



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

LEVELUP

ریاضی و آمار ۳



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

سخته ۲۰ : سوالات لول آپ

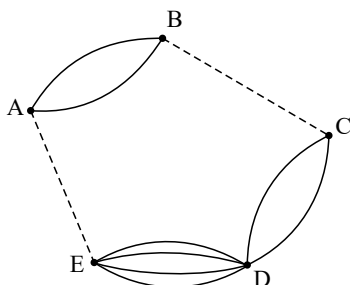
ریاضی و آمار ۳ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان ریاضی : عارف بهرام‌نیا

فصل اول: آمار و احتمال

شمارش

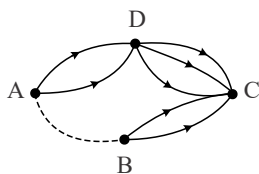
- ۱) تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به شهر E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد. (همه حالت‌های ممکن را بنویسید.)



- ۲) در یک دوره بازی ۱۰ تیم شرکت کرده‌اند. اگر بازی‌ها رفت و برگشت باشد و همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دور رفت چند بازی انجام شده است؟

- ۳) با ارقام "۷، ۴، ۸، ۵، ۳، ۱، ۲ و ۰" چند عدد ۵ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۴) با توجه به شکل اگر تعداد راه‌های مسافرت از شهر A به شهر C برابر ۱۴ باشد، از شهر A به شهر B چند راه داریم؟



- ۵) در یک دوره بازی ۱۵ تیم با هم به صورت رفت و برگشت بازی می‌کنند. اگر همه تیم‌ها با هم بازی کنند در پایان دوره چند بازی انجام خواهد شد؟

- ۶) می‌دانیم برای یک آزمون چهارگزینه‌ای با n سؤال، دانش‌آموزان می‌توانند ۳۱۲۵ حالت پاسخ‌نامه متمایز داشته باشند. اگر ۳ سؤال چهارگزینه‌ای دیگر به آزمون اضافه کنیم، چند پاسخ‌نامه متفاوت به شرط آنکه به همه سؤالات پاسخ داده شود، می‌تواند وجود داشته باشد؟



۷) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۵۰۰ وجود دارد که مجموع ارقام یکان و دهگان آنها ۸ باشد؟

۸) از ۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توان یک تیم ۴ نفره انتخاب کرد هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی از پایه یازدهم و دوازدهم حضور داشته باشند؟

ب) حداقل سه نفر از پایه دوازدهم باشند؟

۹) ۱۲ نقطه روی محیط یک دایره واقع است.

الف) چند ۴ ضلعی با این ۱۲ نقطه می‌توان تشکیل داد؟

ب) چند وتر روی این دایره می‌توان تشکیل داد؟

۱۰) می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به

چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

۱۱) مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است.

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه‌عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۱۲) یک دوره بازی فوتبال بین n تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند و در

پایان دوره ۹۰ بازی انجام شده باشد، تعداد تیم‌ها چندتا است؟

۱۳) می‌خواهیم از ۵ دانش‌آموز انسانی و ۴ دانش‌آموز تجربی یک تیم ۶ نفره انتخاب کنیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توان این تیم را

تشکیل داد هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی از رشته انسانی و تجربی حضور داشته باشند؟

ب) کاپیتان از رشته انسانی باشد؟

۱۴) یک مجموعه، ۱۰ زیر مجموعه سه‌عضوی دارد، این مجموعه چند زیر مجموعه یک‌عضوی دارد؟

۱۵) مجموعه $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$ مفروض است.

الف) چند زیرمجموعه سه‌عضوی متشکل از اعضای فرد A می‌توان نوشت؟

ب) چند زیرمجموعه سه‌عضوی شامل ۹ و فاقد ۴ می‌توان نوشت؟



۱۶) مجموعه $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ مفروض است.

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی بزرگتر از ۷۰۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ج) چند زیر مجموعه سه عضوی از مجموعه A می‌توان نوشت؟

۱۷) سینا، آرش، آریا، بهراد، رامان و بهروز می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. به چند طریق می‌توانند عکس بگیرند به‌طوری که در یک ردیف ایستاده و آرش و آریا هر دو هم‌زمان در ابتدا یا انتهای ردیف نباشند؟

۱۸) چند عدد ۵ رقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت که دقیقاً ۲ رقم آن فرد باشد؟

۱۹) به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، توزیع کرد به‌طوری که نفر اول ۱ اسباب‌بازی و نفر دوم ۲ اسباب‌بازی و نفر سوم ۳ اسباب‌بازی بگیرد؟

۲۰) یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به‌صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

احتمال

۲۱) اگر $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ فضای نمونه باشد و $A = \{1, 3, 5\}$ باشد، دو پیشامد B و C بنویسید که با A ناسازگار باشند ولی C و B خودشان ناسازگار نباشند.

۲۲) ۶ مهره قرمز و ۵ مهره آبی در یک ظرف موجود است. سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر سه یک رنگ باشند.

ب) حداقل دو تا قرمز باشد.

۲۳) از بین ۷ دانش‌آموز انسانی، ۵ دانش‌آموز تجربی و ۴ دانش‌آموز ریاضی می‌خواهیم یک تیم سه نفره انتخاب می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر سه انسانی باشند.

ب) هر سه از سه رشته متفاوت باشند.

ج) هر سه از یک پایه باشند.

۲۴) در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آن‌ها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آن‌ها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.



۲۵) ۷ پرچم مختلف را به هفت میلهٔ پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه میلهٔ پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول یعنی {۴، ۶، ۱} در مکان‌های زوج باشند.

۲۶) از یک جعبه که ۱۰ سیب در آن موجود است، سه سیب خارج می‌کنیم. احتمال اینکه هر سه سالم باشند، $\frac{۷}{۲۴}$ است. چند سیب سالم در جعبه وجود دارد؟

۲۷) انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامهٔ خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آن‌ها به‌طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه:
(الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.
(ب) نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشد.

۲۸) یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسهٔ شما به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

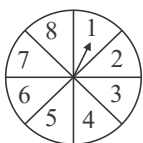
۲۹) از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکهدار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه:

(الف) هر سه سیب سالم باشند.
(ب) دو سیب سالم و یک سیب لکهدار باشد.
(پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکهدار بیشتر باشد.

۳۰) از بین ۹ عضو انجمن مدرسه در یک رأی‌گیری ۳ نفر رأی مثبت، ۲ نفر رأی منفی و ۴ نفر رأی ممتنع داده‌اند. سه نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:
(الف) هر سه رأی مثبت یا هر سه رأی ممتنع داده باشند.
(ب) دو نفر رأی مثبت و یکی رأی منفی داده باشد.

۳۱) از بین ۱۱ قوچ، ۷ تا نشانه‌دار شده‌است. سه قوچ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه:
(الف) هر سه نشانه‌دار باشند.
(ب) دو تا نشانه‌دار و یکی بدون نشانه باشد.

۳۲) ۶ پرچم روی شش میلهٔ پرچم با شماره‌های ۱ تا ۶ نصب شده‌است. اگر پرچم‌ها به تصادف کنار هم قرار بگیرند، مطلوب است احتمال اینکه میلهٔ پرچم‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشد.



۳۳) عقربهٔ دستگاه چرخندهٔ زیر روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد: (الف) عقربه روی یکی از اعداد اول بایستد.
(ب) عقربه روی عدد اول یا فرد بایستد.
(پ) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.



۳۴) از جعبه‌ای که دارای ۷ سیب سالم و ۶ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب سالم و یکی لکه‌دار باشد.

پ) تعداد سیب‌های سالم بیشتر باشد.

۳۵) در یک بازی به هر یک از ۱۱ نفر یکی از شماره‌های ۲ و ۳ و ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم، سپس دو تاس می‌اندازیم. مجموع دو تاس نفر برنده را مشخص می‌کند.

الف) چه شماره‌ای شانس برنده شدن بیشتری نسبت به بقیه دارد؟

ب) شانس برنده شدن کدام شماره از همه کمتر است؟

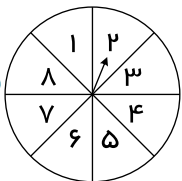
۳۶) ۵ نفر در یک تاکسی سوار شده‌اند. احتمال اینکه:

الف) هر ۵ نفر در ماه خرداد متولد شده باشند.

ب) هر ۵ نفر در یک ماه خاص از سال متولد شده باشند.

ج) تولد هیچ دوتای آن‌ها در یک ماه نباشد.

۳۷) یک صفحه عقربه‌دار به ۸ قسمت مساوی شکل تقسیم شده است. عقربه این صفحه دو بار چرخانده می‌شود و بار اول رقم یکان و بار دوم رقم دهگان یک عدد دورقمی را تشکیل می‌دهند. احتمال آنکه حاصل، عددی اول کوچکتر از ۶۰ را نشان دهد کدام است؟



۳۸) با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۹ یک عدد ۴ رقمی بدون ارقام تکراری به تصادف می‌نویسیم. احتمال آنکه رقم یکان و یکان هزار آن هر دو فرد و دو رقم دیگر آن هر دو زوج باشند، چقدر است؟

۳۹) در یک فروشگاه ۵ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۳ پیراهن زرد موجود است. شخصی به تصادف سه پیراهن انتخاب می‌کند. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) سه پیراهن یک رنگ باشد.

ب) هر سه پیراهن آبی نباشد.

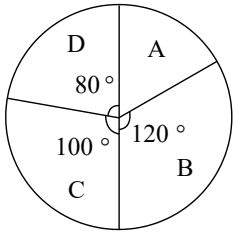
آمار

۴۰) برای داده‌های زیر نمودار میانگین و انحراف معیار را رسم کنید.

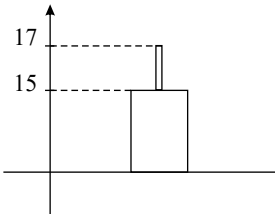
۳ و ۷ و ۴ و ۶ و ۵



۴۱ با توجه به نمودار زیر اگر کل افراد ۳۰ نفر باشند چه تعداد از افراد در گروه A هستند؟



۴۲ در گزارش‌های متغیرهای کیفی ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد چگونه می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟ (با ذکر مثال)



۴۳ با توجه به نمودار زیر اختلاف میانگین از انحراف معیار چقدر است؟

۴۴ جدول زیر را کامل کنید

شماره گام	نام گام	توضیح گام
۲		
	بیان مسئله	
۳		
		به تفسیر نتایج بدست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش آماری پیدا می‌کنیم
۴		

فصل دوم: الگوهای خطی

مدلسازی و دنباله

۴۵ در دنباله $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ چند جمله بزرگتر از $\frac{1}{300}$ وجود دارد؟



۴۶ برای محاسبه قبض آب (آبها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و براساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آبها محاسبه می‌شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف $\times$ میانگین مصرف = آبها

جدول ۱. محاسبه آبها براساس طبقات مصرف در استان تهران

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸,۴۹۶	$۲۵ \leq x < ۳۰$	۱,۴۱۹	$۰ \leq x < ۵$
۱۱,۵۸۰	$۳۰ \leq x < ۳۵$	۲,۱۲۳	$۵ \leq x < ۱۰$
۱۵,۴۴۴	$۳۵ \leq x < ۴۰$	۲,۸۲۷	$۱۰ \leq x < ۱۵$
۳۳,۴۶۲	$۴۰ \leq x < ۵۰$	۳,۷۰۳	$۱۵ \leq x < ۲۰$
۶۶,۹۲۴	$x \geq ۵۰$	۵,۴۰۰	$۲۰ \leq x < ۲۵$

الف) نمودار «طبقه مصرف-آبها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه، دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی در تهران در یک ماه ۲۰/۴۹ متر مکعب باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آبها را مشخص می‌کند؟

۴۷ شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & , \text{ زوج } n \\ 3a_n + 1 & , \text{ فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۴۸ در دنباله $a_n = \frac{(n+1)!}{2n+1}$ مجموع جملات چهارم و پنجم را بیابید.

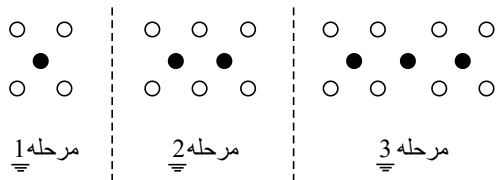
۴۹ در دنباله $a_n = \left[\frac{2n+3}{n+1} \right]$ مجموع ۲۰ جمله اول دنباله را بیابید. ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۵۰ جمله چهارم دنباله $a_n = \frac{n^2+n}{n-3}$ با جمله پنجم از همین دنباله برابر است؟

۵۱ اولین جمله مثبت در دنباله $a_n = \frac{n-20}{2n+1} + \frac{1}{100}$ ، کدام جمله است؟

۵۲ در دنباله $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ حاصل ضرب جملات a_1 تا a_{100} را بیابید.

۵۳ مجموع ۱۰ جمله اول دنباله $a_n = (-1)^{n+1} \times (11-n)^2$ را بیابید.



۵۴ با توجه به شکل زیر، در چه مرحله‌ای $\frac{11}{35}$ شکل، توپ‌های توپ است؟

۵۵ هرگاه $(\dots, x, 2584, 4181, y, \dots)$ قسمتی از دنباله فیبوناچی باشد، حاصل $x + y$ چقدر است؟

۵۶ در دنباله $1, 1, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \dots$ تفاضل جمله 20 ام از 21 ام را به دست آورید.

۵۷ دنباله $a_n = \frac{n+3}{5n-47}$ چند جمله منفی دارد؟

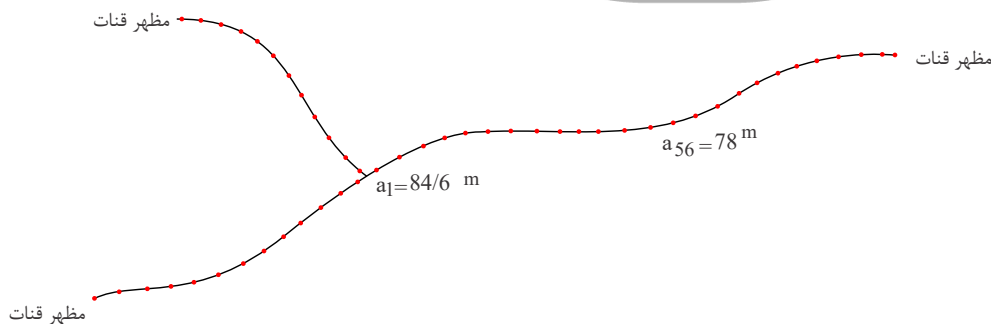
دنباله‌های حسابی

۵۸ اگر طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای 10 بوده و اضلاع آن از بزرگ به کوچک یک دنباله حسابی تشکیل دهند، اضلاع دیگر را بیابید.

۵۹ ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران - عمق مادرچاه قنات زارچ $84,6$ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله 56 ام) 78 متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله 120 ساتی‌متر در نظر گرفته شود: الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات چقدر است؟ ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) 250 هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات 71 کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه 350 هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه n ام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



۶۰ اگر از اختلاف مشترک یک دنباله حسابی 1 واحد کم و به جمله اول آن 3 واحد اضافه شود، مجموع 20 جمله اول آن چه تغییری می‌کند؟



۶۱ در یک دنباله حسابی که دارای ۱۰۰ جمله است، مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر برابر ۳۰۰ است، حاصل جمع تمام جملات چند است؟

۶۲ اگر در یک دنباله حسابی داشته باشیم $a_8 + a_{10} = 100$ ، مجموع ۱۴ جمله اول را بیابید.

۶۳ مقدار x را به دست آورید.

$$17 + 23 + 29 + \dots + x = 517$$

۶۴ معادله زیر را حل کنید و مقدار x را به دست آورید.

$$(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 31) = 400$$

۶۵ اگر مجموع n جمله اول دنباله‌ای حسابی به صورت $S_n = 3n^2 - 8n$ باشد، جمله عمومی دنباله را به دست آورید.

