пространства достаточно рассмотреть их тип роста. Однако все гиперболические пространства имеют эквивалентные функции роста, так что имеющихся у нас средств для их различения недостаточно.

Замечание 4. Впрочем не будем нагнетать панику. Конечно же пространства $\mathbb{H}^n$ для различных n грубо эквивалентными не будут. Про различающий их грубый инвариант (это асимптотическая размерность) мы поговорим в разделе 10.3.

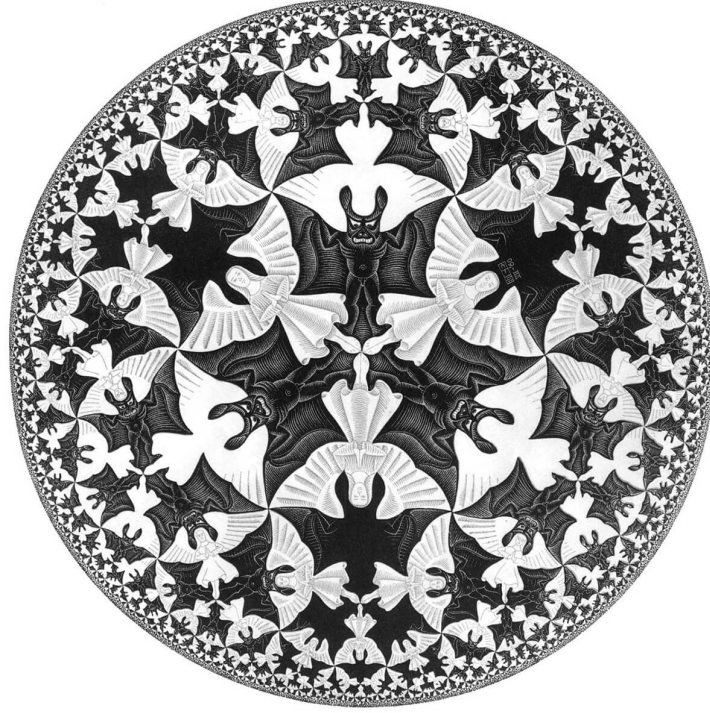


Рис. VIII.V: Ангелы и демоны. Мориц Эшер.

8.2 Грубость гиперболичности

Грубость гиперболичности пространства не является самоочевидной и требует предварительной подготовки, которой мы сейчас займёмся.

Определение 8.5. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, и $\gamma : I \hookrightarrow X$ — это гладкое отображение, являющееся грубым. Тогда $\gamma(I)$ называется *квазигеодезической*.

Определение 8.6. Кривая $\gamma(I)$ называется (λ, C) -квазигеодезической, если для любых $t, t' \in I$ выполняется

$$\lambda^{-1}|t - t'| \leq \rho(\gamma(t); \gamma(t')) \leq \lambda|t - t'| + C.$$

Следующая лемма показывает, что в δ -гиперболическом пространстве расстояние между геодезической и квазигеодезической ограничено. Заметим, что для евклидовых пространств такое утверждение неверно.

Лемма 8.3. В гиперболическом пространстве X для любых констант $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $C \geq 0$ существует $R > 0$ такое, что для любой (λ, C) -квазигеодезической выполнено неравенство:

$$\rho_H(\gamma(I); [\gamma(a), \gamma(b)]) < R.$$

Мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 8.4. Пусть γ — спрямляемая кривая в δ -гиперболическом пространстве, соединяющая точки p и q . Также пусть точка x лежит на геодезической $[p, q]$. Тогда из $l(\gamma) < 2^n$ следует $\rho(x, \gamma) < 1 + n\delta$.

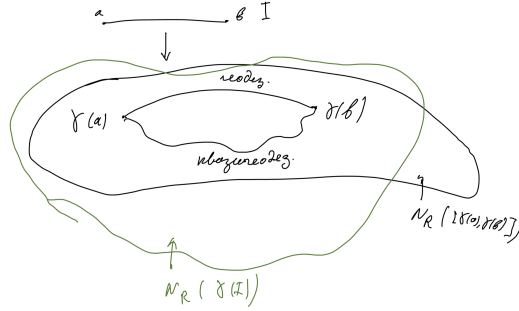


Рис. VIII.VI: Смысл теоремы 8.3

Доказательство. Докажем лемму индукцией по n . Продемонстрируем шаг индукции на переходе от $n = 0$ к $n = 1$.

- Базу $n = 0$ оставим в качестве упражнения.
- Рассмотрим случай $n = 1$. На кривой γ выберем точку r такую, что $l(\gamma_{pr}) = l(\gamma_{rq}) \leq 1$. Тогда треугольник Δ_{pqr} — δ -тонкий, так как пространство δ -гиперболическое. Следовательно, по определению 8.4 имеем, что $\rho(x; [p, r]) < \delta$ и $\rho(x, [r, q]) < \delta$. Выберем $x' \in [p, r] \cup [r, q]$ такую, что $\rho(x, x') \leq \delta$. Тогда по предположению индукции $\rho(x', \gamma_{rq}) \leq 1$. По неравенству треугольника:

$$\rho(x; \gamma) \leq \rho(x; x') + \rho(x'; \gamma_{rq}) \leq 1 + \delta.$$

- Дальнейшие шаги индукции аналогичны.

□

Доказательство леммы 8.3 мы приведём только для ручных кривых, так как все остальные могут быть приближены ручными, а разбор этого приближения потребовал бы значительного времени. Так что за подробностями отошлём к [ВН99].

Сначала введём определение ручных кривых.

Определение 8.7. Кривая γ называется *ручной*, если γ — гладкая, и существуют такие $a, b > 0$, что для любых s, t выполняется неравенство:

$$l(\gamma_{s,t}) \leq a\rho(\gamma(s); \gamma(t)) + b.$$

Наконец, докажем лемму.

Доказательство леммы 8.3 для ручных кривых. Пусть γ — ручная геодезическая, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Выберем $x \in [p, q]$ такой, что $r = \rho(x; t \in \gamma) \rightarrow \max$, и точки $p', q' \in [p, q]$ такие, что $\rho(p', x) = \rho(x, q') = r$. Также выберем $p'', q'' \in \gamma$, для которых $\rho(p'; p'') < r$ и $\rho(q'; q'') < r$. После многократного применения неравенства треугольника получаем, что $\rho(p''; q'') \leq 4r$.

Поскольку γ — ручная, $l(\gamma_{p'', q''}) \leq 4ar + b$. Рассматривая кривую $\gamma' = [p', p''] \cup \gamma_{p'', q''} \cup [q'', q']$, видим, что:

$$l(\gamma') \leq (4a + 2)r + b.$$

Применяя лемму 8.4, получаем искомое ограничение на расстояние.

□

На самом деле мы, конечно, доказали не достаточно техническое утверждение про устройство квазигеодезических, а показали инвариантность гиперболичности.

Теорема 8.1. *Гиперболичность — это грубый инвариант.*

Доказательство. • Пусть X и X' — грубо эквивалентные геодезические метрические пространства, а отображение $f : X' \rightarrow X$ реализует грубую эквивалентность. Мы хотим показать, что если X является δ -гиперболическим, а f является (λ, ε) -квазиизометрией, то X' является δ' -гиперболическим, где δ' зависит от δ , λ и ε .

- Пусть Δ — геодезический треугольник в пространстве X' с сторонами p_1, p_2, p_3 . Как следует из леммы 8.3, существует константа $M = M(\delta, \lambda, \varepsilon)$ такая, что (λ, ε) -квазигеодезический треугольник в X со сторонами $f \circ p_1, f \circ p_2, f \circ p_3$ является M -тонким.
- Значит для любой точки образа $x \in \text{Im}(p_1)$ найдётся точка $y \in \text{Im}(p_2) \cup \text{Im}(p_3)$ такая, что

$$\rho(f(x); f(y)) \leq M.$$

Так как f является (λ, ε) -квазиизометрией имеем

$$\rho(x; y) \leq \lambda \rho(f(x); f(y)) + \varepsilon \leq \lambda M + \lambda \varepsilon.$$

- Повторяя это рассуждение для сторон p_2 и p_3 , видим, что треугольник Δ является δ' -тонким, где $\delta' = \lambda M + \lambda \varepsilon$. □

Подчёркнём, что само значение δ не является инвариантным относительно грубой эквивалентности.

Упражнение 8.5. Приведите пример двух грубо эквивалентных гиперболических пространств с разными δ .

8.3 Гиперболические группы

Связь между гиперболичностью и аменабельностью в теории групп изучается уже давно. Дальше мы дадим небольшой обзор результатов, касающихся классификации гиперболических групп.

Начнём с определения гиперболической группы.

Определение 8.8. Группа называется *гиперболической*, если её граф Кэли является гиперболическим пространством.

Учитывая доказанную нами ранее теорему Шварца–Милнора (2.1), можно дать эквивалентное определение.

Определение 8.9. Группа называется *гиперболической*, если она действует кокомпактно, собственнo и изометриями на некотором гиперболическом пространстве.

Для доказательства эквивалентности достаточно напомнить, что группа всегда действует кокомпактно, собственнo и изометрически на своём графе Кэли.

8.3.1 Классификация гиперболических групп

Как следует из доказанной теоремы 8.1 и грубой эквивалентности графов Кэли для разных конечных систем образующих, гиперболичность для таких групп является грубым свойством.

Пример 8.7. • Все свободные группы F_n являются гиперболическими;

- Конечно порождённые абелевы группы, содержащие подгруппу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, не являются гиперболическими.

Доказательство. • Первое утверждение следует из примера 8.4, поскольку граф Кэли этих групп является деревом.

- Второе утверждение вытекает из примера 8.2, где была доказана не гиперболичность пространства $\mathbb{R}^n$.

□

Учитывая грубость гиперболичности, можно привести и другие примеры гиперболических групп. Для гиперболичности достаточно грубой эквивалентности графа Кэли дереву.

Упражнение 8.6. Докажите, что группа $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ гиперболична.

Укажем классификацию гиперболических групп, построенную Громовым в [Gro87]. Сначала освежим определение концов.

Определение 8.10. • *Геодезический луч* — это изометрия $\gamma : [0; \infty) \rightarrow X$, такая что любой отрезок $\gamma([0; t])$ является геодезической.

- Два луча γ_1 и γ_2 назовём *эквивалентными*, если их объединение, т.е. множество $\{(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ — контролируемо в грубой метрической структуре.

Такое определение естественно обобщает определение 4.15, которое мы давали для графов.

Определение 8.11. Класс эквивалентных лучей называется *видимым концом*, а пространство концов ∂X — *видимой границей*.

Геометрический образ здесь таков: класс таких параллельных лучей — это способ посмотреть в бесконечность.

Пример 8.8. Видимая граница евклидовой плоскости представляет собой окружность.

Доказательство. Достаточно заметить, что каждый класс эквивалентных лучей можно отождествить с единичным вектором, сонаправленным этому классу. □

Согласно теореме Хопфа, для гиперболической (не обязательно конечно порождённой!) группы G возможны три случая:

1. ∂G пусто, то есть группа G компактна.

2. ∂G содержит две точки.

3. ∂G несчётно.

Первые два случая называются *элементарными гиперболическими группами*.

Заметим, что видимая граница, вообще говоря, не является грубым инвариантом. Чтобы добиться грубой инвариантности, нужно добавить к геодезическим лучам квазигеодезические. Получившийся объект называется *границей Громова*. Тем не менее, элементарность гиперболической группы является грубым свойством.

Громов's Theorem. *Граница ∂G содержит две точки $\leftrightarrow$ группа G содержит замкнутую бесконечную циклическую кокомпактную подгруппу $\leftrightarrow$ группа G содержит максимальную компактную нормальную подгруппу W такую, что G/W изоморфна кокомпактной группе изометрий $\mathbb{R}$.*

Доказательство см. в [Gro87] или [Cap+15], Proposition 5.6.

Классификация неэлементарных гиперболических групп достаточно сложна, но частично возможна (см. [Cap+15]). Например:

Caprace-Cornuier-Monod-Tessera's Theorem. *Локально компактная группа является аменабельной и неэлементарно гиперболической тогда и только тогда, когда она изоморфна полупрямому произведению $H \rtimes Z$ или $H \rtimes R$, относительно компактифицирующего автоморфизма некомпактной группы H .*

Отметим факт примечательный для тех, кто знакомых с теорией малых сокращений (см. [Кля; Sap13; Tou24]). Оказывается, что для гиперболичности достаточно выполнения условия $C'(1/6)$ (см. [Hul], следствие 5.10). Это условие (его ещё называют условием малого сокращения) равносильно тому, что два разных соотношения в группе либо совпадают (как циклические перестановки), либо имеют общую часть менее $1/6$ от своей длины.

Из этого условия следует много приятных следствий и обобщений. Во-первых, оказывается что в гиперболических группах работает алгоритм Дэна (см. напр. [Tou24]), разрешающий проблему равенства в группе. Для групп с выполненным условием малого сокращения это получается сразу, но обобщается и на другие гиперболические группы.

Во-вторых, для таких групп выполняется полезная лемма Гриндлингера (см. [Кля]) и другие результаты теории малых сокращений (см. [ЛШ80]).

Ну и, кроме того, это даёт гиперболичность многих интересных групп. Например большинство групп с одним определяющим соотношением (точный результат см. в [IS98]) будут такими. В частности, фундаментальные группы сферы с двумя или более ручками.

Последнее хорошо рифмуется с геометрией. Тор (т.е. сфера с одной ручкой) обладает не гиперболической фундаментальной группой $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и является фактор пространством относительно изометрического кокомпактного действия группы на плоскости (которая тоже не гиперболична).

В тоже самое время на (гиперболической, заметим) плоскости лобачевского действуют группы, фактор пространством которых может быть сфера с любым количеством ручек, более чем один. И их фундаментальные группы уже будут гиперболическими.

На самом деле, вообще почти все группы будут гиперболическими! В работе [Ols92] А.Ю. Ольшанский доказал следующую теорему

Ольшанский's Theorem. *При $k \rightarrow \infty$ имеет место предел $N_k/N \rightarrow 1$.*

Здесь $N = N(k, i, n_1, \dots, n_i)$ число копредставлений групп в которых k образующих и i соотношений длин $n_1, \dots, n_i$, соответственно. А через N_k обозначим количество таких групп, являющихся гиперболическими.

В заключение отметим гипотезу Кэннона:

Гипотеза Кэннона. *Верно ли, что каждая гиперболическая группа, чья граница ∂G является 2-сферой, действует геометрически на $\mathbb{H}^3$?*

Лекция IX: CAT-классификация

Наша цель построить классификацию гиперболических и эллиптических пространств. Эта классификация более тонкая, нежели ставший нам привычным грубый подход, но такой взгляд полезен для понимания происходящего.

Основой классификации является сравнение с модельными пространствами с которого мы и начнём. Затем построим саму классификацию и в конце немного потолкуем о смысле происходящего.

9.1 Модельные пространства

9.1.1 Геометрическое определение

Для задания модельных пространств фиксируем две билинейные формы.

Первая используется для определения гиперболического пространства и задается на $\mathbb{R}^{n+1}$ формулой:

$$\langle x, y \rangle := -x_{n+1}y_{n+1} + \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (9.1)$$

Вторая представляет собой «обычное» скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$:

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (9.2)$$

Пространство	$\mathbb{S}^n$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{H}^n$
Точки	Множество точек $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, таких что $(x, x) = 1$, где (x, y) — скалярное произведение, заданное в (9.2).	Евклидово пространство n -мерной размерности.	Множество векторов $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, таких что $\langle x, x \rangle = -1$, $x_{n+1} > 0$, где $\langle x, y \rangle$ определяется билинейной формой (9.1).
Метрика	Для $A, B \in \mathbb{S}^n$: $\cos \rho_S(A; B) := (A, B)$.	Для $A, B \in \mathbb{R}^n$: $\rho(A; B) = A - B $.	Для $A, B \in \mathbb{H}^n$: $\operatorname{ch} \rho_H(A; B) := -\langle A, B \rangle$.

Геометрическая идея модельного пространства состоит в том, что мы разрешаем сфере и гиперболическому пространству «гомотетически» раздуваться. То есть получается семейство непрерывно изменяющихся пространств. Теперь более строго.

Пусть $k \in \mathbb{R}$ — вещественный параметр.

Определение 9.1. Определим *модельное пространство*, обозначаемое M_k^n , для различных k следующим образом:

$k > 0$	$k = 0$	$k < 0$
Сфера $\mathbb{S}^n$ с расстоянием, умноженным на $1/\sqrt{k}$.	Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.	Гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ с расстоянием, умноженным на $1/\sqrt{-k}$.
$\rho_{S,k}(A; B) = \frac{\rho_S(A; B)}{\sqrt{k}}$	$\rho(A, B) = A - B $	$\rho_{H,k}(A; B) := \frac{\rho_H(A; B)}{\sqrt{-k}}$

С учётом сказанного, далее для единообразия будем обозначать метрику в M_k^n через ρ_k . Размерность всегда подразумевается следующей из контекста.

Заметим, что при $k > 0$ модельные пространства компактны, в отличие от случая $k \leq 0$.

Обозначим через D_k *диаметр* модельного пространства M_k^n :

$$D_k := \begin{cases} \text{diam} M_k^n, & k > 0; \\ \infty, & k \leq 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

В дальнейшем, говоря $\rho_k(a; b) < D_k$, будем иметь в виду, что при $k \leq 0$ это условие не накладывает ограничений.

Отметим, что сумма углов треугольников в различных модельных пространствах принимает разные значения: она равна π для евклидова пространства, больше π для $k > 0$ и меньше π для $k < 0$.

Введение модельных пространств позволяет унифицировать многие геометрические вопросы, вводя общие обозначения.

Например рассмотрим аксиому, справедливую как для евклидова, так и для гиперболического пространств:

Через две различные точки можно провести единственную прямую.

В случае сферы возникает проблема с противоположными точками: через них можно провести бесконечно много прямых. Чтобы учесть этот случай, уточним аксиому так:

В модельном пространстве M_k^n , $k \in \mathbb{R}$, через любые две различные точки a, b , такие, что $\rho_k(a; b) < D_k$, можно провести единственную прямую.

Упражнение 9.1. Проверьте, что в модельных пространствах эта аксиома действительно выполняется.

Точно также можно подправить и понятие «лежать по разные стороны».

Определение 9.2. Будем говорить, что точки a и b лежат по разные стороны от геодезической l , если они находятся в разных компонентах связности, на которые l разбивает пространство M_k^2 .

Упражнение 9.2. Проверьте корректность этого определения, а именно, что всякая геодезическая действительно разбивает M_k^2 на две несвязные области.

Теперь сформулируем расширенную версию теоремы косинусов для модельных пространств.

Предложение 9.1. Для геодезического треугольника со сторонами a, b, c и углом γ , противостоящим c , выполнено:

$$k > 0 \quad \cos \sqrt{k}c = \cos \sqrt{k}a \cos \sqrt{k}b + \sin \sqrt{k}a \sin \sqrt{k}b \cos \gamma.$$

$$k = 0 \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma;$$

$$k < 0 \quad \operatorname{ch} \sqrt{-k}c = \operatorname{ch} \sqrt{-k}a \operatorname{ch} \sqrt{-k}b - \operatorname{sh} \sqrt{-k}a \operatorname{sh} \sqrt{-k}b \cos \gamma;$$

Общее доказательство можно найти, например, в [ВН99]. Впрочем, для случая $k = 0$ теорема известна из школьного курса геометрии, а остальные случаи доказываются немногим сложнее.

9.1.2 Модельные треугольники

Пусть k — действительное число, и пусть p, q, r — три точки в метрическом пространстве (X, ρ) , такие, что

$$\rho(p; q) + \rho(q; r) + \rho(r; p) < 2D_k. \quad (9.4)$$

Лемма 9.1. Для любого k найдутся такие точки модельного пространства $p^*, q^*, r^* \in M_k^2$, что $\rho(p; q) = \rho_k(p^*; q^*)$, $\rho(q; r) = \rho_k(q^*; r^*)$ и $\rho(r; p) = \rho_k(r^*; p^*)$. Такие точки единственны с точностью до изометрии M_k^2 .

Доказательство. Если $k = 0$, то получаем школьное утверждение о построении треугольников по трём сторонам, удовлетворяющим неравенству треугольника. А единственность следует из признака равенства треугольников по трём сторонам.

Пусть теперь $k > 0$ (сферический случай).

- Обозначим стороны треугольника через a, b, c , где $|a| = \rho(p, q)$, $|b| = \rho(p, r)$, $|c| = \rho(q, r)$. Пользуясь теоремой косинусов (предложение 9.1) для выбранного k , получаем значение угла γ между сторонами a, b , выраженное через длины отрезков a, b, c .
- Не теряя общности считаем, что $a \leq b \leq c$. По неравенству треугольника $c \leq a + b$. Из условия (9.4) несложным вычислением получаем, что $c < \pi/\sqrt{k}$. Значит искомый треугольник существует (влезает в сферу).

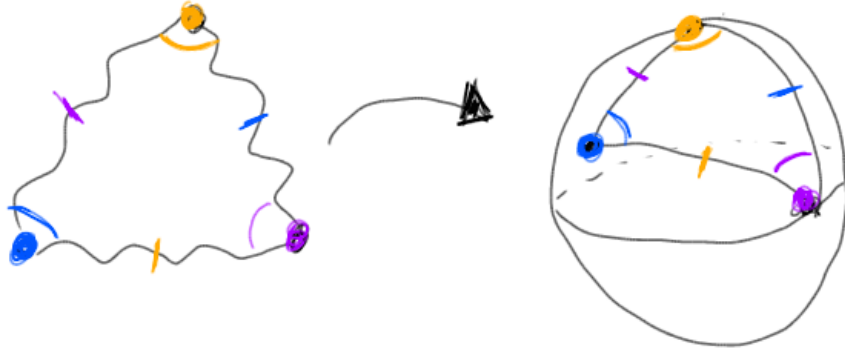


Рис. IX.I: Построение сферического модельного треугольника

- Теперь единственность. Выберем точку $p \in M_k^2$ и рассмотрим два геодезических отрезка $[p, q]$ и $[p, r]$, имеющих длины a и b соответственно, с углом γ между ними. По закону косинусов получаем, что $d(q, r) = c$. Таким образом, треугольник с такими сторонами и углом между ними единственен.

Два таких треугольника в M_k^2 можно перевести друг в друга изометрией: поворотом сферы совмещаем углы треугольника. И, в случае необходимости, делаем симметрию относительно биссектрисы, чтобы совместить равные стороны.

В гиперболическом случае $k < 0$ — рассуждения аналогичны. $\square$

Из доказанной леммы получаем, что в модельных пространствах корректно говорить о признаке равенства геодезических треугольников.

Определение 9.3. Геодезический треугольник $\Delta_{p^*q^*r^*}$, определенный леммой 9.1 будем называть k -модельным треугольником для геодезического треугольника Δ_{pqr} .

Из леммы 9.1 следует, что любой геодезический треугольник можно изометрически вложить в M_k^2 , если только (это важно при $k > 0$) он туда помещается. То есть справедливо следующее утверждение.

Предложение 9.2. Для геодезического треугольника Δ_{pqr} и k -модельного треугольника найдется вложение

$$\theta_{\Delta_{pqr}}^k : \Delta_{pqr} \hookrightarrow \Delta_{p^*q^*r^*}. \quad (9.5)$$

Причем его ограничения на стороны $\theta_{\Delta_{pqr}}^k|_{[pq]}$, $\theta_{\Delta_{pqr}}^k|_{[qr]}$, $\theta_{\Delta_{pqr}}^k|_{[pr]}$ являются изометриями.

