



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

LEVELUP

حسابان ۲



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی





مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات لول آپ

حسابان ۲ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان حسابان : محمدرضا اصغریان

تابع

تبدیل نمودار توابع

۱) تابع $y = x^3$ را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطه تابع وارون تابع f را بیابید.

۲) نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا تابع f حاصل شود. ضابطه تابع وارون تابع f را بیابید.

انواع تابع

۳) اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|2x-1|) - f(|x+1|)}$$

۴) توابع f و g هر دو اکیداً نزولی هستند و تابع fog تعریف شده است. اگر $fog(m^2) = 2a - 1$ و $fog(m^2 + 1) = -a + 4$ باشند، حدود a را بیابید.

۵) اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ باشد، دامنه تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 11)f(x)}$$

۶) اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، دامنه تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x)f(x)}$$

۷) اگر f روی $\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-2|) - f(|x+1|)}$$

۸) اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-3|) - f(|x+2|)}$$



۹ صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = [-2x] + 1$$

مثلثات

مفاهیم مقدماتی

۱۰ اگر $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ و $\tan \alpha = \frac{2m-1}{3}$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

دوره تناوب و کاربرد آن

۱۱ ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 2 \sin^4 x - 5$ ب) $g(x) = -3 \sin^5 2x + 10$

۱۲ نمودار هریک از توابع داده شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دوره تناوب تابع را مشخص کنید.

الف) $y = |\sin x|$

ب) $y = |\cos 2x|$

۱۳ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\tan^2 x - 1}$ را بیابید.

معادلات مثلثاتی (دوازدهم)

۱۴ اگر $\sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}$ و $\tan x \cdot \tan y = 3$ باشد حاصل $\tan(x-y)$ را بیابید.

۱۵ اگر $\tan(\alpha + \beta) = 3$ و $\tan(\alpha - \beta) = 2$ باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بیابید.

۱۶ اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ و $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{1}{6}$ باشد حاصل $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ را بیابید. $(0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2})$

۱۷ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\tan 2x = 3 \tan x$



ب.

$$\tan^{\circ} x - \tan^{\circ} x + 1 = \tan x$$

پ.

$$\tan^{\circ} x - 2 \tan^{\circ} x - 3 = 0$$

ت.

$$\cos^{\circ} x = 2 \cos^{\circ} x$$

ث.

$$\sin^{\circ} x + 2 \cos^{\circ} x = 2$$

۱۸) معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^{\circ} \left(x - \frac{\pi}{\lambda} \right) + 2 \cos \left(\frac{5\pi}{\lambda} - x \right) = 3$$

۱۹) هریک از عبارات داده شده را بر حسب $\tan \frac{x}{2}$ بنویسید.

الف.

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

ب.

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

پ.

$$\frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

حد

۲۰) حدهای نامتناهی

حاصل حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \frac{x - 1}{\sqrt{2} \sin x + 1}$$

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



۲۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ را بیابید.

۲۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^4 - x^2 + 1}{2x^n - x^4 + 5}$ را به ازای مقادیر مختلف n ($n \in \mathbb{N}$) به دست آورید.

۲۳) در تابع $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + mx + 9}$ ، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

۲۴) در تابع $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + mx + 6}$ ، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

۲۵) تابع $f(x) = \frac{\tan x}{2 \sin x - 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

حد در بی نهایت

۲۶) اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^3 - (x - 1)^3 + x^2 + 2) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۲۷) حاصل حدهای زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x + 1}{x + 2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + 2}{x - 1} \right]$$

ب) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

۲۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x + 1}{x - 2} \right]$ را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

۲۹) اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n + mx^3 + x^2 - 1}{4x^3 + x^2 - 3} = -2$ ، آنگاه m و n را بیابید. ($n \in \mathbb{N}$)

۳۰) اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^2 + (x + 2)^2 - 7x) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۳۱) اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x + 1)^3 + mx^3 - 4x^2 + 2) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.



مشتق

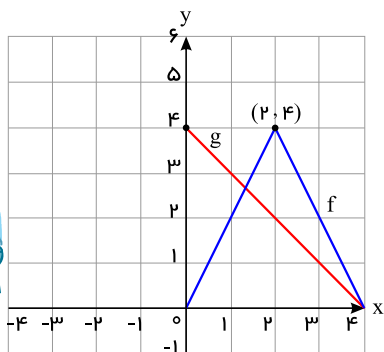
تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق

۳۲ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

۳۳ مشتق تابع $f(x) = \cos x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

۳۴ مشتق تابع $f(x) = \sin x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ را با استفاده از تعریف بیابید.