۶۶ اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = 3n^2 - 8n$ باشد، اختلاف مشترک این دنباله را بیابید.

۶۷ اگر بتوان بین $2m$ و ۱۵، شش واسطه حسابی با اختلاف مشترک ۵ درج کرد، m چه قدر است؟

۶۸ اگر جملات یک دنباله حسابی را در عددی ضرب کنیم، آیا دنباله حاصل نیز حسابی است؟

۶۹ m را چنان بیابید که واسطه حسابی بین ریشه‌های معادله $2x^2 - (2m - 4)x - 3 = 0$ باشد.

۷۰ چند عدد مضرب ۸ بین ۳۰۰ تا ۵۰۰ وجود دارد؟

۷۱ مجموع جملات دوم، چهارم و ششم در یک دنباله حسابی برابر ۹۹ است، حاصل $4a_7 - 25$ چند است؟

۷۲ بین ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 21 = 0$ یک واسطه حسابی درج کرده‌ایم. این واسطه را به دست آورید.

۷۳ اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = 7n^2 - 15n$ باشد، اختلاف مشترک و جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۷۴ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۷ را به دست آورید.

۷۵ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 2 + 3 + \dots + n$

ب) $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$



۷۶ در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 7n - 3$ واسطه حسابی بین دو جمله پنجاه و چهارم و هفتاد و سوم این دنباله را به دست آورید.

۷۷ در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 7n - 3$ جمله $(3n - 2)$ ام این دنباله را به دست آورید.

۷۸ مجموع چند جمله از دنباله حسابی $\dots, -6, -9, -12$ برابر جمله پنجم است؟

۷۹ در دنباله‌ای با جمله اول 32 و اختلاف مشترک -4 به ازای چه مقدار n مجموع جملات صفر است؟

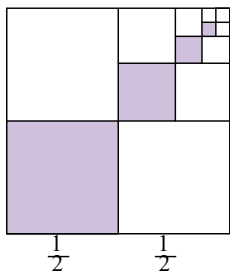
۸۰ شخصی در ماه اول A ریال پس‌انداز کرده است. در هر ماه به اندازه $\frac{1}{3}A$ بیشتر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند تا مقدار پس‌انداز ماهانه به دو برابر پس‌انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان مجموع پس‌انداز شخص 63000 تومان باشد، اولین پس‌انداز وی چقدر بوده است؟

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

دنباله هندسی

۸۱ در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر با 8 و مجموع جملات چهارم و ششم برابر با 64 است. جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۸۲ پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله با مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟
ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

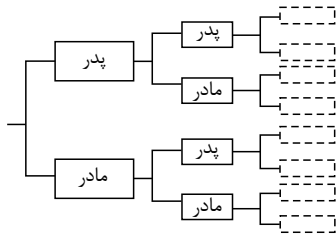
۸۳ مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$



۸۴ شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادربزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد:



الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

۸۵ یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

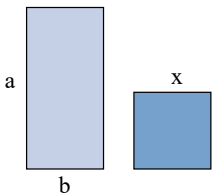
۸۶ مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم‌مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر

تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

الف) x و b و a

ب) a و x و b

پ) x و a و b



۸۷ میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $\frac{b}{a} = r^{n+1}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n + 2)$ جمله است.)

۸۸ سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله

شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به‌طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی درمانی کمتر از $10^6 \times 7$ سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

۸۹ با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله

هندسی باشند، آنگاه $a \times c = b^2$. (ب) را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.)

۹۰ نمودار تابع $f(x) = k^x \times 3^x$ از نقطه $(2, 36)$ می‌گذرد. اگر $g(x) = k^x$ باشد، $g(3)$ را به دست آورید. ($k > 0$ است.)



۹۱ نقطه برخورد دو تابع $f(x) = (\frac{1}{3})^{x-1}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^{x+1}$ را به دست آورید.

۹۲ نقطه تلاقی $f(x) = 3^{2x-1}$ با محور عرض‌ها را به دست آورید.

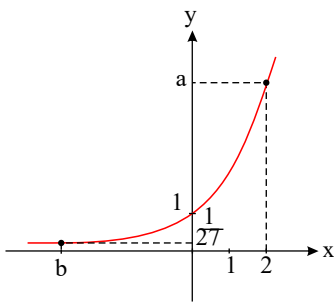
۹۳ نقطه تلاقی $f(x) = (\frac{1}{3})^{3x-1}$ با محور عرض‌ها را به دست آورید.

۹۴ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 5^x & x \geq 0 \\ (\frac{1}{3})^x & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید.

۹۵ نمودار $f(x) = (\frac{1}{5})^{x-2} + 1$ را رسم کنید.

۹۶ اگر $f(x) = (k+2)x + 5^x$ تابعی نمایی باشد، آنگاه مقدار $[(k+4)^x]$ را به ازای $x = 2$ به دست آورید.

۹۷ اگر نمودار مقابل، $f(x) = 3^x$ باشد، آنگاه a و b را بدست آورید.



۹۸ اگر $f(x) = (2+k)x^2 + 3^x$ تابعی نمایی باشد، آنگاه $f(x) = (k+4)^x$ به ازای $x = 3$ چه عرضی دارد؟

۹۹ نمودار $f(x) = -(0.25)^{x-3}$ را رسم کنید.

۱۰۰ اگر نمودار دو تابع $f(x) = 3^x + 2$ و $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول x قطع کنند، 3^x را بدست آورید.

۱۰۱ در تابع نمایی $f(x) = (k-2)x^2 + k^x$ مقدار $f(3)$ را بدست آورید.

۱۰۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ 3^x & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، $f(3) \cdot f(-2)$ را بدست آورید.

۱۰۳ اگر ریشه سوم و پنجم عددی مثبت با هم برابر باشند، جمع ریشه‌های هفتم و نهم آن عدد را بدست آورید.

۱۰۴ مقدار x را از معادله $\sqrt[3]{x} = x$ بدست آورید.



۱۰۵ حاصل $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱۰۶ اگر $\frac{x^{m-1}y^{2n-3}z^2}{x^2y^5} = \frac{xz^2}{y^4}$ باشد، حاصل $m + 2n$ را بدست آورید.

۱۰۷ اگر $\sqrt[5]{3}\sqrt{3}$ را به صورت 3^A بنویسیم، A را بدست آورید.

۱۰۸ حاصل $16^{\frac{3}{4}} \times (0.04)^{-\frac{3}{2}} \times 81^{\frac{1}{4}}$ را بدست آورید.

۱۰۹ ساده شده عبارت $\sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} - (\frac{1}{4})^{-0.25}$ را بدست آورید.

۱۱۰ حاصل $\frac{\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{27}}{\sqrt[4]{4}}$ چند برابر ریشه دوم مثبت عدد ۶ می‌باشد؟

۱۱۱ در یک دنباله هندسی $a_6 = 4a_8$ و $a_8 = 216$ است. جمله اول را به دست آورید.

۱۱۲ در یک دنباله هندسی نسبت مشترک $\sqrt{5}$ و حاصلضرب پنج جمله اول ۲۴۳ است. جمله سوم را به دست آورید.

۱۱۳ مجموع سه جمله اول یک دنباله هندسی ۶ برابر جمله دوم آن است. نسبت مشترک را به دست آورید.

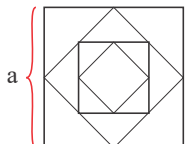
۱۱۴ جمله سوم یک دنباله هندسی $\frac{1}{9}$ و جمله پنجم آن $\frac{1}{81}$ است. جمله هفتم را به دست آورید.

۱۱۵ اگر حاصلضرب ۷ جمله متوالی یک دنباله هندسی $3^{14} \times 128$ باشد، جمله چهارم این دنباله را به دست آورید.

۱۱۶ در یک دنباله هندسی حاصلضرب شش جمله اول ۸۱ و نسبت مشترک $\sqrt[3]{3}$ است. جمله اول را به دست آورید.

۱۱۷ در یک مربع به ضلع ۴۸ وسطهای اضلاع مجاور را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدید ایجاد شود و این کار را ادامه می‌دهیم.

مساحت مربع مرحله دهم را به دست آورید. (مرحله اول را مربع به ضلع ۴۸ در نظر بگیرید)



۱۱۸ اگر $x^2, x^4, 64, \dots$ جملات متوالی دنباله هندسی باشند؛

الف) جمله پنجم را به دست آورید.

ب) مجموع ده جمله اول را به دست آورید.



۱۱۹ واسطه هندسی بین جملات ششم و دهم دنباله هندسی $a_n = 3 \times 2^{1-n}$ را به دست آورید.

۱۲۰ جملات چهارم و ششم یک دنباله هندسی ۵ و ۱۰ می باشند. جمله بیست و یکم را به دست آورید.

۱۲۱ اگر 16^{x+3y} و 8^{x-2y} و 4^{2x+y} جملات متوالی دنباله هندسی باشند، x و y چه رابطه ای با هم دارند؟

۱۲۲ مجموع ده جمله از دنباله $a_n = \frac{3}{4^n}$ را به دست آورید.

۱۲۳ اگر $2x + 1$, $x + 1$, $2x - 1$ جملات متوالی دنباله هندسی باشند، x را به دست آورید.

۱۲۴ بین دو عدد ۴ و ۱۲۸، چهار عدد را به گونه ای قرار می دهیم که این ۶ عدد با هم تشکیل دنباله هندسی بدهند. مجموع آن چهار عدد را به دست آورید.

۱۲۵ در یک دنباله هندسی، جمله بیست و هفتم معکوس جمله پنجم است. جمله شانزدهم را به دست آورید.

۱۲۶ جمله دهم یک دنباله هندسی ۶۴ برابر جمله هفتم آن است. حاصل $\frac{2a_{14} + a_3}{a_{12} - a_5}$ را به دست آورید.

۱۲۷ بین دو عدد ۶ و ۹۶ سه واسطه هندسی درج کنید که این ۵ عدد با هم تشکیل دنباله هندسی بدهند.

۱۲۸ در دنباله هندسی اگر $a_5 = a_4 \times a_3 \times a_2 \times a_1$ باشد، مقدار $a_4 \times a_6$ را به دست آورید.

۱۲۹ در یک دنباله هندسی مجموع دو جمله اول و چهارم برابر ۲۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ است. نسبت مشترک را به دست آورید.

۱۳۰ در دنباله هندسی $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2}a_n \\ a_1 = -2 \end{cases}$ مجموع ده جمله اول را به دست آورید.

۱۳۱ در یک دنباله هندسی افزایشی، مجموع جمله چهارم و پنجم ۳۰ و جمله سوم ۵ است. نسبت مشترک را به دست آورید.

۱۳۲ بین ۶ و ۱۹۲ چهار عدد را به گونه ای قرار داده ایم که این ۶ عدد با هم تشکیل دنباله هندسی دهند. آن جملات کدام اند؟

۱۳۳ جمله چهارم یک دنباله هندسی ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم آن ۶۰ است. نسبت مشترک را به دست آورید.



۱۳۴) مجموع جملات اول و دوم و سوم یک دنباله هندسی ۲۱ و مجموع جملات چهارم و پنجم و ششم آن ۱۶۸ است؛
الف) نسبت مشترک را به دست آورید.
ب) جمله چهارم را به دست آورید.

۱۳۵) حاصل $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + \dots + 6561$ را به دست آورید.

۱۳۶) حاصل ضرب ۵ عدد که با هم تشکیل دنباله هندسی می‌دهند ۲۴۳ است. یکی از این اعداد حتماً چه عددی است؟

۱۳۷) حاصل $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{320}$ را به دست آورید.

۱۳۸) در یک دنباله هندسی، جمله سوم $-\frac{1}{4}$ و جمله هشتم ۸ است. جمله دهم را به دست آورید.

۱۳۹) مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = 3 \times 2^{n+1}$ به دست می‌آید. جمله ششم را به دست آورید.

۱۴۰) حاصل $\frac{1+x+x^2+\dots+x^{11}}{1+x^3+x^6+x^9}$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست آورید.

۱۴۱) در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله آن $\frac{35}{2}$ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲۵ است. این سه عدد را پیدا کنید.

۱۴۲) در یک دنباله هندسی با جملات منفی، $a_1 + a_3 = -\frac{13}{18}$ و $a_4 \times a_7 = \frac{4}{81}$ است. جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۴۳) اگر $x, 14, 6$ به همین ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند و $4, 12, y$ به همین ترتیب سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند. برای آنکه اعداد x, y, z به همین ترتیب تشکیل دنباله هندسی بدهند، مقدار z را به دست آورید.

۱۴۴) در یک دنباله هندسی داریم $a_7 = a_3 \times \frac{81}{16}$ و جمله چهارم برابر $\frac{9}{4}$ است. جمله دوم این دنباله را به دست آورید.
(نسبت مشترک عددی مثبت است.)

۱۴۵) در دنباله هندسی $2, \dots, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}$ نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر را به دست آورید (تعداد جملات دنباله مورد نظر زوج است).

۱۴۶) در یک دنباله هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ است. مجموع این ۶ جمله را به دست آورید.



توان‌های گویا

۱۴۷ حاصل $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱۴۸ عدد $17^{\frac{1}{3}}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

تابع نمایی

۱۴۹ در تابع نمایی $f(x) = (3k - 6)^x$ ، متغیر k چه اعدادی نمی‌تواند باشد؟

۱۵۰ نمودار تابع با ضابطه $y = a\left(\frac{1}{3}\right)^x$ در نقطه‌ای به عرض ۴، محور y ها را قطع می‌کند. مقدار تابع در $x = -2$ ، را به دست آورید.





پاسخنامه تشریحی

۱ اگر از شهر B به شهر C راه x و از شهر A به شهر E ، y راه داشته باشیم، آنگاه:

تعداد مسیرها: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ یا $A \rightarrow E \rightarrow D$

$$\Rightarrow 20 = 2 \times x \times 2 + y \times 4$$

$$\Rightarrow 20 = 4x + 4y \xrightarrow{\div 4} \boxed{5 = x + y}$$

برای مقدار x و y حالت‌های زیر ممکن است:

$$x + y = 5 \xrightarrow{x, y \in \mathbb{N}} \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 4 \checkmark \\ x = 2 \rightarrow y = 3 \checkmark \\ x = 3 \rightarrow y = 2 \checkmark \\ x = 4 \rightarrow y = 1 \checkmark \\ x = 5 \rightarrow y = 0 \times \end{cases}$$

۲

چون همه تیم‌ها با هم بازی می‌کنند و ۱۰ تیم داریم پس هر تیم ۹ بازی انجام می‌دهد.

$$\text{تعداد کل بازی‌ها: } \frac{1}{2} \times 10 \times 9 = 45$$

$\downarrow$ تیم ۱۰
 $\downarrow$ بازی رفت

(I): توجه کنید که در شمارش عادی تعداد کل بازی‌ها، چون هر بازی بین دو تیم برگزار می‌شود پس هر بازی ۲ بار شمارش می‌شود، در نتیجه حاصل کل عبارت را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

۳ تذکر ۱: عددی زوج است که یکان آن زوج باشد.