Введение модельного треугольника позволяет говорить об углах, поскольку они определены в модельных пространствах.

Определение 9.4. Для угла $\angle pqr$ в метрическом пространстве назовем k -модельным углом соответствующий угол $\angle p^*q^*r^*$ в модельном треугольнике. То есть

$$\angle_q^k(p, r) := \angle_{p^*q^*r^*}.$$

Заметим, что при вложениях, построенных в лемме 9.1, величина угла (как и сумма углов) будет изменяться. Очевидно, чем больше k , тем больше соответствующие углы.

Упражнение 9.3. Дан угол на плоскости. Как зависит косинус k -модельного угла от выбора параметра k ?

9.2 САТ-классификация

Пришло время перейти к котикам. Периметр треугольника Δ будем обозначать $\mathcal{P}(\Delta)$. Всюду далее X — геодезическое пространство, а параметр $k \in \mathbb{R}$.

Вложение геодезического треугольника в k -модельный мы выше определили формулой (9.5).

Определение 9.5. Будем говорить, что для геодезического треугольника $\Delta \subset X$ с периметром $\mathcal{P}(\Delta) < 2D_k$ выполнено $САТ(k)$ -свойство, если для любых $x, y \in \Delta$ для соответствующих модельных точек $\theta_\Delta^k(x), \theta_\Delta^k(y) \in \Delta^* \subset M_k^2$ выполнено

$$\rho(x; y) \leq \rho_k(x^*; y^*).$$

Для дальнейших рассуждений зафиксируем ещё два обозначения.

- Треугольник с минимальным k , для которого выполнено $САТ(k)$ -свойство, назовём модельным. А точку $\theta_{\Delta, k}(x)$ — *моделирующей* точку x .
- Величину угла модельного треугольника будем называть величиной угла исходного треугольника.

Геометрический смысл $САТ(k)$ -свойства состоит в том, что моделирующий треугольник — это такой минимальный (по значению k) k -модельный треугольник, что расстояние между любыми двумя точками его границы не меньше, чем в исходном.

Если говорить неформально, то мы минимально увеличиваем исходный треугольник так, чтобы получился модельный.

Ну и, наконец, дадим главное определение этой лекции.

Определение 9.6. • Геодезическое пространство X принадлежит *классу* $САТ(k)$, если всякий геодезический треугольник в X с периметром менее $2D_k$ удовлетворяет $САТ(k)$ -свойству.

- Параметр k будем называть *кривизной* пространства.
- Полные пространства класса $САТ(0)$ будем называть *Адамаровыми* пространствами.

Напомним, что при $k \leq 0$ диаметр D_k считается бесконечным.

Обозначение САТ — это не только дань уважения котикам, но и акроним трёх математиков: Élie Cartan, Aleksandr Danilovich Aleksandrov и Victor Andreevich Toponogov, которые внесли важный вклад в развитие метрической и гиперболической геометрии. Предложил это название Михаил Громов в 1987 году.

Один из главных примеров в этой науке — гиперболические пространства.

Пример 9.1. Любое пространство отрицательной кривизны $CAT(k)$, где $k < 0$, является δ -гиперболическим.

Доказательство. Достаточно соединить $CAT(k)$ -условие и определение гиперболичности. $\square$

С гиперболичностью Адамаровых пространств ситуация чуть сложнее.

Определение 9.7. Пространство называется *кокомпактным*, если все изометрии действуют на пространстве кокомпактно.

Теорема 9.1 (Flat Plane Theorem). *Собственное кокомпактное пространство класса $CAT(0)$ гиперболично, если и только если оно не содержит подпространства, изометричного плоскости.*

Для доказательства теоремы потребуется небольшая подготовка, связанная с развитием понятия прозрачности.

9.2.1 Видимость и невидимость

Определение видимой границы мы уже давали на прошлой лекции (см. определение 8.11).

Определение 9.8. Пространство $X \in CAT(0)$ назовём *прозрачным*, если для любой пары точек на видимой границе $\xi, \eta \in \partial X$ найдётся геодезическая, которая их соединяет.

Небольшое терминологическое замечание. В англоязычной литературе используется термин «visible», который мы переводим как «прозрачный». Геометрический смысл такой: геодезическая это «направление взгляда». И в прозрачных пространствах из каждой точки границы «видна» любая другая граничная точка.

Пример 9.2. Пространство $\mathbb{H}^n$ является прозрачным (см. рисунок IX.II).

Упражнение 9.4. Покажите, что $\mathbb{R}^1$ является прозрачным.

Пример 9.3. Пространство $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ не является прозрачным.

Доказательство. В примере 8.8 мы уже отметили, что видимая граница $\mathbb{R}^n$ для $n > 1$ — это окружность. Выбор геодезических невелик, и каждая прямая соединяет две точки видимой границы, которые представляют собой диаметрально противоположные точки окружности. $\square$

В случае с гиперболическими пространствами достаточно рассмотреть две точки на абсолюте и построить соответствующую геодезическую.

Определение 9.9. Пространство $X \in CAT(0)$ будем называть:

- *Локально прозрачным*, если для любой точки $x \in X$ и любого острого угла $\pi/2 > \varphi > 0$ найдётся такое $R > 0$, что для всякого отрезка $[p; q]$, лежащего вне шара $\text{ball}(x, R)$, выполнено $\angle pxq < \varphi$;

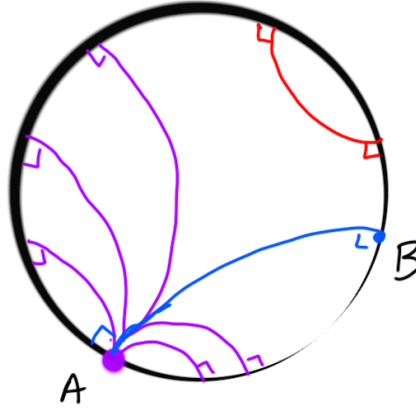


Рис. IX.П: Сиреневым и синим отмечены эквивалентные геодезические (они не эквивалентны красной геодезической), а синяя геодезическая показывает, как точка В «видна» из точки А.

- *Равномерно прозрачным*, если для любого угла $\varphi > 0$ найдётся такое $R > 0$, что для любой точки $x \in X$ и отрезка $[p; q]$, лежащего вне шара $\text{ball}(x, R)$, выполнено $\angle pxq < \varphi < \pi/2$.

В случае Адамаровых пространств все перечисленные типы прозрачности эквивалентны.

Предложение 9.3. *Собственное кокомпактное пространство $X \in \text{CAT}(0)$ является прозрачным $\Leftrightarrow X$ локально прозрачно $\Leftrightarrow X$ равномерно прозрачно.*

Доказательство. Строгое доказательство см. в [ВН99], предложение II.9.32. Здесь ограничимся геометрической идеей.

Отрезок $[p; q]$, фигурирующий в определении локальной и равномерной видимости, можно считать продолженным до границы ∂X .

Собственность, кокомпактность и $\text{CAT}(k)$ -свойство показывают, что утверждение достаточно проверять в модельном пространстве. А там оно проверяется непосредственно. $\square$

Это утверждение обобщается до следующего.

Лемма 9.2 (Теорема Эберлейна — Громова). *Собственное кокомпактное Адамарово пространство X является прозрачным, если и только если оно не содержит плоскости (подпространства, изометричного $\mathbb{R}^2$).*

Доказательство. В одну сторону это утверждение очевидно: если в X есть подпространство, изометричное плоскости, то видимости быть не может, поскольку её нет в плоскости, а при изометриях это свойство сохраняется.

Доказательство в обратную сторону см. в [ВН99], теорема II.9.33. $\square$

Предложение 9.4. *Собственное Адамарово пространство X гиперболично $\Leftrightarrow$ равномерно прозрачно.*

Доказательство. Если пространство ограничено, доказывать нечего. Далее считаем пространство неограниченным.

$\Rightarrow$ В δ -гиперболическом пространстве выберем геодезический треугольник Δ_{pxy} такой, что $\rho(p; [x; y]) \geq 3\delta$. В силу гиперболичности можно найти точки на его сторонах $z \in [x; y], u \in [p; x], v \in [p; y]$, такие, что $\rho(z; u), \rho(z; v) \leq \delta$. Тогда $\rho(u, v) \leq 2\delta$, а $\rho(p, u), \rho(p, v) \geq 2\delta$. Учитывая CAT-свойство, получаем:

$$\rho(u, v) \geq (2\delta) \sin(\angle xpy/2).$$

Отсюда

$$\angle xpy \leq 2 \arcsin \left[\frac{\rho(u, v)}{2\delta} \right] \rightarrow 0,$$

при $\rho([p; [x; y]]) \rightarrow \infty$.

$\Leftarrow$ Из равномерной прозрачности следует, что $\rho(p; [x; z])$ равномерно ограничено, что и даёт гиперболичность.

□

Остаётся сказать, что доказательство теоремы 9.1 следует из вышесказанного.

9.2.2 О грубости

Адамаровость, очевидно, не является грубым свойством, как и $CAT(k)$ -классификация в целом. Например, вклеивая шар в пространство, мы можем как угодно увеличить значение параметра k . Проще говоря, $CAT(k)$ классификация зависит от локальных свойств пространства.

Вообще, как легко видеть, что справедливо следующее вложение:

Предложение 9.5. Если $k_1 < k_2$, то $CAT(k_1) \subset CAT(k_2)$.

Впрочем, можно модифицировать понятие $CAT(k)$, чтобы добиться грубости.

Назовём пространство X *грубо* $CAT(K)$ -пространством, если

$$k = \inf_{K \in \mathcal{K}(X)} \{k \in \mathbb{R} \mid X \setminus K \in CAT(k)\}.$$

Такая огрублённая классификация обеспечивает грубость хотя бы в отношении знака кривизны.

Прозрачность также не является грубым свойством, поскольку геодезическая при грубом отображении не обязана оставаться геодезической. Поэтому, как мы отмечали выше, работать нужно с квазигеодезическими (и получать в таком случае границу Громова). Здесь уместно вспомнить лемму 8.3, которая характеризует квазигеодезические.

Однако работать с квазигеодезическими сложно. Вместо этого проще ограничить класс рассматриваемых пространств.

Предложение 9.6. В классе собственных кокомпактных адамаровых пространств прозрачность является грубым инвариантом.

Доказательство. В силу теоремы 9.1 гиперболичность (грубое свойство, как мы доказали на прошлой лекции в теореме 8.1) равносильна наличию подпространства, изометричного плоскости. Это, в свою очередь, равносильно прозрачности (теорема Эберлейна — Громова). $\square$

В заключение отметим, что прояснение связи между грубой геометрией и $CAT(k)$ -пространствами выглядит весьма перспективным.

9.3 Об изометриях

Мы подробно обсуждали вопросы кокомпактности, но не рассматривали, как устроены изометрии, даже в модельных пространствах.

Для этого нам понадобится одно полезное утверждение.

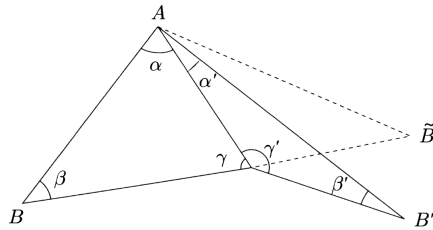


Рис. IX.III: Лемма Александрова

Рассмотрим четыре точки $A, B, B', C \in M_k^2$ и соответствующие углы $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \beta'$, как на рисунке IX.III. При этом точки B, B' лежат по разные стороны от $[AC]$. Кроме того, потребуем выполнения условия:

$$\rho_k(C; B) + \rho_k(C; B') + \rho_k(A; B) + \rho_k(A; B') < 2D_k.$$

Теорема 9.2 (Лемма Александрова). 1. Если $\gamma + \gamma' \geq \pi$, то

$$\rho_k(B; C) + \rho_k(B'; C) \leq \rho_k(B; A) + \rho_k(B'; A). \quad (9.6)$$

2. Если имеется треугольник $\hat{A}, \hat{B}, \hat{B}'$, равный ABB' , причём

$$\rho_k(\hat{B}; \hat{B}') = \rho_k(B; C) + \rho_k(C; B') < D_k,$$

а точка $\hat{C} \in [\hat{B}, \hat{B}']$ такова, что $\rho_k(\hat{B}; \hat{C}) = \rho_k(B; C)$, тогда $\gamma + \gamma' = \pi$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\hat{\alpha} \geq \alpha + \alpha', \quad \hat{\beta} \geq \beta, \quad \hat{\beta}' \geq \beta', \quad \rho_k(A; C) \leq \rho_k(\hat{A}; \hat{C}).$$

Причём любое из этих неравенств влечёт все остальные.

Здесь $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\beta}'$ — углы при соответствующих вершинах $\hat{A}, \hat{B}, \hat{B}'$.

Доказательство, по сути, достаточно простое; оставим его в качестве упражнения. Важно, что эта теорема характеризует все допустимые движения модельных пространств.

Следствие 9.2.1. *Группы движений модельных пространств устроены следующим образом:*

- $Isom(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$;
- $Isom(\mathbb{S}^n) \cong O(n+1)$;
- $Isom(\mathbb{H}^n) \cong O(n, 1)_+$.

Здесь $O(n)$ — группа ортогональных матриц размерности $n \times n$, отвечающая за вращения. А $O(n, 1)_+$ обозначает группу матриц следующего вида. Во-первых, $A \in O(n, 1)_+$, если $A^t J A = J$, где

$$J = \text{diag}(1, \dots, 1, -1),$$

что соответствует сохранению метрики гиперболического пространства, заданной билинейной формой, порождённой J . Во-вторых, элемент в правом нижнем углу должен быть положительным, что соответствует сохранению верхней полуплоскости.

Задачи

1. Придумайте как можно больше *разных* гиперболических групп.
2. Пусть X – δ –гиперболическое пространство. Докажите неравенство

$$\rho(x; [y; z]) - \delta \leq (y|z)_x \leq \rho(x; [y; z]).$$

3. Докажите, что пространство в котором все треугольники имеют ограниченную площадь – гиперболично (таким будет $\mathbb{H}$).
4. Рассмотрим геодезический треугольник в $\mathbb{H}$ с углами α, β, γ и сторонами a, b, c . Докажите формулы

$$(1) \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma;$$

$$(2) \quad \frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} c};$$

$$(3) \quad \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} c.$$

5. Докажите, что группа Баумслага-Солитера для натуральных m, n определяемая как $BS_{m,n} = \langle a, t \mid t^{-1}a^mt = a^n \rangle$, – не является гиперболической.
6. Пусть X – замкнутое подмножество $\mathbb{E}^3$, являющееся дополнением подпространства $\{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$. Покажите, что X , наделенное индуцированной метрикой, не является $CAT(k)$ пространством ни для какого k .
7. Докажите, что геометрическая реализация связного графа с конечным числом тонких концов – прозрачное пространство.
8. Найдите $CAT(k)$ класс группы Гейзенберга.
9. Найдите $CAT(k)$ класс плоскости с «манхеттенской» метрикой

$$\rho(\bar{x}; \bar{y}) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

10. V – векторное нормированное пространство. Известно, что $V \in CAT(\kappa)$ для некоторого κ . Докажите, что в V есть скалярное произведение, согласованное с нормой (т.е. V – предгильбертово).
11. Пусть X – геодезическое метрическое пространство. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) X – $CAT(\kappa)$ пространство.

(2) Для любого геодезического треугольника $\Delta([p, q], [q, r], [r, p])$ в X (периметром меньше, чем $2\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, если $\kappa > 0$), точка $m \in [q, r]$ такая, что $\rho(q; m) = \rho(r; m)$

и соответствующая модельная точка (comparison point) $\bar{m} \in [\bar{q}, \bar{r}] \subset \bar{\Delta}(p, q, r) \subset M_\kappa^2$ удовлетворяет неравенству:

$$\rho(p; m) \leq \rho(\bar{p}; \bar{m}).$$

Если $\kappa = 0$, то (1) и (2) эквивалентны

(3) Для всех $p, q, r \in X$ и всех $m \in X$ с $\rho(q; m) = \rho(r; m) = \rho(q; r)/2$, верно неравенство

$$\rho(p; q)^2 + \rho(p; r)^2 \geq 2\rho(m; p)^2 + \frac{1}{2}\rho(q; r)^2$$

12. Предложите по паре неэквивалентных гиперболических пространств (сложнее: групп) на каждое возможное количество концов.

Часть V

Вложения

Лекция X: асимптотическая размерность

Одна из главных задач геометрии – понять, как при помощи более-менее легко изучаемых инвариантов различать пространства. Это относится к грубым инвариантам, которые мы уже рассмотрели (концы, скорость роста). Кроме того, интересно не только различать пространства, но и сравнивать их: какое из двух пространств больше, а какое меньше в том или ином смысле.

В случае евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ всё очевидно: у пространства с большей размерностью больше "размер". То же самое годится и для конечных множеств. В общем случае это можно сформулировать так: если один объект можно грубо вложить в другой, то их можно сравнить.

С другой стороны, нечто абстрактное, например многообразие, хотелось бы вложить во что-то конкретное, например в евклидово пространство или хотя бы в гильбертово пространство.

Для прояснения этих вопросов мы изучим вложения грубых пространств, что связано с понятием асимптотической размерности, которую можно понимать как грубое обобщение привычной размерности из линейной алгебры.

10.1 Вложения

Начнём с определения грубого вложения. Пусть X, Y – грубые пространства.

Определение 10.1. Отображение $i : X \hookrightarrow Y$ называется *грубым вложением*, если X грубо эквивалентно $i(X)$, то есть $X \stackrel{c}{\sim} i(X)$.

Мы знаем, что $\mathbb{R}$ грубо эквивалентно $\mathbb{Z}$. Так что и от грубых вложений «уважения» к мощности множеств ожидать не приходится.

Пример 10.1. Существует грубое вложение $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

В случае метрических пространств грубое вложение означает, что существуют константы $C_1, C_2, D_1, D_2 > 0$ такие, что для любой пары точек $x, x' \in X$ выполнено

$$C_1 \rho_X(x; x') - D_1 \leq \rho_Y(i(x); i(x')) \leq C_2 \rho_X(x; x') + D_2. \quad (10.1)$$

Упражнение 10.1. Докажите эквивалентность.

Предложение 10.1. Если пространства ограниченной геометрии X и Y вложимы друг в друга, то

$$\text{gr}(X) \preceq \text{gr}(Y).$$

Доказательство. Пусть $i : X \hookrightarrow Y$ – вложение. Поскольку $i(X)$ грубо эквивалентно X , их функции роста совпадают. Следовательно, $\text{gr}(i(X)) \preceq \text{gr}(Y)$. $\square$

Пример 10.2. Пространство $\mathbb{R}^n$ грубо вложимо в $\mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда $n \leq m$.

Говоря о грубых вложениях, отметим, что этот инструмент уже находит некоторые приложения. Например, в работе [SBJ23] грубые вложения используются для визуализации сетей с помощью опорно-векторных машин.

10.1.1 Немного об аналогиях

Идея вложения как инструмента сравнения широко используется в математике (особенно в геометрии) и применяется задолго до того, как появляется само слово «вложение». Приведём хорошо известный матшкольникам пример, связанный с вложениями в плоскость.

Теорема Понтрягина-Куратовского's Theorem. *Граф γ является планарным тогда и только тогда, когда в нём нет подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ или K_5 .*

На языке вложений эта теорема формулирует критерий инъективного вложения графа в плоскость, при котором рёбра могут растягиваться, но не пересекаться.

Фактически, эта теорема даёт исчерпывающий список «патернов», которые препятствуют вложению графа в плоскость. Это графы $K_{3,3}$ и K_5 :

- Граф $K_{3,3}$ (также называемый графом «домики-колодцы») — это полный двудольный граф с долями по 3 вершины.
- Граф K_5 — полный граф на пяти вершинах.

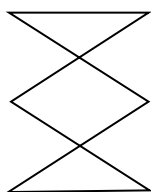


Рис. X.I: Граф $K_{3,3}$

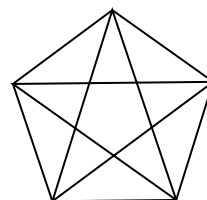


Рис. X.II: Граф K_5

В том же духе можно рассматривать, например, теорему Кантора-Бернштейна: два множества равномощны, если каждое из них можно инъективно вложить в другое, и многие другие «сравнительные» теоремы.

Также обстоит дело и в линейной алгебре:

1. Линейным вложением векторных пространств $i : X \hookrightarrow Y$ называют линейное инъективное отображение.
2. Композиция линейных вложений — линейное вложение.
3. Линейное пространство X вложимо в Y тогда и только тогда, когда $\dim(X) \leq \dim(Y)$.
4. Векторные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они взаимно вложимы.

5. Вложимость транзитивна: если X вложимо в Y , а Y в Z , то X вложимо в Z .

Ниже мы построим аналогичную теорию грубых вложений для грубых пространств. Даже введём аналог обычной размерности, который её обобщает. Но рассмотрим всё по порядку.

10.1.2 Вложения деревьев

Начнём с того, что разберёмся с вложениями деревьев. Сразу заметим, что вложить произвольное дерево в конечномерное пространство не получится.

Пример 10.3. Свободную нециклическую группу (как метрическое пространство) нельзя вложить в конечномерное пространство.

Доказательство. Конечномерное пространство, как мы знаем из примера 6.4, имеет полиномиальный рост, а свободная нециклическая группа — экспоненциальный. Значит, используя предложение 10.1, получаем искомое. $\square$

Раз конечномерным пространством ограничиться не получается, будем вкладывать дерево в бесконечномерное.

Теорема 10.1. *Дерево свободной нециклической группы T может быть грубо вложено в гильбертово пространство.*

Перед доказательством сделаем несколько замечаний.

Прежде всего, *гильбертовым пространством* называют бесконечномерное полное евклидово пространство. Подробнее об их свойствах см. например [Кол04].

О пространствах с метрикой ℓ_p , $p \geq 1$, мы уже говорили (см. определение 1.3). Напомним, что пространство ℓ_2 является гильбертовым, и скалярное произведение последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ определяется стандартно:

$$(\{x_i\}, \{y_i\}) := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i.$$

Также, если X — счётное множество, то через $\ell_p(X)$ обозначим следующее пространство:

$$\ell_p(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in X} |f(x)|^p < \infty\}.$$

Если $X = \mathbb{N}$, то мы получаем стандартное пространство ℓ_p .

Доказательство. Под деревом T подразумевается его геометрическая реализация (то есть это геодезическое пространство) с обычной метрикой (все рёбра имеют единичную длину). Множеств вершин обозначим через $V(T)$. Зафиксируем точку $t_0 \in T$.

- **Определение отображения.** Зададим отображение $\theta : V(T) \rightarrow \ell_1(V(T))$, поставив в соответствие вершине $v \in V(T)$ её индикаторную функцию:

$$\theta(v) := \chi_v([t_0; v]) = \begin{cases} 1, & g \in [t_0; v], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- **Свойства отображения.** Отображение θ является изометрическим вложением $V(T) \hookrightarrow \ell_1(V(T))$, поскольку для любых $v_1, v_2 \in V(T)$ (в силу отсутствия циклов) выполняется:

$$\rho(\theta(v_1); \theta(v_2)) = |[v_1; v_2]| = \rho_T(v_1; v_2).$$

- **Продолжение на дерево.** Дерево T квазиизометрично пространству вершин (достаточно рассмотреть отображение, которое каждой точке на ребре ставит в соответствие ближайшую вершину). Таким образом, θ можно продолжить до грубого вложения $\theta^* : T \hookrightarrow \ell_1(V(T))$.
- **Переход к гильбертовому пространству.** Пространство $\ell_1(V(T))$ не является гильбертовым, поэтому требуется построить грубое вложение $\ell_1 \hookrightarrow H$ в гильбертово пространство. Определим H как

$$H := \bigoplus_{j \in V(T)} \ell_2^j(\mathbb{R}),$$

где $\ell_2^j(\mathbb{R})$ — «копия» гильбертова пространства $\ell_2(\mathbb{R})$.

