

4. Наближені методи розв'язання систем нелінійних рівнянь

Постановка задачі

Розв'яжемо систему нелінійних рівнянь:

$$\overline{F}(\overline{x}) = \overline{0},$$

де $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\overline{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$.

Розглянемо основні наближені методи розв'язання систем нелінійних рівнянь:

- 1) метод простої ітерації;
- 2) метод Ньютона;
- 3) модифікований метод Ньютона.

Метод простої ітерації

Метод ґрунтується на зведенні системи нелінійних рівнянь до вигляду $\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$, де $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \overline{x} - C^{-1}\overline{F}(\overline{x})$, де C – невироджена матриця. Початкове наближення обирається довільне. Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{\Phi}(\overline{x}^k). \quad (24)$$

Достатня умова збіжності. Нехай відображення $\overline{\Phi}(\overline{x})$ визначено і неперервно диференційоване в деякій області G і є стискаючим з коефіцієнтом q ; $\overline{x}^0 \in G$; $\|\overline{\Phi}'(\overline{x}^0)\| \leq q$, $0 < q < 1$, де

$$\Phi'(\overline{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} -$$

матриця Якобі, тоді ітераційний процес (24) збігається, при

чому швидкість збіжності лінійна:

$$\|\bar{x}^k - \bar{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\bar{x}^1 - \bar{x}^0\|.$$

Умова припинення: $\|\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\| \leq \varepsilon$.

Приклад. Знайти розв'язок системи методом простої ітерації з точністю $\varepsilon < 0,2$.

$$\begin{cases} 2x - \sin \frac{x-y}{2} = 0; \\ 2y - \cos \frac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Зведемо систему до вигляду $\bar{x} = \bar{\Phi}(\bar{x})$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \\ y = \frac{1}{2} \cos \frac{x+y}{2}; \end{cases}$$

Оберемо початкове наближення: $x^0 = y^0 = 0$. Перевіримо збіжність в околі $(0;0)^T$:

$$A = \Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cos \frac{x-y}{2} & -\frac{1}{4} \cos \frac{x-y}{2} \\ -\frac{1}{4} \sin \frac{x+y}{2} & -\frac{1}{4} \sin \frac{x-y}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_0 = A(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\|A_0\|_1 = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{є збіжність.}$$

Ітерація 1.

$$x^1 = \frac{1}{2} \sin \frac{x^0 - y^0}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{0-0}{2} = 0;$$

$$y^1 = \frac{1}{2} \cos \frac{x^0 + y^0}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{0+0}{2} = 0,5.$$

Перевіримо умову припинення:

$$\|(0;0,5)^T - (0;0)^T\|_\infty = \|(0;0,5)^T\|_\infty = 0,5 > \varepsilon.$$

Ітерація 2:

$$x^2 = \frac{1}{2} \sin \frac{x^1 - y^1}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{0 - 0,5}{2} \approx -0,12;$$

$$y^2 = \frac{1}{2} \cos \frac{x^1 + y^1}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{0 + 0,5}{2} \approx 0,48.$$

Перевіримо умову припинення:

$$\|(-0,12; 0,48)^T - (0; 0,5)^T\| = \|(-0,12; -0,02)^T\|_\infty = 0,12 < \varepsilon$$

Отже, розв'язок системи з точністю 0,2: $(-0,12; 0,48)^T$.

Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації $C \equiv \tau \equiv \text{const}$, то отримаємо метод релаксації. Ітераційний процес має вигляд:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - \tau \bar{F}(\bar{x}^k).$$

Достатня умова збіжності. Якщо $\tau < \frac{2}{\max_{\bar{x}} \|F'(\bar{x})\|}$,

де $F'(\bar{x})$ – матриця Якобі, то ітераційний процес методу релаксації збігається.

Умова припинення: $\|\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\| \leq \varepsilon$.

Метод Ньютона

Розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона зводиться до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Алгоритм методу Ньютона. Обираємо початкове наближення \bar{x}^0 . На кожній ітерації обчислюється матриця Якобі:

$$A_k = \bar{F}'(\bar{x}_k); \quad \bar{F}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ітераційний процес має вигляд:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - \bar{z}^k,$$

де z_k знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A_k \bar{z}^k = \bar{F}(\bar{x}^k).$$

Умова припинення: $\|\bar{z}^k\| \leq \varepsilon$.

Для того, щоб метод Ньютона збігався, потрібно щоб виконувались умови таких теорем.

Теорема 1. (про збіжність методу Ньютона)

Нехай $\delta_a = \{\bar{x} : \|\bar{x} - \bar{x}^*\| < a\}$ та при деяких a, a_1, a_2 : $0 < a, 0 \leq a_1, a_2 < \infty$ виконуються умови:

1) $\|(\bar{F}'(\bar{x}))^{-1}\| \leq a_1, x \in \delta_a,$

2) $\|\bar{F}(\bar{x}_1) - \bar{F}(\bar{x}_2) - \bar{F}'(\bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\| \leq a_2 \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2,$ при чому $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \delta_a.$

3) $\bar{x}^0 \in \delta_b, b = \min(a, c^{-1}), c = a_1 a_2.$

Тоді ітераційний процес методу Ньютона для системи нелінійних рівнянь збігається та має місце оцінка точності:

$$\|\bar{x}^n - \bar{x}^*\| \leq c^{-1} (c \|\bar{x}^0 - \bar{x}^*\|)^{2^n}.$$

Теорема 2. (про збіжність методу Ньютона)