۳۵ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$
 ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

۳۶ اگر $f(a) = f'(a) = 2$ مشتق $f''(x) + \frac{1}{f(x)}$ در $x = a$ کدام است؟

- ۱) -۴
۲) -۶
۳) ۴
۴) ۶

۳۷ نقاطی از منحنی $y = \frac{2x+3}{1-x}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $8x + y = 5$ عمود باشد.

۳۸ اگر f تابعی مشتق‌پذیر بوده و $g(x) = x^3 + 1$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$ ، آنگاه $f'(0)$ را بیابید.

۳۹ در تابع $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ حاصل $f''(1)$ را بیابید.



بررسی مشتق پذیری

۴۰ مشتق پذیری تابع $f(x) = \sin x |\cos x|$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ را بررسی کنید.

۴۱ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} [x] \sin|x| & x < 0 \\ x^2(|x| + [x]) & x \geq 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ را بررسی کنید.

۴۲ مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{|x+2|}$ در نقطه $x = -2$ را بررسی کنید.

کاربرد مشتق

نقاط بحرانی (دوازدهم)

۴۳ نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x^2 - |x|$ را بیابید.

اکسترم های مطلق

۴۴ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 + |x+1|$ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.

بهینه سازی (دوازدهم)

۴۵ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

اکسترم های نسبی

۴۶ نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 6x & x > 0 \end{cases}$$

تقعر و نقطه ی عطف

۴۷ در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ مقادیر a, b را چنان بیابید که نقطه $A(1, 3)$ نقطه ی عطف تابع باشد.

۴۸ نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ را بیابید.



۴۹) نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 12}$ را در صورت وجود بیابید.

رسم توابع

۵۰) تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مفروض است. a, b, c را چنان تعیین کنید که نقطه $A(1, -1)$ مرکز تقارن تابع بوده و خط مماس بر منحنی در نقطه عطف عمود بر خط $x + 3y = 7$ باشد.

۵۱) فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

۵۲) تابع $y = mx + n + \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ مفروض است. m و n را چنان بیابید که این تابع هموگرافیک شود و مرکز تقارنش روی نیمساز ربع اول باشد.





پاسخ نامه تشریحی

۱

$$y = x^3 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x \rightarrow -x} y = (-x)^3 = -x^3 \xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+2} y = -(x+2)^3$$

$$\xrightarrow[\text{واحد بالا}]{\text{}} y = f(x) = -(x+2)^3 + 5 \Rightarrow (x+2)^3 = 5 - y$$

$$\Rightarrow x+2 = \sqrt[3]{5-y} \Rightarrow x+2 = -\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x = -2 - \sqrt[3]{y-5}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = -2 - \sqrt[3]{x-5}$$

۲

$$y = \sqrt[3]{x} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}]{\text{}} y = -\sqrt[3]{x} \xrightarrow[\text{واحد راست}]{x \rightarrow x-4} y = -\sqrt[3]{x-4}$$

$$\xrightarrow[\text{واحد پایین}]{\text{}} y = -\sqrt[3]{x-4} - 3 \Rightarrow f(x) = -\sqrt[3]{x-4} - 3$$

$$y = -\sqrt[3]{x-4} - 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x-4} = -y-3 \Rightarrow x-4 = (-y-3)^3$$

$$\Rightarrow x = (-y-3)^3 + 4 \Rightarrow x = 4 - (3+y)^3 \Rightarrow y = 4 - (3+x)^3 = f^{-1}(x)$$

۳ نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|2x-1|) - f(|x+1|)} \Rightarrow f(|2x-1|) - f(|x+1|) \geq 0$$

$$\xrightarrow[\text{f اکیداً نزولی}]{\text{}} |2x-1| \leq |x+1|$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 6x \leq 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 2 \\ \hline 3x(x-2) & + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 2]$$