- **Определение вложения.** Рассмотрим отображение $\Phi : \ell_1 \rightarrow H$ вида:

$$\Phi(\{a_i\}) := \{\chi_{[0; a_i]}\}.$$

Отображение Φ является вложением, поскольку для любых $a, b \in \ell_1$:

$$\|\Phi(a) - \Phi(b)\|^2 = \|a - b\|.$$

- **Заключение.** Композиция $\Phi \circ \theta$ является искомым грубым вложением:

$$\Phi \circ \theta : T \hookrightarrow H = \bigoplus_{j \in V(T)} \ell_2^j(\mathbb{R}).$$

□

Несложно понять, что это доказательство в неизменно виде годится и для любого бесконечного дерева, у которого степени вершин равномерно ограничены.

Отметим, что аменабельность пространств не является препятствием к вложимости.

Предложение 10.2. *Аменабельное пространство может быть вложимо в неаменабельное, и наоборот.*

Доказательство. • Рассмотрим бинарное дерево с хвостом (см. рис. VII.11), которое аменабельно, и вложим его в граф Кэли свободной группы ранга 2. Как мы знаем, этот граф не аменабелен. Построение вложения оставляется как упражнение.

- В обратную сторону: в дерево с хвостом можно вложить неаменабельное бинарное дерево. В общем случае любое неаменабельное пространство можно вложить в аменабельное, достаточно приклеить к неаменабельному пространству бесконечный хвост.

□

10.2 Асимптотическая размерность

Человечество изобрело множество самых разных понятий размерности: например, Хаусдорфову (популярную среди любителей фракталов), её близкого родственника — размерность Минковского, упаковочную и другие. Мы же сейчас введём так называемую *асимптотическую размерность*, которая наиболее естественна для целей грубой геометрии.

Начнём с формулировки естественных требований:

- для пространства $\mathbb{R}^n$ асимптотическая размерность должна равняться n , совпадая с евклидовой размерностью;
- она должна быть грубым инвариантом (это важно для её применимости в грубой геометрии);
- она должна равняться нулю для ограниченных множеств;
- пространство меньшей размерности может быть грубо вложено в пространство данной размерности.

Цель ясна, приступим к её реализации, опираясь на работу [BD11].

10.3 Асимптотическая размерность

Самых разных понятий размерности человечество изобрело великое множество: например, Хаусдорфову (популярную среди любителей фракталов), её близкого родственника — размерность Минковского, упаковочную и другие. Ну, а мы сейчас введём так называемую *асимптотическую размерность*, которая наиболее естественна для целей грубой геометрии.

10.3.1 Определение

Напомним несколько топологических понятий. Пока X — какое-нибудь метрическое пространство.

Определение 10.2. 1. *Покрытием* пространства X называется набор множеств $\mathcal{U}$, для которого $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

2. Покрытие $\mathcal{U}$ *измельчает* покрытие $\mathcal{V}$, если для каждого $U \in \mathcal{U}$ найдётся $V \in \mathcal{V}$ такое, что $U \subset V$.
3. Покрытие называется *открытым*, если все множества в нём открыты.
4. Покрытие $\mathcal{U}$ называется *равномерно ограниченным*, если существует константа $C > 0$, такая что диаметр каждого множества $U \in \mathcal{U}$ не превышает C .

Все определения кроме 4 распространяются без изменений и на топологические пространства.

Определение 10.3. Метрическое пространство X имеет *асимптотическую размерность*, не превышающую n , если всякое равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{U}$ измельчает некоторое открытое равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{V}$ такое, что каждая точка $x \in X$ содержится не более чем в $n + 1$ множествах из $\mathcal{V}$.

Асимптотическая размерность принимает значения из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. В таком случае пишем $\text{asdim}(X) \leq n$. Если значение n минимально, то пишем $\text{asdim}(X) = n$.

Пример 10.4. Ограниченное множество имеет нулевую асимптотическую размерность.

Доказательство. Достаточно взять в качестве равномерно ограниченного покрытия само множество. $\square$

Перейдём к рассмотрению евклидовых пространств.

Пример 10.5. $\text{asdim}(\mathbb{R}) = 1$.

Доказательство. Идея проста: нужно покрыть $\mathbb{R}$ последовательностью одинаковых больших интервалов так, чтобы пересекались только соседние. Тогда каждая точка находится не более чем в двух интервалах.

- Рассмотрим равномерно ограниченное покрытие прямой $\mathbb{R}$ при помощи интервалов длины $5C$ так, чтобы их попарное пересечение имело длину $2C$ (см. рис. X.III).
- Каждое множество диаметра не более C содержится в одном из интервалов.
- Произвольная точка лежит не более чем в двух интервалах. Следовательно, $\text{asdim}(\mathbb{R}) \leq 1$.
- Покрыть $\mathbb{R}$ открытыми множествами так, чтобы каждая точка лежала ровно в одном интервале — невозможно.

$\square$

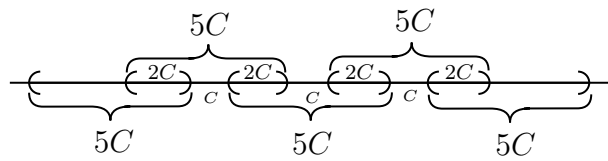


Рис. X.III: Покрытие прямой, реализующее $\text{asdim}(\mathbb{R}^1) = 1$

Доказательство для произвольной размерности будет таким же.

Упражнение 10.2. Докажите, что $\text{asdim}(\mathbb{H}^n) = \text{asdim}(\mathbb{R}^n) = n$.

Отличить гиперболическое пространство от евклидова той же размерности при помощи асимптотической размерности не получится. Зато она различает $\mathbb{H}^n$ для разных n , чего не делает функция роста. Мы отмечали эту проблему в замечании 4.

10.3.2 Монотонность asdim

Проверим, что асимптотическая размерность «уважает» переход к подпространствам.

Предложение 10.3. Если $L \subset X$ — подпространство, то $\text{asdim}(L) \leq \text{asdim}(X)$.

Доказательство. Покрытие пространство X , реализующее определение 10.3, будет подходит и для L . $\square$

Для того чтобы доказать грубость асимптотической размерности (а заодно показать, как она помогает при грубых вложениях), потребуется эквивалентное определение.

Определение 10.4. Пусть $\mathcal{U}$ — некоторое семейство подмножеств X (то есть $\mathcal{U} \subset 2^X$). Семейство $\mathcal{U}$ называется r -разделимым, если для любых двух различных $U, U' \in \mathcal{U}$ выполнено $\rho(U; U') > r$.

В покрытии, которое мы построили в примере 10.5 большие интервалы (длины $5C$) образуют C -разделимое подсемейство.

Определение 10.5. r -порядком семейства $\mathcal{U}$ называется максимальное натуральное число n , такое что для всякой точки $x \in X$ шар $\text{ball}(x; r)$ пересекается с не более чем n множествами из $\mathcal{U}$.

C -порядком для семейства из примера 10.5 будет двойка.

Лемма 10.1. Пространство X имеет асимптотическую размерность $\leq n$ тогда и только тогда, когда для любого $r > 0$ найдётся равномерно ограниченное r -разделимое семейство множеств $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n+1}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i = X$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Для достаточно больших r берём покрытие шарами радиуса r , так чтобы каждая точка содержалась не более чем в $n + 1$ подмножествах. Разделяем множества по семействам естественным образом.

$\Leftarrow$ Возьмем покрытие $\mathcal{V}$ шарами с диаметром δ . Выберем семейство $\mathcal{U}_i$ для $r > 2\delta$. И пусть

$$\hat{\mathcal{U}}_i := \{N_\delta(U) \mid U \in \mathcal{U}_i\}.$$

Здесь N_δ обозначает δ окрестность. Построенные множества $\hat{\mathcal{U}}_i$ не пересекаются. Причем множество $U = \bigcup \hat{\mathcal{U}}_i$ таково, что каждая точка принадлежит не более чем n множествам.

Остается заметить, что покрытие $\mathcal{V}$ измельчает $\mathcal{U}$, откуда и получаем искомое. $\square$

Докажем монотонность асимптотической размерности относительно грубых вложений.

Теорема 10.2. 1. Если $X \stackrel{\circ}{\sim} Y$, то $\text{asdim}(X) = \text{asdim}(Y)$;

2. Если $i : X \hookrightarrow Y$ — грубое вложение, то $\text{asdim}(X) \leq \text{asdim}(Y)$.

Доказательство. • Пусть $f : X \rightarrow Y$ — квазиизометрия. Семейство $\mathcal{U}_i$ из леммы 10.1 переходит в $f(\mathcal{U}_i)$, удовлетворяющее условиям. Отсюда $\text{asdim}(X) \leq \text{asdim}(Y)$, и аналогично для обратного отображения.

- По условию $\text{asdim}(i(X)) = \text{asdim}(X)$. У подпространства асимптотическая размерность меньше, чем у всего пространства по предложению 10.3. $\square$

В заключение упомянем без доказательства несколько утверждений, которые показывают, насколько полезно и удобно понятие асимптотической размерности. Доказательства обоих утверждений см. в [BD11].

Теорема 10.3. • Пусть X — метрическое пространство, $A, B \subset X$. Тогда

$$\text{asdim}(A \cup B) \leq \max\{\text{asdim}(A), \text{asdim}(B)\}.$$

- Пусть X, Y — метрические пространства. Тогда

$$\text{asdim}(X \times Y) \leq \text{asdim}(X) + \text{asdim}(Y).$$

10.3.3 Асимптотическая размерность групп

Из доказанной теоремы 10.2 получаем, что все графы Кэли данной группы имеют одинаковую асимптотическую размерность.

Определение 10.6. Асимптотическая размерность группы определяется как асимптотическая размерность любого графа Кэли этой группы.

Естественно встает вопрос о том, как её считать.

Многое здесь связано с методами комбинаторной теории групп. В частности, в работе [Tse23], в которой получен важный результат (о нём чуть ниже), применяется техника работы с HNN-расширениями, классическая для комбинаторной теории групп (см. о свободных конструкциях в [ЛШ80]). Здесь мы ограничимся обзором известных результатов.

Следствие 10.3.1. Асимптотическая размерность конечно порождённой группы равна нулю тогда и только тогда, когда группа конечна.

Кстати, избавиться от условия конечной порождённости здесь нельзя (подробнее см. [Smi06]). Однако справедливо следующее утверждение:

Smith's Theorem. В счётной группе асимптотическая размерность равна нулю тогда и только тогда, когда каждая конечно порождённая подгруппа конечна.

Разобравшись с конечными группами, обратимся к их "антиподу" — свободным группам. Для этого расширим наш пример с вычислением асимптотической размерности $\mathbb{R}$.

Пример 10.6. Пусть T — дерево. Тогда $\text{asdim}(T) \leq 1$.

Доказательство. Конструкция из примера 10.5 позволяет построить разделимые множества $\mathcal{U}_{1,2}$. После этого достаточно воспользоваться леммой 10.1. $\square$

Из этого можно получить асимптотическую размерность свободных групп.

Предложение 10.4. Асимптотическая размерность свободной группы равна единице.

Упражнение 10.3. У каких деревьев асимптотическая размерность равна нулю?

Обратимся теперь к работе [Tse23], где доказана гипотеза Дранишникова о том, что асимптотическая размерность групп с одним определяющим соотношением не превышает 2 (т.е. $\text{asdim}(G) \leq 2$).

Tselekidis's Theorem. Для конечнопорождённых групп с одним определяющим соотношением справедлива следующая классификация:

- Группа G конечная циклическая ($G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$), и её асимптотическая размерность равна нулю;
- Группа G представима в виде $F * G_0$, где F — свободная группа, а G_0 — конечная циклическая (возможно, тривиальная) группа. Тогда $\text{asdim}(G) = 1$;
- Во всех прочих случаях $\text{asdim}(G) = 2$.

10.3.4 Общий случай грубых пространств

Чтобы обобщить понятие асимптотической размерности на общий случай грубых пространств мы воспользуемся не исходным определением, а определением, задаваемым леммой 10.1.

Итак, пусть $(X, \mathcal{E})$ — грубое пространство.

Определение 10.7. Для контролируемого множества $E \in \mathcal{E}$ будем говорить, что множество $D \subseteq X$ E -разделимо, если существует разбиение $D = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} D_i$, такое что:

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i \times D_i) \in \mathcal{E}$;
- Для любых $i \neq j$, $D_i \times D_j \cap E = \emptyset$.

Пример 10.7. Целые числа $\mathbb{Z}$ с метрической грубой структурой $E_{1/2}$ являются $E_{1/2}$ -разделимыми (см. формулу 3.3).

Доказательство. Достаточно рассмотреть $D_i := \{i\}$. Тогда $\bigcup (D_i \times D_i)$ является диагональю, которая заведомо лежит в грубой структуре. В то же время $D_i \times D_j = (i, j)$, и при $i \neq j$ конечно $|i - j| > 1/2$. $\square$

Теперь начнём давать определение грубой асимптотической размерности, которое, конечно, будет обобщением введённой выше «обычной» асимптотической размерности. Начнём с нулевой.

Предложение 10.5. Метрическое пространство имеет нулевую асимптотическую размерность тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую грубую асимптотическую размерность как пространство с ограниченной грубой структурой.

Доказательство. Утверждение следует из переформулировки леммы 10.1. $\square$

Ну и общий случай.

Определение 10.8. Грубое пространство X имеет грубую асимптотическую размерность $\leq n$, если для всякого контролируемого множества $E \in \mathcal{E}$ оно может быть представлено в виде объединения не более чем $n + 1$ E -разделимых подмножеств.

Для метрических пространств это, опять тоже самое.

Предложение 10.6. *Метрическое пространство имеет асимптотическую размерность $\leq n$ тогда и только тогда, когда оно имеет грубую асимптотическую размерность $\leq n$ как пространство с ограниченной грубой структурой.*

Доказательство. Утверждение следует из переформулировки леммы 10.1. □

Таким образом, определение грубой асимптотической размерности является расширением понятия асимптотической размерности на общий случай грубых пространств.

Разумеется, теоремы 10.2 и 10.3 остаются справедливыми и для общего грубого случая (см. соответствующие доказательства в [Roe03]).

10.4 Свойство A

Мы уже доказали (см. теорему 10.1) что дерево можно вложить в Гильбертово пространство. Но только ли его? Точный ответ на вопрос какие именно грубые пространства можно вложить в гильбертово пространство не известен. Однако, Гаолян Ю в своей знаменитой работе [Yu00] предложил т.н. свойство A, которое устанавливает достаточное условие для такой вложимости.

Замечание 5. На самом деле Гаолян Ю (как, кстати, и Джон Роу, а также многие другие цитированные нами исследователи) стремился решить проблему Баума-Кона и гипотезу Новикова. В чём и преуспел, решив их для случая пространств, вложимых в Гильбертовы. Обратим внимание на обзор [Ю19], в частности на теорему 3.6.

Дадим (следуя заметке [NY08]) определение свойства A для простейшего случая дискретного метрического пространства X .

Определение 10.9. Дискретное метрическое пространство X удовлетворяет свойству A если для всякого $\varepsilon > 0, R > 0$ найдется семейство $\{A_x\}, x \in X$ конечных подмножеств в $X \times \mathbb{N}$ и $S > 0$ такие, что

1. $\rho(x; y) < R \implies \frac{\#(A_x \Delta A_y)}{\#(A_x \cap A_y)} < \varepsilon$;
2. $A_x \subseteq \text{ball}(x; S) \times \mathbb{N}$ для всех $x \in X$.

Как отмечено в [NY08], смысл этого условия заключается в следующем. Когда точки x и y находятся на расстоянии не более R друг от друга, то множества A_x и A_y практически совпадают. Если же расстояние между x и y не менее чем $2S$, то множества A_x и A_y не пересекаются.

Свойство A является грубым, то есть инвариантным относительно квазиизометрий. Введение копии множества $\mathbb{N}$ в определении множеств A_x служит для обеспечения этой инвариантности.

Свойство A, разумеется, можно распространить на общий случай грубых пространств. Причём это можно сделать более конкретно, чем просто "по грубости". Соответствующая работа была проведена в [Sak21].

Пример 10.8. Амenable группы удовлетворяют свойству A.

Доказательство. Вспомнив определение 7.2, заметим, что взяв в качестве $A_g := gF$, где F — шар из последовательности Фёльнера, мы немедленно выведем выполнение свойства A из условия Фёльнерности. □

Свободные группы являются естественным примером пространств, для которых выполняется свойство A . Докажите это самостоятельно.

Предложение 10.7. *Свойство A грубое: два грубо эквивалентных пространства удовлетворяют или не удовлетворяют свойству A одновременно.*

Определение 10.10. Будем говорить, что метрическое пространство удовлетворяет *наивному свойству A* , если для любых $R, \varepsilon > 0$ найдётся семейство конечных непустых множеств A_x таких, что:

1. Если $\rho(x; y) \leq R$, то

$$\frac{|A_x \triangle A_y|}{|A_x \cap A_y|} < \varepsilon;$$

2. Найдётся $S > 0$ такое, что для всех $x \in X$ и $y \in A_x$ выполняется $\rho(x; y) < S$.

Следующая теорема доказана в [NWZ24].

Пример 10.9. Дискретное метрическое неограниченное пространство с ограниченной геометрией удовлетворяет свойству A тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет наивному свойству A .

Будет ли наивное свойство A грубым, пока не известно. Однако это доказано для метрических пространств с ограниченной геометрией ([NWZ24], Theorem B) и, например, для счётных дискретных групп с левоинвариантной метрикой ([NWZ24], Theorem D).

Вообще, главный смысл свойств типа A (аменабельность, свойство A и его наивный аналог) заключается в том, что они гарантируют вложимость пространства в гильбертово. Заметим, однако, что свойство A не является критерием: существуют пространства, вложимые в гильбертово пространство, но не удовлетворяющие свойству A . Некоторые такие примеры рассмотрены в [Now07].

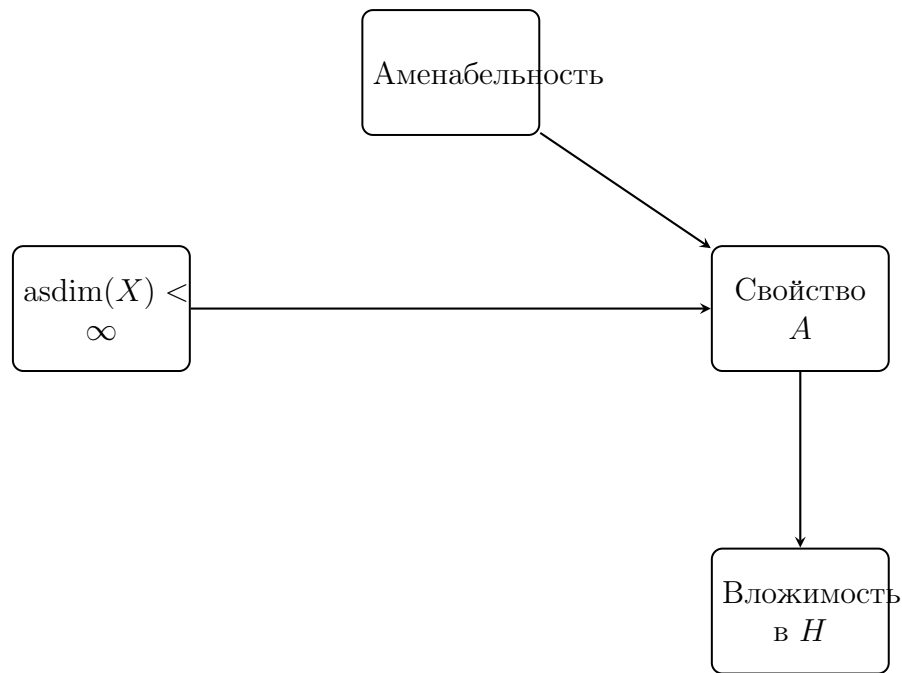
Пример 10.10. Конечно порождённая группа G с конечной асимптотической размерностью удовлетворяет свойству A .

Доказательство см. в [BD11], теорема 4.4. В частности такими будут группы с одним определяющим соотношением, как следует из теоремы Tselekidisa.

Ну и, наконец, сформулируем теорему Ю. См. доказательство в [Yu00; NY23].

Yu's Theorem. *Пространство, удовлетворяющее свойству A , грубо вложимо в гильбертово пространство.*

Диаграмма ниже иллюстрирует взаимосвязь между свойствами грубых пространств и их вложимостью в гильбертово пространство:



Сделаем ещё одно «категорное» замечание.

Понятно, что композиция вложений — снова вложение. Так что можно говорить ещё об одной категории грубых пространств, в которой морфизмами являются грубые вложения. Если взять подкатеорию, где объекты — только пространства, удовлетворяющие свойству A , то гильбертово пространство будет терминальным объектом в этой категории.

Открытый вопрос [Ю19]. Верно ли, что любая счётная подгруппа группы диффеоморфизмов окружности допускает грубое вложение в гильбертово пространство?

Лекция XI: препятствия к вложимости

Если честно, то с вопросом вложимости на данный момент непонятно куда больше, чем понятно. Наша цель — указать препятствия к вложимости в гильбертово пространство и обсудить, что известно про вложимость в конечномерные пространства.

Выше мы изучали, какие пространства можно вложить в гильбертово пространство, и достигли некоторого успеха: выяснили, что аменабельность (или её слабая версия — свойство A) является достаточным условием для вложимости. Теперь же мы попробуем пойти с другой стороны и найти условия, достаточные для того, чтобы утверждать, что данное метрическое пространство **нельзя** вложить в гильбертово пространство.

Иными словами, как определить, что метрическое пространство настолько «огромное» и «запутанное», что не влезает даже в счётномерное гильбертово пространство?

11.1 Экспандеры

Понятие экспандера (расширителя) было введено в контексте графов и теории передачи сигналов М. С. Пинскером, а затем развито Г. А. Маргулисом и Л. А. Бас-сальго. Подробнее об их применении можно почитать в популярной статье [Гам09]. Мы, однако, дадим не классическое определение, а более приспособленное для наших нужд в грубой геометрии.

Пусть $X = \{X_n\}$ — последовательность конечных графов (вообще говоря, метрически несвязных), множества вершин графа X_n обозначим через V_n , а множества рёбер — через E_n .

Определение 11.1. Последовательность конечных графов X назовём *экспандером*, если выполнены следующие условия:

- Степени вершин равномерно ограничены (константой ν);
- Число вершин $N_n := \#V_n$ стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$;
- Существует $\lambda > 0$, такое что для любой вещественнозначной функции $f_n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено неравенство:

$$\sum_{x \in V_n} (f_n(x) - \bar{f}_n)^2 \leq \lambda \sum_{(x, x') \in E_n} (f_n(x) - f_n(x'))^2, \quad (11.1)$$

где $\bar{f}_n := \frac{\sum_{x \in V_n} f_n(x)}{N_n}$ — усреднение функции f_n по вершинам графа X_n .

Приведём пример множества, которое экспандером не является. Вопрос о том, откуда брать примеры экспандеров, — далеко не праздный, но мы к нему вернёмся позднее.

Пример 11.1. Система графов $X_n = [1, \dots, 2n]$, в которой соседние целые числа соединены рёбрами, экспандером не является.

Доказательство. • Первые два условия определения 11.1 выполнены. Для наглядности приведём две последовательности функций, одна из которых удовлетворяет условию (11.1) для некоторых λ , а другая — ни для каких (что и докажет, что X_n не является экспандером).