تذکر ۲: رقم صفر در اولین رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند قرار بگیرد.

$$\overbrace{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 1}^{\text{صفر یکان باشد}} + \overbrace{6 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}^{\text{صفر یکان نباشد}}$$

$\downarrow$ صفر
 $\downarrow$ یکی کم و صفر اضافه می‌شود
 $\downarrow$ ۸ یا ۴ یا ۲

$$= 840 + 2160 = 3000$$

۴ اگر از A به B ، x راه داشته باشیم:

C به A (مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$) یا (مسیر $A \rightarrow D \rightarrow C$) = تعداد راه‌ها از A به C

$$14 = 2 \times 3 + x \times 2 \Rightarrow 14 = 6 + 2x \Rightarrow 14 - 6 = 2x$$

$$\Rightarrow 8 = 2x \rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

۵ چون هر ۱۵ تیم با هم بازی می‌کنند، پس هر تیم ۱۴ بازی رفت و ۱۴ بازی برگشت انجام می‌دهد (فقط با خودش بازی نمی‌کند)

توجه: در شمارش تعداد کل بازی‌ها چون هر بازی بین دو تیم برگزار می‌شود پس هر بازی دوبار شمرده می‌شود.

$$\text{تعداد بازی‌ها} = \frac{1}{2} \times 15 \times 14 \times 2 = 210$$

$\downarrow$ تیم داریم ۱۵
 $\downarrow$ بازی رفت و برگشت

۶

در ابتدا چون می‌توان به هر سؤال به ۵ حالت پاسخ داد (یکی از گزینه‌ها انتخاب شود یا بدون پاسخ (سفید) بماند). پس:

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_n = 5^n = 3125$$

$$\Rightarrow 5^n = 5^5 \Rightarrow n = 5$$

$$\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_8 = 4^8 = 2^{16}$$

سه سؤال اضافه شود و شرط پاسخ‌گویی به تمام سؤالات را داشته باشیم:

۷

با توجه به صورت سؤال، برای آنکه اعداد موردنظر بزرگتر از ۵۰ باشند در رقم صدگان یکی از ارقام ۵، ۶ و ۷ و ۸ و ۹ می‌تواند قرار بگیرد و در حالت کلی برای اینکه مجموع ارقام یکان و دهگان ۸ باشد مجموعه اعداد $\{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$ را خواهیم داشت، بنابراین داریم:



یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{8} \boxed{0} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{0} \boxed{8} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

کل حالتی که رقم یکان و دهگان صفر یا ۸ باشد ۱۰ حالت است، به همین ترتیب برای مجموعه ارقام $\{(1, 7), (2, 6), (3, 5)\}$ نیز همین روند را داریم:

کل حالتی که رقم یکان و دهگان ۱ یا ۷ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالتی که رقم یکان و دهگان ۲ یا ۶ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالتی که رقم یکان و دهگان ۳ یا ۵ باشد، ۱۰ حالت است.

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{4} \boxed{4} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

$$10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45$$

۸

الف) باید ۲ نفر دوازدهمی و ۲ نفر یازدهمی باشند:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \times 15 = 150$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 دو نفر پایه یازدهم دو نفر پایه دوازدهم

ب) حداقل ۳ نفر پایه دوازدهم یعنی ۳ نفر دوازدهمی و یک نفر یازدهمی یا هر چهار نفر دوازدهمی باشند:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 10 \times 6 + 5 = 65$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 سه تا دوازدهم یکی یازدهم هر چهارتا یازدهم

۹) الف) برای تشکیل یک ۴ ضلعی باید ۴ نقطه از ۱۲ نقطه را (بدون اهمیت ترتیب) انتخاب کنیم.

$$\text{تعداد چهارضلعی} = \binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

ب) برای تشکیل وتر، باید ۲ نقطه از ۱۲ نقطه را (بدون اهمیت ترتیب) انتخاب کنیم.

$$\text{تعداد وتر} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

۱۰

$$\text{الف)} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 10 = 200$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 سه نفر - یازدهم سه نفر - دوازدهم

$$\text{ب)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 انتخاب کاپیتان انتخاب ۵ نفر
 از بین فرد مشخص از پایه دوازدهم از ۱۰ نفر باقی مانده

$$\text{پ)} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{چهار نفر دوازدهم و دو نفر یازدهم}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{پنج نفر دوازدهم و یک نفر یازدهم}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{شش نفر دوازدهم}}$$

$$15 \times 10 + 6 \times 5 + 1 = 161$$

$$\text{ت)} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 15 = 150$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 دو نفر - یازدهم چهار نفر - دوازدهم

۱۱) در بین مجموعه A، ۴ رقم زوج داریم:

$$\text{الف)} \quad \begin{matrix} \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} & \text{هزارگان} & \text{دههزارگان} \\ (4) & (5) & (4) & (3) & (2) \end{matrix} \Rightarrow 480$$

زوج

اولین رقم سمت چپ ۸ یا ۹ باشد:

$$\text{ب)} \quad \begin{matrix} \text{یکان} & \text{دههزارگان} \\ (2) & (2) \end{matrix} \times 5 \times 4 \times 3 \times (2) = 240 \quad (\text{بدون تکرار ارقام})$$



(با تکرار ارقام) $2592 = (6) \times (6) \times (6) \times (6) \times (6) \times (2)$

پ) $C(6, 3) = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4}{\cancel{3} \times 3} = 20$

ت) $C(5, 2) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

چون تعداد بازی‌های رفت با بازی‌های برگشت برابر است پس ۴۵ بازی رفت داریم. چون هر بازی بین دو تیم برگزار می‌شود:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 90 = 10 \times 9 \Rightarrow n = 10$$

(الف) در این حالت باید سه نفر انسانی و سه نفر تجربی باشند

سه نفر انسانی و سه نفر تجربی = تعداد مساوی هر دو رشته

$$= \binom{4}{3} \times \binom{5}{2} = 4 \times 10 = 40$$

(ب) برای انتخاب کاپیتان از ۵ دانش‌آموز انسانی یکی را انتخاب می‌کنیم که تعداد آن $\binom{5}{1}$ است که همان ۵ است. پس داریم:

انتخاب کاپیتان $\uparrow$ $5 \times \binom{8}{7} = 5 \times \frac{\cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 5 \times 56 = 280$
 بعد از کنار گذاشتن کاپیتان $\downarrow$

(۱۴) اگر فرض کنیم مجموعه n عضو داشته باشد، تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی آن برابر $\binom{n}{3}$ است، پس:

$$\binom{n}{3} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 60$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow n = 5$$

پس مجموعه A ، ۵ عضو است و $\binom{5}{1} = 5$ زیر مجموعه تک عضوی دارد.

(الف) اعضای فرد A "۳ و ۷ و ۵ و ۹ و ۱" هستند که ۵ عضو است. پس تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از اعضای فرد A برابر $\binom{5}{3}$ است.

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}}{2} = 10$$

(ب)

$$\binom{4}{2} = \frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{2}} = 6$$

(۱۶)

الف) $\underbrace{\boxed{3} \times \boxed{4} \times \boxed{5} \times \boxed{6}}_{\text{از ۷ عضو A یک زوج حذف شده}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\text{یکی از دو زوج ۸, ۲}} = 720$
 دهمزارگان هزارگان صدگان دهگان یکان
 بعدی یکی یکی کم می‌شود

ب) $\underbrace{\boxed{3} \times \boxed{4} \times \boxed{5} \times \boxed{6}}_{\text{یکی یکی کم می‌شود}} \times \boxed{3} = 1080$
 دهمزارگان هزارگان صدگان دهگان یکان
 ده هزارگان باید ۸, ۷ یا ۹ باشد

۳ عضو از ۷ عضو مجموعه A انتخاب می‌کنیم:

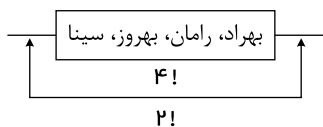
ج) $\binom{7}{3} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3}} = 35$

(۱۷)

ابتدا تعداد حالت‌های کل را به دست می‌آوریم. سپس حالت‌هایی که آرشی و آرشی هر دو هم‌زمان در ابتدا یا انتهای صف باشند را حساب می‌کنیم.

$$6! = 720 = \text{تعداد حالت‌های کل}$$

$$= \text{تعداد حالت‌های نامطلوب}$$



$$= 4! \times 2! = 48 \Rightarrow \text{اصل متمم} = 720 - 48 = 672$$

۱۸

ابتدا از بین ارقام فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ دو رقم انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

برای ارقام زوج دو حالت داریم:

۱ از بین ارقام ۲ و ۴ و ۶ و ۸ نیز ۳ رقم دیگر انتخاب شود:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

۵! = جایگشت ۵ رقم انتخاب شده

$$\Rightarrow 10 \times 4 \times 5! = 40 \times 5! = 40 \times 5 \times 4! = 200 \times 4!$$

۲ از بین ارقام ۲ و ۴ و ۶ و ۸ دو رقم زوج انتخاب شود و رقم آخر انتخابی صفر باشد:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

$$\text{جایگشت ۵ رقم انتخاب شده که یکی از آنها صفر است} = \frac{4}{\text{غیر صفر}} \times \frac{4}{\text{غیر صفر}} \times \frac{3}{\text{غیر صفر}} \times \frac{2}{\text{غیر صفر}} \times \frac{1}{\text{غیر صفر}} = 4 \times 4!$$

$$\Rightarrow 10 \times 6 \times 4 \times 4! = 240 \times 4!$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} 200 \times 4! + 240 \times 4! = 440 \times 4! = 10560$$

۱۹ برای بچه اول ۱ اسباب‌بازی از بین ۶ تا و برای بچه دوم ۲ تا از بین ۵ تا اسباب‌بازی مانده و برای بچه سوم ۳ تا از بین ۳ تا اسباب‌بازی مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{1} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{3} = 6 \times 10 \times 1 = 60$$

۲۰ هر تیم با ۹ تیم دیگر بازی می‌کند و رفت و برگشت دارند و هر بازی بین دو تیم برگزار می‌شود، داریم:

$$10 \times 9 \times 2 = 90$$

۲ → هر بازی ۲ تیم

$$\binom{10}{2} \times 2 = \frac{10 \times 9}{2} \times 2 = 90$$

راه دوم: برای هر بازی دو تیم انتخاب می‌شود و چون رفت و برگشت داریم در ۲ ضرب می‌کنیم،

۲۱ باید A و B اشتراک نداشته باشند و C و A نیز اشتراک نداشته باشند ولی B و C اشتراک داشته باشند. مانند:

$$\begin{cases} B = \{2, 4\} \\ C = \{6, 2\} \end{cases}$$

نمونه‌های دیگر نیز می‌توان نوشت. (باید عضوهای B و C زوج باشند ولی عضو مشترک نداشته باشند).

۲۲ الف

$$\binom{6}{3} + \binom{5}{2} = 20 + 10 = 30$$

هر سه قرمز هر سه آبی

ب

$$\binom{6}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{3} = \cancel{15 \times 5} + 20 = 95$$

دوتا قرمز یکی آبی هر سه قرمز

۲۳ الف

$$\text{هر سه انسانی} = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

ب

$$\text{هر سه از سه رشته متفاوت} = \binom{7}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 7 \times 5 \times 4 = 140$$

یکی انسانی یکی تجربی یکی ریاضی



(ج)

$$\text{هر سه از یک پایه} = \binom{7}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 35 + 10 + 4 = 49$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 هر سه انسانی هر سه تجربی هر سه ریاضی

۲۴

$$n(S) = \binom{20}{7} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 77520$$

نشان‌دار ۱۵ بدون نشانه ۱۵ بدون نشانه ۲۰ قوج

$$n(A) = \binom{5}{2} \times \binom{15}{5} + \binom{5}{1} \times \binom{15}{6} + \binom{5}{0} \times \binom{15}{7}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ۲ نشان‌دار ۵ بی‌نشان ۱ نشان‌دار ۶ بی‌نشان ۰ بی‌نشان ۷ بی‌نشان

$$= 10 \times 3003 + 5 \times 5005 + 1 \times 6435 = 61490$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{61490}{77520} = \frac{6149}{7752}$$

۲۵ A پیشامد اینکه میله پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول یعنی در مکان‌های زوج باشند:

$$n(S) = 7! \quad \{1, 4, 6\}$$

مکان ۱	مکان ۲	مکان ۳	مکان ۴	مکان ۵	مکان ۶	مکان ۷
$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{4}$	$\binom{5}{5}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{7}{7}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
مکان زوج	مکان زوج	مکان زوج	مکان زوج	مکان زوج	مکان زوج	مکان زوج

سه مکان زوج داریم و سه پرچم غیر اول (۱ و ۴ و ۶) پس ۳! جابه‌جایی دارند و ۴ پرچم دیگر نیز ۴! جابه‌جا می‌شوند، پس داریم:

$$\Rightarrow n(A) = 3! \times 4!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{35}$$

۲۶ فرض کنیم x سیب سالم باشد:

$$P(A) = \frac{7}{24} \Rightarrow \frac{\binom{x}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{24}$$

هر سه سالم

$$\Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{24} \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x-2) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{24} = 10 \times 3 \times 7 = 5 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x-2) = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow x = 7$$

۲۷

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

الف A پیشامد اینکه حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

$$n(A) = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{5}{3} \times \binom{5}{0}$$

دو نفر موافق هر سه موافق
 و یک نفر غیر موافق

$$= 10 \times 5 + 10 \times 1 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$



ب) پیشامد اینکه نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشد.

$$n(B) = \underbrace{\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}_{\text{یک موافق، یک مخالف و یک ممتنع}} \\ = 5 \times 3 \times 2 = 30 \Rightarrow P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

۲۸

$$n(S) = 11!$$

اگر ترتیب قرار گرفتن ۱۱ بازیکن را ۱ تا ۱۱ بنامیم، کاپیتان و دروازه‌بان در مکان‌های زیر می‌توانند قرار بگیرند تا در عکس حتماً ۴ نفر بین آن‌ها باشد.

$$(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10), (6, 11)$$

۶ جایگاه برای کاپیتان و دروازه‌بان داریم در ضمن جایابی بین کاپیتان و دروازه‌بان هم داریم

$$n(A) = \underbrace{6}_{\text{جایگاه کاپیتان و دروازه‌بان}} \times \underbrace{2!}_{\text{جایگاهی کاپیتان و دروازه‌بان}} \times \underbrace{9!}_{\text{جایگاهی ۹ نفر دیگر}} \\ \Rightarrow P(A) = \frac{6 \times 2! \times 9!}{11!} = \frac{6 \times 2 \times 9!}{11 \times 10 \times 9!} = \frac{6}{55}$$

راه دوم: برای محاسبه $h(A)$ می‌توان از بین ۹ نفر دیگر ۴ نفر انتخاب می‌کنیم و بین کاپیتان و دروازه‌بان قرار می‌دهیم این بسته با ۵ نفر دیگر جایگشت دارند پس:

$$n(A) = 6! \times \underbrace{4!}_{\text{جایگاهی ۴ نفر بین}} \times \underbrace{2!}_{\text{جای به جایی دروازه‌بان و کاپیتان}} \times \binom{9}{4} = 6! \times 4! \times 2! \times \frac{9!}{5! \times 4!} \\ = \frac{6 \times 5! \times 4! \times 2! \times 9!}{4! \times 5!} = 6 \times 2 \times 9!$$

۲۹

الف) A پیشامد اینکه هر سه سیب سالم باشد.

$$n(S) = \binom{17}{3} = \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1} = 680$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{هر سه سالم}} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{220}{680} = \frac{11}{34}$$

ب) B پیشامد اینکه دو سیب سالم و یک سیب لک‌دار باشد.

$$n(B) = \underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{دو سالم}} \times \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک لک‌دار}} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} \times 5 = 330 \Rightarrow P(B) = \frac{330}{680} = \frac{33}{68}$$

پ) C پیشامد اینکه تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لک‌دار بیشتر باشد.

$$n(C) = \binom{12}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{12}{3} \times \binom{5}{0} = \binom{12}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{12}{3} \times \binom{5}{0} \\ = 66 \times 5 + 220 = 550 \Rightarrow P(C) = \frac{550}{680} = \frac{55}{68}$$

الف) ۳۰

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{هر سه مثبت}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{هر سه ممتنع}} = 1 + 4 = 5$$



$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{84}$$

(ب)

$$n(B) = \binom{3}{2} \times \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6$$

$\downarrow$ دو نفر رای مثبت $\downarrow$ یک نفر رای منفی

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

(الف) ۳۱

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

$$n(A) = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

هر سه نشاندار

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{165} = \frac{7}{33}$$

(ب)

$$n(B) = \binom{7}{2} \times \binom{4}{1} = \frac{7 \times 6}{2} \times 4 = 84$$

$\downarrow$ دو تا نشاندار $\downarrow$ یکی بدون نشانه

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55}$$

(الف) ۳۲

$$n(S) = 6!$$

میل‌های غیر اول ۱, ۴, ۶ می‌باشد و مکان‌های زوج ۲, ۴, ۶ می‌باشد که ۳ جایگاهی دارند و اعداد اول ۵, ۳, ۲ نیز ۳ جایگاهی دارند پس:

$$n(A) = 3! \times 3!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 3!}{6!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{20}$$

(الف) ۳۳

$$S = \{1, 2, \dots, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

(الف)

$$A = \underbrace{\{2, 3, 5, 7\}}_{\text{اعداد اول}} \rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$B = \underbrace{\{1, 3, 5, 7, 2\}}_{\text{عدد اول یا فرد}} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{8}$$

(ب)

$$C = \underbrace{\{3, 6\}}_{\text{مضرب ۳}} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(الف) ۳۴

$$n(S) = \binom{13}{3} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$$



$$n(A) = \binom{7}{3} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 35 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{286}$$

(ب)

$$n(B) = \binom{7}{2} \times \binom{6}{1} = 21 \times 6 = 126$$

$\downarrow$ $\uparrow$
 دو تا سالم یکی لک‌دار

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{126}{286} = \frac{63}{143}$$

(پ)

$$n(C) = \binom{7}{3} + \binom{7}{2} \times \binom{6}{1} = 35 + \cancel{21 \times 6} = 161$$

$\downarrow$ $\uparrow$ $\downarrow$
 هر سه سالم دو تا سالم یکی لک‌دار

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{161}{286}$$

۳۵ الف) در پرتاب دو تاس کل حالات به صورت زیر است:

$$S = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

که ۳۶ حالت دارد. پس $n(S) = 36$

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

پس مجموع دو تاس اگر ۷ باشد، ۶ حالت دارد که از همه شانس بیشتری دارد. پس شانس برنده شدن شماره ۷ از همه بیشتر است.