۴ برای هر x_1 و x_2 از دامنه $f \circ g$ داریم:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow[\text{g اکیداً نزولی}]{\text{}} g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow[\text{f اکیداً نزولی}]{\text{}} f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f \circ g(x_1) < f \circ g(x_2) \Rightarrow \text{f} \circ \text{g اکیداً صعودی}$$

$$\text{می دانیم: } m^2 + 1 > m^2 \Rightarrow f \circ g(m^2 + 1) > f \circ g(m^2) \Rightarrow -a + 4 > 2a - 1$$

$$\Rightarrow 4 + 1 > 2a + a \Rightarrow 3a < 5 \Rightarrow \boxed{a < \frac{5}{3}}$$

۵

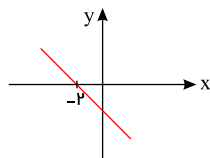
$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 1)f(x)} \Rightarrow (x^2 - 1)f(x) \geq 0$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ است، داریم:

$$x < -2 \Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \text{برای } x < -2 \text{ تابع } f \text{ مثبت است.}$$

$$x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow \text{برای } x > -2 \text{ تابع } f \text{ منفی است.}$$

نمودار f تقریباً به صورت مقابل است.



$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	-9	-2	1
$x^2 - 1$	+	0	-
$f(x)$	+	+	0
$(x^2 - 1)f(x)$	+	0	-

$$\Rightarrow x \leq -9 \text{ یا } -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, -9] \cup [-2, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x)f(x)} \Rightarrow (x^2 - 3x)f(x) \geq 0$$

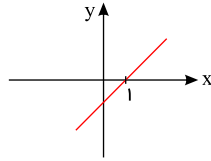
۶



چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ است، داریم:

برای $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f$ تابع منفی است.

برای $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f$ تابع مثبت است.



به طور تقریبی نمودار f به صورت مقابل است.

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

x	0	1	3
$x^2 - 3x$	+	0	-
$f(x)$	-	0	+
$(x^2 - 3x)f(x)$	-	0	+

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3 \Rightarrow D_g = [0, 1] \cup [3, +\infty)$$

نکته: اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \leq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-2|)} - f(|x+1|) \Rightarrow f(|x-2|) - f(|x+1|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x-2|) \geq f(|x+1|) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} |x-2| \geq |x+1|$$

برای حل این گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x-2)^2 \geq (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4 - 1 \geq 2x + 4x$$

$$\Rightarrow 6x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

نکته: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-3|)} - f(|x+2|) \Rightarrow f(|x-3|) - f(|x+2|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x-3|) \geq f(|x+2|) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |x-3| \leq |x+2|$$

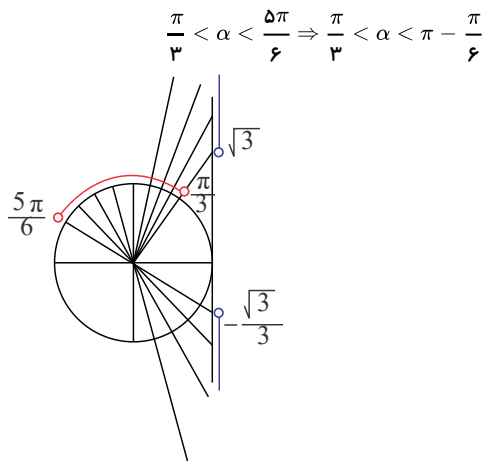
$$(x-3)^2 \leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 9 - 4 \leq 4x + 6x$$

$$\Rightarrow 10x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$f(x) = [-2x] + 1$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow [-2x_1] \geq [-2x_2] \Rightarrow [-2x_1] + 1 \geq [-2x_2] + 1$$

$$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \text{ نزولی}$$



با توجه به دایره مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan \alpha > \sqrt{3} \text{ یا } \tan \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{3} > \sqrt{3} \text{ یا } \frac{2m-1}{3} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2m-1 > 3\sqrt{3} \text{ یا } 2m-1 < -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow m > \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \text{ یا } m < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

نکته: $0 \leq \sin^n u \leq 1$ و $0 \leq \cos^n u \leq 1$ زوج $n \rightarrow$



نکته $n \rightarrow -1 \leq \sin^n u \leq 1$ و $-1 \leq \cos^n u \leq 1$

الف) $f(x) = 2 \sin^2 x - 5$

$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2 \sin^2 x \leq 2 \Rightarrow 0 - 5 \leq 2 \sin^2 x - 5 \leq 2 - 5$