(11.1)+: Определим функцию h_n как

$$h_n(k) := \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ — чётное;} \\ -1, & \text{если } k \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

Тогда $\bar{h}_n = 0$, и формула (11.1) примет вид $N_n(1)^2 \leq \lambda(N_n - 1)(1 - (-1))^2$. Таким образом, для малых λ условие выполнится для всех n .

(11.1)-: Чтобы нарушить условие, достаточно взять функцию $p_n(k) := k - \frac{1+\dots+2n}{2n}$. В левой части (11.1) получится функция квадратичного роста относительно номера вершины k , а в правой — линейного. Очевидно, что ни для каких λ условие (11.1) не выполнится для всех n .

Отметим, что функция h_n служит примером для демонстрации того, что для *некоторых* нетривиальных функций λ может быть найдено. Но, как показывает рассмотрение функции p_n , не всегда. $\square$

Последнее условие из определения 11.1 можно переформулировать следующим образом: первое (минимальное) собственное значение Лапласиана $\lambda_1(X_n)$ равномерно отделено от нуля. То есть существует $\lambda > 0$, такое что для всех n выполнено неравенство $\lambda_1(X_n) > \lambda$. Подробнее о Лапласианах графов и неравенстве Чигера, которое может быть полезным для оценки λ_1 , см., например, [Bap14] и другие источники по спектральной теории графов.

11.1.1 Препятствие к вложимости

Экспандер можно рассматривать как несвязное метрическое пространство, для которого имеет смысл ставить вопрос о вложимости.

Определение 11.2. Экспандер X называется вложимым в метрическое пространство Y , если существует набор отображений $f_n : X_n \rightarrow Y$, таких что:

1. Для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $\rho(f_n(x); f_n(x')) \leq C$ для всех рёбер $(x, x') \in E_n$;
2. Для любого $R > 0$ существует $M_R > 0$, такое что для всех $y \in Y$ выполнено:

$$\#(f_n^{-1}(\text{ball}(y; R))) \leq M_R.$$

Первое условие представляет собой привычную борнологичность, а второе является усилением свойства ограниченности: прообразы шаров одинакового радиуса равномерно ограничены.

Мы заговорили об экспандерах по той причине, что их наличие в пространстве служит препятствием к вложимости в Гильбертово пространство.

Теорема 11.1. *Экспандер не может быть вложен грубо в сепарабельное Гильбертово пространство.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что если для метрического пространства, вложенного в сепарабельное Гильбертово пространство, выполнено первое условие из определения 11.2, то второе выполняться не может. Это и докажет невозможность вложения экспандеров.

- Предположим противное. Пусть семейство отображений $g_n : V_n \hookrightarrow \ell_2$ осуществляет вложение экспандера X в Гильбертово пространство ℓ_2 . Рассмотрим вещественнозначные функционалы δ_n^j , которые ставят в соответствие функции f_n её j -ю координату в ℓ_2 . Пусть $g_n(x) := \sum_j \delta_n^j(x)$. Не теряя общности, можно считать, что $\overline{g_n} = 0$.
- Функция g_n является вещественнозначной функцией на V_n , а значит, к ней можно применить неравенство (11.1) из определения экспандера (учитывая, что в левой части мы вычитаем усреднение, равное нулю):

$$\sum_{x \in V_n} |g_n(x)|^2 \leq \lambda \sum_{(x, x') \in E_n} |g_n(x) - g_n(x')|^2. \quad (11.2)$$

- Правая часть формулы (11.2) ограничена сверху значением $C^2 \nu N_n$. То есть

$$|g_n(x) - g_n(x')|^2 \leq C^2 \nu N_n.$$

Действительно, в силу первого условия определения 11.2, для каждого ребра $|g_n(x) - g_n(x')| \leq C$. Степень каждой вершины не превышает ν , а число вершин равно N_n . Суммируя, получаем оценку.

- Сумма в левой части формулы (11.2) содержит N_n положительных слагаемых. По принципу Дирихле, по крайней мере $N_n/2$ из них не превосходят $2C^2 \nu$.
- Таким образом, мы нашли не менее $N_n/2$ точек из X_n , которые отображаются в шар радиуса $C\sqrt{2\nu}$ с центром в нуле. Это противоречит второму условию из определения 11.2.

□

Следствие 11.1.1. *Граф Кэли любой группы, удовлетворяющей A -свойству, не содержит экспандеров.*

Как и в примере 11.1, для некоторых функций условие экспандера может выполняться, но не для всех.

Отметим, что между пространствами, не удовлетворяющими свойству A , и пространствами, содержащими экспандеры, существует разрыв. Примеры таких пространств приведены в работе [Now07].

Упражнение 11.1. Докажите, что экспандер не может быть вложен ни в одно пространство ℓ_p .

11.1.2 Т-свойство Каждана

Наиболее полное изложение материала о свойстве Каждана можно найти в книге [BHV08]. Свойство Т формулируется для групп, которые называются Т-группами. Именно такие группы предоставляют примеры экспандеров (к этому мы вернёмся позднее).

Следующее определение, не являющееся стандартным, применимо только к локально компактным σ -компактным пространствам (то есть представимым как счётное объединение компактных подпространств). Это утверждение следует из теоремы Делорме — Гишарда ([BHV08], Теорема 2.12.4). Обычные дискретные группы обладают указанными свойствами. В общем случае определение должно использовать элементы теории представлений, чего мы избегаем в рамках данного изложения.

Определение 11.3. Локально компактная σ -компактная группа G называется *группой Каждана* или *Т-группой*, если она обладает свойством T : любое изометрическое действие на Гильбертовом пространстве имеет неподвижную точку.

Пример 11.2. Группа $\mathbb{Z}^n$ не является Т-группой.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathbb{Z}^n$ действует на евклидовом пространстве сдвигами. $\square$

Упражнение 11.2. Докажите, что каждая конечная группа удовлетворяет свойству Т.

Важными примерами Т-групп являются бесконечные неамenable группы.

Предложение 11.1. Для локально компактной группы G следующие условия эквивалентны:

1. G аменабельна и Т-группа;
2. G компактна.

Введём один объект, который у нас раньше не встречался, но нужен для доказательства предложения.

Определение 11.4. Пусть G — локально компактная топологическая группа. Мера Хаара на G — это мера μ , определённая на борелевской σ -алгебре G , обладающая следующими свойствами:

1. **Левинвариантность:** Для любого борелевского множества $A \subseteq G$ и любого элемента $g \in G$ выполнено:

$$\mu(gA) = \mu(A),$$

где $gA = \{ga \mid a \in A\}$.

2. **Регулярность:** Мера μ является регулярной, то есть для любого борелевского множества A выполнено:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ открыто}\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A, K \text{ компактно}\}.$$

3. **Конечность на компактных множествах:** Для любого компактного множества $K \subseteq G$:

$$\mu(K) < \infty.$$

4. **Ненулевая мера ненулевых открытых множеств:** Для любого открытого множества $U \subseteq G$:

$$\mu(U) > 0.$$

- Мера Хаара существует и единственна с точностью до умножения на положительную константу (теорема Хаара).
- В абелевых группах мера Хаара совпадает с привычной мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$ или её аналогами в других топологических пространствах.

Подробности и доказательство см. в [Най10].

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ Пусть G аменабельная Т-группа.

Так как группа G аменабельна, на её групповом кольце $\mathbb{C}[G]$ (рассматриваемом как L_2) существует левоинвариантная мера Хаара (продолжение усреднения с базиса группы на всё групповое кольцо).

Рассмотрим действие $\lambda_G : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ (регулярное представление группы), заданное формулой:

$$g : f(x) \mapsto f(gx).$$

Пусть $Q \subset \mathbb{C}[G]$ — компактное множество, и χ_K — индикатор конечного подмножества K базиса G . Тогда для $t \in Q$ имеем:

$$\|\lambda_G(t, \chi_K) - \chi_K\| = \|\chi_{t(K)} - \chi_K\| = \|\chi_{K \Delta t(K)}\|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует множество K , такое что $\|\lambda_G(t, \chi_K) - \chi_K\| < \varepsilon$. Последовательность t_i , для которой указанная разность стремится к нулю, ограничена (так как все элементы находятся в Q). Поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой является неподвижной точкой.

- $2 \Rightarrow 1$ Компактная группа аменабельна, так как на ней можно ввести усреднение — нормированную меру Лебега. Выполнение свойства Т для компактных групп оставим в качестве упражнения. □

Перед возвращением к экспандерам отметим печальную новость: свойство Т (в указанной формулировке) не является грубым. Доказательство этого утверждения можно найти в разделе 3.6 [БНВ08]. Вопрос о существовании грубого аналога свойства Т для всех грубых пространств остаётся открытым. Обзор ситуации для пространств с ограниченной геометрией приведён в работе [Win21].

11.1.3 Пример экспандера

Перед долгожданным примером экспандера дадим ещё одно определение.

Определение 11.5. Назовём *графом Шрейера* для конечнопорожденной группы $G = \langle \mathcal{X} \rangle$ и её подгруппы $H < G$ граф, вершинами которого являются классы смежности Hg , $g \in G$, а рёбра с метками $x \in \mathcal{X}$ соединяют вершины Hg и Hgx .

Теперь выполним обещание.

Пример 11.3 ([BHV08], Теорема 6.1.9). Если $G = \langle \mathcal{X} \rangle$ — конечно порождённая Т-группа, а H_n — подгруппы конечного индекса такие, что $\#(G/H_n) \rightarrow \infty$, то графы Шрейера групп G/H_n образуют экспандер.

Пример 11.4 ([Ale11], Теорема 6.5). Группа $SL_3(\mathbb{R})$ обладает Т-свойством.

Доказательство, использующее технику экспандеров, приведено в [Ale11].

Приведём ещё один пример связи между Т-свойством и экспандерами.

Пример 11.5 ([TW22], Theorem G). Пусть G_n — последовательность конечных групп с симметризованными системами образующих $\mathcal{X}_n$, равномерно ограниченного размера ($\sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{X}_n| < \infty$). Если $\Gamma := \bigsqcup \text{Cayley}(G_n; \mathcal{X}_n)$ — несвязное объединение графов Кэли, то произведение групп G удовлетворяет Т-свойству тогда и только тогда, когда Γ является экспандером.

За строгими определениями и доказательствами см. [TW22].

Наличие экспандера является препятствием к вложимости в Гильбертово пространство, но не является критерием. Однако это можно добиться, изменив понятие вложимости и усилив понятие экспандера.

Определение 11.6. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *сильным грубым вложением*, если на $\mathbb{R}_+$ найдутся две неубывающие функции $p_+, p_- \rightarrow \infty$, такие что для любого $R > 0$ существует ограниченное множество $K_R \subset X$, удовлетворяющее следующему условию: для любого ограниченного множества $C \subset X \setminus K_R$ с $\text{diam}(C) < R$ существует грубое вложение $f_C : C \hookrightarrow H$, такое что

$$p_-(\rho(x, y)) \leq \|f_C(x) - f_C(y)\| \leq p_+(\rho(x, y)) \quad \forall x, y \in C.$$

Упражнение 11.3. Проверьте, что сильная грубая вложимость следует из обычной грубой вложимости.

Недавно было получено следующее усиление данного результата.

Jintao Deng, Liang Guo, Qin Wang, Yazhou Zhang's Theorem. *Метрическое пространство не будет сильно грубо вложимым в Гильбертово пространство тогда и только тогда, когда оно содержит сильные экспандеры.*

Определение сильного экспандера и свойства таких вложений приведены в [Den+22].

11.2 Вложимость в $\mathbb{R}^n$

Выше мы обсудили грубые вложения в Гильбертово пространство. Естественным следующим шагом является задача вложения в конечномерное пространство.

В случае гладких многообразий хорошо известна теорема Уитни, также называемая сильной теоремой Уитни о вложении.

Whitney's Theorem. *Любое гладкое вещественное многообразие размерности m можно диффеоморфно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2m}$.*

Уточним, что гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ между гладкими многообразиями M, N называется *диффеоморфизмом*, если:

1. f является биекцией;
2. отображение f и его обратное f^{-1} гладкие.

Константу $2m$ улучшить невозможно: бутылка Клейна, являющаяся двумерным неориентируемым многообразием, не может быть вложена без самопересечений в трёхмерное пространство. Для её вложения требуется пространство размерности 4.

Что же с грубыми вложениями? В известном смысле грубым аналогом этой теоремы является теорема Ассуада и условие удвоения (*doubling condition*), о которых мы сейчас и поговорим.

11.2.1 Условие удвоения

Начнём с определения. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

Определение 11.7. Метрическое пространство X удовлетворяет *условию удвоения* для некоторого $K \in \mathbb{N}$, если любой шар $\text{ball}(x; R)$, где $x \in X$ и $R > 0$, может быть покрыт не более чем K шарами радиуса $R/2$. Формально это означает, что

$$\forall x \in X, R > 0, \exists \{x_1, \dots, x_K\} \text{ таких, что } \text{ball}(x; R) \subset \bigcup_{i=1}^K \text{ball}(x_i, R/2).$$

Удвоительная размерность определяется как $\log_2 K$, а K называют *константой удвоения*.

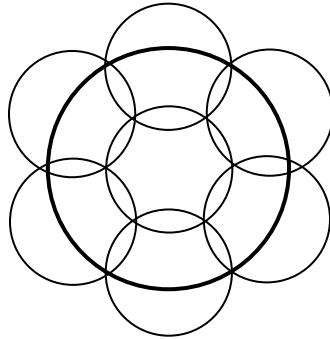


Рис. XI.I: Константа удвоения на плоскости не более чем 7

Упражнение 11.4. Найдите константу удвоения для $\mathbb{R}^1$.

Все пространства $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию удвоения. О вычислениях удвоительной размерности в евклидовых пространствах см., например, [GKL03].

Пример 11.6. Пространства $\mathbb{R}^n$ и их компактные подпространства удовлетворяют условию удвоения.

Это утверждение вытекает из работы А. Л. Вольберга и С. В. Конягина [BK87]. В данной работе изучаются пространства с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, то есть меры μ , для которой существует константа $C > 0$, такая что для каждой точки $x \in X$ и $R > 0$ выполняется

$$0 < \mu(\text{ball}(x; R)) \leq C\mu(\text{ball}(x; R/2)) < \infty. \quad (11.3)$$

Из выполнения этого условия (например, для меры Лебега в $\mathbb{R}^n$) вытекает выполнение условия удвоения из определения 11.7. Подробнее о связи условий удвоения для пространств с мерой и метрических пространств см. [Sem99] и [Hei01].

Упражнение 11.5. Является ли условие удвоения необходимым условием вложимости в $\mathbb{R}^n$?

Ожидаемо, что свободная группа (кроме циклической) не удовлетворяет условию удвоения.

Пример 11.7. Свободная группа ранга 2 не удовлетворяет условию удвоения.

Доказательство. Докажем от противного. Рассмотрим шар радиуса $2n$, содержащий порядка 2^{2n} вершин. В шаре радиуса n содержится порядка 2^n точек. В наилучшем случае, шары половинного радиуса (в данном случае радиуса n) не пересекаются. Тогда, чтобы покрыть весь шар радиуса $2n$, требуется порядка 2^n шаров половинного радиуса. Эта функция неограниченна, следовательно, условие удвоения не может быть выполнено. $\square$

Пример 11.8 (Пансю, [Pan89]). Группа Гейзенберга, оснащённая метрикой Карно, удовлетворяет условию удвоения.

Обсуждение метрики Карно–Каратеодори увело бы нас далеко от вопросов вложимости, но этот пример из работы Пансю ещё пригодится нам чуть позже.

11.2.2 Снежинка пространства

Пусть (X, ρ) снова метрическое пространство.

Определение 11.8. Для $0 < \varepsilon \leq 1$ назовём ε -снежинкой пространство (X, ρ^ε) . То есть метрическое пространство с метрикой

$$\rho_\varepsilon(x; x') := \rho(x; x')^\varepsilon.$$

Английский термин звучит как «snowflake». Геометрический смысл состоит в следующем. При $\varepsilon \rightarrow 0$ пространство «замерзает», вырождаясь в дискретное пространство. Когда $\varepsilon \rightarrow 1$ –, пространство «оттаивает», приближаясь к своему «исходному» состоянию. О геометрической характеристике таких пространств см. [TW05], где также обсуждается связь снежинок с кривой Коха.

Пример 11.9. Для $p \geq 1$ пространство $\ell_{1/p}(\mathbb{R}^2)$ является $1/p$ -снежинкой пространства $\ell_1(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Напомним, что метрика ℓ_1 определяется как

$$\rho(x; y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Тогда, по определению, $1/p$ -снежинка имеет метрику

$$\rho_{1/p}(x; y) := |x_1 - y_1|^{1/p} + |x_2 - y_2|^{1/p}.$$

Это и есть метрика на $\ell_{1/p}$. $\square$

Отметим, что, в отличие от пространства ℓ_p , такие пространства не являются нормированными.

Предложение 11.2. ε -снежинка пространства (X, ρ^ε) является метрическим пространством.

Доказательство. Это утверждение следует из неравенства Гёльдера и предлагается в качестве упражнения. $\square$

Предложение 11.3. Если пространство X удовлетворяет условию удвоения, то и его снежинка также удовлетворяет этому условию.

Доказательство также предлагается в качестве упражнения.

Далее мы будем обсуждать билипшицевые вложения (см. определение 1.6), которые для геодезических пространств эквивалентны грубой изометрии.

11.2.3 Теоремы Ассуада и Наора-Неймана

Главная теорема о вложимости в конечномерные пространства это теорема Ассуада, доказательство см. в [NN12].

Assouad's Theorem. Для всякого $1 > \varepsilon > 0$, $C_0 > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, $D \in (1; \infty)$, что для сепарабельного метрического пространства, с константой удвоения C_0 его $1 - \varepsilon$ -снежинка будет грубо вложима в $\mathbb{R}^N$ с константой удвоения D .

Для $\varepsilon = 1$ эта теорема верной не будет. Соответствующим примером является группа Гейзенберга с метрикой Карно (пример 11.8).

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, удовлетворяющее условию удвоения с параметром C_0 .

Теорема 11.2 (Наор-Нейман). Найдётся $N \in \mathbb{Z}$ такое, что $\forall \alpha \in (1/2; 1)$ найдётся C такое, что всякое α -снежинка инъективно C -грубо вкладывается в $\mathbb{R}^N$.

Иными словами (зафиксируем обозначения) найдётся $F : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ такое, что

$$\frac{1}{C} \rho(x; y)^\alpha \leq |F(x) - F(y)| \leq C \rho(x; y)^\alpha, \quad \forall x, y \in X.$$

Доказательство. Будем пока считать, что X имеет конечный диаметр.

Полное доказательство см. в [DS13]. Отметим также оригинальное доказательство [NN12] использующее вероятностную технику случайных блужданий.

1. Подготовка.

- (а) Зафиксируем α и $\tau > 0$ такое, что $\tau \leq 1 - \alpha$. Далее будем обозначать $r_k := \tau^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$ и пусть k_0 такое, что $r_{k_0} > \text{diam}(X)$.
- (б) Для каждого целого $k > k_0$ выберем максимальный (по количеству) набор точек $\{x_j\}$ проиндексированных множеством J_k таких, что $\rho(x_i; x_j) \geq r_k$ для $i \neq j$. С учётом максимальной имеем

$$X \subset \bigcup_{j \in J_k} \text{ball}(x_j; r_k).$$

Далее будем обозначать $\text{ball}(x_j; r_k) =: B_j$, $\text{ball}(x_j; \lambda r_k) =: \lambda B_j$.

- (с) Пусть для $x \in X$ $N(x)$ обозначает число точек $j \in J_k$ таких, что $\rho(x_j; x) \leq 10r_k$. Из условия удвоения можно видеть, что $N(x) \leq C_0^5$ и не зависит от выбора x .
- (d) Рассмотрим множество цветов $\Xi := \{1, 2, \dots, C_0^5\}$. Каждому индексу из J_k поставим в соответствие один из цветов, т.е. зафиксируем инъективное отображение $\xi : J_k \rightarrow \Xi$. В силу предыдущего пункта имеем, что $i, j \in J_k$

$$i \neq j \Rightarrow \xi(i) \neq \xi(j), \quad \rho(x_i; x_j) \leq 10r_k.$$

- (е) Для каждого $j \in J_k$ введем функцию $\varphi_j(x) := \max\{0; 1 - \frac{\rho(x; B_j)}{r_k}\}$. Зафиксируем её свойства

$$0 \leq \varphi_j(x) \leq 1, \quad \forall x \in X; \quad (11.4)$$

$$\varphi_j(x) = 1, \quad x \in B_j; \quad (11.5)$$

$$\varphi_j(x) = 0, \quad \forall x \in X \setminus 2B_j; \quad (11.6)$$

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \leq \frac{1}{r_k} \rho(x; y), \quad \forall x, y \in X. \quad (11.7)$$

2. Построение квазиизометрии F . Мы её зададим как

$$F := \bigotimes_{\xi \in \Xi} F^\xi.$$

В произведении будет $2C_0^5$ сомножителей, а степень N будет ещё больше. Однако важно, что зависит эта степень не от α , а только от параметра удвоения C_0 . Теперь перейдём к описанию построения отображений F^ξ .

- (а) Отображения F^ξ мы будем строить в виде

$$F^\xi(x) := \sum_{k \geq k_0} r_k^\alpha f_k^\xi(x), \quad (11.8)$$

$$\text{где } f_k^\xi(x) := \sum_{j \in J_k(\xi)} v_j \varphi_j(x).$$

Роль функций F_k^ξ в том, что они «перегоняют» в $\mathbb{R}^L$ «свои» шары, а остальную часть X не трогают, чего мы добиваемся за счёт определения функций φ_j . Точки $v_j \in \text{ball}(0; \tau^2) \subset \mathbb{R}^M$ играют роль структурных констант. Их нам ещё только предстоит подобрать (как и константу M , а равно параметр τ из пункта 1а), чтобы добиться грубой вложимости.

Однако, уже можно заметить, что в силу определения φ_j

$$\sup |f_k^\xi| \leq \tau^2. \quad (11.9)$$

- (b) Обозначим через F_k^ξ частичную (до номера k) сумму ряда (11.8). Тогда оценим хвост этого ряда

$$\sup |F^\xi(x) - F_k^\xi(x)| \leq \sum_{l > k} r_l^\alpha \tau^2 \leq 2\tau^2 r_{k+1}^\alpha,$$

поскольку $r_l = \tau^{2l}$ и можно считать (взяв достаточно малый параметр τ), что $\tau^{2\alpha} < 1/2$.

- (с) Обозначим $G_{k,j}^\xi(y) := F_{k-1}^\xi(y) + r_k^\alpha \sum_{i \in J_k(\xi), i < j} v_i \varphi_j(y)$, это начало ряда (11.8).

Точки v_j выбираются так, чтобы выполнилось условие

$$|F_k^\xi(x) - G_{k,j}^\xi(y)| \geq \tau^3 r_k^\alpha, \quad x \in B_j, y \in \text{ball}(x_j; \frac{10r_k}{\tau^2}) \setminus 2B_j. \quad (11.10)$$

- (д) Такой выбор позволяет добиться оценки

$$|F_k^\xi(x) - F_k^\xi(y)| = |F_k^\xi(x) - G_{k,j}^\xi(y)| \geq \tau^3 r_k^\alpha / 2.$$

Выбор τ позволяет добиться наконец оценки для снежинки

$$|F(x) - F(y)| \geq |F^\xi(x) - F^\xi(y)| \geq \frac{\tau^5}{8} \rho(x; y)^\alpha,$$

что даёт нижнюю оценку грубого вложения.