(ب) ولی دو شماره ۲ و ۱۲ هر کدام فقط یک حالت دارند، پس کمترین شانس را دارند.

۳۶

الف)

$$n(S) = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^5$$

$$n(A) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ هر ۵ نفر در ماه خرداد متولد شده باشند}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

(ب) نفر اول ۱۲ انتخاب دارد اما نفرات بعدی باید همان ماه نفر اول باشند.

$$n(B) = \underbrace{12 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}_{\text{نفر اول}} = 12$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

(ج)

$$n(C) = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \text{ هیچ دو نفری یک ماه نباشد. (ماه همه متفاوت باشد)}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\cancel{12} \times 11 \times \cancel{10} \times \cancel{9} \times \cancel{8}}{\cancel{12} \times 12 \times 12 \times \cancel{12} \times \cancel{12}} = \frac{55}{144}$$

۳۷

تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = 8 \times 8 = 64$$

اعضای پیشامد مورد نظر برابر اعداد اول دو رقمی کوچکتر از ۶۰ است. بنابراین:



$$A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59\} \Rightarrow n(A) = 13 \Rightarrow P(A) = \frac{13}{64}$$

۳۸

ابتدا تعداد کل اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = \frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = 360$$

تعداد اعضای پیشامد مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$n(A) = \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{2}{\text{فرد}} \times \frac{1}{\text{فرد}} \times \frac{3}{\text{فرد}} = 24$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{24}{360} = \frac{1}{15}$$

۳۹

(الف)

کل پیراهن‌ها $5 + 4 + 3 = 12$

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 4 + 1 = 15$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 هر سه قرمز هر سه آبی هر سه زرد

$$\Rightarrow P(A) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

$$n(B) = \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

هر سه آبی

$$\Rightarrow \underbrace{P(B')}_{\text{هر سه آبی نباشد}} = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{55} = \frac{54}{55}$$

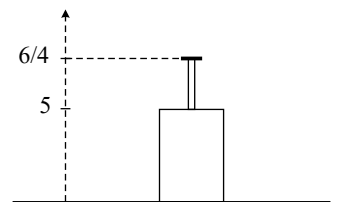
$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 4 + 7 + 3}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

میانگین

$$\sigma = \sqrt{\frac{(5-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2 + (7-5)^2 + (3-5)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{0 + 1 + 1 + 4 + 4}{5}} = \sqrt{2} \approx 1/4$$

۴۰



۴۱

با توجه به شکل چون کل دایره 360° است، پس زاویه گروه A برابر 60° است زیرا:

$$A \text{ زاویه گروه } A = 360^\circ - (120^\circ + 100^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$$

$$A \text{ تعداد افراد گروه } A = \frac{\text{تعداد افراد گروه } A}{\text{تعداد کل}} \times 360^\circ \Rightarrow 60^\circ = \frac{\text{تعداد افراد گروه } A}{\text{تعداد کل}} \times 360^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{\text{تعداد افراد گروه } A}{30} \Rightarrow \text{تعداد افراد گروه } A = \frac{30}{6} = 5$$

۴۲ برای مثال یک مدرسه سال قبل یک قبولی و امسال دو قبولی در دانشگاه می‌دهد و گزارش می‌کند که قبولی‌ها ۱۰۰ درصد افزایش یافته است ولی مدرسه دیگر از ۲۰ قبولی به ۳۰ قبولی می‌رسد و گزارش می‌کند قبولی ما ۵۰ درصد افزایش یافته است پس در یک نگاه بدون گزارش تعداد مدرسه اول بهتر است ولی با گزارش تعداد متوجه می‌شویم مدرسه دوم بهتر است.

۴۳

با توجه به نمودار $\bar{x}$ برابر ۱۵ و σ انحراف معیار برابر $15 - 17 = 2$ است، پس داریم:

$$15 - 2 = 13 = \text{اختلاف میانگین از انحراف معیار}$$



۴۴

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ پیدا می‌کنیم به نمونه‌گیری شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۱	بیان مسئله	ابتدا مسئله‌ای که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری بیان می‌کنیم.
۳	گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها	به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	به تفسیر نتایج بدست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش آماری پیدا می‌کنیم.
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از معیارها و نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را مشابه با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.

۴۵) ابتدا باید جمله عمومی دنباله را (رابطه تابعی دنباله) با استفاده از جملات به دست آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} n=1 \rightarrow a_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1!} \\ n=2 \rightarrow a_2 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \\ n=3 \rightarrow a_3 = \frac{a_3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3!} \end{array} \right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$$

حال جملاتی که از $\frac{1}{300}$ بزرگتر هستند را می‌یابیم.

$$a_n > \frac{1}{300} \Rightarrow \frac{1}{n!} > \frac{1}{300}$$

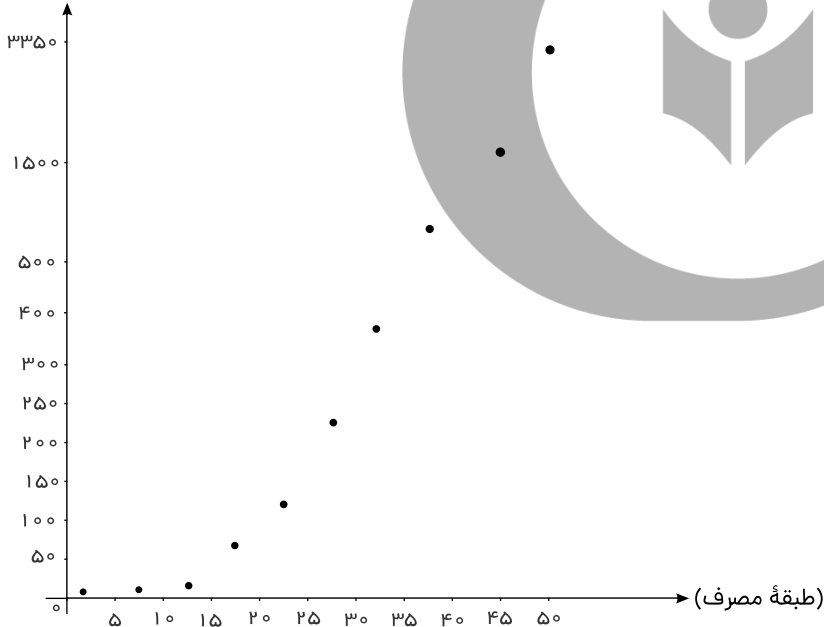
طرفین را وارون می‌کنیم علامت نامساوی تغییر می‌کند:

$$n! < 300 \xrightarrow[\delta! = 720]{\delta! = 120} n \leq 5 \Rightarrow n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۵ جمله بزرگتر از $\frac{1}{300}$ داریم:

۴۶) الف

آب‌بها (ریال)



برای به‌دست آوردن نمودار «طبقة مصرف-آب‌بها» در ابتدا آب‌بهای هر طبقه را به دست می‌آوریم.

۲۰ ≤ x < ۲۵	۱۵ ≤ x < ۲۰	۱۰ ≤ x < ۱۵	۵ ≤ x < ۱۰	۰ ≤ x < ۵	طبقات مصرف
۲۲,۵	۱۷,۵	۱۲,۵	۷,۵	۲,۵	میانگین طبقات
۵,۴۰۰	۳,۷۰۳	۲,۸۲۷	۲,۱۲۳	۱,۴۱۹	هزینه (ریال)
۵,۴۰۰ × ۲۲,۵ = ۱۲۱,۵۰۰	۳,۷۰۳ × ۱۷,۵ = ۶۴,۸۰۲	۲,۸۲۷ × ۱۲,۵ = ۳۵,۳۳۷	۲,۱۲۳ × ۷,۵ = ۱۵,۹۲۲	۱,۴۱۹ × ۲,۵ = ۳,۵۴۷	آب‌بها

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



$x \geq 50$	$40 \leq x < 50$	$35 \leq x < 40$	$30 \leq x < 35$	$25 \leq x < 30$	طبقات مصرف
50	45	37,5	32,5	27,5	میانگین طبقات
66,924	33,462	15,444	11,580	8,496	هزینه (ریال)
$66,924 \times 50$ $= 3,346,200$	$33,462 \times 45$ $= 1,505,790$	$15,444 \times 37,5$ $= 579,150$	$11,580 \times 32,5$ $= 376,350$	$8,496 \times 27,5$ $= 232,640$	آبها

$$D_f = \{x \in R \mid x \geq 0\}$$

دامنه تابع: طبقه مصرف

$$R_f = \{y \in R \mid y \geq 0\}$$

برد تابع: آبها

(الف) برای n های زوج از ضابطه بالایی و برای n های فرد از ضابطه پایینی داریم:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & , \text{ زوج } n \\ 3a_n + 1 & , \text{ فرد } n \end{cases}$$

$$a_1 = 11$$

$$\begin{aligned} n=1 & \rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=1} a_2 = 3a_1 + 1 \xrightarrow{a_1=11} a_2 = 3(11) + 1 = 34 \\ n=2 & \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2}a_2 \xrightarrow{a_2=34} a_3 = \frac{1}{2} \times (34) = 17 \\ n=3 & \rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=3} a_4 = 3a_3 + 1 \xrightarrow{a_3=17} a_4 = 3 \times (17) + 1 = 52 \\ n=4 & \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{2}a_4 \xrightarrow{a_4=52} a_5 = \frac{1}{2} \times (52) = 26 \\ n=5 & \rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=5} a_6 = 3a_5 + 1 \xrightarrow{a_5=26} a_6 = 3 \times (26) + 1 = 79 \end{aligned}$$

(ب)

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & , \text{ زوج } n \\ 3a_n + 1 & , \text{ فرد } n \end{cases}, \quad a_1 = 25$$

$$\begin{aligned} n=1 & \rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=1} a_2 = 3a_1 + 1 \xrightarrow{a_1=25} a_2 = 3(25) + 1 = 76 \\ n=2 & \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2}a_2 \xrightarrow{a_2=76} a_3 = \frac{1}{2} \times (76) = 38 \\ n=3 & \rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=3} a_4 = 3a_3 + 1 \xrightarrow{a_3=38} a_4 = 3 \times (38) + 1 = 115 \\ n=4 & \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{2}a_4 \xrightarrow{a_4=115} a_5 = \frac{1}{2} \times (115) = \frac{115}{2} \\ n=5 & \rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=5} a_6 = 3a_5 + 1 \xrightarrow{a_5=\frac{115}{2}} a_6 = 3 \times \left(\frac{115}{2}\right) + 1 = \frac{347}{2} \end{aligned}$$

(۴۸) در جمله عمومی به جای n اعداد ۴ و ۵ را قرار می‌دهیم تا جملات چهارم و پنجم را بیابیم.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)!}{2n+1} \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{(4+1)!}{2 \times (4) + 1} = \frac{5!}{9} = \frac{120}{9} = \frac{40}{3} \\ n=5 & \rightarrow a_6 = \frac{(5+1)!}{2 \times (5) + 1} = \frac{6!}{11} = \frac{720}{11} \end{aligned}$$

حال مجموع جملات چهارم و پنجم را به دست می‌آوریم:

$$a_5 + a_6 = \frac{40}{3} + \frac{720}{11} = \frac{440 + 2160}{33} = \frac{2600}{33}$$

(۴۹) ابتدا به کمک چند جمله اول دنباله، مقدار ۲۰ جمله از دنباله را می‌یابیم:

$$a_n = \left[\frac{2n+3}{n+1} \right] \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = \left[\frac{5}{2} \right] = 2 \\ n=2 \rightarrow a_2 = \left[\frac{7}{3} \right] = 2 \\ n=3 \rightarrow a_3 = \left[\frac{9}{4} \right] = 2 \end{cases}$$

بنابراین تمام جملات این دنباله همگی برابر ۲ هستند. بنابراین مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$20 \times 2 = 40$$

(۵۰) ابتدا جمله چهارم دنباله a_n را به دست می‌آوریم:

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n-3} \xrightarrow{n=4} a_4 = \frac{4^2 + 4}{4-3} = \frac{20}{1} = 20$$



جمله دیگری نیز برابر جمله چهارم، است بنابراین $\frac{n^2 + n}{n - 3}$ را برابر ۲۰ قرار می‌دهیم تا شماره آن جمله (n) را بیابیم.

$$\frac{n^2 + n}{n - 3} = 20 \Rightarrow n^2 + n = 20n - 60 \Rightarrow n^2 - 19n + 60 = 0$$

معادله را با تجزیه حل می‌کنیم.

$$(n - 15)(n - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n - 15 = 0 \Rightarrow n = 15 \\ n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4 \end{cases}$$

بنابراین جمله ۱۵ام نیز ۲۰ است. و با جمله چهارم برابر است.

(۵۱) اگر جمله‌ای مثبت باشد باید از صفر بزرگتر باشد، پس با رابطه $a_n > 0$ مسأله را حل می‌کنیم.

$$a_n > 0 \Rightarrow \frac{n - 20}{2n + 1} + \frac{1}{100} > 0 \Rightarrow \frac{n - 20}{2n + 1} > \frac{-1}{100}$$

طرفین را در $2n + 1$ ضرب می‌کنیم:

$$n - 20 > \frac{-2n - 1}{100}$$

حال طرفین را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$100n - 2000 > -2n - 1 \Rightarrow 102n > 1999 \Rightarrow n > \frac{1999}{102} \Rightarrow n > 19.59$$

چون n عدد طبیعی است، بنابراین اولین عدد طبیعی بزرگتر از ۱۹.۵۹ عدد ۲۰ است، پس اولین جمله مثبت دنباله، جمله بیستم است.