$\Rightarrow -5 \leq f(x) \leq -3 \Rightarrow \min f = -5$ و $\max f = -3$

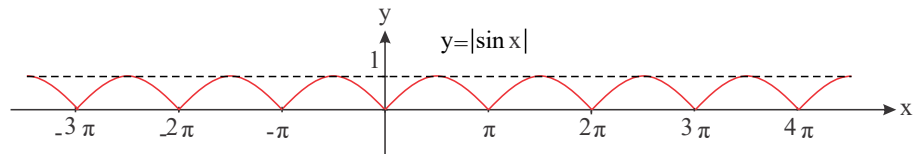
ب) $g(x) = -3 \sin^2 2x + 1$

$-1 \leq \sin^2 2x \leq 1 \xrightarrow{\times (-3)} 3 \geq -3 \sin^2 2x \geq -3 \Rightarrow -3 + 1 \leq -3 \sin^2 2x + 1 \leq 3 + 1$

$\Rightarrow 7 \leq g(x) \leq 13 \Rightarrow \min g = 7$ و $\max g = 13$

۱۲ الف) با رسم $y = \sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

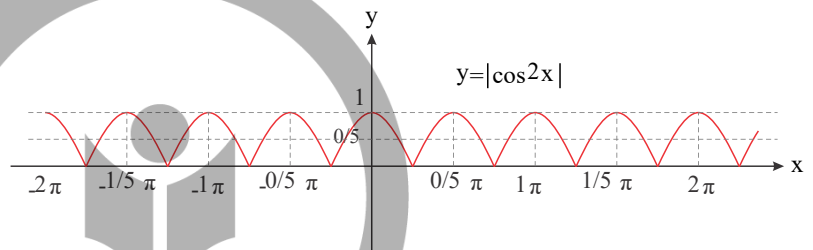
$$\begin{cases} T = \pi \\ \max = 1 \\ \min = 0 \end{cases}$$



ب) کافی است نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده ($\cos 2x$) و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos 2x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots \rightarrow y = 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$

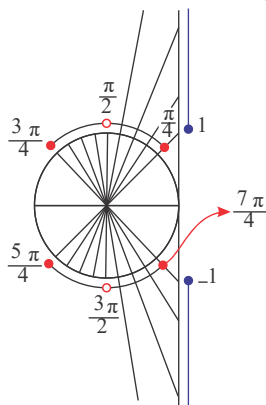
$$\begin{cases} T = \frac{\pi}{2} \\ \max = 1 \\ \min = 0 \end{cases}$$



۱۳

$f(x) = \sqrt{\tan^2 x - 1} \Rightarrow \tan^2 x - 1 \geq 0 \Rightarrow \tan^2 x \geq 1 \Rightarrow |\tan x| \geq 1$

$\Rightarrow \tan x \leq -1$ یا $\tan x \geq 1$



با توجه به دایره مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ یا $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$

در حالت کلی داریم:

$2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ یا $2k\pi + \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{4}$ و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۴ طبق فرض $\tan x \tan y = 3$ داریم:

$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 3 \Rightarrow \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3$

طبق فرض $\frac{3}{4}$ $\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3 \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{1}{4}$



با باز کردن عبارت $\cos(x - y)$ داریم:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

حال طبق رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ داریم:

$$1 + \tan^2(x - y) = \frac{1}{\cos^2(x - y)} \Rightarrow 1 + \tan^2(x - y) = 1 \Rightarrow \tan(x - y) = 0$$

ابتدا زاویه α را بر حسب $\alpha + \beta$ و $\alpha - \beta$ می‌نویسیم: **۱۵**

$$\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \xrightarrow[\tan \text{ می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \tan \alpha = \tan((\alpha + \beta) + (\alpha - \beta))$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{3 + 2}{1 - 3 \times (+2)} = \frac{5}{-5} = -1$$

با توجه به فرض $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ از دو طرف تساوی تانژانت می‌گیریم: **۱۶**

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = 1$$

با جایگذاری $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{1}{6}$ داریم:

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \frac{1}{6}} = 1 \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{6} \Rightarrow \tan \beta = \frac{5}{6} - \tan \alpha \quad (1)$$