- (е) Верхняя оценка получается более непосредственно, за счёт работы с нормами.

$$|F_k^\xi(x) - F_k^\xi(y)| \leq (4\tau^{-2})^{1-\alpha} \rho(x; y)^\alpha.$$

3. Теперь обсудим как доказать теорему для неограниченного пространства X .

- (а) Рассмотрим шар $X_m := \text{ball}(x_0; 2^m)$. Прокручивая для него рассуждения, из предыдущих пунктов, получаем квазиизометрическое вложение F_m для α -заморозки шара X_m . То есть

$$\frac{1}{C} \rho(x; y)^\alpha \leq |F_m(x) - F_m(y)| \leq C \rho(x; y)^\alpha.$$

Не теряя общности, можно считать что $F_m(x_0) = 0$.

- (б) Причём константа C не зависит от выбора m . Собственно и её и N из пункта 1с можно выбрать для неограниченного пространства, зная только константу удвоения C_0 .
- (с) Выбирая для каждого целого k семейство J_k как мы это делали в пункте 1б, получаем не более чем счётное семейство точек.
- (д) После чего выбираем последовательность $\{m_j\}$ так, чтобы $F_{m_j}(x_j)$ сходилась (для этого мы потребовали $F_m(x_0) = 0$). Можно убедиться, что сходимость равномерная, а значит предел F_m и даст нам искомое F на всём X .

□

Теоремы Асуада и Наора-Неймана показывают, что если в пространстве выполнено условие удвоения, то его заснеженные версии вложимы в конечномерное евклидово пространство. К сожалению, размерность пространства в которое мы погружаем очень велики и быстро растёт при варьировании параметра. То, что выполнение условия удвоения недостаточно мы также уже отметили выше в примере 11.8.

Интересно, что можно ослабить требования к исходному пространству. К примеру заменить метрическую структуру на более слабую. В работе [TD23] это было проделано для случая полуметрических пространств, в которых неравенство треугольника заменяется на более слабый аналог.

Открытый вопрос. Можно ли доказать аналог теоремы Асуада для случая грубых пространств, в которых не выполняется условие удвоения?

Лекция XII: неподвижные точки

Изучение свойства Каждана ставит вопрос о том, как устроены неподвижные точки при действии группы где-нибудь. Чтобы приблизиться к грубому пониманию этой проблемы, приведём краткий обзор ситуации с Т-свойством для борнологических групп, предложенную в работе [TW22].

12.1 Борнологические группы

Начнём с определения.

Определение 12.1. Пусть G — группа. *Борнологией* называется подмножество $\mathcal{B} \subseteq 2^G$ множеств, далее называемых ограниченными, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. Для каждого $g \in G$ множество из одного элемента $\{g\}$ ограничено.
2. Если $A \subseteq B \subseteq G$ и B ограничено, то и A ограничено.
3. Если $A \subseteq G$ ограничено, то $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$ также ограничено.
4. Если $A, B \subseteq G$ ограничены, то $A \cup B$ и $A \cdot B$ также ограничены. Здесь $A \cdot B$ означает множество всех попарных произведений элементов из A и B .

Борнологическая группа — это группа, снабжённая борнологией.

Борнологические группы достаточно естественный пример грубых пространств, связанных с групповыми структурами, предложенный в [TW22]. Так что уместно остановиться на некоторых его свойствах.

12.1.1 Свойства борнологических групп

Приведём два примера борнологий, возникающих естественным образом.

Пример 12.1. • Простейшая борнология состоит из всех конечных подмножеств G ;

- Если группа G действует изометрически на метрическом пространстве X , в качестве борнологии можно выбрать все подмножества, для которых орбиты действия на элементы пространства обладают конечным диаметром.

По данной борнологии $\mathcal{B}$ можно ввести две естественные грубые структуры: левую и правую.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L &:= \{E \subseteq G \times G \mid \exists B \in \mathcal{B} : (x, y) \in E \iff x^{-1}y \in B\}; \\ \mathcal{E}_R &:= \{E \subseteq G \times G \mid \exists B \in \mathcal{B} : (x, y) \in E \iff xy^{-1} \in B\}.\end{aligned}$$

Упражнение 12.1. Проверьте, что $\mathcal{E}_L$ и $\mathcal{E}_R$ действительно являются грубыми структурами.

Предложение 12.1 (А. Перелыгин, 2024). *Пространства $(G, \mathcal{E}_L)$ и $(G, \mathcal{E}_R)$ — грубо эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\theta : g \mapsto g^{-1}$. Несложно видеть, что оно собственное. Для проверки борнологичности достаточно заметить, что

$$\theta(x^{-1}y) = y^{-1}x.$$

Значит образ контролируемого множества контролируем. Что и дает борнологичность. $\square$

Интересно задаться вопросом, какие борнологические группы метризуемы.

Perelygin's Theorem. *В не более чем счётнопорождённой группе G грубые борнологические структуры $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_R$ счётно порождены если и только если борнология счётно порождена.*

Учитывая доказанный нами критерий метризуемости 3.1, получаем что борнологические группы метризуемы тогда и только тогда, когда они порождены счётно порожденной борнологией.

12.1.2 Т-свойство в борнологических группах

Сформулировав понятие ограниченности, перейдём к следующему определению.

Определение 12.2. • Изометрическое действие борнологической группы G на грубом пространстве X называется *контролируемым*, если орбиты всех точек ограничены.

- Для борнологической группы, изометрически действующей на X , выполнено FX -условие, если каждое контролируемое действие имеет неподвижную точку.

Определение 12.3. Пусть G — борнологическая группа. Представление $\pi : G \rightarrow U(H)$ имеет *почти инвариантные векторы*, если для каждого $\varepsilon > 0$ и ограниченного множества $A \subseteq G$ существует единичный вектор $v \in H$, такой что $\sup_{a \in A} \|\pi(a)v - v\| < \varepsilon$.

Здесь через $U(H)$ обозначаются унитарные операторы в гильбертовом пространстве (т. е. сохраняющие скалярное произведение).

Определение 12.4. Борнологическая группа G обладает *грубым свойством T* , если каждое представление с почти инвариантными векторами имеет инвариантный вектор.

Кошачьи советы. *Как бы ни задавалось действие T -группы, всегда найдётся тихое место, в котором живущая кошка всегда (при действии группы) останется рядом со своим исходным положением. Это спокойное место может меняться для разных вариантов действия, но всегда существует.*

Последнее определение, можно было дать и в предыдущей лекции. Его эквивалентность определению 11.3 установлена теоремой Делорме-Гишара, которая справедлива и для борнологических групп (раздел 5.1 в [TW22]).

Tessera-Winkel's Theorem. *Для борнологических групп с ограниченной геометрией:*

1. *T -свойство является грубым (грубо эквивалентные борнологические группы одновременно являются T -группами);*
2. *T -свойство влечёт за собой FH -свойство. Обратное утверждение справедливо, если борнология порождается единственным ограниченным множеством.*

Всё, как говорится, хорошо, но мы пока совершенно не приблизились к тому, чтобы научиться доказывать существование неподвижных точек. Об этом сейчас и поговорим.

12.2 Грубая неподвижная точка

В теореме Шварца–Милнора, рассмотренной ранее, мы требовали от действия свойства правильности (см. определение 2.3). Иными словами, мы стремились к тому, чтобы точка под действием группы могла отдаляться на произвольное расстояние.

Теперь пожелаем обратного: будем искать для данного действия такую точку x_* , для которой $g(x_*) = x_*$ или, по крайней мере, приближённо равна. Это обобщение в грубую сторону классической теории неподвижных точек, которая является важной частью функционального анализа и геометрии.

12.2.1 Классическая теорема Брауэра

Классическая теорема Брауэра утверждает, что непрерывное отображение выпуклого компакта в евклидовом пространстве в себя имеет неподвижную точку. Выпуклость можно заменить на стягиваемость, то есть рассматривать пространства, гомеоморфные шару. Однако, как ясно из теоремы Ассуада и других результатов предыдущей лекции, теоремы, сформулированные для евклидовых пространств, слишком слабы для грубой геометрии. Тем не менее, известно много обобщений теоремы Брауэра, которые работают в бесконечномерном случае.

Schauder's Theorem. *Пусть C — непустое замкнутое выпуклое подмножество в банаховом пространстве. Непрерывное отображение $f : C \rightarrow C$ с компактным образом имеет неподвижную точку.*

Tychonoff's Theorem. *Пусть C — компактное выпуклое подмножество в локально-выпуклом топологическом векторном пространстве. У непрерывного отображения $f : C \rightarrow C$ есть неподвижная точка.*

С точки зрения грубой геометрии добиться выпуклости (или односвязности) исходного пространства сразу не удаётся. Однако компактности мы добиваться умеем (см. соответствующую часть, посвящённую компактификациям). Поэтому можно сформулировать следующий слабый аналог теоремы Брауэра.

Предложение 12.2. *Если компактификация Хигсона грубого пространства вложима в банахово пространство и является выпуклой, то грубое отображение пространства в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Следует из теоремы Шаудера. $\square$

Однако в большинстве примеров, которые мы рассматривали, компактификация не может быть вложима в банахово пространство, хотя бы потому, что она обычно не метризуема.

При этом можно заметить, что неподвижной точка может не быть в самом пространстве, а оказаться на границе. Например, если рассмотреть кокомпактное и собственное действие группы (как в теореме Шварца–Милнора), то неподвижные точки окажутся на грубой границе.

Пример 12.2. Параллельные переносы $\mathbb{R}^n$ имеют неподвижную точку на видимой границе.

Доказательство. Очевидно, что геодезическая, вдоль которой происходит перенос пространства, переходит сама в себя. А значит, и соответствующий ей вектор на единичной сфере (с которым мы отождествляем точку видимой границы) также остаётся неизменным. $\square$

12.2.2 Действие группы

Начнём с простого соображения. Если $f : X \rightarrow X$ — отображение (грубое, непрерывное или изометрическое), то оно порождает действие полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times X &\rightarrow X \\ (n, x) &\mapsto (f^n(x)) =: \Psi_n(x). \end{aligned} \tag{12.1}$$

При этом, конечно, Ψ_0 — тождественное отображение, и справедлива формула $\Psi_n \Psi_m = \Psi_{n+m}$. Кроме того, если x_* — неподвижная точка для f , то она будет неподвижной и для каждого Ψ_n .

Если отображение f обратимо, то аналогично можно задать действие группы $\mathbb{Z}$.

Таким образом, для изучения неподвижных точек полезно рассматривать действия полугруппы $\mathbb{N}$ и группы $\mathbb{Z}$. Это направление изучалось Томохиро Фукаи (Fukaya) в работах [Fuk08; Fuk09].

Пусть далее $A_k := \mathbb{N}^k$ или $\mathbb{Z}^k$ (для целей данного обсуждения различий между ними не возникает), и пусть A_k действует на грубом (возможно, не метрическом) пространстве. Это значит, что для $g \in A_k$ отображение $\Psi_g : X \rightarrow X$ — грубое, и выполняется $\Psi_g \Psi_h = \Psi_{gh}$.

Пример 12.3. • Естественное действие $\mathbb{N}^k$ на себе, заданное как $n + m$, будет грубым;

- Если f — грубое отображение $f : X \rightarrow X$, то формула (12.1) задаёт грубое действие $\mathbb{N}$ на X .

Пусть X — грубое пространство, на котором действует дискретная группа G . Удобно для каждой $x_0 \in X$ рассмотреть отображение $\Phi_{x_0} : A_k \rightarrow X$, заданное формулой

$$\Phi_{x_0}(g) := g(x_0).$$

Теорема 12.1 (Теорема Фукаи). *Пусть задано грубое действие A_k на X . Если для некоторого x_0 отображение Φ_{x_0} — грубое, то индуцированное действие группы A_k на короне Хигсона νX имеет неподвижную точку.*

Под неподвижной точкой понимается $x_* \in \nu X$, такая что $g(x_*) = x_*$ для любого $g \in A_k$.

Доказательство. 1. По условию теоремы для точки $x_0 \in X$ отображение в орбиту $\Phi_{x_0} : A_k \rightarrow X$ — грубое. Индуцируем отображение корон $\nu\Phi_{x_0}$:

$$\begin{array}{ccc} A_k & \xrightarrow{\Phi_{x_0}} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu A_k & \xrightarrow{\nu\Phi_{x_0}} & \nu X \end{array}$$

В соответствии с теоремой 5.3 о функториальности короны Хигсона, $\nu\Phi_{x_0}$ является непрерывным.

2. Распространим отображение Ψ_g на корону νA_k . Видно, что оно близко к тождественному. В самом деле, для некоторых констант C, D выполняется

$$C|g| \leq \rho(n; \Psi_g(n)) \leq D|g|,$$

что соответствует определению близости к тождественному отображению.

3. Получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \nu A_k & \xrightarrow{\nu\Psi_h \sim id} & \nu A_k \\ \nu\Phi_{x_0} \downarrow & & \downarrow \nu\Phi_{x_0} \\ \nu X & \xrightarrow{\nu\Psi_g} & \nu X \end{array}$$

Следовательно, для $x' \in \nu A_k$ выполняется

$$\nu\Psi_g(\nu\Phi_{x_0}(x')) = \nu\Phi_{x_0}(x').$$

Таким образом, точка $\nu\Phi_{x_0}(x')$ является неподвижной относительно Ψ_g для любого g . Что и требовалось доказать. $\square$

Просто так усилить эту теорему не удаётся.

Упражнение 12.2. Приведите пример действия свободной группы F_2 на себе, которое не имеет неподвижных точек, включая точки на короне.

Повторим, что неподвижная точка может находиться и на границе. Именно так происходит для действий, аналогичных описанным в теореме Шварца–Милнора.

Следствие 12.1.1. Пусть X — собственное метрическое пространство. Если f — изометрия без грубых неподвижных точек, то на грубой компактификации $\bar{X}$ индуцированное отображение $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ обязательно имеет неподвижную точку на границе ∂X .

12.3 Классификация грубых точек

«Настоящие» неподвижные точки встречаются редко.

Определение 12.5. Назовём точку x *грубой неподвижной точкой*, если её орбита ограничена.

Кошачьи советы. Если у кошки есть ограниченное число возможных локаций, её можно считать неподвижной.

Более подробно о классификации неподвижных точек см. в работах Стивена Хейра [Hai10a; Hai10b].

Определение 12.6. Для метризуемого пространства X обозначим через OX *открытый конус*: пространство $[0, \infty) \times X$, в котором точки $\{0\} \times X$ отождествлены.

Пусть X изометрически вложено в евклидово пространство $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда OX также может быть вложен в евклидово пространство, и мы будем понимать OX как метрическое пространство с индуцированной метрикой.

Для грубого отображения $f : OX \rightarrow OX$ можно дать следующие определения.

Определение 12.7. 1. **Сильное грубое условие о неподвижной точке:** существует $\zeta \in OX$, $R > 0$, $\{x_i\} \rightarrow \infty$ такие, что

$$\rho(x_i; O\zeta) < R, \quad \rho(f(x_i); O\zeta) < R.$$

2. **Грубое условие о неподвижной точке:** существует последовательность ζ_i , $R > 0$, $\{x_i\} \rightarrow \infty$ такие, что

$$\rho(x_i; O\zeta_i) < R, \quad \rho(f(x_i); \zeta_i) < R.$$

3. **Слабое условие о неподвижной точке:** существует $\zeta \in X$ такое, что во всякой окрестности $U(\zeta)$ найдётся $\{x_i\} \rightarrow \infty$, такая что $f(x_i) \subset OU$.

Пример 12.4. Если ζ является настоящей неподвижной точкой, то для неё выполнено сильное грубое условие о неподвижной точке.

В конусах над «хорошими» пространствами обязательно есть неподвижные точки. Например, приведём следующее утверждение ([Hai10a], Теорема 4.1).

Hair's Theorem. *Для любого грубого отображения $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ выполнено условие о грубой неподвижной точке.*

В действительности это утверждение распространяется на более широкий класс пространств, обладающих нулевой грубой степенью отображения.

На первый взгляд, конфигурация, которую рассматривает Хейр, полностью отличается от рассмотренной Фукаей: здесь речь идёт не об инвариантности относительно действия группы, а о грубом отображении конуса на себя. С другой стороны, действие $\mathbb{N}$ на пространстве X можно понимать следующим «послойным» образом:

$$F : (n, x) \mapsto (n, n(x)).$$

Очевидно, что F можно продолжить до грубого отображения $F : OX \rightarrow OX$. В таком случае, если X — метрический компакт, то по теореме Фукаи получается результат Хейра. Однако эти результаты имеют значительные отличия:

- Результат Фукаи применим не только к метрическим компактам, но и к любому пространству с грубым действием $\mathbb{N}^k$ или $\mathbb{Z}^k$;
- Конфигурация Хейра не требует наличия грубого действия $\mathbb{N}$ на метрическом компакте.

Задачи

1. Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой x_0 . Зададим отображение (вложение Куратовского) $X \hookrightarrow \ell^\infty(X)$ формулой

$$x \mapsto \{y \mapsto |x_0 - y| - |x - y|\}.$$

Проверьте, что образ вложения Куратовского изометричен X .

2. Докажите (по определению), что граф Кэли не содержит экспандера для
- групп полиномиального роста;
 - аменабельных групп.
3. Рассмотрим грубые пространства X, Y такие что $X \subset Y$. Докажите, что $\text{asdim}(X) \leq \text{asdim}(Y)$. Равносильно ли $\text{asdim}(X) = \text{asdim}(Y)$ их грубой эквивалентности?
4. Дана конечно порожденная группа G . Найдите асимптотическую размерность её графа Кэли.
5. Докажите, что из удваиваемости пространства следует, что обладает ограниченной геометрией. Верно ли обратное?
6. Пусть G удовлетворяет (Т) свойству Каждана, докажите, что тогда любые ее бесконечные фактор группы G/N не аменабельны.
7. Докажите, что свободная группа не удовлетворяет (Т) свойству.
8. Для каких типов действия граф $sk(G; \lambda)$ (см. задачу 13) будет вложим в $\text{Cayley}(G)$.
9. Для каких $p, q \geq 1$ $\ell_p(G)$ вложимо в $\ell_q(G)$?
10. Какие группы вложимы в $\mathbb{R}^2$?
11. Докажите, что грубые пространства борнологической группы с левой и правой грубыми структурами $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_R$ грубо эквивалентны.
12. Классифицируйте при помощи неподвижных точек (в пространстве и на видимой границе) движения плоскости.
13. Приведите пример грубого отображения у которого есть слабая грубая неподвижная точка, но нет сильной.
14. Постройте пример изометрического действия свободной группы ранга 2 на себе у которого нет неподвижных точек.

Часть VI

Дополнения

Теорема Халина о решётке

Приведём здесь доказательство упомянутой нами в разделе 4.3.4 теореме Халина, которая, утверждает, что в наличие в графе толстого конца влечёт существование гексагональной решётки. Таким образом, получается, что может быть одно из двух: либо все концы графа тонкие, либо в нём имеется структура из (возможно, нескольких) гексагональных решёток.

Оригинальное доказательство было получено Р. Халиным в [Hal64]. При доказательстве мы будем опираться на работу [Die04] и на перевод этого доказательства, представленной в совместной работе автора и Татьяны Казанцевой [AT24].

13.1 Определения и вспомогательные утверждения

Далее считаем, что в исследуемых графах степени всех вершин конечны, а все ребра имеют кратность один. Напомним машинерию из соответствующей главы про концы графов.

Определение 13.1. *Простой путь* — последовательность неповторяющихся вершин графа, в которой каждая следующая вершина соединена с предыдущей ребром.

Определение 13.2. *Лучом* в графе будем называть бесконечный в одну сторону простой путь. Если выкинуть из луча простой путь, являющийся его началом, получим *подлуч*.

Определение 13.3. Здесь и далее для двух наборов путей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ под $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ считаем, что $\mathcal{P}'$ состоит из связных подмножеств конечных или бесконечных путей из $\mathcal{P}$. Например, $\mathcal{P}$ состоит из лучей, а $\mathcal{P}'$ из их подлучей.

Определение 13.4. Два луча считаются *эквивалентными*, если существует третий луч, пересекающийся с каждым из них по бесконечному числу вершин.

То что в последнем определении действительно введено отношение эквивалентности — упражнение. При проверке транзитивности рекомендуем обратить внимание на картинку XIII.1.

Определение 13.5. *Концом* в графе будем называть класс эквивалентности лучей.

Определение 13.6. Будем говорить, что конец *толстый*, если он содержит бесконечно много непересекающихся эквивалентных лучей, и *тонкий* иначе.

Например, граф, состоящий из одного простого бесконечного пути (назовём его *прямая*) содержит два тонких конца. А граф, вершины которого расположены в целых точках координатной плоскости и рёбра соединяют вершины в соседних узлах (*плоскость*) — один толстый.

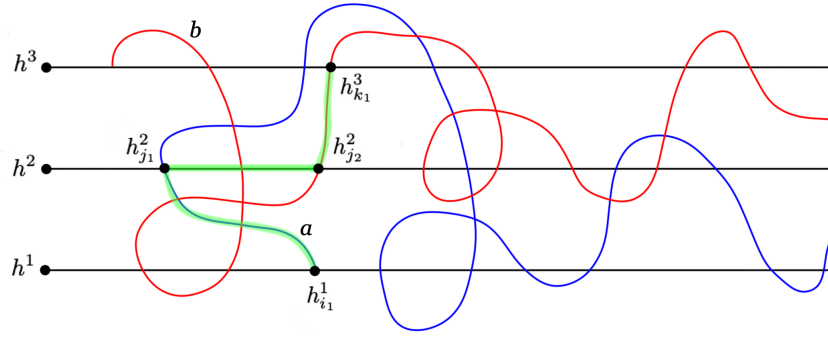
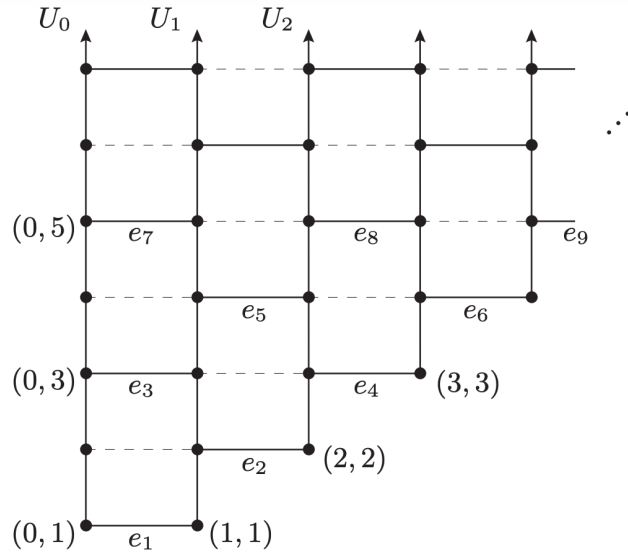


Рис. XIII.I: Транзитивность отношения эквивалентности

Определение 13.7. Для множеств A и B будем называть $(A \sim B)$ -*путём* простой путь, соединяющий какую-нибудь пару вершин из множеств A и B соответственно и не содержащий строго внутри никаких вершин из $A \cup B$ (чаще всего в качестве A и B будем рассматривать лучи или наборы лучей).

Определение 13.8. *Подразбиением* графа G будем называть граф, полученный из G с помощью операций замены ребра между вершинами v, u на два новых ребра v, t и t, u , где t — новая вершина.

Под гексагональной решёткой будем понимать набор вертикальных лучей и «чередующихся перегородок» между ними (рис. XIV.I).