Якщо в області $G \subset R^n$ функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^2(G),$
 $|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}| \leq L,$ в точці $\bar{x}^0 \in G$ матриця $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$ – невідроджена,
 на, $\left\| \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n \right)^{-1} \right\| \leq M, |f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)| \leq \delta$ та виконується умова

$$h = M^2 L \delta n^2 \leq 1/2,$$

тоді система заданих нелінійних рівнянь має розв'язок в області $\|\bar{x} - \bar{x}^0\|_1 \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \delta$ та має місце оцінка:

$$\|\bar{x}^n - \bar{x}^*\|_1 \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h)^{2^{n-1}-1} \delta.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом Ньютона з

точністю 0, 2.

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0; \\ y - \frac{1}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Покладемо початкове наближення $x^0 = (0; 0)^T$.
Умови теореми 2 виконуються. Знайдемо матрицю Якобі:

$$A_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \cos \frac{x^k - y^k}{2} & \frac{1}{4} \cos \frac{x^k - y^k}{2} \\ \frac{1}{4} \sin \frac{x^k + y^k}{2} & 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{x^k + y^k}{2} \end{pmatrix};$$

Ітерація 1.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{F^0} = \begin{pmatrix} f_1(x^0, y^0) \\ f_2(x^0, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - 0,5 \sin \frac{x^0 - y^0}{2} \\ y^0 - 0,5 \cos \frac{x^0 + y^0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix};$$

Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A_0 \overline{z^0} = \overline{F^0}$:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$z_2^0 = -0,5; \quad z_1^0 = -0,25z_2^0/0,75 = -0,25(-0,5)/0,75 = 0,17;$$

$$\overline{x^1} = \overline{x^0} - \overline{z^0} = (0; 0)^T - (0,17; -0,5)^T = (-0,17; 0,5)^T.$$

Перевіримо умову припинення:

$$\|\overline{z^0}\|_\infty = \|(0,17; -0,5)^T\|_\infty = 0,5 > \varepsilon.$$

Умова не виконалась, переходимо до другої ітерації.

Ітерація 2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,04 & 1,04 \end{pmatrix};$$

$$\bar{F}^1 = \begin{pmatrix} -0,17 - 0,5 \sin \frac{-0,17 - 0,5}{2} \\ 0,5 - 0,5 \cos \frac{-0,17 + 0,5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,04 & 1,04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{z}^1 = \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}^2 = \bar{x}^1 - \bar{z}^1 = \begin{pmatrix} -0,17 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0,007 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,16 \\ 0,49 \end{pmatrix};$$

Перевіримо умову припинення:

$$\|\bar{z}^1\|_\infty = 0,007 \leq \varepsilon.$$

Отже, розв'язок системи з точністю 0,2: $(-0,16; 0,49)^T$.

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес модифікованого методу Ньютона має вигляд:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - A_0^{-1} \bar{F}(\bar{x}^k).$$

Обирається початкове наближення x^0 , для якого обчислюється матриця Якобі: $A_0 = \bar{F}'(\bar{x}_0)$.

Умова припинення методу: $\|\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\| \leq \varepsilon$.

Приклад. Знайти розв'язок системи модифікованим методом Ньютона з точністю 0,2.

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0; \\ y - \frac{1}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Покладемо початкове наближення $\bar{x}^0 = (0; 0)^T$.

Умови теореми 2 виконуються. Знайдемо матрицю Якобі:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \cos \frac{x^k - y^k}{2} & \frac{1}{4} \cos \frac{x^k - y^k}{2} \\ \frac{1}{4} \sin \frac{x^k + y^k}{2} & 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{x^k + y^k}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \cos \frac{0-0}{2} & \frac{1}{4} \cos \frac{0-0}{2} \\ \frac{1}{4} \sin \frac{0+0}{2} & 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{0+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1,33 & -0,33 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ітерація 1.

$$\bar{F}^0 = \begin{pmatrix} x^0 - 0,5 \sin \frac{x^0 - y^0}{2} \\ y^0 - 0,5 \cos \frac{x^0 + y^0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^0 - A_0^{-1} \bar{F}(\bar{x}^0) = (-0,17; 0,5)^T;$$

Перевіримо умову припинення:

$$\|\bar{x}^1 - \bar{x}^0\| = \|(-0,17; 0,5)^T - (0; 0)^T\|_{\infty} = 0,5 > \varepsilon.$$

Ітерація 2.

$$\bar{F}^1 = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}^2 = \bar{x}^1 - A_0^{-1} \bar{F}(\bar{x}^1) = (-0,17; 0,49)^T;$$

$$\|\bar{x}^2 - \bar{x}^1\| = \|(-0,17; 0,49)^T - (-0,17; 0,5)^T\|_{\infty} = 0,01 \leq \varepsilon.$$

Отже, розв'язок системи з точністю 0,2: $(-0,17; 0,49)^T$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Проробити дві ітерації методом простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$$

За початкове наближення обрати точку $x_0 = 1,25$, $y_0 = 0$.

2. Проробити дві ітерації методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1,2x = 0,4; \\ 0,8x^2 + 1,5y^2 = 1. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.