پس نتیجه (۱) را در عبارت $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{6}$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\tan \alpha \left(\frac{5}{6} - \tan \alpha \right) = \frac{1}{6} \xrightarrow{\tan \alpha = m} \frac{5}{6}m - m^2 = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times 6} 5m - 6m^2 = 1 \Rightarrow 6m^2 - 5m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$\Rightarrow m = \tan \alpha = \begin{cases} \frac{1}{3} \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\beta > \alpha} \tan \beta > \tan \alpha \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{2}, \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

۱۷
الف نکته:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

به کمک رابطه فوق ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم:

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x$$

$$1) \tan x = 0 \Rightarrow \tan(\circ) \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \tan x \neq 0 \Rightarrow \frac{2 \cancel{\tan x}}{1 - \tan^2 x} = 3 \cancel{\tan x} \Rightarrow \frac{2}{1 - \tan^2 x} = 3$$

$$\Rightarrow 3 - 3 \tan^2 x = 2 \Rightarrow 3 \tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} 1) \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2) \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ب با مرتب کردن معادله داده شده داریم:

$$\tan^2 x - \tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \xrightarrow{\tan x = t}$$

$$t^2 - t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t^2(t - 1) - (t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (t - 1)(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow (t - 1)^2(t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) t = \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2) t = \tan x = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

پ با جایگذاری $\tan^2 x = m$ در معادله داریم:

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 3) = 0 \Rightarrow$$



۱) $m = \tan^2 x = -1 \rightarrow$ امکان ندارد.

$$۲) m = \tan^2 x = ۳ \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{۳} = \tan(\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ت نکته: $\cos ۲x = ۲\cos^2 x - ۳\cos x$

طبق نکته فوق معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲x = ۲\cos^2 x \Rightarrow ۲\cos^2 x - ۳\cos x = ۲\cos^2 x$$

$$\Rightarrow ۲\cos^2 x - ۲\cos^2 x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos^2 x - ۳\cos x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱) \cos x = ۰ = \cos \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$۲) ۲\cos^2 x - ۳\cos x - ۲ = ۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1۶ + ۴۸} = ۶۴ = ۸$$

$$\Rightarrow \cos x = \begin{cases} \frac{۳+۸}{۲} = \frac{۱۱}{۲} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \frac{۳-۸}{۲} = \frac{-۵}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث نکته: $1 - \cos ۲x = ۲\sin^2 x$, $\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^3 x$

طبق نکته فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$۳\sin x - ۴\sin^3 x + ۲\cos ۲x = ۲ \Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^3 x = ۲ - ۲\cos ۲x = ۲(1 - \cos ۲x) \quad (*)$$

$$\Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^3 x = ۲ \times ۲\sin^2 x \Rightarrow ۴\sin^3 x + ۴\sin^3 x - ۳\sin x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x(۴\sin^2 x + ۴\sin^2 x - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱) \sin x = ۰ = \sin(۰) \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$۲) ۴\sin^2 x + ۴\sin^2 x - ۳ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x + ۳)(۲\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-۳}{۲} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ ۲k\pi + \frac{5\pi}{۶} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

۱۸ می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos \alpha$

$$\sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + ۲\cos(\frac{5\pi}{\lambda} - x) = ۳ \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - (\frac{5\pi}{\lambda} - x)) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{5\pi}{\lambda} + x) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + ۲\sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) - ۳ = ۰, \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = t$$

$$\Rightarrow t^2 + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱, t = -۳$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = -۳ \text{ غلطی قیاسی, } \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = ۱ \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{5\pi}{\lambda}$$

۱۹

الف نکته: $\begin{cases} 1 + \cos x = ۲\cos^2 \frac{x}{۲} \\ \sin x = ۲\sin \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲} \end{cases}$ بنابراین:

ب می‌دانیم: $\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1 - \cos ۲x}{۲} \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos ۲x}{۲} \end{cases}$ بنابراین:

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{۲\cos^2 \frac{x}{۲}}{۲\sin \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲}} = \frac{\cos \frac{x}{۲}}{\sin \frac{x}{۲}} = \frac{1}{\tan \frac{x}{۲}}$$

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{۲\cos^2(\frac{x}{۲})}{۲\sin^2(\frac{x}{۲})} = \cot^2(\frac{x}{۲}) = \frac{1}{\tan^2(\frac{x}{۲})}$$