(۵۲) ابتدا به کمک چند جمله اول دنباله، الگوی جملات دنباله و صد جمله اول دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \begin{cases} n=1 \rightarrow -1 \times \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \\ n=2 \rightarrow 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\ n=3 \rightarrow -1 \times \frac{3}{4} = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

بنابراین جملات این دنباله به صورت $\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{-5}{6}, \dots$ هستند، حال حاصل ضرب ۱۰۰ جمله اول دنباله را می‌یابیم:

$$\frac{-1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{-3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} \times \dots \times \frac{-99}{100} \times \frac{100}{101}$$

صورت هر کسر با مخرج کسر قبلی ساده می‌شود و فقط صورت کسر اول و مخرج کسر آخر باقی می‌ماند، همچنین تعداد جملات منفی ۵۰ تا است (نیمی از جملات) که حاصل ضرب ۵۰ منفی در هم مثبت می‌شود:

$$\frac{-1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{-3}{4} \times \dots \times \frac{-99}{100} \times \frac{100}{101} = + \frac{1}{101}$$

(۵۳) با توجه به رابطه دنباله، جملات ۱ تا ۱۰ را می‌یابیم.

$$a_n = (-1)^{n+1} \times (11 - n)^2 \begin{cases} n=1 \rightarrow (-1)^2 \times (11 - 1)^2 = 10^2 \\ n=2 \rightarrow (-1)^3 \times (11 - 2)^2 = -9^2 \\ n=3 \rightarrow (-1)^4 \times (11 - 3)^2 = 8^2 \\ \vdots \\ n=10 \rightarrow (-1)^{11} \times (11 - 10)^2 = -1^2 \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جمله اول به صورت مقابل است.

$$S_{10} = \underbrace{10^2 - 9^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} + \underbrace{8^2 - 7^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} + \dots + \underbrace{2^2 - 1^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$S_{10} = (\cancel{10} - \cancel{9})(\cancel{10} - \cancel{9}) + (\cancel{8} - \cancel{7})(\cancel{8} - \cancel{7}) + \dots + (\cancel{2} - \cancel{1})(\cancel{2} - \cancel{1}) = 10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1$$

مجموع اعداد طبیعی کوچکتر مساوی n از رابطه زیر به دست می‌آید. (دنباله‌ای حسابی با $a_1 = 1$ و $d = 1$)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10(10+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

(۵۴) با توجه به شکل در هر مرحله یک توپ توپر اضافه می‌شود و همچنین تعداد کل توپ‌ها در هر مرحله ۳ واحد اضافه می‌شود.

مرحله اول	مرحله دوم	مرحله سوم
$\frac{1}{3 \times 1 + 2} = \frac{1}{5}$ توپ‌ها	$\frac{2}{3 \times 2 + 2} = \frac{2}{8}$ توپ‌ها	$\frac{3}{3 \times 3 + 2} = \frac{3}{11}$ توپ‌ها

بنابراین رابطه نسبت توپ‌های رنگ شده به کل توپ‌ها در مرحله nام به صورت $\frac{n}{3n+2}$ است.



حال با مساوی قرار دادن $\frac{n}{3n+2}$ و $\frac{11}{35}$ مرحله موردنظر را می‌یابیم.

$$\frac{n}{3n+2} = \frac{11}{35} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 35n = 33n + 22 \Rightarrow 2n = 22 \Rightarrow n = 11$$

مرحله یازدهم است.

۵۵

می‌دانیم در دنباله فیبوناچی هر جمله برابر مجموع دو جمله قبلی است، بنابراین داریم:

$$x, 2584, 4181, y \Rightarrow 4181 = 2584 + x \Rightarrow x = 4181 - 2584 = 1597 \Rightarrow y = 2584 + 4181 = 6765$$

حال حاصل $x + y$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow x + y = 1597 + 6765 = 8362$$

۵۶

این دنباله، یک دنباله دو ضابطه‌ای است، که برای جملات با شماره فرد یک رابطه و برای جملات با شماره زوج رابطه دیگری داریم:

در جملات فرد داریم: $a_1 = 1, a_3 = 2, a_5 = 3, \dots$

در جملات زوج داریم: $a_2 = 1, a_4 = \frac{1}{2}, a_6 = \frac{1}{3}, \dots$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ فرد} \\ \frac{2}{n}, & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{21} - a_{20} = \left(\frac{21+1}{2}\right) - \frac{2}{20} = 11 - \frac{1}{10} = 10\frac{9}{10}$$

۵۷

برای به دست آوردن تعداد جملات منفی $a_n < 0$ قرار می‌دهیم:

$$a_n < 0 \Rightarrow \frac{n+3}{5n-47} < 0$$

می‌دانیم چون n عدد طبیعی است، پس $n+3$ همواره مثبت است؛ بنابراین مخرج کسر باید منفی باشد تا حاصل منفی شود.

$$5n - 47 < 0 \Rightarrow 5n < 47 \Rightarrow n < \frac{47}{5} \Rightarrow n < 9\frac{2}{5}$$

اعداد طبیعی کوچکتر از $9\frac{2}{5}$ شامل $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ هستند. بنابراین ۹ جمله منفی دارد.

وتر مثلث بزرگترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس دنباله اضلاع آن برابر است با:

۵۸

$$10, 10-d, 10-2d$$

$$(10)^2 = (10-d)^2 + (10-2d)^2$$

$$100 = 100 - 20d + d^2 + 100 - 40d + 4d^2$$

$$\Rightarrow 5d^2 - 60d + 100 = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر پنج}} d^2 - \frac{60}{5}d + \frac{100}{5} = 0$$

$$d^2 - 12d + 20 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه اتحاد جمله مشترک}} (d-10)(d-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d=10 \\ d=2 \end{cases}$$

$$d=10 \Rightarrow 10, 10-10, 10-20 \Rightarrow 10, 0, -10$$

اگر $d=10$ باشد، اضلاع مثلث برابر با صفر و منفی می‌شود که در نتیجه ۱۰ غیر قابل قبول است.

$$d=2 \Rightarrow 10, 8, 6 \text{ اضلاع مثلث}$$

۵۹

اگر عمق مادرچاه را برابر با جمله اول (a_1) در نظر بگیریم، جمله عمومی دنباله حسابی برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

پس با استفاده از اطلاعات مسئله داریم:

$$a_1 = 84,6 \quad \text{و} \quad a_{56} = 78 \quad \text{و} \quad a_n = 120 \text{ cm} = 1,2 \text{ m}$$

$$a_{56} = 78 = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 78 = 84,6 + (56-1)d$$

$$78 - 84,6 = 55d \Rightarrow \frac{-6,6}{55} = \frac{55d}{55} \Rightarrow d = -0,12$$

الف) برای یافتن تعداد قنات‌های هر شاخه لازم است، تعداد کل چاه‌ها (n) را به دست آوریم.

$$a_n = 1,2 = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 1,2 = 84,6 + (n-1)(-0,12) \Rightarrow 1,2 = 84,6 - 0,12n + 0,12$$

$n = 696$ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله (قنات) است.

$$1,2 = 84,6 - 0,12n \Rightarrow 1,2 - 84,6 = -0,12n \Rightarrow \frac{-83,4}{-0,12} = \frac{-0,12n}{-0,12} \Rightarrow n = 696$$



(ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر برابر با مجموع جملات است. (S_n)

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{696}{2}(84,6 + 1,2) = 348(85,8) = 29858,4$$

مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات، چون ۳ مسیر یکسان داریم ضرر بدر ۳ می‌شود. متنها حواسمان باشد که هنگامی که ضرر بدر ۳ می‌کنیم چاه مادر را که در هر ۳ مسیر مشترک است ۳ بار حساب کرده‌ایم، پس باید ۲ مرتبه عمق آن کم شود تا به مقدار واقعی کل قنات برسیم:

$$84,6 \times 2 = 169,2$$

$$29858,4 \times 3 = 89575,2 - 169,2 = 89406$$

(ج) وقتی میانگین هزینه حفر یک متر چاه ۲۵۰ هزار تومان است، هزینه حفر چاه‌های قنات برابر است با:

$$89406 \times 250,000 = 22,351,500,000$$

متر تومان

(د) ارزش کل قنات برابر است با هزینه حفر چاه‌های قنات به‌علاوه هزینه حفر کانال قنات، پس داریم:

$$\text{ارزش کل قنات} = 71,000 \times 350,000 = 24,850,000,000$$

متر تومان

$$\text{ارزش کل قنات} = \text{هزینه حفر چاه‌ها} + \text{هزینه حفر کانال} = 24,850,000,000 + 22,351,500,000 = 47,201,500,000$$

۶۰ اگر دنباله اولیه با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d باشد و دنباله ثانویه با جمله اولیه a'_1 و اختلاف مشترک d' باشد، داریم:

$$d' = d - 1$$

$$a'_1 = a_1 + 3$$

مجموع ۲۰ جمله اول دنباله اولیه برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + (20-1)d) = 10(2a_1 + 19d) = 20a_1 + 190d$$

مجموع ۲۰ جمله اول دنباله ثانویه برابر است با:

$$S'_{20} = \frac{20}{2}(2a'_1 + (20-1)d') \Rightarrow S'_{20} = 10(2(a_1 + 3) + 19(d-1))$$

$$S'_{20} = 10(2a_1 + 6 + 19d - 19) = 10(2a_1 + 19d - 13) = 20a_1 + 190d - 130$$

پس اختلاف مجموع ۲۰ جمله اولیه از ۲۰ جمله ثانویه برابر است با:

$$S_{20} - S'_{20} = 20a_1 + 190d - (20a_1 + 190d - 130) = 20a_1 + 190d - 20a_1 + 190d + 130 = 130$$

۶۱ در دنباله حسابی a_n داریم:

$$m + l = k + p \Rightarrow a_m + a_l = a_k + a_p$$

طبق فرض داریم:

$$a_1 + a_7 + a_9 + a_{18} + a_{29} + a_{100} = 300$$

$$a_1 + a_{100} = a_7 + a_{99} = a_9 + a_{98} \Rightarrow 3(a_1 + a_{100}) = 300$$

$$\Rightarrow a_1 + a_{100} = \frac{300}{3} = 100$$

حاصل جمع تمام جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}(a_1 + a_{100}) = 50(a_1 + a_{100})$$

$$\xrightarrow{a_1 + a_{100} = 100} S_{100} = 50 \times (100) = 5000$$

۶۲ در دنباله حسابی a_n داریم:

$$m + l = k + p \Rightarrow a_m + a_l = a_k + a_p$$

$$a_{10} + a_5 = 100 \xrightarrow{10+5=14+1} a_{10} + a_5 = a_{14} + a_1 = 100$$

مجموع جملات دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}(a_1 + a_{14}) \xrightarrow{a_1 + a_{14} = 100} S_{14} = 7 \times (100) = 700$$

۶۳ در دنباله روبه‌رو، مجموع اعداد ثابت و x برابر است با: (اعداد یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند.)

$$a_1 = 17, \quad d = a_7 - a_1 \Rightarrow d = 23 - 17 = 6$$

مجموع جملات $S_n = 517$ است. بنابراین مقدار n که تعداد جملات است را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$



$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times (17) + (n-1)6) = \frac{n}{2}(34 + 6n - 6) = \frac{n}{2}(28 + 6n) = 517$$

$$\frac{n}{2} \times (14 + 3n) = 517 \Rightarrow 3n^2 + 14n - 517 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (14)^2 - 4(3)(-517) = 196 + 6204 = 6400 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 80$$

$$n_1 = \frac{-14 + 80}{6} = \frac{66}{6} = 11 \text{ ق ق}$$

$$n_2 = \frac{-14 - 80}{6} = \frac{-94}{6} \text{ غ ق ق}$$

تعداد جملات است و باید عدد طبیعی باشد، پس $-\frac{94}{6}$ غیر قابل قبول بوده و ۱۱ قابل قبول است.
تعداد جملات به عبارتی شماره آخرین جمله بوده است، یعنی:

$$a_{11} = x, a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{11} = 17 + (11-1)6$$

$$a_{11} = 17 + 60 = 77 \Rightarrow x = 77$$

(۶۴) هر پراتز را یک جمله از یک دنباله حسابی می‌توان در نظر گرفت که جمله اول آن $a_1 = x + 1$ است. اختلاف مشترک برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = x + 4 - x - 1 = 3$$

تعداد کل جملات برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)d \Rightarrow \frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{30 + 31 - 3 - 1}{3} + 1 \Rightarrow n = \frac{30}{3} + 1 = 11$$

مجموع جملات دنباله با مشخصات به دست آمده برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(x+1) + (n-1)3)$$

مجموع ۱۱ جمله اول دنباله برابر ۴۰۰ شده است، با جایگذاری در معادله، مقدار x به دست می‌آید.

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2(x+1) + (11-1)3) = 400 \Rightarrow \frac{11}{2}(2x + 2 + 30) = 400$$

$$\xrightarrow{\times 2} 11(2x + 32) = 800 \Rightarrow 22x + 352 = 800 \Rightarrow 22x = 800 - 352$$

$$22x = 448 \Rightarrow x = \frac{448}{22} = \frac{224}{11}$$

(۶۵) برای به دست آوردن a_n اگر مجموع n جمله اول را از $(n-1)$ جمله اول کم کنیم، حاصل جمله n ام خواهد بود؛ یعنی:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$S_n = 3n^2 - 8n$$

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 - 8(n-1) = 3(n^2 - 2n + 1) - 8n + 8$$

$$= 3n^2 - 6n + 3 - 8n + 8 = 3n^2 - 14n + 11$$

پس جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 8n - (3n^2 - 14n + 11)$$

$$= 3n^2 - 8n - 3n^2 + 14n - 11 = 6n - 11$$

$$\Rightarrow a_n = 6n - 11$$

(۶۶) برای به دست آوردن اختلاف مشترک باید دو جمله از دنباله را داشته باشیم. جملات اول و دوم را بدست می‌آوریم:

اگر در $S_n = 3n^2 - 8n$ به جای n مقدار ۱ را قرار دهیم، S_1 برابر با جمله اول خواهد بود، پس داریم:

$$S_1 = a_1 \Rightarrow S_1 = 3 \times (1)^2 - 8 \times (1) = 3 - 8 = -5$$

حال با جایگذاری $n = 2$ در S_n ، S_2 را بدست می‌آوریم.

$$S_n = 3n^2 - 8n \xrightarrow{n=2} S_2 = 3 \times (2)^2 - 8 \times (2) = 12 - 16 = -4$$

می‌دانیم $a_2 = S_2 - S_1$ بنابراین داریم:

$$a_2 = S_2 - S_1 = -4 - (-5) = 1$$

برای به دست آوردن اختلاف مشترک به کمک a_1 و a_2 داریم:

$$d = a_2 - a_1 = 1 - (-5) = 6$$

(۶۷) اگر n واسطه حسابی بین دو جمله a و b درج کنیم، اختلاف مشترک دنباله برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{n+1} \Rightarrow d = \frac{15-2m}{7}$$

دو حالت می‌توان در نظر گرفت. حالت اول ($15 > 2m$):

با طرفین وسطین عبارت فوق داریم:



$$\Rightarrow 35 = 15 - 2m \Rightarrow 35 - 15 = -2m$$

$$20 = -2m \Rightarrow m = \frac{20}{-2} \Rightarrow \boxed{m = -10}$$

پس جملات حالت اول به صورت زیر خواهند بود:

$$\Rightarrow -20, \underbrace{-15, -10, -5, 0, 5, 10, 15}_{6 \text{ واسطه}}$$

حالت دوم ($15 < 2m$):

$$d = \frac{2m - 15}{2} = 5 \Rightarrow 2m - 15 = 35 \Rightarrow \boxed{m = 25}$$

پس جملات حالت دوم به صورت زیر خواهند بود:

$$\Rightarrow 15, 20, \underbrace{25, 30, 35, 40, 45, 50}_{6 \text{ واسطه}}$$

۶۸ دنباله حسابی a_n با جمله اول a_1 و قدرنسبت d را در نظر می‌گیریم.