 Рис. XIII.II: гексагональная решетка H

При доказательстве нам потребуется утверждение, известное как лемма Кёнига (см. оригинальную работу [Kön27] и подробное изложение в [ВШ12, теорема 22, с. 52]).

Лемма 13.1 (Кёниг). *Каждое бесконечное дерево содержит вершину бесконечной степени или бесконечный простой путь.*

Для полноты изложения приведём доказательство леммы.

Доказательство. Если есть вершина бесконечной степени, то утверждение очевидно. Так что будем считать, что у всех вершин конечная степень. Подвесим граф за какую-нибудь вершину v_0 . Тогда для какой-то из вершин первого уровня число её потомков бесконечно. Назовём её v_1 и добавим в путь.

Продолжим этот процесс: пусть уже выбрано k вершин, тогда по нашему алгоритму у v_{k-1} бесконечное число потомков, но вершин на k -м уровне, достижимых из неё — конечное число. Значит, у одной из них бесконечное число потомков. Назовём её v_k и добавим в путь.

Таким образом, мы получаем искомый бесконечный простой путь. $\square$

13.2 Формулировка и доказательство

Итак, строгая формулировка теоремы Халина.

Теорема 13.1 (Халин). *Любой граф, имеющий толстый конец, содержит подграф, изоморфный некоторому подразбиению графа гексагональной решётки.*

Сразу заметим, что в обратную сторону это утверждение очевидно: если уж в графе нашлась гексагональная решётка, то конец у него заведомо толстый. Так что для доказательства нам достаточно предъявить в графе с толстым концом гексагональное подразделение.

Идея доказательства такая.

Пусть G — граф с толстым концом ω . Наша основная цель — индуктивно найти в нём набор «вертикальных» лучей, играющих роль $U_0, U_1, \dots$, и «горизонтальных» путей $e_1, e_2, \dots$ между ними, как на рис.

Вначале определим набор $\mathcal{R}_0$ как бесконечное множество непересекающихся эквивалентных лучей из толстого конца ω . Начнём с индуктивного построения последовательности лучей $Q_0, Q_1, \dots$, где для каждого номера i найдём номер $p(i)$ с соответствующим набором $Q_i \sim Q_{p(i)}$ путей. В дальнейшем из множества лучей Q_i выделим набор «вертикальных» лучей для решётки, а $Q_i \sim Q_{p(i)}$ пути послужат «горизонтальными перемычками».

Доказательство

Будем вести индукцию по $n \in \mathbb{N}$, числу путей Q_i , которые мы определили выше.

Предположение индукции.

На n -м шаге построения нашей последовательности будем добиваться выполнения следующих пяти условий.

1. $Q_n \in \omega$ и Q_n не пересекается с $Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1}$.
2. $p(n) < n$ для любого $n \geq 1$.
3. Для любого $1 \leq i \leq n$ множество $\mathcal{P}_n(Q_i)$ состоит из непересекающихся $Q_i \sim Q_{p(i)}$ путей и удовлетворяет следующим двум условиям.
 - (а) Для любых $i \neq j$, где $i, j \leq n$, пути между наборами не пересекаются, т. е. $\mathcal{P}_n(Q_i) \cap \mathcal{P}_n(Q_j) = \emptyset$.

- (b) Для любых $i \neq j$ и $i, j \leq n$, где $j \neq p(i)$, пути между двумя лучами из последовательности не содержат внутри себя точек других лучей. Иначе говоря, $\mathcal{P}_n(Q_i) \cap Q_j = \emptyset$.
4. Бесконечное множество $\mathcal{R}_{n+1} \leq \mathcal{R}_n$ из «неиспользованных» лучей не пересекается с множествами $Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ и $\bigcup_n \mathcal{P}_n(Q_i)$ для $1 \leq i \leq n$.
5. $\mathcal{P}_n(Q_i) \subseteq \mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ для любого $1 \leq i \leq n$. В процессе доказательства функция $p: i \mapsto p(i)$ будет оставаться неизменной после определения, но набор $\mathcal{P}_n(Q_i)$ из $Q_i \rightsquigarrow Q_{p(i)}$ путей будет меняться с ростом n .

Замечание 6. Неформально говоря, $\mathcal{P}_n(Q_i)$ рассматривается как лучший на данный момент кандидат на систему путей между лучами Q_i и $Q_{p(i)}$. Но, когда добавляется Q_m , где $m > n$, нам, может быть, придётся менять $\mathcal{P}_n(Q_i)$, выкидывая из него лишнее.

Возможно, в пределе мы выкинем всё, так что итоговые «перемычки» придётся выбирать именно из $\mathcal{P}_n(Q_i)$, а не из их пересечения по всем n .

База индукции

Если $n = 0$, то в качестве луча Q_0 выберем любой из множества $\mathcal{R}_0$ и положим $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \setminus \{Q_0\}$. Очевидно, что сейчас все условия (1a)–(1e) выполнены.

Шаг индукции

(a) Выбор нового пути, не пересекающего старые.

Если, $n \geq 1$, то рассмотрим любой луч $R_n^0 \in \mathcal{R}_n$. Из свойства (1d) следует, что R_n^0 не пересекается с объединением всех уже выбранных лучей и перегородок между ними

$$H_n := Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}_{n-1}(Q_i).$$

Так как и $R_n^0 \in \omega$, и $Q_0 \in \omega$, то существуют бесконечные наборы непересекающихся $R_n^0 \rightsquigarrow H_n$ путей.

Есть два варианта.

- Среди этих путей найдётся такой набор $\mathcal{P}$, что построенные пути не пересекаются ни с какими из старых, т. е.

$$\mathcal{P} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}_{n-1}(Q_i) \right) = \emptyset.$$

На каждом пути из $\mathcal{P}$ отметим первую точку, лежащую на каком-то из Q_i . Тогда найдётся i , для которого будет отмечено бесконечно много путей. Оставим в $\mathcal{P}$ только части путей между R_n^0 и Q_i . Тогда набор $\mathcal{P}$ таков, что $\mathcal{P} \cap Q_i \neq \emptyset$ только для одного i . Положим $p(n) = i$ и $\mathcal{P}_n(Q_j) = \mathcal{P}_{n-1}(Q_j)$ для всех $j < n$.

- В противоположном случае, если невозможно выбрать $\mathcal{P}$ так, чтобы он не пересекался со старыми путями, то выбираем семейство $\mathcal{P}$ так, что все его вершины, общие с H_n , лежат в $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ для единственного i . Такой выбор возможен, ведь пути из $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ не пересекаются для различных i по свойству (1c), и потому на каждом пути из $\mathcal{P}$ можно отметить первую точку, лежащую в каком-то $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$. Тогда

каждый путь из $\mathcal{P}$ можно продлить до Q_i или до $Q_{p(i)}$ так, чтобы новые пути были несамопересекающимися, так как на каждом из них мы выбирали первую точку в $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$. Тогда для какого-то i отмечено бесконечное число путей.

(b) **Проблема: могло не остаться неиспользованных путей.**

i) Теперь выделим бесконечные подмножества $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_n(Q_i) \leq \mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ так, чтобы они не пересекались. Продлим бесконечное подмножество путей из $\mathcal{P}'$ (далее для удобства будем называть это подмножество $\mathcal{P}$) до Q_i или $Q_{p(i)}$, как было описано выше, отрезками путей из $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i) \setminus \mathcal{P}_n(Q_i)$ и положим $p(n) = i$ или $p(n) = p(i)$ соответственно. При этом $\mathcal{P}_n(Q_j) = \mathcal{P}_{n-1}(Q_j)$ для всех $j \leq n, j \neq i$.

В каждом из случаев мы выбрали множества $\mathcal{P}_n(Q_j)$ для всех $j \neq i$ так, чтобы выполнялось условие (1e), определили номер $p(n)$ как требуется в условии (1b) и нашли набор $\mathcal{P}$ из непересекающихся $R_n^0 \sim Q_{p(n)}$ путей, которые также не пересекают лучи Q_i и сопоставленные им наборы путей $\mathcal{P}_n(Q_i)$ для всех $i \neq p(n)$, т.е. верны условия (1a) и (1c). Всё, что нам мешает выбрать R_n^0 в качестве Q_n , — это условие (1d): если $\mathcal{P}$ пересекается со всеми, кроме, может быть, конечного числа лучей из множества $\mathcal{R}_n$ бесконечное число раз, то мы не можем выбрать семейство $\mathcal{R}_{n+1} \leq \mathcal{R}_n$, для которого $\mathcal{R}_{n+1} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

ii) Покажем, что для любого луча R из определённого выше множества лучей $\mathcal{R}_n$ и набора $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ таких, что $\mathcal{P}'$ — бесконечный набор $R \sim Q_{p(n)}$ путей, существует луч R' из $\mathcal{R}_n$, не совпадающий с R и имеющий бесконечно много общих точек с $\mathcal{P}'$.

Действительно, пусть нашлись луч R и набор $\mathcal{P}'$, удовлетворяющие описанным условиям. Тогда выберем R в качестве Q_n , а $\mathcal{P}'$ в качестве $\mathcal{P}_n(Q_n)$ и от каждого $R^* \in \mathcal{R}_n$, не равного R , оставим его подлуч, не имеющий общих точек с R .

При этом множество I лучей, подходящих в качестве R' , бесконечно. В противном случае можно применить предыдущее рассуждение к множеству $\mathcal{R}_n \setminus I$ и получить ещё один луч из I , что приводит к противоречию.

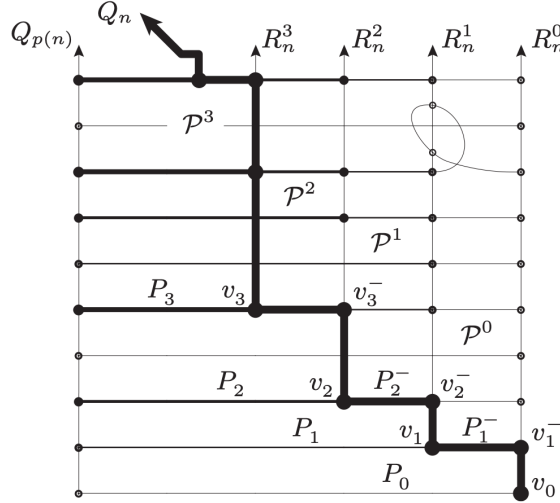
iii) Занумеруем пути из $\mathcal{P}$ номерами вершин из луча R_n^0 , в которых эти пути начинаются. Тогда на любом подмножестве $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ есть индуцированный порядок.

Пусть $\mathcal{P}'$ является набором $R \sim Q_{p(n)}$ путей для некоторого луча R . Назовём введённый порядок *совместимым* с R , если он совпадает с порядком, который задаётся лучом R на этом наборе путей.

(c) **Соберём луч из конечных частей неиспользованных лучей.**

Докажем, что можно выбрать две последовательности $R_n^0, R_n^1, \dots$ и $\mathcal{P}^0 \geq \mathcal{P}^1 \geq \dots$ такие, что все R_n^i являются подлучами различных лучей из $\mathcal{R}_n$, а каждое $\mathcal{P}^i$ является набором $R_n^i \sim Q_{p(n)}$ путей, порядок на которых совместим с R_n^i .

Пусть луч R_n^0 уже есть. Положим $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}$, v_0 — первая вершина в R_n^0 . Пусть уже найдены первые $k-1$ элементов каждой последовательности. Тогда применим аналогичные с п. (3b, ii) рассуждения к лучу R_n^{k-1} и набору путей $\mathcal{P}^{k-1}$: найдётся луч R_n^* , не пересекающий ни один из уже выбранных и не пересекающий конечный набор путей $P_0, P_1 \dots P_{k-2}$. Пусть $P_{k-1} \in \mathcal{P}^{k-1}$ — какой-нибудь путь, v_{k-1}^- — его стартовая вершина на луче R_n^{k-1} , а вершина v_k — самое верхнее его пересечение с R_n^* . Возьмём в качестве R_n^k подлуч R_n^* , стартующий с вершины v_k . Очевидно, можно выбрать теперь бесконечное множество путей $\mathcal{P}^k \leq \mathcal{P}^{k-1}$ с совместимым с R_n^k порядком.


 Рис. XIII.III: построение Q_n

Каждый путь P_k из найденных выше разбивается на два пути: от R_n^k до v_{k+1} и от v_{k+1} до $Q_{p(n)}$. Обозначим их P_k^- и P_k^+ соответственно. Пусть, далее, R_{n+1}^k — подлуч в R_n^k , не пересекающий путь P_i ни для какого i . Тогда положим (рис.¹ XIII.III):

- $Q_n := v_0 R_n^0 v_1^- P_1^- v_1 R_n^1 v_2^- P_2^- v_2 R_n^2 \dots$;
- $\mathcal{P}_n(Q_n) := \{P_0^+, P_1^+, P_2^+, P_3^+ \dots\}$;
- $\mathcal{R}_{n+1} := \{R_{n+1}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Осталось проверить, что условия (1a)–(1e) выполнены после шага индукции. Условия (1b) и (1e) мы уже проверяли. Условия (1a) и (1c) верны, ведь Q_n состоит из отрезков лучей из $\mathcal{R}_n$, которые, в свою очередь, не пересекаются с $Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1}$, причём $\mathcal{P}_n(Q_n) \leq \mathcal{P}$, а для $\mathcal{P}$ утверждение было верно. Условие (1e) справедливо, поскольку никакие подлучи R_{n+1}^i не пересекаются как с выбранными ранее лучами или путями, так и с лучом Q_n и путями $\mathcal{P}_n(Q_n)$ по построению.

Построение решётки

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Кёнига (лемма 1).

Построим граф, состоящий из вершин v_i , $i = \{0, 1, 2, \dots\}$, где v_i соединена с $v_{p(i)}$, и применим к нему лемму 13.1. Получим последовательность $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, где или $p(n_{i+1}) = n_i$ или $p(n_i) = n_0$ для любого $i \geq 1$. Рассмотрим оба случая.

(а) Если выполнено первое условие, т. е. $p(n_{i+1}) = n_i$ для всех i , то выкинем все не входящие в нашу последовательность номера. Останутся $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ всё ещё удовлетворяющие условиям (1a)–(1e), причём все наборы $\mathcal{P}_n(Q_{i+1})$ состоят из $Q_{i+1} \sim Q_i$ путей. Наша цель — выбрать подлучи Q'_i из Q_i , соответствующие $U_0, U_1, U_2, \dots$, и пути $S_1, S_2, S_3, \dots$ между ними, соответствующие $e_1, e_2, e_3, \dots$, чтобы прийти к картинке, аналогичной рис. Будем подбирать нужные элементы индуктивно (таким образом, на каждом шаге построения выбрано лишь конечное число «вертикалей» и «перегородок»).

¹Картинка взята из работы [Die04]

Пусть $Q'_0 = Q_0$ и S_0 — любой путь из $\mathcal{P}_n(Q_0)$. Пусть k и n — минимальные такие, что S_k и Q'_n ещё не определены. Мы опишем, как выбрать S_k и, если требуется для определения S_k , то и Q'_n . Пусть i — такой номер, что e_k соединяет U_{i-1} и U_i в H . Если $i = n$, положим Q'_n равным такому подлучу Q_n , что он не пересекает $S_1, S_2 \dots S_{k-1}$, в противном случае Q'_n уже был определён ранее. Теперь можем выбрать $S_k \in \mathcal{P}_n(Q_i)$ «достаточно высоко», чтобы отразить положение e_k в H . Благодаря условиям (1a)–(1e) мы знаем, что S_k не пересекает ни один из ранее выбранных путей Q'_i или S_i .

(b) Осталось рассмотреть второй случай, когда $p(n_i) = n_0$ для любого $i \geq 1$. Переименуем Q_{n_0} в Q , а все остальные Q_{n_i} в Q_i для $i \geq 1$. Тогда наши наборы $\mathcal{P}_n(Q_i)$ состоят из непересекающихся $Q_i \smile Q$ путей. Мы будем выбирать Q'_n и S_k индуктивно, как раньше, за исключением того, что теперь S_k состоит из трёх частей: отрезок из $\mathcal{P}_n(Q_{i-1})$, отрезок из Q и, наконец, отрезок из $\mathcal{P}_n(Q_i)$. Но тогда S_k всё ещё может быть определён на каждом шаге, ведь из Q всегда выкинут лишь конечный отрезок, а значит, есть бесконечный подлуч со всеми старыми условиями.

Тем самым доказательство теоремы завершено. $\square$

Концы вершинно-транзитивных графов

Данный раздел основан на совместной статье [AT24] с Татьяной Казанцевой.

14.1 Тонкость концов линейных графов

Изучим как устроены концы (прежде всего тонкие) в различных графах. Напомним, что в связном графе γ для любых двух точек x_0, x_1 найдётся константа C такая, что имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{x_0}(n)}{f_{x_1}(n)} = C.$$

Таким образом, все функции роста данного графа эквивалентны.

Теорема 14.1 (Казанцева). *Если функция роста графа G линейна, то все его концы тонкие.*

Доказательство. Предположим противное, что граф имеет толстый конец при линейной скорости роста.

- По теореме Халина можно выделить подграф γ_0 , изоморфный гексагональной решётке. Поскольку функция роста графа линейна, то существует такое $C > 0$, что $f(n) < Cn$ при всех $n \in \mathbb{N}$.
- Выкинем из подграфа γ_0 все горизонтальные пути (которые соединяют разные вертикали решётки), кроме одного для каждой пары вертикальных лучей: Выберем стартовую вершину v и занумеруем вертикали: U_0 содержит v , $U_{-1}, U_{-2}, \dots$ идут влево и $U_1, U_2, \dots$ — вправо.
- За некоторое конечное число k шагов можно добраться до как минимум $2C + 1$ различных вертикалей. Тогда $f(k) \geq 2C + 1$ и

$$f(k+t) \geq (2C+1) + t(2C+1) = (t+1)(2C+1) > 2Ct.$$

Положим $t = 2k$, тогда

$$f(k+t) = f(3k) > 4Ck \Rightarrow f(k+t) > C(k+t) = 3Ck.$$

Получили противоречие.

□

Обратное вообще говоря не имеет места. Причем даже если тонкий конец один и степени вершин ограничены каким-нибудь числом M , то граф может иметь нелинейную функцию роста. Приведём пример такого графа.

Назовём бинарным деревом порядка k бинарное дерево с k уровнями. Рассмотрим простой луч с занумерованными вершинами. К каждой вершине с номером i присоединим бинарное дерево порядка i (рис. XIV.1).

Пример 14.1. Такой граф обладает единственным тонким концом и экспоненциальным ростом.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\#\text{ball}(v_0, 2k) \geq k + 1 + (1 - 1) + (2 - 1) + \dots + (2^{k-1} - 1) + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1,$$

т. е. граф растёт экспоненциально, причём степень каждой его вершины не превосходит 3. $\square$

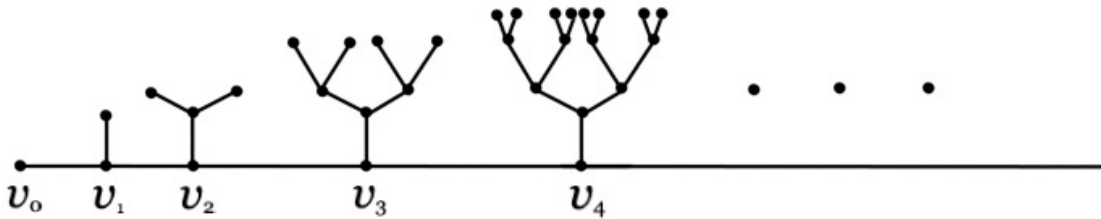


Рис. XIV.I: граф из бинарных деревьев

Упражнение 14.1. Модифицируйте пример 14.1, так чтобы получить граф полиномиального роста.

Упражнение 14.2. Приведите пример графа с бесконечным числом тонких концов не имеющего толстого конца, но имеющего экспоненциальный рост.

14.2 Вершинно–транзитивные графы

Перейдём к рассмотрению вершинно–транзитивных графов, для которых можно доказать (при определённых условиях) утверждение, обратное теореме 14.1, что и является нашей ближайшей целью.

Напомним, что *автоморфизм графа* — произвольная подстановка ϕ на множестве вершин графа, сохраняющая отношение смежности; т. е. образы $\phi(u)$ и $\phi(v)$ вершин u и v смежны тогда и только тогда, когда смежны сами вершины u и v .

Определение 14.1. *Вершинно–транзитивный граф* — граф, у которого для любых двух вершин v и u существует автоморфизм, переводящий v в u .

Лемма 14.1. *Если число концов связного вершинно–транзитивного графа G конечно, то их не больше, чем 2.*

Доказательство. • Пусть концов оказалось больше чем два, скажем, k . Тогда найдётся конечный подграф $G_0 \subset G$, при удалении которого остаётся k бесконечных компонент связности. Обозначим их через $L_1 \dots L_k$.

- Выберем точки $v_1 \in L_1$ и $v_0 \in G_0$ такие, что $\rho(v_1, G_0) > d$, где d — диаметр графа G_0 .

Такие точки найдутся, поскольку L_1 — связный подграф и все вершины в нём имеют конечную степень, а значит, в L_1 есть точки сколь угодно далёкие от вершины v_0 .

- Рассмотрим автоморфизм f , который переводит вершину v_0 в v_1 . Имеем $f(G_0) \subset L_1$. После удаления множества $f(G_0) \cup G_0$ у нас сохраняется $k - 1$ бесконечная компонента $L_2, \dots, L_k$ и добавляется «расщепление» компоненты L_1 на ещё $k - 1$ бесконечную компоненту — итого не менее чем $2k - 2$ конца. Значит, если $k > 2$, то, повторяя процедуру, получим, что число концов бесконечно. $\square$

Эта лемма 14.1 обобщает теорему Хопфа, гласящую, что в графе Кэли для конечно порождённой группы число концов либо бесконечно, либо не более чем два.

Теорема 14.2 (Казанцева). *Скорость роста вершинно-транзитивного графа с конечным числом тонких концов — линейна.*

Доказательство. По лемме 14.1 вершинно-транзитивный граф с конечным числом концов имеет или один конец, или два.

- Пусть в графе два конца.
 - рассмотрим какой-нибудь граф H , при выкидывании которого остаются две бесконечные компоненты. Пусть он лежит в некотором $\text{ball}(v_0, d) = G_0$. Тогда при выкидывании G_0 останутся две бесконечные компоненты L_0 и R_0 и конечный (не обязательно связный) подграф Q_0 .
 - Покажем, что $Q_0 \subset \text{ball}(v_0, 2d)$. Пусть это неверно, тогда найдётся $w \notin \text{ball}(v_0, 2d)$, $w \in Q_0$. Рассмотрим автоморфизм, переводящий v_0 в w . Тогда после удаления $\text{ball}(w, d)$ должны остаться две бесконечные компоненты связности.
 - Заметим, что

$$\text{ball}(w, d) \cap \text{ball}(v_0, d) = \emptyset, \quad (14.1)$$

$$\text{ball}(w, d) \cap L_0 = \emptyset, \quad (14.2)$$

$$\text{ball}(w, d) \cap R_0 = \emptyset.$$

Но тогда, если удалить $\text{ball}(w, d) \cup \text{ball}(v_0, d)$, в графе останутся три бесконечные компоненты, противоречие.