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

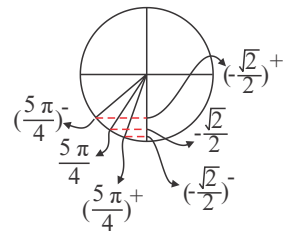


نکته: $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1 + \sin x} &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}} = \frac{2}{\left(\frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right) \left(\frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right)} \\ &= \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{\tan \frac{x}{2}}\right) \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + 1} \\ &= \frac{2}{2 + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\tan \frac{x}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + 1} \end{aligned}$$

با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^-} \frac{x-1}{\sqrt{2} \sin x + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\right) + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{-1 + \sqrt{2}\varepsilon + 1} \\ &= \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{+\sqrt{2}\varepsilon} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{0^+} = +\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+} \frac{x-1}{\sqrt{2} \sin x + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon\right) + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{-1 - \sqrt{2}\varepsilon + 1} \\ &= \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{-\sqrt{2}\varepsilon} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{0^-} = -\infty \end{aligned} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



توجه کنید که $\frac{5\pi}{4} - 1$ عددی مثبت است.

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x \rightarrow \pi$$

$$x - \pi = t \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + t \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{1 + \cos(\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{1 - \cos t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

* با توجه به این نکته که وقتی $t \rightarrow 0$ میل کند، $\sin t \sim t$ داریم:

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t(1 + \cos t)}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-(1 + \cos t)}{\sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos t}{\frac{\sin t}{t} \times t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos t}{t} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - \cos t}{t} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 - \cos t}{t} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد} \end{aligned}$$

$$\text{قاعده پرتوان: } ax^n + bx^{n-1} + \dots x \sim \pm \infty ax^n$$

با توجه به قاعده پرتوان داریم:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 - x^2 + 1}{2x^n - x^2 + 5} = \begin{cases} n < 2 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = -3 \\ n = 2 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x^2}{2x^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4 \\ n > 2 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{2x^n} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

صورت کسر را تجزیه می‌کنیم: (۲۳)

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2 + mx + 9}$$

حالت ۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$x^2 + mx + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 36 = 0 \Rightarrow m = \pm 6$$

$$m = 6 \Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2 + 6x + 9} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3}$$

فقط $x = -3$ مجانب قائم است. (که در این حالت بعد از ساده کردن کسر، ریشه مخرج مضاعف نیست.)

$$m = -6 \Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)^2}$$

فقط $x = 3$ مجانب قائم است.

حالت ۲) مخرج بر $x + 3$ بخش پذیر باشد

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow x^2 + mx + 9 = 0 \Rightarrow 9 - 3m + 9 = 0 \Rightarrow m = 6$$

این حالت در بالا بررسی شده است.

حالت ۳) مخرج بر $x + 1$ بخش پذیر باشد.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow x^2 + mx + 9 = 0 \Rightarrow 1 - m + 9 = 0 \Rightarrow m = 10$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2 + 10x + 9} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+9)} = \frac{x+3}{x+9}$$

فقط $x = -9$ مجانب قائم است.

حالت ۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد. (۲۴)

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 + mx + 6}$$

$$x^2 + mx + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 24 = 0 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$$

$$m = 2\sqrt{6} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 2\sqrt{6}x + 6} = \frac{x+2}{(x+\sqrt{6})^2}$$

فقط $x = -\sqrt{6}$ مجانب قائم است.

$$m = -2\sqrt{6} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 2\sqrt{6}x + 6} = \frac{x+2}{(x-\sqrt{6})^2}$$

فقط $x = \sqrt{6}$ مجانب قائم است.

حالت ۲: عبارت $x + 2$ از صورت و مخرج ساده شود، یعنی مخرج بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x^2 + mx + 6 = 0 \Rightarrow 4 - 2m + 6 = 0 \Rightarrow m = 5$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x+2}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

فقط $x = -3$ مجانب قائم است.

$$f(x) = \frac{\tan x}{2 \sin x - 1} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2 \sin x - 1} = \frac{\sin x}{\cos x(2 \sin x - 1)}$$



$$\cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

با توجه به این که هیچ کدام از مقادیر $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ صورت کسر یعنی $\sin x$ را صفر نمی کنند، پس همگی مجانب قائم هستند.