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

اگر جملات دنباله را در عدد دلخواه k ضرب کنیم، در دنباله جدید b_n داریم:

$$b_1, b_2, b_3, \dots \Rightarrow ka_1, ka_2, ka_3, \dots$$

با گسترده کردن جملات داریم:

$$ka_1, k(a_1 + d), k(a_1 + 2d), \dots$$

دنباله‌ای حسابی است که اختلاف هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی باشد.

$$b_2 - b_1 = ka_2 - ka_1 = k(a_1 + d) - ka_1 = \cancel{ka_1} + kd - \cancel{ka_1} = kd$$

$$b_3 - b_2 = ka_3 - ka_2 = k(a_1 + 2d) - k(a_1 + d) = \cancel{ka_1} + 2kd - \cancel{ka_1} - kd = 2kd - kd = kd$$

پس دنباله حاصل نیز حسابی است.

۶۹ معادله را تقسیم بر ضریب $2x^2$ می‌کنیم:

$$2x^2 - (2m - 4)x - 3 = 0$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{2(m-2)x}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - (m-2)x - \frac{3}{2} = 0$$

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله فوق باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 = 2m$$

در معادله درجه ۲ با ریشه‌های x_1 و x_2 از طریق اتحاد جمله مشترک داریم:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

اگر معادله صورت سوال را مساوی عبارت روبه‌رو قرار دهیم مجموع ریشه‌ها برابر می‌شود با قرینه ضریب x :

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$(x_1 + x_2) = (m - 2) \Rightarrow x_1 + x_2 = m - 2$$

و چون m واسطه حسابی ریشه‌ها است می‌توان نوشت:

$$m - 2 = 2m \Rightarrow 2m - m = -2 \Rightarrow m = -2$$

۷۰ دنباله جملات مضرب ۸ را بین ۳۰۰ تا ۵۰۰ می‌نویسیم:

$$\frac{300}{8} = 37,5 \Rightarrow 38 \times 8 = 304 \text{ اولین جمله}$$

$$\frac{500}{8} = 62,5 \Rightarrow 62 \times 8 = 496 \text{ آخرین جمله}$$

$$304, \dots, 496$$

جمله اول برابر ۳۰۴ و اختلاف مشترک آن ۸ است.

پس جمله عمومی برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1=304, d=8} a_n = 304 + (n-1)8$$

$$a_n = 304 + 8n - 8 = 8n + 296$$

اکنون با به دست آوردن شماره جمله ۴۹۶ از طریق جمله عمومی، تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = 8n + 296 = 496 \Rightarrow 8n + 296 = 496$$



$$\Rightarrow 8n = 496 - 296 \Rightarrow 8n = 200 \Rightarrow n = \frac{200}{8} = 25$$

۷۱ با گسترده کردن جملات دنباله بر حسب a_1 و d داریم:

$$a_7 + a_8 + a_9 = 99$$

$$\Rightarrow a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 99$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 9d = 99 \Rightarrow 3(a_1 + 3d) = 99 \Rightarrow a_1 + 3d = 33$$

عبارت $a_1 + 3d$ برابر است با a_4 .

$$\Rightarrow a_4 = 33$$

بنابراین حاصل عبارت $25 - 4a_4$ برابر:

$$4a_4 - 25 \xrightarrow{a_4=33} 4 \times (33) - 25 = 132 - 25 = 107$$

۷۲ ابتدا معادله روبه‌رو را حل می‌کنیم:

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

برای حل معادله درجه دوم می‌توان از روش تجزیه (اتحاد جمله مشترک) استفاده کرد.

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x^2 + (-7 + 3)x + (3)(-7) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 7) \times (x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 7 \end{cases}$$

اگر عدد m ، واسطه حسابی بین -3 و 7 باشد، داریم:

$$7 + (-3) = 2m$$

$$\Rightarrow 7 - 3 = 2m \Rightarrow 4 = 2m \Rightarrow m = 2$$

۷۳ در دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ مجموع n جمله اول برابر است با:

$$a_1 = S_1 = 7 \times 1^2 - 15 \times 1 = -8$$

$$d = a_2 - a_1, \quad a_2 = S_2 - S_1 = 7 \times 2^2 - 15 \times 2 - (-8) = 6$$

$$\Rightarrow d = 6 - (-8) = 14$$

۷۴ باید دنباله اعداد سه رقمی مضرب ۷ را بنویسیم:

$$\underbrace{105, 112, \dots, 994}_7$$

اکنون $a_1 = 105$ و $d = 7$ ، کافیت با نوشتن جمله عمومی n را به دست آوریم.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 105 + (n - 1)7 = 105 + 7n - 7 = 7n + 98$$

$$a_n = 994 \Rightarrow 7n + 98 = 994 \Rightarrow 7n = 994 - 98 = 896$$

$$7n = 896 \Rightarrow n = \frac{896}{7} = 128$$

اکنون با داشتن n می‌توان مجموع جملات را به دست آورد:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_{128} = \frac{128}{2}(2 \times 105 + (128 - 1)7)$$

$$\Rightarrow S_{128} = 64(210 + 127(7)) = 64(\cancel{210} + \cancel{1099}) = 70336$$

۷۵ الف) دنباله $1, 2, 3, \dots$ دنباله‌ای حسابی با $a_1 = 1$ و $d = 1$ است، بنابراین مجموع جملات داده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n, \quad n = n, \quad a_1 = 1, \quad d = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times 1 + (n - 1)1) = \frac{n}{2}(2 + (n - 1)) = \frac{n}{2}(n + 1) = \frac{n^2 + n}{2}$$

ب) دنباله $1, 3, 5, \dots$ دنباله‌ای حسابی با $a_1 = 1$ و $d = 2$ است. بنابراین:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$$

$$n = n, \quad a_1 = 1, \quad d = 2$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(1) + (n - 1)2) = \frac{n}{2}(2 + (n - 1)2) = \frac{n}{2}(\cancel{2} + 2n - \cancel{2}) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

۷۶ در ابتدا باید جمله پنجاه و چهارم و هفتاد و سوم را با استفاده از جمله عمومی به دست آوریم:

$$a_n = 7n - 3$$

$$\xrightarrow{n=54} a_{54} = 7 \times (54) - 3 = 378 - 3 = 375$$

$$\xrightarrow{n=73} a_{73} = 7 \times (73) - 3 = 511 - 3 = 508$$

اگر واسطه حسابی بین دو جمله x را بنامیم، داریم:



$$x = \frac{a_{\Delta\phi} + a_{\gamma\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{375 + 508}{2} = \frac{883}{2} = 441,5$$

واسطه حسابی بین جملات پنجاه و چهارم و هفتاد و سوم برابر است با: ۴۴۱٫۵.

جمله عمومی دنباله ذکر شده برابر است با: ۷۷

$$a_n = 7n - 3$$

در نتیجه برای به دست آوردن جمله $(3n - 2)$ ام کفایت به جای n عبارت $(3n - 2)$ را قرار دهیم:

$$a_n = 7n - 3 \xrightarrow{\text{جمله } 3n-2} a_{(3n-2)} = 7(3n - 2) - 3$$

$$\Rightarrow a_{(3n-2)} = 21n - 14 - 3 \Rightarrow a_{(3n-2)} = 21n - 17$$

پس جمله $(3n - 2)$ ام برابر است با: $(21n - 17)$.

۷۸

ابتدا مقدار d و سپس جمله عمومی و دنباله را به دست می‌آوریم.

$$-12, -9, -6, \dots$$

جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_1 = -12, \quad d = a_2 - a_1 = -9 - (-12) = 3$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = -12 + (n - 1)3 = -12 + 3n - 3 = 3n - 15$$

مجموع جملات دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(2(-12) + (n - 1)3) = \frac{n}{2}(-24 + 3n - 3) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(3n - 27)$$

مجموع جملات را برابر با جمله پنجم قرار می‌دهیم:

$$a_5 = 3 \times (5) - 15 = 15 - 15 = 0$$

$$S_n = a_5 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n - 27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} = 0 \Rightarrow n = 0 & \text{غرضی} \\ 3n - 27 = 0 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9 & \text{فوق} \end{cases}$$

۷۹

مجموع جملات دنباله حسابی با مشخصات ذکر شده برابر است با:

$$a_1 = 32, \quad d = -4$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(32) + (n - 1)(-4))$$

$$S_n = \frac{n}{2}(64 - 4n + 4) = \frac{n}{2}(68 - 4n) = n(34 - 2n)$$

کفایت مجموع جملات را برابر صفر قرار داده و مقدار n را به دست آوریم:

$$S_n = n(34 - 2n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ 34 - 2n = 0 \Rightarrow 34 = 2n \Rightarrow n = 17 \end{cases}$$

$n = 0$ غیر قابل قبول است، چرا که دنباله را به ازای مقادیر طبیعی بررسی می‌کنیم، پس تنها پاسخ قابل قبول $n = 17$ است.

۸۰

$$a_1 = A, a_2 = A + \frac{1}{20}A, a_3 = a_2 + \frac{1}{20}A, \dots$$

چون در دنباله فوق مقدار ثابت $\frac{1}{20}A$ به هر جمله قبل اضافه می‌شود، پس دنباله مذکور دنباله حسابی با اختلاف مشترک $\frac{1}{20}A$ است.

$$a_1 = A, \quad d = \frac{1}{20}A, \quad a_n = 2A, \quad S_n = 63000$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 2A = A + (n - 1)\frac{1}{20}A$$

$$\Rightarrow A = (n - 1)\frac{1}{20}A \Rightarrow n - 1 = 20 \Rightarrow n = 21$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2} \Rightarrow 63000 = \frac{21[2A + 20 \times \frac{1}{20}A]}{2} \Rightarrow 126000 = 21 \times 3Q \Rightarrow A = 2000$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r^2 = 8 \\ a_1 r^3 + a_1 r^5 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + r^2) = 8 \\ a_1 r^3(1 + r^2) = 64 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^3(1 + r^2)}{a_1(1 + r^2)} = \frac{64}{8}$$

$$r^3 = 8 \Rightarrow r^3 = 2^3 \Rightarrow r = 2$$

$$a_1 + a_1 r^2 = 8 \xrightarrow{r=2} a_1 + a_1 \times 2^2 = 8 \Rightarrow a_1 + 4a_1 = 8 \Rightarrow 5a_1 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{5}$$

۸۱



$$\begin{aligned} \text{مساحت رنگ شده در مرحله اول: } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} \\ \text{مساحت رنگ شده در مرحله دوم: } \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} &= \frac{1}{16} \\ \text{مساحت رنگ شده در مرحله سوم: } \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} &= \frac{1}{64} \\ \text{دنباله مساحت مربع‌های رنگی: } \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots \end{aligned}$$

دنباله هندسی است زیرا:

$$r = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \quad r = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

(ب) می‌دانیم $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ است. پس:

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad r = \frac{1}{4}$$

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} (1 - (\frac{1}{4})^n)$$

(پ) در رابطه قسمت (ب)، به جای $n = 6$ می‌گذاریم:

$$S_6 = \frac{1}{3} (1 - (\frac{1}{4})^6) = \frac{1}{3} (1 - \frac{1}{4096}) = \frac{1}{3} \times \frac{4095}{4096} = 0,333225$$

(۸۳) با استفاده از فرمول مجموع جملات هندسی خواهیم داشت:

(الف) جملات مجموع داده شده، دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و نسبت مشترک $r = 4$ است.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ r &= 4 \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 4096 = 1 \times 4^{n-1} \Rightarrow 4^{12} = (4^2)^{n-1} = 2^{2n-2} \\ a_n \text{ جمله } n \text{ ام} \quad a_n &= 4096 \\ \Rightarrow 12 &= 2n - 2 \Rightarrow 2n = 14 \Rightarrow n = 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_7 = 1 \times \frac{1-4^7}{1-4} = \frac{-1}{3} (1-16384) = 5461$$

(ب)

$$r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{5}, r = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{640}, a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{640} = \frac{1}{5} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{128} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1} \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{1}{5} \times \frac{(1 - (\frac{1}{2})^8)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{5} (1 - \frac{1}{256}) = \frac{2}{5} \times \frac{255}{256} = \frac{51}{128}$$

(۸۴)

(الف) ابتدا نیاکان او ۲ نفر بوده است و در هر مرحله ۲ برابر می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & , & 4 & , & 8 & , & \dots & 2^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \text{نسل اول} & & \text{نسل دوم} & & \text{نسل سوم} & & & \text{نسل } n \text{ ام} \end{array}$$

$$2^{10} = 1024$$

پس نیاکان او در نسل دهم:

(ب) برای به‌دست آوردن مجموع نیاکان او از رابطه مجموع جملات دنباله هندسی استفاده می‌کنیم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_{10} = 2 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = -2(-1023) = 2046 \text{ نفر}$$

(۸۵) طبق داده‌های سؤال ۸۵ درصد وزن آن از بین می‌رود، سپس ۱۵ درصد آن باقی می‌ماند.



$$15000 \xrightarrow{\text{پس از ۱ دقیقه}} \frac{85}{100} \times 15000 \xrightarrow{\text{دقیقه ۲}} \frac{85}{100} \times \left(\frac{85}{100} \times 15000 \right) \rightarrow \dots$$

پس از n دقیقه:

$$\left(\frac{85}{100} \right)^n \times 15000$$

بنابراین وزن باقی مانده شهاب سنگ پس از ۵ دقیقه:

$$\left(\frac{85}{100} \right)^5 \times 15000 = \left(\frac{17}{20} \right)^5 \times 15000$$

۸۶ می‌دانیم مساحت مستطیل، طول $\times$ عرض یا همان ab است و مساحت مربع x^2 (ضلع) یا همان x^2 می‌باشد و چون طبق گفته سؤال مساحت مستطیل و مربع با هم برابرند، پس:

$$x^2 = ab$$

بنابراین گزینه (ب) صحیح است زیرا اگر a, b, x سه جمله از دنباله هندسی باشند، N واسطه هندسی است و خواهیم داشت:

$$x^2 = ab$$

۸۷ اگر بین دو عدد a و b تعداد n عدد قرار دهیم با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$a, \underbrace{\dots}_{\text{عدد } n}, b$$

می‌دانیم b ، جمله $n+2$ ام این دنباله خواهد بود:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow[\substack{a_1=a \\ a_n=b}]{\text{جمله } n+2 \text{ ام دنباله است}} b = ar^{(n+2)-1}$$

$$\Rightarrow b = ar^{n+1} \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

۸۸ الف) هر بار چون ۶۰ درصد سلول‌های سرطانی از بین می‌رود پس ۴۰ درصد آنها باقی می‌ماند:

$$10^{12} \xrightarrow{\text{بار اول}} \frac{40}{100} \times 10^{12} \xrightarrow{\text{بار دوم}} \frac{40}{100} \times \left(\frac{40}{100} \times 10^{12} \right) \xrightarrow{\text{بار سوم}} \frac{40}{100} \times \left(\frac{40}{100} \times \frac{40}{100} \times 10^{12} \right)$$

$$= 10^{12} \times \left(\frac{40}{100} \right)^3 = \frac{64}{1000} \times 10^{12} = 64 \times 10^9$$

ب) تعداد سلول‌هایی که در بدن شخص می‌ماند پس از n بار شیمی درمانی از رابطه $10^{12} \times \left(\frac{40}{100} \right)^n$ یا همان $10^{12} \times \left(\frac{4}{10} \right)^n$ به دست می‌آید که الان باید از 7×10^6 کمتر باشد:

$$\left(\frac{4}{10} \right)^n \times 10^{12} < 7 \times 10^6 \Rightarrow \left(\frac{4}{10} \right)^n \times 10^6 < 7 \Rightarrow \left(\frac{4}{10} \right)^n < \frac{7}{10^6} \Rightarrow n \geq 13$$

به جز بار اول، این شخص باید ۱۲ بار دیگر شیمی درمانی کند.