- Выберем вершину $v_1 \in R_0$ на расстоянии $2d$ от v_0 и рассмотрим автоморфизм f , переводящий v_0 в v_1 . Тогда $\text{ball}(v_1, d) \cap L_0 = \emptyset$, т. е. $\text{ball}(v_1, d) \setminus Q_0 \subset R_0$. Аналогично определим Q_1, L_1, R_1 . Далее, так же определим

$$v_2 = f(f(v_0)), \quad v_3 = f(f(f(v_0))), \quad \dots$$

и

$$v_{-1} = f^{-1}(v_0), \quad v_{-2} = f^{-1}(f^{-1}(v_0)), \quad \dots$$

- весь наш граф представлен в виде $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{ball}(v_i, 2d)$, причём пересекаются не на границе только шары с центрами в вершинах с индексами, отличающимися на 1. Выполнена оценка

$$\#\text{ball}(v_0, 2kd) \leq 2\#\text{ball}(v_0, 2d) \cdot (k+1) \leq C \cdot 2k.$$

- Отсюда заключаем, что скорость роста графа не более чем линейна. Поскольку мы предполагаем, что граф бесконечный, получаем утверждение теоремы.
- Если у графа единственный конец, то доказательство повторяется аналогично. Нужно только учесть, что индексы вершин v_i будут принимать лишь натуральные значения, а не целые как в прошлом варианте.

□

Ослабить требование конечности числа концов в теореме 14.2 не получится. Соответствующим примером является граф $T3$, определяемый следующим образом: три бинарных дерева, склеенных в одной вершине (см. рис. XIV.II и пример 14.2).

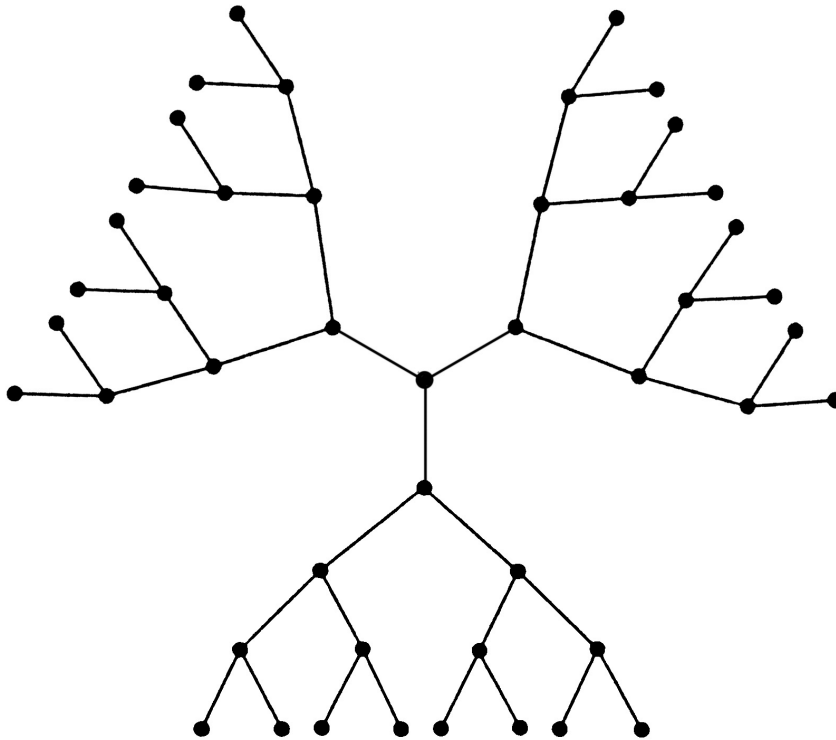


Рис. XIV.II: транзитивный граф $T3$ с экспоненциальной функцией роста

Пример 14.2. Граф $T3$ является вершинно-транзитивным, у него нет толстых концов и его скорость роста экспоненциальна.

Доказательство. Покажем, что данный граф вершинно-транзитивен. Рассмотрим вершины $v_1, v_2 \in T3$. Понятно, как выглядит автоморфизм, переводящий v_1 в v_2 : поставим в соответствие бинарным деревьям, смежным с v_1 , деревья, смежные с v_2 .

Очевидно, что у этого графа нет толстых концов, ведь в нём нет циклов, а, как следствие, и выделить решётку в нём нельзя. Но его функция роста имеет вид

$$\#\text{ball}(v_0, n) = 1 + 3 + 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + \dots + 2^{n-1} \cdot 3 = 3 \cdot 2^n - 2,$$

поскольку при увеличении радиуса на единицу множество новых вершин удваивается. Значит, скорость роста экспоненциальна. $\square$

Следствие 14.2.1. *Если у графа Кэли все концы тонкие, то он либо экспоненциального роста, либо линейного.*

Напомним, что по теореме Басса-Гиварка (см. теорему 6.1) полиномиальность графа Кэли равносильна тому, что группа виртуально нильпотентна. Отсюда заключаем, что у всех бесконечных виртуально нильпотентных, но не метабелевых групп есть единственный толстый конец.

Упражнение 14.3. Сколько (и каких) концов у группы Гейзенберга?

В случае вершинно-транзитивных графов можно установить довольно точный результат относительно роста.

Предложение 14.1. *У вершинно-транзитивного графа G с бесконечным числом концов скорость роста не менее чем экспоненциальна*

Доказательство. Рассмотрим граф G_0 — такой конечный подграф в G , что его удаление приводит к разбиению графа на $k > 2$ бесконечных компонент.

Рассмотрим вершину $v_0 \in G_0$. Для неё существует такое число r , что $G_0 \subset \text{ball}(v_0, r)$. Заметим теперь, что при удалении графа $\text{ball}(v_0, t(r+1))$ исходный распадётся как минимум на $k(k-1)^{t-1}$ бесконечных компонент. Действительно, при любом выборе вершины v граф после удаления $\text{ball}(v, r)$ распадается на k бесконечных компонент. Значит, каждый из бесконечных подграфов, полученных на i -м шаге, через r итераций распадётся на как минимум $k-1$ бесконечную компоненту. Таким образом, $\#\text{ball}(v_0, t(r+1)) \geq k(k-1)^{t-1}$. $\square$

Диаграммы сопряжённости

Группу G считаем порождённой конечным множеством X .

Определение 15.1. Определим граф $sk(G)$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются элементы группы $V(sk(G)) := \{G\}$, и каждая пара вершин a, b соединена ориентированным ребром с меткой $x \in X$, если $x^{-1}ax = b$.

Такой граф $sk(G)$ называется диаграммой сопряжённости. По определению, компоненты связности графа $sk(G)$ содержат в качестве вершин элементы одного класса сопряжённости $[u]$. Компоненту связности, соответствующую классу $[u] \subset G$, будем обозначать $sk_{[u]}$. О связи диаграмм сопряжённости с дифференцированиями групповых алгебр см. [Aru23b]. Подробнее о переходе от диаграмм сопряжённости к диаграммам действия (случая, когда связи в графе порождаются произвольным действием группы на себе), см. [Aru23a].

Визуализация диаграмм сопряжённости требует соответствующего программного обеспечения. Она включает вычисление сопряжённых элементов и последующую раскладку графа на плоскости, что сложно для графов с большим числом вершин. Для вычислений использовалась система GAP с пакетом KBMAG [Hol22]. Визуальная часть задачи выполнена с использованием модулей интерактивной визуализации графов Медиагруппы "Апокриф"¹, а именно модуля "Крит-ФМ Райдо". Автор благодарит Н. Хитрина за неоценимую помощь в решении этих задач и подготовке иллюстраций к этому разделу.

15.1 Геометрия диаграмм сопряжённости

Из определения видно, что граф $sk_{[u]}$ в чём-то «похож» на граф Кэли. Однако, например, диаграмма сопряжённости, вообще говоря, не является вершинно-транзитивным графом, хотя степени всех её вершин одинаковы (и равны $2|X|$, как и у графа Кэли).

Пример 15.1. Диаграмма сопряжённости свободной группы ранга n для sk_u состоит из грани циклических перестановок элемента u , а также деревьев степени $2n$, «растущих» из вершин грани (см. рисунок XV.I).

Отличие диаграмм сопряжённости от графов Кэли заключается в том, что на гранях, помимо меток рёбер, присутствуют элементы централизаторов соответствующих элементов. Например, если мы рассматриваем цикл вокруг вершины a , метки такого цикла либо составляют соотношения исходной группы, либо являются элементами централизатора $Z(a)$. Отметим, что централизаторы различных элементов одного класса сопряжённости сопряжены, но не обязательно совпадают. Примером служит группа перестановок S_5 (см. рисунки XV.II, XV.III, XV.IV).

¹См. <https://academia.apocryphe.ru/>

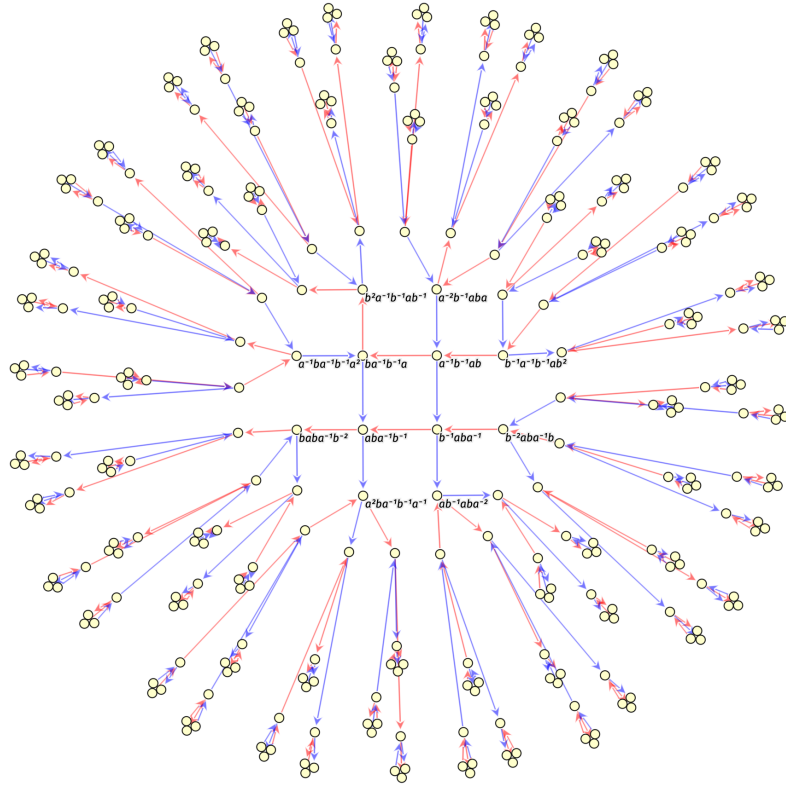


Рис. XV.I: Фрагмент диаграммы сопряжённости $sk_{aba^{-1}b^{-1}}$ для свободной группы ранга 2

Диаграммы сопряжённости устроены более сложно, чем графы Кэли. Если в случае свободных или конечных групп такие графы ещё обозримы, то для группы Баумслэга-Солитера структура диаграмм сопряжённости достаточно сложна (см. рисунок XV.VII). Однако «сложно» не значит произвольно. Как и графы Кэли, диаграммы сопряжённости для различных систем образующих «грубо» эквивалентны.

Предложение 15.1. Для двух различных систем образующих $X_1; X_2$ графы $sk_{[u]}^1$ и $sk_{[u]}^2$, соответствующие одному классу сопряжённости $[u]$, грубо эквивалентны.

Доказательство. Утверждение следует из конечной порождённости и того, что элементы из множества X_2 выражаются словами конечной длины в алфавите X_1 . $\square$

Чтобы лучше понять геометрию графов $sk_{[u]}$, полезно сравнить их с графом Кэли исходной группы.

Обозначим граф Кэли, соответствующий системе X , через $\text{Cayley}(G; X)$.

Определим отображение $\zeta : \text{Cayley}(G; X) \rightarrow sk_{[u]}$ следующим образом:

- Нейтральный элемент $e \in G$ переходит в фиксированный элемент $u \in [u]$: $e \mapsto u$;
- Вершина g переходит в $g^{-1}ug$;
- Ребро, помеченное элементом $x \in X$, переходит в ребро между вершинами, помеченное тем же элементом x .

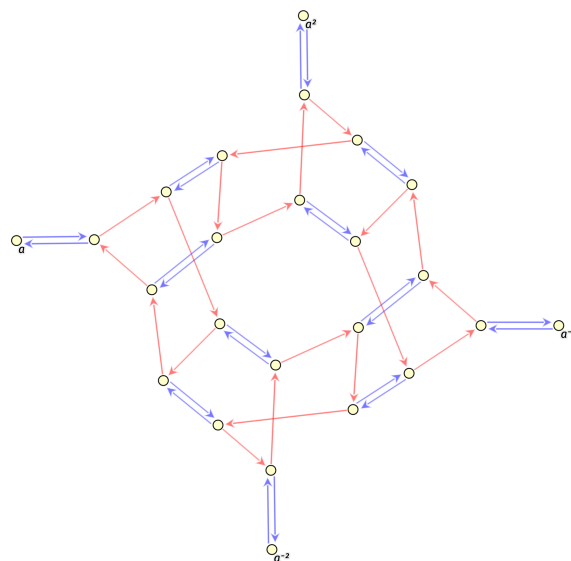


Рис. XV.III: sk_a

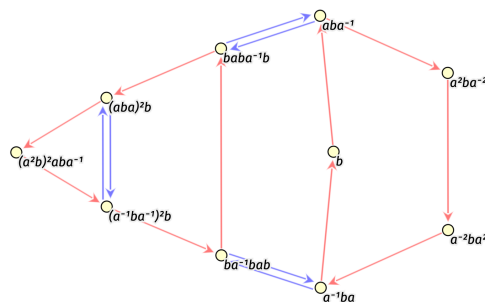


Рис. XV.IV: sk_b

Рис. XV.V: $S_5 = \langle a, b \mid a^2 = b^5 = (ab)^4 = \{a, b^2\}^2 = e \rangle$

$$\rho(\zeta(x), \zeta(y)) \leq \rho(x; y).$$

- Проверим сюръективность и монотонность отображения ζ .

Путь ω вдоль рёбер из вершины u в вершину a (если такой путь существует) является образом аналогичного пути в графе Кэли, начинающегося в нейтральном элементе $e \in G$ и заканчивающегося в $\omega(a)$. Таким образом, пути в графах $sk_{[u]}$ и $\text{Cayley}(G; X)$ отождествляются, что доказывает сюръективность и монотонность отображения ζ .

9

15.2 Нильпотентные группы ранга 2

Мы уже говорили о нильпотентных группах в разделе 6.2, доказывая теорему Басса-Гиварка о полиномиальности нильпотентных групп и давая общее определение нильпотентности. В этом разделе мы рассмотрим диаграммы сопряжённости нильпотентных групп ранга два, то есть таких, у которых фактор-группа по центру является коммутативной.

Пусть G — нильпотентная группа ранга два. Через $Z(u)$, где $u \in G$, обозначим централизатор элемента u , то есть:

$$Z(u) = \{g \in G \mid gu = ug\}.$$

Упражнение 15.1. Докажите, что в нильпотентной группе ранга 2 централизатор является нормальной подгруппой.

Будем называть диаграмму сопряжённости *приведённой*, если из неё удалены все рёбра, являющиеся петлями.

Предложение 15.3. Если группа G является нильпотентной группой ранга 2, то приведённая диаграмма сопряжённости для $sk_{[u]}$ изоморфна графу Кэли группы $G/Z(u)$ для некоторого копредставления группы G .

Доказательство. 1. Заметим, что в субгруппоиде $sk_{[u]}$ вершины tut^{-1} и $t_1ut_1^{-1}$ совпадают, если и только если $t_1 = tz$ для некоторого элемента централизатора $z \in Z(u)$. Таким образом, множество вершин графа $sk_{[u]}$ идентифицируется с элементами фактор-группы $G/Z(u)$.

2. Фактор-группа $G/Z(u)$ является абелевой, так как подгруппа $Z(u)$ содержит центр Z группы G . Выберем систему образующих:

$$G/Z(u) = \langle a_1, a_2, \dots \rangle.$$

Теперь выберем подходящую систему образующих в исходной группе G :

$$G = \langle z_1, z_2, \dots, a_1^*, a_2^*, \dots \rangle, \quad (15.1)$$

где z_i — система образующих для централизатора $Z(u) = \langle z_1, z_2, \dots \rangle$, а a_i^* — произвольный элемент из класса смежности для a_i , то есть $a_i^* \mapsto a_i$ при естественном гомоморфизме $G \rightarrow G/Z(u)$.

3. Проверим, что приведённая диаграмма сопряжённости относительно полученной системы действительно изоморфна графу Кэли группы $G/Z(u)$. Мы уже идентифицировали множество вершин в графе Кэли с множеством вершин в нашей диаграмме. Заметим, что образующие z_i задают петли, так что в приведённой диаграмме рёбер с меткой z_i нет. В то же время никакие из рёбер с меткой a_i петлями не являются.

4. Остаётся заметить, что в нашей диаграмме между двумя вершинами есть ребро с меткой a_i^* тогда и только тогда, когда в графе Кэли группы $G/Z(u)$ соответствующие вершины соединены ребром с меткой a_i .

□

В качестве примера рассмотрим дискретную группу Гейзенберга.

Пример 15.2. Для бесконечных компонент связности группы Гейзенберга их диаграмма сопряжённости грубо изометрична прямой.

Доказательство. Необходимые вычисления легко проводятся самостоятельно. Она изображена на рисунке XV.VI. $\square$

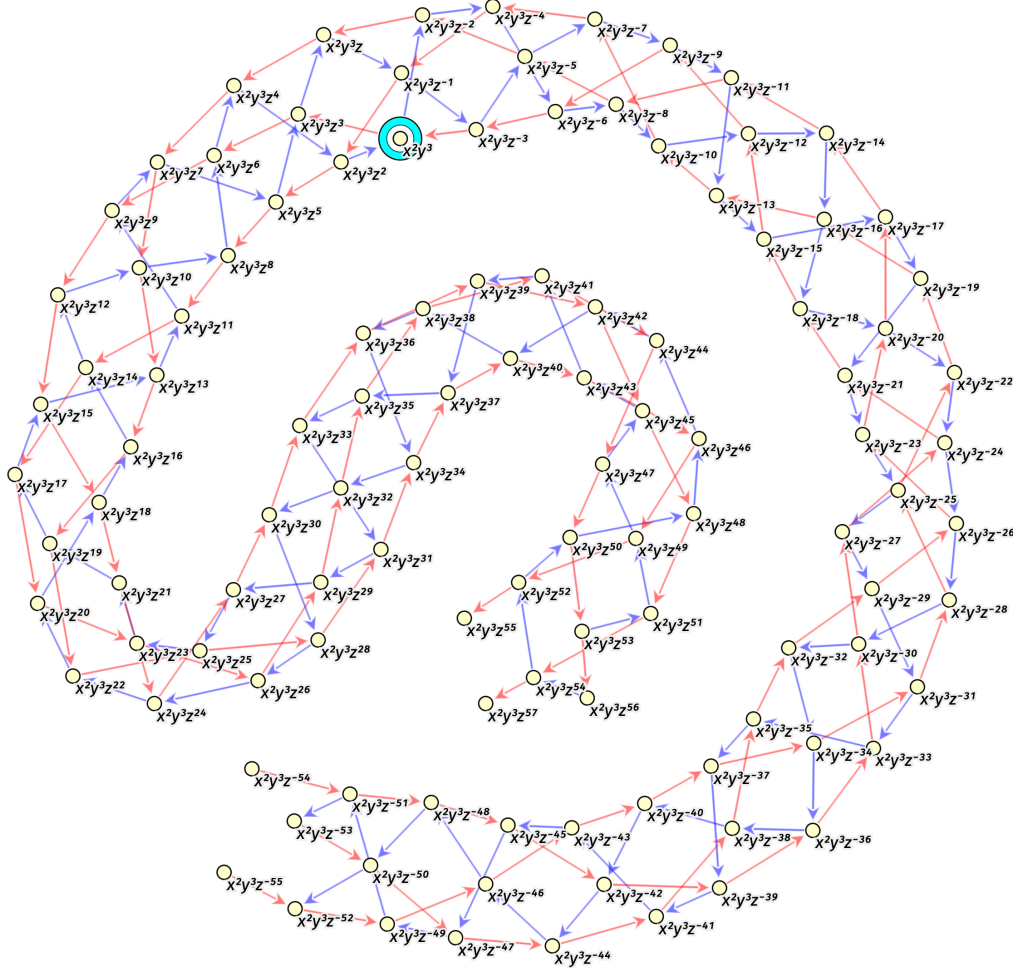


Рис. XV.VI: Диаграмма сопряжённости в группе Гейзенберга

15.3 Число концов диаграмм сопряжённости

Обозначим $e(sk_{[u]})$ как число концов графа $sk_{[u]}$. В силу предложения 15.1, число концов $e(sk_{[u]})$ зависит только от выбора класса $[u]$, но не от выбора порождающего множества X .

По теореме Хопфа (см. также лемму 14.1), число концов графа Кэли конечно порождённой группы лежит в множестве $e(G) \in \{0; 1; 2; \infty\}$. Вышеприведённая конструкция отображения ζ позволяет предположить, что для диаграммы сопряжённости $sk_{[u]}$ выполняется аналогичное условие. На данный момент неизвестно, выполняется ли это условие для всех классов сопряжённости $[u]$.

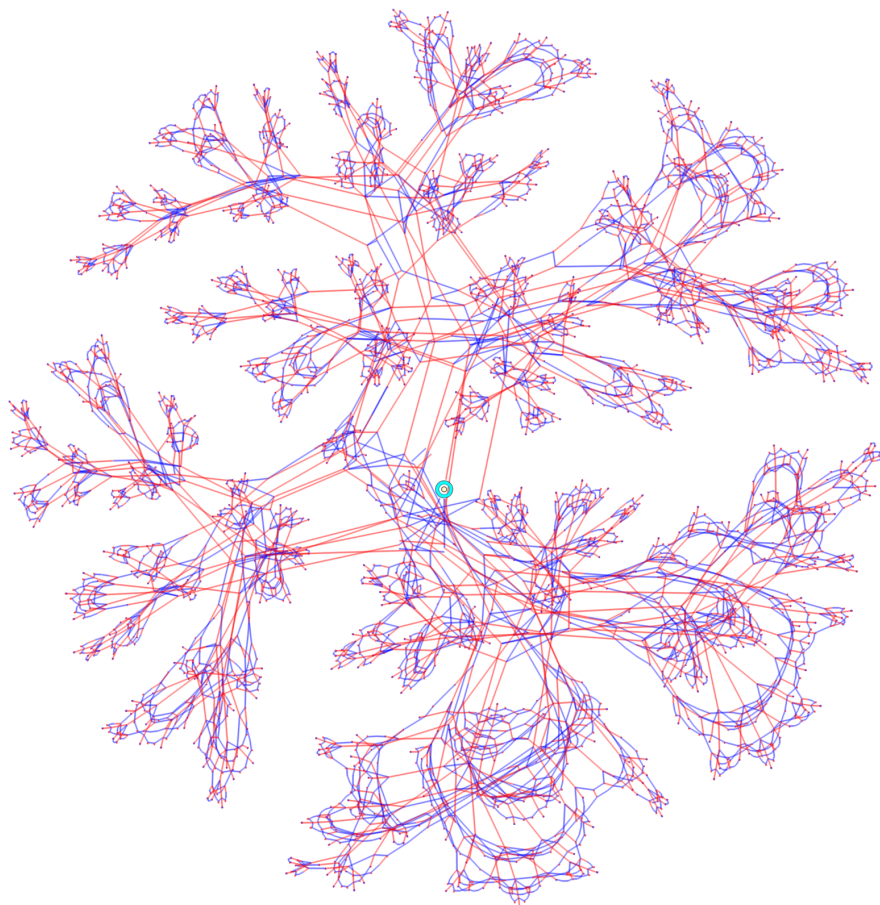


Рис. XV.VII: Шар радиуса 10 в диаграмме сопряжённости sk_{ab^2} группы Баумслага-Солитера $BS(2; 3)$.