۸۹ اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، نسبت مشترک بین آنها همواره ثابت است، بنابراین خواهیم داشت:

$$a, b, c$$

$$\underbrace{a, b}_{r=\frac{b}{a} \text{ (۱)}} , \underbrace{b, c}_{r=\frac{c}{b} \text{ (۲)}}$$

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$$

۹۰ نمودار تابع $f(x)$ از نقطه $(2, 36)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$36 = k^2 \times 2^2 \Rightarrow 36 = k^2 \times 4 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = 3$$

پس تابع $g(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g(x) = 2^x \Rightarrow g(3) = 2^3 = 8$$

۹۱ کافی است؛ معادلات دو تابع را با هم برابر قرار دهیم:

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^{x+1} \Rightarrow (2^{-1})^{x-1} = (2^{-2})^{x+1} \Rightarrow 2^{-x+1} = 2^{-2x-2}$$

$$\Rightarrow -x+1 = -2x-2 \Rightarrow x = -3$$



$x = -3$ را در یکی از توابع مثلاً $f(x)$ جایگزین می‌کنیم:

$$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3-1} = (3^{-1})^{-4} = 3^4 = 16 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } (-3, 16) \text{ است.}$$

۹۲) کافی است به جای x ، صفر قرار دهیم:

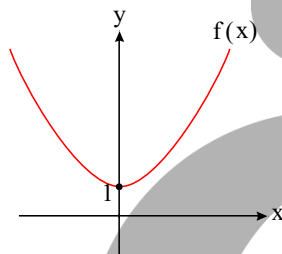
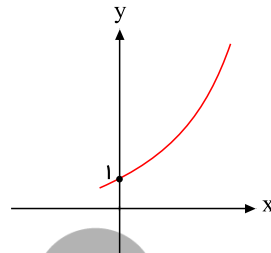
$$f(0) = 3^{0-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{نقطه تلاقی } \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

۹۳) کافی است به جای x ، عدد صفر را قرار دهیم:

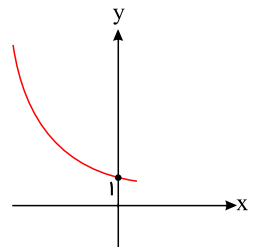
$$f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3^1 = 3 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی } (0, 3)$$

و به ازای x های کوچکتر از صفر $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ یعنی

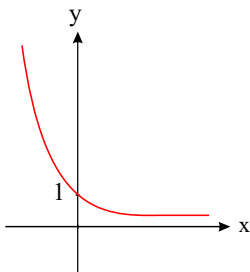
۹۴) به ازای x های بزرگتر مساوی صفر $f(x) = 5^x$ یعنی



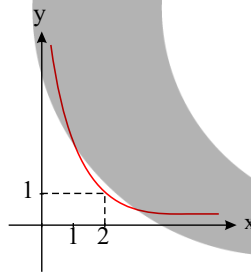
را داریم، با توجه به تمام مقادیر x و ترکیب دو نمودار داریم:



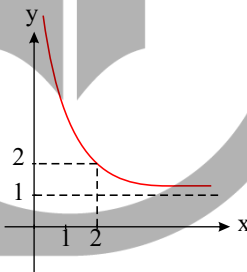
۹۵)



$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$



$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$$



$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} + 1$$

۹۶) می‌دانیم تابع نمایی به صورت $y = a^x$ می‌باشد؛ بنابراین ضریب x در تابع $f(x)$ باید صفر شود.

$$k + 2 = 0 \rightarrow k = -2$$

$$[(-2 + 4)^x] = [2^x] \xrightarrow{x=2} [2^2] = 4$$

۹۷) اگر به جای x عدد ۲ را قرار دهیم، y برابر a می‌شود:

$$x = 2 \rightarrow y = 3^2 = 9 \Rightarrow a = 9$$

و اگر به جای x عدد b را قرار دهیم، y برابر $\frac{1}{27}$ می‌شود.

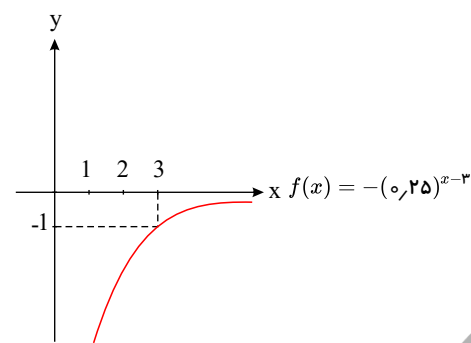
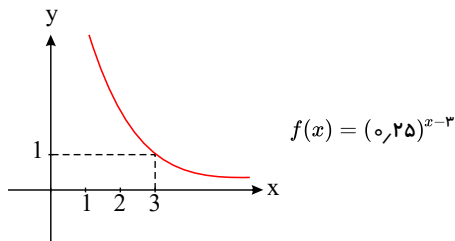
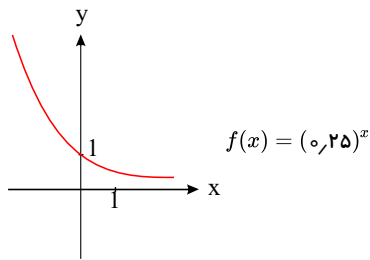
$$\frac{1}{27} = 3^b \Rightarrow \frac{1}{3^3} = 3^b \Rightarrow 3^{-3} = 3^b \Rightarrow b = -3$$

$$2 + k = 0 \rightarrow k = -2$$

$$f(x) = (-2 + 4)^x = 2^x \xrightarrow{x=3} 2^3 = 8$$

۹۸) تابع نمایی به صورت $f(x) = a^x$ می‌باشد، بنابراین ضریب x^2 باید صفر شود:

۹۹)



معادلات دو نمودار را برابر هم قرار می‌دهیم: ۱۰۰

$$3^x + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^x + 2 = \frac{1}{3^x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3^{2x} + 2 \times 3^x - 1 = 0, \quad 3^x = t, \quad t^2 + 2t - 1 = 0.$$

$$\Delta = 4 - 4(-1) = 8, \quad t = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}, \quad t = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = -1 - \sqrt{2} \text{ غیر قابل قبول (عدد منفی)} \\ 3^x = -1 + \sqrt{2} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

می‌دانیم تابع نمایی عامل x^2 ندارد؛ بنابراین داریم: ۱۰۱

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2, \quad f(x) = 2^x \Rightarrow f(3) = 2^3 = 8$$

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(-2) &= 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\cdot \text{ ریشه سوم و پنجم عددی برابرند.} \quad \sqrt[3]{x} = \sqrt[5]{x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۵}} x^5 = x^3$$

$$x^5 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\Rightarrow x = 0 \text{ غیر قابل قبول (۰ زیرا عددی مثبت است)} \\ &\text{یا} \\ &\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \checkmark \\ x = -1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

در نتیجه عدد مورد نظر $x = 1$ است؛ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{ریشه هفتم: } \sqrt[7]{1} &= 1 \\ \text{ریشه نهم: } \sqrt[9]{1} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + 1 = 2$$

$$\sqrt[3]{x} = x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$$

داخل قدرمطلق منفی است.



$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x^n} \times x} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x^n}} = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\mu^A = \mu \frac{\mu}{1.0} \Rightarrow A = \frac{\mu}{1.0}$$

$$1 \mathfrak{f}^{\frac{r}{f}} \times (\circ \circ \circ \mathfrak{f})^{-\frac{r}{f}} \times \lambda 1^{\frac{1}{f}} = (\mathfrak{f}^{\frac{r}{f}})^{\frac{r}{f}} \times (\frac{\mathfrak{f}}{1 \circ \circ})^{-\frac{r}{f}} \times (\mathfrak{f}^{\frac{r}{f}})^{\frac{1}{f}} = \mathfrak{f}^{\frac{r}{f}} \times (\frac{\mathfrak{f}^{\frac{r}{f}}}{1 \circ \circ})^{-\frac{r}{f}} \times \mathfrak{f}$$

$$= 2^r \times \frac{2^{-r}}{10^{-r}} \times 3 = 2^r \times \frac{10^r}{2^r} \times 3 = 10^r \times 3 = 3000$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(r + \sqrt{r})^2 - r\sqrt{r}} &= \sqrt{r + r\sqrt{r} + r - r\sqrt{r}} = \sqrt{r} \\ \left(\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{r}} &= (r^{-r})^{-\frac{1}{r}} = r^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حاصل عبارت : } \sqrt{r} - \sqrt[r]{r}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{10} &= \sqrt{2 \times 5} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{12} &= \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{18} &= \sqrt{3 \times 6} = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{27} &= \sqrt{3 \times 9} = 3\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2$$

ابتدا با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی جملات داده شده را باز می‌کنیم؛ سپس نسبت مشترک و جمله اول را به دست می‌آوریم:

$$a_\lambda = \mathbf{r} a_\varepsilon \Rightarrow a_\lambda r^\nu = \mathbf{r} a_\lambda r^\delta \Rightarrow r^\nu = \mathbf{r} \Rightarrow r = \pm \mathbf{r}$$

$$a_r + a_d = 216 \Rightarrow a_1 r + a_1 r^5 = 216 \Rightarrow a_1 r (1 + r^4) = 216$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2: 2a_1 \times 9 = 216 \Rightarrow a_1 = 12 \\ r = -2: -2a_1 \times -9 = 216 \Rightarrow a_1 = \frac{1 \cdot \Lambda}{v} \end{cases}$$

با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی حاصل ضرب جملات اول تا پنجم را می‌نویسیم:

$$a_1 \times a_1 r \times a_1 r^2 \times a_1 r^3 \times a_1 r^4 = 143$$

$$a_1^{\Delta} r^{1^{\circ}} = \mathfrak{r} \mathfrak{r} \mathfrak{r} \Rightarrow (a_1 r^{\mathfrak{r}})^{\Delta} = \mathfrak{r}^{\Delta} \Rightarrow a_1 r^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} \Rightarrow a_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$$

با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی و فرضیات سوال می‌توانیم بنویسیم:

$$a_1 + a_p + a_{p^2} = 9a_p$$

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = \cancel{a_1} r \Rightarrow \cancel{a_1} (1 + r + r^2) = \cancel{a_1} r$$

$$r^r - \Delta r + 1 = 0 \xrightarrow{a=1, b=-\Delta, c=1} \Delta = b^r - r a c = r \Delta - r(1) = r1 \Rightarrow r = \frac{\Delta \pm \sqrt{r1}}{r}$$

با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{l} a_w = \frac{1}{q} \Rightarrow a_1 r^r = \frac{1}{q} \\ a_b = \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow a_1 r^r = \frac{1}{\lambda_1} \end{array} \xrightarrow{\text{طرفین را تقسیم می‌کنیم}} \frac{1}{r^r} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{\lambda_1}} = q \Rightarrow r^r = \frac{1}{q} \Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt[r]{q}}$$

$$a_1 r^r = \frac{1}{q} \xrightarrow{r=\pm \frac{1}{r}} a_1 \left(\pm \frac{1}{r} \right)^r = \frac{1}{q} \Rightarrow a_1 = 1$$

حال با داشتن جمله اول و نسبت مشترک می‌توانیم جمله هفتم را بنویسیم:

$$a_v = a_1 r^f = 1 \times \left(\pm \frac{1}{3} \right)^f = 1 \times \frac{1}{\cancel{729}} = \frac{1}{\cancel{729}}$$

چون تعداد فرد از حملات دنباله داده شده، می‌توانیم حملات را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, \quad \begin{array}{c} \text{جمله چهارم} \\ \downarrow \\ a \end{array}, ar, ar^2, ar^3$$



$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 \times ar^3 = 128 \times 3^{12} \Rightarrow a^7 = 128 \times 3^{12}$$

$$\Rightarrow a^7 = 2^7 \times (3^2)^7 \Rightarrow a = 2 \times 3^2 = 18$$

و جمله چهارم همان ۱۸ است.

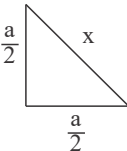
۱۱۶ حاصل ضرب شش جمله اول را با جمله عمومی دنباله هندسی می‌نویسیم:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_1 \times a_1 r \times a_1 r^2 \times a_1 r^3 \times a_1 r^4 \times a_1 r^5 = 81$$

$$\Rightarrow a_1^6 r^{15} = 81 \xrightarrow{r=\sqrt[3]{3}} a_1^6 \times (\sqrt[3]{3})^{15} = 81 \Rightarrow a_1^6 \times 3^5 = 81 \Rightarrow a_1^6 = \frac{81}{3^5} = \frac{3^4}{3^5} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

۱۱۷ کافی است مساحت‌های مربع‌های ایجاد شده را به دست آوریم و ببینیم چه رابطه‌ای با هم دارند.

$$S_1 = a^2$$



$$S_2 = x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$S_n = \frac{a^2}{2^{n-1}} \xrightarrow[n=10]{a=48} S = \frac{48^2}{2^9} = \frac{(3 \times 2^4)^2}{2^9} = \frac{3^2 \times 2^8}{2^9} = \frac{9}{2}$$

۱۱۸ ابتدا x را به دست آوریم:

$64, x^2, x^4$ سه جمله متوالی دنباله هندسی‌اند، بنابراین:

$$(x^4)^2 = x^2 \times 64 \Rightarrow x^8 = x^2 \times 64 \Rightarrow x^6 = 64 \Rightarrow x = \pm 2$$

بنابراین $r = \frac{x^4}{x^2} = x^2 = 4$ و $a_1 = (\pm 2)^2 = 4$ است.
(الف)

$$a_5 = a_1 r^4 = 4 \times 4^4 = 4^5 = 1024$$

(ب)

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_{10} = 4 \times \frac{1-4^{10}}{1-4} = -\frac{4}{3} (1-4^{10}) = -\frac{4}{3} + \frac{4^{11}}{3} = \frac{4^{11}-4}{3}$$

۱۱۹ ابتدا جملات اول و دوم دنباله داده شده را به دست می‌آوریم:

$$a_1 = 3 \times 2^{1-1} = 3$$

$$a_2 = 3 \times 2^{1-2} = 3 \times 2^{-1} = \frac{3}{2}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_1 r = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \\ a_{10} = a_1 r^9 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{512} \end{cases}$$

واسطه هندسی بین دو عدد a و c برابر است با: $b^2 = ac$ بنابراین:

$$b^2 = \frac{3}{512} \times \frac{3}{512} = \frac{3^2}{2^8 \times 2^8} = \frac{3^2}{2^{16}} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2^8} = \pm \frac{3}{128}$$

۱۲۰ با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_4 = 5 &\Rightarrow a_1 r^3 = 5 \\ a_6 = 10 &\Rightarrow a_1 r^5 = 10 \end{aligned} \xrightarrow{\text{طرفین را بر هم تقسیم می‌کنیم}} \frac{1}{r^2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm \sqrt{2}$$

نسبت مشترک را در یکی از رابطه‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$$a_1 r^3 = 5 \begin{cases} \xrightarrow{r=\sqrt{2}} a_1 \times 2\sqrt{2} = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ \xrightarrow{r=-\sqrt{2}} a_1 \times -2\sqrt{2} = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{-5}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

بنابراین جمله بیستویکم برابر است با:

$$a_{21} = a_1 r^{20} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{2}} \times (\sqrt{2})^{20} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \times 2^{10} = \frac{5 \times 2^9}{\sqrt{2}} \\ \frac{-5}{2\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2})^{20} = \frac{-5}{2\sqrt{2}} \times 2^{10} = \frac{-5 \times 2^9}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



۱۲۱ می‌دانیم اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند b واسطه هندسی است و $b^2 = ac$ است.

$$\begin{aligned} (a^{x-y})^2 &= 4^{y+x} \times 16^{x+y} \Rightarrow 8^{x-y} = 2^{y+x+y} \times 2^{x+y+y} \Rightarrow 2^{6x-12y} = 2^{4x+2y} \times 2^{4x+12y} \\ 2^{6x-12y} &= 2^{8x+14y} \Rightarrow 6x - 12y = 8x + 14y \Rightarrow -2x = 26y \Rightarrow x = -13y \end{aligned}$$

به عبارتی x همواره -13 برابر y است.