Справедливо, однако, следующее.

Предложение 15.4. *Если G — нильпотентная группа ранга 2, то $e(sk_{[u]}) \in \{0; 1; 2\}$ для любого класса сопряжённости $[u]$.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 15.3. □

Другой частный результат можно получить, воспользовавшись теоремой Халина. Дадим сначала несколько определений.

Предложение 15.5. *Если в группе G один конец $e(G) = 1$, то для любого графа $sk_{[u]}$ имеем $e(sk_{[u]}) \in \{0; 1; 2\}$.*

Доказательство. • Пусть l — геодезическая прямая в графе Кэли. Тогда $\zeta(l)$ либо конечно (т.е. грубо эквивалентно точке), либо грубо эквивалентно $\mathbb{Z}$.

- Если имеются две эквивалентные прямые l_1 и l_2 , то в силу монотонности отображения ζ образы $\zeta(l_1)$ и $\zeta(l_2)$ грубо эквивалентны. Следовательно, если у G конец тонкий, то $e(sk_{[u]}) \in \{0; 1\}$. Иными словами, образ графа Кэли либо конечен (если класс $[u]$ конечен, например u — центральный элемент), либо имеет единственный тонкий конец.

- Если конец группы G единственный и толстый, то бесконечные прямые из халинской решётки либо переходят в точки, либо остаются прямыми. В первом случае во всех халинских решётках также образуются точки, и мы получаем в графе $sk_{[u]}$ один или два конца. Во втором случае каждая решётка отображается в гексагональную решётку, что приводит к единственному толстому концу в графе $sk_{[u]}$.

□

Упражнение 15.2. Докажите это для случая $e(G) = 2$.

Автору неизвестен удовлетворительный результат для случая $e(G) = \infty$.

Список литературы

- [Ale24] P. Alexandroff. «Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume». В: *Mathematische Annalen* 92 (1924), с. 294—301. URL: <http://eudml.org/doc/159072>.
- [Kön27] D. König. «Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche». В: *Acta Sci. Math. (Szeged)* 3 (1927), с. 121—130.
- [Fre31] Hans Freudenthal. «Über die Enden topologischer Räume und Gruppen». В: *Mathematische Zeitschrift* 33.1 (дек. 1931), с. 692—713. ISSN: 1432-1823. DOI: [10.1007/bf01174375](https://doi.org/10.1007/bf01174375). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01174375>.
- [Шва55] А.С. Шварц. «Объемный инвариант накрывающих». В: *Докл. АН СССР* 105 (1955), с. 32—34.
- [КТ59] Николаевич Колмогоров Андрей и Михайлович Тихомиров Владимир. « ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах». В: *Успехи математических наук* 14.2(86) (1959), с. 3—86. URL: <http://mi.mathnet.ru/rm7289>.
- [Hal64] R Halin. «Über unendliche Wege in Graphen». de. В: *Math. Ann.* 157.2 (апр. 1964), с. 125—137.
- [Mil68] J. Milnor. «A note on curvature and fundamental group». В: *Journal of Differential Geometry* 2 (1968), с. 1—7.
- [Sta68] John R Stallings. “On torsion-free groups with infinitely many ends”. English. In: *Annals of Mathematics*. 2nd ser. 88.2 (1968), pp. 312—334. ISSN: 0003-486X. DOI: [10.2307/1970577](https://doi.org/10.2307/1970577).
- [Sta71] John R Stallings. *Group theory and three-dimensional manifolds*. English. Yale University monographs. New Haven: Yale University Press, 1971. v, 65 pp. ISBN: 978-0-300-01397-9. Google Books: [D03poAEACAAJ](https://books.google.com/books?id=D03poAEACAAJ).
- [Dix77] Jacques Dixmier. *C*-Algebras*. Amsterdam ; New York: North-Holland, 1977, с. xiii, 492. ISBN: 978-0720422509.
- [Sul79] Dennis Sullivan. «Hyperbolic geometry and homeomorphisms». В: *Geometric Topology*. Под ред. James C. Cantrell. Academic Press, 1979, с. 543—555. ISBN: 978-0-12-158860-1. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-158860-1.50034-4>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780121588601500344>.
- [ЛШ80] Р. Линдон и П. Шупп. *Комбинаторная теория групп*. Мир, 1980.
- [Оль80] А. Ю. Ольшанский. «К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе». В: *Успехи математических наук* 35.4(214) (1980), с. 199—200. URL: <http://mi.mathnet.ru/rm3788>.
- [Dun82] J Dunwoody Martin. “Cutting up graphs”. English. In: *Combinatorica* 2.1 (1982), pp. 15—23. ISSN: 0209-9683. DOI: [10.1007/BF02579278](https://doi.org/10.1007/BF02579278).

- [Gro87] M. Gromov. «Hyperbolic Groups». В: *Essays in Group Theory*. Т. 8. Mathematical Sciences Research Institute Publications. New York: Springer, 1987, с. 75—263.
- [BK87] А. Л. Вольберг и С. В. Конягин. «О мерах с условием удвоения». В: *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 51.3 (1987), с. 666—675. URL: <http://mi.mathnet.ru/im1314>.
- [Pan89] P. Pansu. «Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un». French. В: *Ann. of Math. (2)* 129.1 (1989). English translation available at <https://www.math.kit.edu/iag2/~gabriel/seite/kmx/media/pansucc.pdf>, с. 1—60.
- [Ols92] A Y U Ol'shanskii. «Almost every group is hyperbolic». en. В: *Int. J. Algebra Comput.* 02.01 (март 1992), с. 1—17. DOI: [10.1142/S0218196792000025](https://doi.org/10.1142/S0218196792000025).
- [Gro93] M. Gromov. «Asymptotic invariants for infinite groups,» в: под ред. G. Niblo и M. Roller. Т. 2. *Geometric Group Theory*. Cambridge University Press, 1993, с. 1—295. URL: <https://www.ihes.fr/~gromov/wp-content/uploads/2018/08/492.pdf>.
- [Bow96] Brian H. Bowditch. *Continuously many quasi isometry classes of 2-generator groups*. 1996. URL: <https://homepages.warwick.ac.uk/~masgak/papers/bhb-manyquasi.pdf>.
- [BK97] Dmitri Burago и Bruce Kleiner. *Separated nets in Euclidean space and Jacobians of biLipschitz maps*. 1997. DOI: [10.48550/ARXIV.DG-GA/9703022](https://doi.org/10.48550/ARXIV.DG-GA/9703022). URL: <https://arxiv.org/abs/dg-ga/9703022>.
- [IS98] S. IVANOV и Paul Schupp. «On the hyperbolicity of small cancellation groups and one-relator groups». В: *Transactions of the American Mathematical Society* 350 (май 1998). DOI: [10.1090/S0002-9947-98-01818-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-98-01818-2).
- [BH99] Martin R. Bridson и André Haeffliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer Berlin Heidelberg, 1999. ISBN: 9783662124949. DOI: [10.1007/978-3-662-12494-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9>.
- [Sem99] Stephen Semmes. «Bilipschitz embeddings of metric spaces into euclidean spaces.» eng. В: *Publicacions Matemàtiques* 43.2 (1999), с. 571—653. URL: <http://eudml.org/doc/41378>.
- [АГЧ99] П. де ля Арп, Р. И. Григорчук и Т. Чекерини-Сильберстайн. «Аменабельность и парадоксальные разбиения для псевдогрупп и дискретных метрических пространств». В: *Proc. Steklov Inst. Math.* 224 (1999), с. 57—97. URL: <http://mi.mathnet.ru/tm692>.
- [Yu00] Guoliang Yu. «The coarse Baum–Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space». В: *Invent. Math.* 139 (2000), с. 201—240. DOI: [10.1007/s002229900032](https://doi.org/10.1007/s002229900032). URL: <https://doi.org/10.1007/s002229900032>.
- [Hei01] Juha Heinonen. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. Springer New York, 2001. ISBN: 9781461301318. DOI: [10.1007/978-1-4613-0131-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0131-8). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0131-8>.
- [Wri02] Nick Wright. « C_0 Coarse Geometry». Penn State University, 2002.
- [Бог02] О В Богопольский. *Введение в теорию групп*. ru. 2002.

- [GKL03] A. Gupta, R. Krauthgamer и J.R. Lee. «Bounded geometries, fractals, and low-distortion embeddings». В: *44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2003. Proceedings*. 2003. URL: https://figshare.com/articles/journal_contribution/6603941.
- [Roe03] John Roe. «Lectures on coarse geometry». В: 2003. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:116955387>.
- [Wri03] Nick Wright. « C_0 coarse geometry and scalar curvature». В: *Journal of Functional Analysis* 197.2 (2003), с. 469—488. ISSN: 0022-1236. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-1236\(02\)00025-3](https://doi.org/10.1016/S0022-1236(02)00025-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123602000253>.
- [Die04] Reinhard Diestel. «A short proof of Halin’s grid theorem». В: *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* 74 (2004), с. 237—242. DOI: [10.1007/BF02941538](https://doi.org/10.1007/BF02941538). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02941538>.
- [BB04] Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского*. 3-е изд. МЦНМО, 2004. URL: <ftp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/geomlob/glob.pdf>.
- [Кол04] Андрей Николаевич Колмогоров. *Элементы теории функций и функционального анализа*. гл. 2004.
- [Пра04] Виктор Васильевич Прасолов. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. Москва: МЦНМО, 2004, с. 352. ISBN: 5-94057-072-0. URL: <https://old.mccme.ru/free-books/prasolov/topol.pdf>.
- [TW05] Jeremy T. Tyson и Jang-Mei Wu. «Characterizations of Snowflake Metric Spaces». В: *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica* 30 (2005), с. 313—336. URL: <https://www.emis.de/journals/AASF/Vol30/tyson.pdf>.
- [BDM06] N Brodskiy, J Dydak и A Mitra. «Svarc-Milnor Lemma: a proof by definition». В: (2006). URL: <https://arxiv.org/abs/math/0603487v2>.
- [GP06] Rostislav Grigorchuk и Igor Pak. *Groups of Intermediate Growth: an Introduction for Beginners*. Submitted on 17 Jul 2006. 17 июля 2006. arXiv: [math/0607384](https://arxiv.org/abs/math/0607384) [[math.GR](https://arxiv.org/abs/math/0607384)]. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0607384>.
- [Smi06] J. Smith. «On asymptotic dimension of countable abelian groups». В: *Topology Appl.* 153.12 (2006), с. 2047—2054. DOI: [10.1016/j.topol.2005.07.006](https://doi.org/10.1016/j.topol.2005.07.006).
- [Now07] Piotr W. Nowak. «Coarsely embeddable metric spaces without Property A». В: *Journal of Functional Analysis* 252.1 (2007), с. 126—136. ISSN: 0022-1236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.06.014>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123607002698>.
- [BHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe и Alain Valette. *Kazhdan’s Property (T)*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, апр. 2008. ISBN: 9781107471504. DOI: [10.1017/cbo9780511542749](https://doi.org/10.1017/cbo9780511542749). eprint: <https://perso.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/KazhdanTotal.pdf>. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511542749>.
- [Fuk08] Tomohiro Fukaya. *Coarse dynamics and fixed point property*. 2008. eprint: [arXiv:0812.3475](https://arxiv.org/abs/0812.3475).

- [Geo08] Ross Geoghegan. *Topological Methods in Group Theory*. Springer New York, 2008. ISBN: 9780387746142. DOI: [10.1007/978-0-387-74614-2](https://doi.org/10.1007/978-0-387-74614-2). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-74614-2>.
- [NY08] Piotr Nowak и Guoliang Yu. «WHAT IS... Property A?» В: *Notices of the AMS* 55.4 (2008). URL: <https://www.ams.org/notices/200804/tx080400474p.pdf>.
- [Fuk09] Tomohiro Fukaya. «Coarse fixed point theorem». В: *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* 85.8 (окт. 2009). ISSN: 0386-2194. DOI: [10.3792/pjaa.85.105](https://doi.org/10.3792/pjaa.85.105). URL: <http://dx.doi.org/10.3792/pjaa.85.105>.
- [ST09] Yehuda Shalom и Terence Tao. «A finitary version of Gromov's polynomial growth theorem». В: (окт. 2009). arXiv: [0910.4148 \[math.GR\]](https://arxiv.org/abs/0910.4148).
- [Гаш09] С. Б. Гашков. «Графы-расширители и их применения в теории кодирования». В: *Матем. просв., сер. 3* 13 (2009), с. 104—126. URL: <http://mi.mathnet.ru/mp362>.
- [Dym10] Tullia Dymarz. «Bilipschitz equivalence is not equivalent to quasi-isometric equivalence for finitely generated groups». В: *Duke Mathematical Journal* 154.3 (сент. 2010). ISSN: 0012-7094. DOI: [10.1215/00127094-2010-044](https://doi.org/10.1215/00127094-2010-044). URL: <http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2010-044>.
- [Hai10a] Steven Hair. *A Degree-Theoretic Proof of a Coarse Fixed Point Principle*. 2010. arXiv: [1008.5131](https://arxiv.org/abs/1008.5131).
- [Hai10b] Steven Hair. «Homological methods in coarse geometry». Дис. ... док. Penn State University, 2010.
- [Най10] Марк Аронович Наймарк. *Нормированные кольца*. 3-е изд. Классика и современность. Математика. Физматлит, 2010. 684 с. ISBN: 978-5-9221-1273-4.
- [Ale11] Ian Alevy. *EXPANDER GRAPHS AND PROPERTY (T)*. <https://math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Alevy.pdf>. 2011.
- [BD11] G. Bell и A. Dranishnikov. «Asymptotic dimension in Bedlewo». В: *Topology Proc.* 38 (2011), с. 209—236. URL: <https://topology.nipissingu.ca/tp/reprints/v38/tp38013.pdf>.
- [Bun11] Jared R. Bunn. «Bounded Geometry and Property A for Nonmetrizable Coarse Spaces». Дис. ... док. University of Tennessee, 2011. URL: https://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/953.
- [Вер11] Миша Вербицкий. *Аменабельные группы*. Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия". 1 авг. 2011. URL: <http://verbit.ru/MATH/TALKS/LSH-2011/>.
- [NN12] Assaf Naor и Ofer Neiman. «Assouad's theorem with dimension independent of the snowflaking». В: *Revista Matemática Iberoamericana* 28.4 (окт. 2012), с. 1123—1142. ISSN: 2235-0616. DOI: [10.4171/rmi/706](https://doi.org/10.4171/rmi/706). URL: <http://dx.doi.org/10.4171/RMI/706>.
- [ВШ12] Н.К. Верещагин и А. Шень. *Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления*. 4-е. Москва: МЦНМО, 2012.

- [CP13] John Choi и Nicholas Pippenger. *Counting the Angels and Devils in Escher's Circle Limit IV*. 2013. arXiv: [1310.1357 \[math.CO\]](https://arxiv.org/abs/1310.1357). URL: <https://arxiv.org/abs/1310.1357>.
- [DS13] Guy David и Marie Snipes. «A Non-Probabilistic Proof of the Assouad Embedding Theorem with Bounds on the Dimension». В: *Analysis and Geometry in Metric Spaces* 1 (январь. 2013), с. 36—41. ISSN: 2299-3274. DOI: [10.2478/agms-2012-0003](https://doi.org/10.2478/agms-2012-0003). URL: <http://dx.doi.org/10.2478/agms-2012-0003>.
- [Sap13] Mark V. Sapid. *Non-commutative combinatorial algebra*. Springer, 2013. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=63c4132c2cf96da1cda4650b85c12b59ee3cf900>.
- [Bap14] Ravindra B Bapat. *Graphs and Matrices*. 2-е изд. Universitext. London, England: Springer, сентябрь. 2014.
- [Das14] Abhijit Dasgupta. «Brouwer's Theorem and Sierpinski's Theorem». В: *Set Theory*. New York, NY: Springer New York, 2014, с. 313—319.
- [LC14] Jes'us Antonio 'Alvarez L'opez и Alberto Candel. «Generic Coarse Geometry of Leaves». В: 2014. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118890285>.
- [Mun14] James Munkres. *Topology*. Second. Pearson Education Limited, 2014. ISBN: 978-1-292-02362-5. URL: <https://people.math.ethz.ch/~dkosanovic/24-FS/Munkres-Topology.pdf>.
- [Pil14] Thibault Pillon. *Følner type sets, Property A and coarse embeddings*. 2014. URL: <https://people.tamu.edu/~florent/fallschool/Pillon.pdf>.
- [Cap+15] Pierre-Emmanuel Caprace и др. «Amenable hyperbolic groups». В: *J. Eur. Math. Soc.* 17.11 (2015), с. 2903—2947. DOI: [10.4171/JEMS/575](https://doi.org/10.4171/JEMS/575). URL: <https://ems.press/journals/jems/articles/13438>.
- [MY15] Kotaro Mine и Atsushi Yamashita. «Metric Compactifications and Coarse Structures». В: *Canadian Journal of Mathematics* 67.5 (2015), с. 1091—1108. DOI: [10.4153/CJM-2015-029-8](https://doi.org/10.4153/CJM-2015-029-8). URL: <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2015-029-8>.
- [Ara+16] Pere Ara и др. «Amenability of coarse spaces and K-algebras». В: *Bulletin of Mathematical Sciences* 8.6 (2016). DOI: [10.1007/s13373-017-0109-6](https://doi.org/10.1007/s13373-017-0109-6).
- [Wei16] Thomas Weighill. «On spaces with connected Higson coronas». 209 (август. 2016), с. 301—315.
- [Die17] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. 5-е изд. Graduate texts in mathematics. Berlin, Germany: Springer, июнь 2017.
- [AC18] Jesus A Alvarez Lopez и Alberto Candel. *Generic coarse geometry of leaves*. 1-е изд. Lecture notes in mathematics. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, июль 2018.
- [Lö18] Clara Löh. «Geometric Group Theory: An Introduction». В: 2018. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125409875>.
- [Ю19] Гаюлян Ю. «Гипотеза Новикова». В: *УМН* 74.3(447) (2019), с. 167—184. DOI: [10.4213/rm9882](https://doi.org/10.4213/rm9882). URL: <http://mi.mathnet.ru/rm9882>.

- [Har20] Elisa Hartmann. «Coarse compactifications of proper metric spaces». B: (сент. 2020), с. 25. URL: https://www.researchgate.net/publication/344294401_Coarse_compactifications_of_proper_metric_spaces.
- [CD21] Tullio Ceccherini-Silberstein и Michele D’Adderio. «Gromov’s Theorem». B: *Topics in Groups and Geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2021, с. 227–239. DOI: [10.1007/978-3-030-88109-2_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-88109-2_12). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-88109-2_12.
- [Sak21] Hiroki Sako. «Property A for coarse spaces». B: *Topology and its Applications* 300 (2021), с. 107751. DOI: [10.1016/j.topol.2021.107751](https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107751). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107751>.
- [Win21] Jeroen Winkel. «Geometric property (T) for non-discrete spaces». B: *Journal of Functional Analysis* 281.8 (окт. 2021), с. 109148. ISSN: 0022-1236. DOI: [10.1016/j.jfa.2021.109148](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109148). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109148>.
- [Den+22] Jintao Deng и др. «Coarse embeddings at infinity and generalized expanders at infinity». B: (2022). arXiv:2206.11151 [math.OA]. DOI: [10.48550/arXiv.2206.11151](https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.11151). arXiv: [2206.11151](https://arxiv.org/abs/2206.11151) [math.OA]. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.11151>.
- [Har22] Elisa Hartmann. «A Pullback Diagram in the Coarse Category». B: *Applied Categorical Structures* 31.1 (дек. 2022). ISSN: 1572-9095. DOI: [10.1007/s10485-022-09707-8](https://doi.org/10.1007/s10485-022-09707-8). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10485-022-09707-8>.
- [Hol22] Derek Holt. *GAP package kbmag*. 2022. URL: <https://www.gap-system.org/Packages/kbmag.html>.
- [Ras22] Hussain S. Rashed. «A Coarse Approach to the Freudenthal Compactification and Ends of Groups». Doctoral Dissertation. University of Tennessee, 2022. URL: https://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/7138.
- [TW22] Romain Tessera и Jeroen Winkel. *Coarse fixed point properties*. 2022. eprint: [arXiv:2212.04900](https://arxiv.org/abs/2212.04900).
- [Aru23a] A. A. Arutyunov. «Differential Calculi in Group Algebras and Group Ends». en. B: *Mathematical Notes* 114.1–2 (авг. 2023), с. 133–146. DOI: [10.1134/S0001434623070155](https://doi.org/10.1134/S0001434623070155). URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0001434623070155>.
- [Aru23b] Andronick Arutyunov. «Derivations in group algebras and combinatorial invariants of groups». B: *European Journal of Mathematics* 9.2 (май 2023). DOI: [10.1007/s40879-023-00642-z](https://doi.org/10.1007/s40879-023-00642-z). URL: <https://doi.org/10.1007/s40879-023-00642-z>.
- [Ho23] Aaron Ho. *The Stone-Čech Compactification*. Retrieved from math.uchicago.edu/~may/REU2023/REUPapers/Ho,Aaron.pdf. Сент. 2023. URL: math.uchicago.edu/~may/REU2023/REUPapers/Ho,Aaron.pdf.
- [NY23] Piotr W. Nowak и Guoliang Yu. *Large Scale Geometry: Second Edition*. EMS Press, июль 2023. ISBN: 9783985475186. DOI: [10.4171/etb/26](https://doi.org/10.4171/etb/26). URL: <http://dx.doi.org/10.4171/ETB/26>.

- [SBJ23] Emil Saucan, Vladislav Barkanass и Jurgen Jost. «Coarse geometric kernels for networks embedding». В: *Information Geometry* 6.1 (2023), с. 157—169. ISSN: 2511-249X. DOI: [10.1007/s41884-022-00095-5](https://doi.org/10.1007/s41884-022-00095-5). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s41884-022-00095-5>.
- [Tse23] Panagiotis Tselekidis. «Asymptotic dimension of graphs of groups and one-relator groups». en. В: *Algebr. Geom. Topol.* 23.8 (нояб. 2023), с. 3587—3613. DOI: [10.2140/agt.2023.23.3587](https://doi.org/10.2140/agt.2023.23.3587). URL: <https://msp.org/agt/2023/23-8/p05.xhtml>.
- [TD23] Filip Turoboś и Oleksiy Dovgoshey. *How much can we extend the Assouad embedding theorem?* 2023. eprint: [arXiv:2304.11462](https://arxiv.org/abs/2304.11462). URL: <https://arxiv.org/abs/2304.11462v1>.
- [NWZ24] Graham Niblo, Nick Wright и Jiawen Zhang. *Naive Property A*. 2024. DOI: [10.48550/ARXIV.2405.06438](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2405.06438). URL: <https://arxiv.org/abs/2405.06438>.
- [Tou24] Nicholas Touikan. *An introduction to combinatorial and geometric group theory*. eng. 2024. URL: https://ntouikan.ext.unb.ca/MATH6022/IntroCGGT/html_output/frontmatter-1.html (дата обр. 2024).
- [AT24] Арутюнов Андроник и Казанцева Татьяна. «Короткое доказательство теоремы Халина и некоторые следствия из неё». В: *математическое просвещение*. 3-я сер. 33 (2024), с. 133—147. URL: <https://old.mccme.ru/free-books/matpros-33.html>.
- [Hul] M. Hull. *Hyperbolic groups*. URL: <https://homepages.math.uic.edu/~mbhull/hyperbolic%20lecture%20notes.pdf>.
- [Кля] А.А. Клячко. *записки спецкурса по теории групп*. URL: <http://halgebra.math.msu.su/staff/klyachko/sk.htm>.