۱۲۲ کافی است جمله اول و نسبت مشترک را به دست آورده و سپس از رابطه مجموع جملات استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{4} \rightarrow r = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{4} \\ a_2 &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{3}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{1-\frac{1}{4^{10}}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{4^{10}} = \frac{4^{10}-1}{4^{10}}$$

۱۲۳ اگر a, b, c جملات متوالی دنباله هندسی باشند $b^2 = ac$ است، بنابراین:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= (2x-1)(2x+1) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0 \\ a &= 3, b = -2, c = -2 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-6) = 28 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

۱۲۴ اگر بین دو عدد a و b تعداد n عدد را به گونه ای قرار دهیم که با هم تشکیل دنباله هندسی دهند نسبت مشترک از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$r^{n+1} = \frac{128}{4} = 32 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین آن اعداد عبارتند از:

$$\begin{array}{ccccccc} \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 4, & 8, & 16, & 32, & 64, & 128 \end{array}$$

$$8 + 16 + 32 + 64 = 120$$

مطلوب سوال:

۱۲۵ با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1}, a_{27} = \frac{1}{a_8} \Rightarrow a_7 a_8 = 1 \\ \Rightarrow a_1 r^{26} \times a_1 r^7 &= 1 \Rightarrow a_1^2 r^{33} = 1 \Rightarrow a_1 r^{11} = \pm 1 \Rightarrow a_{16} = \pm 1 \end{aligned}$$

۱۲۶ با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی و اطلاعات سوال می‌نویسیم:

$$a_{10} = 64 a_7 \Rightarrow a_1 r^9 = 64 a_1 r^6 \Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4$$

سپس عبارت خواسته شده را به ساده‌ترین شکل می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{2a_{16} + a_7}{a_{12} - a_8} &= \frac{2a_1 r^{15} + a_1 r^6}{a_1 r^{11} - a_1 r^7} = \frac{a_1 r^7 (2r^8 + 1)}{a_1 r^7 (r^4 - 1)} = \frac{2r^{11} + 1}{r^7 (r^4 - 1)} \\ &= \frac{2 \times 4^{11} + 1}{4^7 (4^4 - 1)} = \frac{2^{23} + 1}{2^{18} - 2^7} = \frac{2^{23} + 1}{2^{18} - 16} \end{aligned}$$

۱۲۷

برای درج n واسطه هندسی بین a و b کافی است نسبت مشترک را از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ بدست آوریم.

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^{3+1} = \frac{96}{6} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) & \times (-2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6, & 12, & 24, & 48, & 96, & -192, & 384, & -768 \end{array}$$

۱۲۸ چون تعداد جملات فرد است می‌توان با توجه به تعریف دنباله هندسی آن‌ها را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} a_1 \times a_7 \times a_{13} \times a_{19} \times a_{25} &= 32 \\ \downarrow & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^4 &= 32 \\ \Rightarrow a^5 &= 32 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

$$a_7 \times a_{19} = \frac{a}{r} \times ar = a^2 = 2^2 = 4$$

بنابراین:

۱۲۹ با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی و اطلاعات سوال:



$$a_1 + a_7 = 28 \Rightarrow a_1 + a_1 r^6 = 28 \Rightarrow a_1 (1 + r^6) = 28 \quad (1)$$

$$a_7 + a_9 = 12 \Rightarrow a_1 r^6 + a_1 r^8 = 12 \Rightarrow a_1 r (1 + r) = 12 \quad (2)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1 + r^6}{r(1 + r)} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{اتحاد}} \frac{(1+r^6)(1-r)}{r(1+r)(1-r)} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 3 - 3r + 3r^7 = 7r \Rightarrow 3r^7 - 10r + 3 = 0, a = 30; b = -10, c = 3$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(9) = 64 \Rightarrow r = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۳۰ از رابطه $a_{n+1} = \sqrt{2}a_n$ به این نتیجه می‌رسیم که هر جمله $\sqrt{2}$ برابر جمله قبل است، یعنی نسبت مشترک آن $\sqrt{2}$ است. بنابراین مجموع ده جمله آن برابر است با:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_{10} = -2 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^{10}}{1 - 2} = 2(1 - 2^5) = 2(-31) = -62$$

۱۳۱ با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی و اطلاعات داده شده در سوال خواهیم داشت:

$$a_7 + a_8 = 30 \Rightarrow a_1 r^6 + a_1 r^7 = 30 \Rightarrow a_1 r^6 (1 + r) = 30 \quad (1)$$

$$a_7 = 5 \Rightarrow a_1 r^6 = 5 \quad (2)$$

* از تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{a_1 r^6 (1 + r)}{a_1 r^6} = \frac{30}{5}$$

$$r(1 + r) = 6 \Rightarrow r + r^2 = 6 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r + 3)(r - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = 2 \end{cases}$$

چون دنباله هندسی افزایشی است، $r = 2$ مورد قبول است.

۱۳۲ ابتدا نسبت مشترک را به کمک فرمول درج واسطه هندسی به دست می‌آوریم:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$r^{7+1} = \frac{192}{6} \Rightarrow r^8 = 32 = 2^5 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین این جملات عبارتند از:

$$\begin{matrix} \times 2 \\ 6, 12, 24, 48, 96, 192 \end{matrix}$$

۱۳۳ با استفاده از جمله عمومی و دنباله هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_7 = 10 \Rightarrow a_1 r^6 = 10 \quad (1)$$

$$a_8 + a_9 = 60 \Rightarrow a_1 r^7 + a_1 r^8 = 60 \Rightarrow a_1 r^7 (1 + r) = 60 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^7}{a_1 r^6 (1 + r)} = \frac{10}{60} \Rightarrow \frac{1}{r(1 + r)} = \frac{1}{6} \Rightarrow r(r + 1) = 6 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (r + 3)(r - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = 2 \end{cases}$$

۱۳۴ با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی می‌توان نوشت:

$$a_1 + a_7 + a_9 = 21 \rightarrow a_1 + a_1 r^6 + a_1 r^8 = 21 \rightarrow a_1 (1 + r^6 + r^8) = 21 \quad (1)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 = 168 \rightarrow a_1 r^6 + a_1 r^7 + a_1 r^8 = 168 \rightarrow a_1 r^6 (1 + r + r^2) = 168 \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

(الف)

$$\frac{1}{r^6} = \frac{21}{168} = \frac{1}{8} \Rightarrow r^6 = 8 \Rightarrow r = 2$$

(ب)

$r = 2$ را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$a_1 (1 + 2 + 4) = 21 \Rightarrow a_1 \times 7 = 21 \Rightarrow a_1 = 3$$

بنابراین جمله چهارم برابر است با:

$$a_4 = a_1 r^3 = 3 \times 2^3 = 24$$

۱۳۵ عبارت داده شده مجموع جملات دنباله هندسی است.

$$a_1 = \frac{1}{9}, r = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = 3$$



$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{9} \times 3^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{3^2} = 3^{n-3}$$

حال باید ببینیم جملهٔ چندم دنباله است:

$$3^{n-3} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n - 3 = 8 \Rightarrow n = 11$$

بنابراین باید مجموع ۱۱ جمله از این دنباله را به دست آوریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{9} \times \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = \frac{1}{9} \times \frac{1 - 3^{11}}{-2} = \frac{3^{11} - 1}{18}$$

چون تعداد جملات فرد است بهتر است آن‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

جملات دنباله: $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 243 \Rightarrow a^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow a = 3$$

پس یکی از این اعداد حتماً ۳ است.

ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \dots$ را می‌نویسیم:

$$a_1 = \frac{1}{5}, r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}, a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

باید ببینیم جملهٔ چندم $\frac{1}{320}$ است:

$$\frac{1}{320} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^6 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

پس مجموع ۷ جمله از دنبالهٔ هندسی $a_n = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{n-1}}$ از ما خواسته شده است:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_7 = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{127}{128} = \frac{127}{320}$$

با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی:

$$\begin{cases} a_r = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 r^r = -\frac{1}{4} \\ a_8 = 8 \Rightarrow a_1 r^8 = 8 \end{cases}$$

طرفین ۲ رابطه بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^5} = \frac{-\frac{1}{4}}{8} = -\frac{1}{32} \Rightarrow r = -2$$

نسبت مشترک را در یکی از رابطه‌های بالا جایگزین کرده و جملهٔ اول را به دست می‌آوریم:

$$a_1 r^r = -\frac{1}{4} \xrightarrow{r=-2} a_1 \times (-2)^r = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 \times 4 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{16}$$

بنابراین جملهٔ دهم برابر است با:

$$a_{10} = a_1 r^9 = -\frac{1}{16} \times (-2)^9 = -\frac{1}{16} \times -512 = 32$$

برای به دست آوردن جملهٔ ششم، کافی است مجموع شش جملهٔ اول را منهای مجموع پنج جملهٔ اول کنیم.

$$\text{مجموع شش جمله اول: } S_6 = 3 \times 2^{6+1} = 384$$

$$\text{مجموع پنج جمله اول: } S_5 = 3 \times 2^{5+1} = 192$$

$$a_6 = 384 - 192 = 192$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{384} + \boxed{a_6}$$

عبارت صورت سؤال مجموع ۱۲ جمله از دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و نسبت مشترک x است، بنابراین داریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_{12} = 1 \times \frac{1 - x^{12}}{1 - x}$$

و عبارت مخرج سؤال مجموع ۴ جمله از دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و نسبت مشترک x^3 است، بنابراین داریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow S_4 = 1 \times \frac{1 - (x^3)^4}{1 - x^3} = \frac{1 - x^{12}}{1 - x^3}$$



بنابراین از تقسیم این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{1-x^{12}}{1-x^3} = \frac{1-x^3}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = 1+x+x^2 \xrightarrow{x=\sqrt[3]{2}} 1+\sqrt[3]{2}+2=3+\sqrt[3]{2}$$

سه جمله را a, ar, ar^2 در نظر می‌گیریم؛

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{5}{r} + 5 + 5r = \frac{35}{2} \Rightarrow \frac{5}{r} + \frac{5r}{1} = \frac{35}{2} - 5$$

$$\Rightarrow \frac{5}{r} + \frac{5r}{1} = \frac{25}{2} \Rightarrow \frac{5+5r^2}{r} = \frac{25}{2}$$

$$10 + 10r^2 = 25r$$

$$10r^2 - 25r + 10 = 0 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 25 - 4(4) = 9$$

$$r = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} r = 2 \rightarrow \frac{5}{2}, 5, 10 \\ r = \frac{1}{2} \rightarrow 10, 5, \frac{5}{2} \end{cases}$$

۱۴۲

در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$a_7 \times a_9 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1 r \times a_1 r^8 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1^2 r^9 = \frac{4}{81} \Rightarrow (a_1 r^3)^2 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1 r^3 = \pm \frac{2}{9}$$

چون r^3 مثبت است و جملات دنباله، منفی هستند، پس $a_1 r^3 = -\frac{2}{9}$ است.

$$a_1 + a_7 = -\frac{13}{18} \Rightarrow a_1 + a_1 r^6 = -\frac{13}{18} \xrightarrow{a_1 r^3 = -\frac{2}{9}} a_1 - \frac{2}{9} = -\frac{13}{18} \Rightarrow a_1 = -\frac{13}{18} + \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-13+4}{18} = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}$$

۱۴۳

$$6, x, 14 \rightarrow x = \frac{14+6}{2} = 10$$

سه جمله متوالی حسابی

$$4, 12, y \rightarrow 12^2 = 4 \times y \Rightarrow y = \frac{144}{4} = 36$$

سه جمله متوالی هندسی

$$x, y, z \Rightarrow 10, 36, z \xrightarrow{\text{تشکیل دنباله هندسی می‌دهند}} 36^2 = 10 \times z \Rightarrow z = 3,6 \times 36 = 129,6$$

۱۴۴

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{81}{16} \rightarrow \frac{\cancel{a_1} \times r^6}{\cancel{a_1} \times r^2} = \frac{81}{16} \rightarrow r^4 = \frac{81}{16} \rightarrow r = \pm \frac{3}{2} \rightarrow r = +\frac{3}{2}$$

$$a_4 = a_1 \times r^3 = a_1 \times \frac{27}{8} = \frac{9}{4} \rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_7 = a_1 r = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

۱۴۵

در یک دنباله هندسی اگر تعداد جملات زوج باشد، نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر نسبت مشترک دنباله است.
اثبات نکته:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_4}{t_3} = \dots = r$$

$$t_2 = rt_1, t_4 = rt_3 \Rightarrow \frac{t_2 + t_4 + t_6 + \dots + t_{2n}}{t_1 + t_3 + \dots + t_{2n-1}} = \frac{r(t_1 + t_3 + \dots + t_{2n-1})}{(t_1 + t_3 + \dots + t_{2n-1})} = r$$

در این دنباله داریم:

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{-18}{6} = -3$$

نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر (-3) است.

۱۴۶



به کمک فرمول جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a_1 r^{n-1}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = 81 \xrightarrow{a_n = a_1 r^{n-1}} a_1 + a_1 r^6 = 81 \Rightarrow a_1(1+r) = 81 & (1) \\ a_5 + a_9 = 16 \xrightarrow{a_n = a_1 r^{n-1}} a_1 r^4 + a_1 r^8 = 16 \Rightarrow a_1 r^4(1+r) = 16 & (2) \end{cases}$$

حال، دو عبارت به دست آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1+r)}{a_1 r^4(1+r)} = \frac{81}{16} \Rightarrow \frac{1}{r^4} = \frac{81}{16} \Rightarrow r^4 = \frac{16}{81} \quad (3)$$

$$\text{مجموع شش جمله} = \underbrace{a_1 + a_7}_{81} + a_2 + a_3 + a_4 + \underbrace{a_5 + a_9}_{16} = 97 + a_2 + a_3 + a_4 = 97 + a_1 r^1 + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 97 + a_1 r^1(1+r)$$

$$\frac{a_1(1+r)=81}{97 + 81 = 97 + 81 \sqrt[4]{\frac{16}{81}}} \stackrel{(3)}{=} 97 + 81$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = 97 + 81 \left(\frac{2}{3}\right) = 97 + 36 = 133$$

۱۴۷

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|1+\sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|2-\sqrt{3}|}_{\text{مثبت}}$$

$$= 1 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 3$$

۱۴۸ عدد $\sqrt[3]{17}$ بین دو عدد $\sqrt[3]{8}$ و $\sqrt[3]{27}$ قرار دارد پس داریم:

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{17} < \sqrt[3]{27}$$

$$\sqrt[3]{2^3} < \sqrt[3]{17} < \sqrt[3]{3^3} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{17} < 3$$

پس بین دو عدد ۲، ۳ قرار می‌گیرد.

۱۴۹ در تابع $f(x) = a^x$ می‌دانیم $0 < a < 1$ یا $a > 1$ است پس a نمی‌تواند صفر، یک و اعداد منفی باشد:

$$3k - 6 \neq 0 \Rightarrow 3k \neq 6 \Rightarrow k \neq 2$$

$$3k - 6 \neq 1 \Rightarrow 3k \neq 7 \Rightarrow k \neq \frac{7}{3} \Rightarrow k \neq 2\frac{1}{3}$$

$$3k - 6 \neq 0 \Rightarrow 3k \neq 6 \Rightarrow k \neq 2$$

پس k نمی‌تواند ۲ و ۳ و اعداد کوچکتر از ۲ باشد.

۱۵۰

$$y = a\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

نقطه‌ای به عرض ۴ روی محور y ها نقطه $(4, 0)$ است. بنابراین:

$$\Rightarrow 4 = a\left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow 4 = a \times 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow y = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow{x=-2} y = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 4 \times 9 = 36$$