(۲۶) با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^m - (x-1)^m + x^m + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^m - x^m + 3x^m - 3x + 1 + x^m + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m-1)x^m + 4x^m - 3x + 3) = +\infty$$

$$\text{قابل قبول } m=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^1 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^1 = 4(-\infty)^1 = 4(+\infty) = +\infty$$

$$\text{حالت } m \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m-1)x^m + 4x^m - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m-1)x^m = (m-1)(-\infty)^m$$

$$\Rightarrow (m-1)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

در کل باید $m \leq 1$ باشد.

(۲۷)

الف) می دانیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+2} = 3$ ، حال باید ببینیم کسر $\frac{3x+1}{x+2}$ چگونه به ۳ میل می کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x+1}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x+6-5}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3(x+2)}{x+2} - \frac{5}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3 - \frac{5}{x+2} \right]$$

$$= \left[3 - \frac{5}{+\infty} \right] = [3 - 0^+] = [3 - \varepsilon] = 2$$

ب) می دانیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ ، حال باید ببینیم کسر $\frac{x+2}{x-1}$ چگونه به یک میل می کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x+2}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{3}{x-1} \right]$$

$$= \left[1 + \frac{3}{-\infty} \right] = [1 + 0^-] = [1 - \varepsilon] = 0$$

(۲۸) می دانیم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x+1}{x-2} = -2$ ، حال باید ببینیم $\frac{-2x+1}{x-2}$ چگونه به -۲ میل می کند، برای این کار -۲ برابر مخرج را در صورت ایجاد می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x+1}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x+4-3}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2(x-2)}{x-2} + \frac{-3}{x-2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-2 + \frac{-3}{x-2} \right]$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 + \frac{-3}{x-2} \right] = \left[-2 + \frac{-3}{+\infty} \right] = [-2 + 0^-] = [-2 - \varepsilon] = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-2 + \frac{-3}{x-2} \right] = \left[-2 + \frac{-3}{-\infty} \right] = [-2 + 0^+] = [-2 + \varepsilon] = -2 \end{cases}$$

(۲۹) با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n + mx^m + x^r - 1}{4x^m + x^r - 3} = -2$$

$$\text{جواب } m = -8 \Rightarrow n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^m}{4x^m} = \frac{m}{4} = -2 \Rightarrow m = -8 \Rightarrow n < 3, m = -8 \text{ حالت } 1$$



$$۲ \text{ حالت } n = ۳ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۲x^۳ + mx^۳}{۴x^۳} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(۲+m)x^۳}{۴x^۳} = \frac{۲+m}{۴} = -۲$$

$$\Rightarrow ۲ + m = -۸ \Rightarrow m = -۱۰ \Rightarrow n = ۳, m = -۱۰ \text{ جواب}$$

$$۳ \text{ حالت } n > ۳ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۲x^n}{۴x^۳} = \pm\infty \rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} mx^۳ + x^۳ + ۴x + ۴ - ۷x = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^۳ - ۳x + ۴) = +\infty$$

$$۱ \text{ حالت } m = -۱ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-۳x + ۴) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-۳x) = -۳(-\infty) = +\infty \text{ قابل قبول است.}$$

$$۲ \text{ حالت } m \neq -۱ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^۳ - ۳x + ۴) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m+1)x^۳ = (m+1)(-\infty)^۳$$

$$\Rightarrow (m+1)(+\infty) = +\infty \Rightarrow m+1 > ۰ \Rightarrow m > -۱$$

در کل باید $m \geq -۱$ باشد.

۳۱ با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm\infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^۳ + ۳x^۳ + ۳x + ۱ + mx^۳ - ۴x^۳ + ۲) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^۳ - x^۳ + ۳x + ۳) = +\infty$$

$$۱ \text{ حالت } m = -۱ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^۳ + ۳x + ۳) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^۳)$$

$$= -(-\infty)^۳ = -(+\infty) = -\infty \text{ غیر قابل قبول}$$

$$۲ \text{ حالت } m \neq -۱ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^۳ - x^۳ + ۳x + ۳) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m+1)x^۳$$

$$\Rightarrow (m+1)(-\infty)^۳ = (m+1)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m+1 < ۰ \Rightarrow m < -۱$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^۲}}, f(۰) = ۰$$

$$f'(۰) = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^۲}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sqrt{1 - 1 + x^۲}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}} = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{|x|}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}}$$

$$f'_-(۰) = \lim_{x \rightarrow ۰^-} \frac{-x}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}} = \lim_{x \rightarrow ۰^-} \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}} = \frac{-1}{\sqrt{۲}}$$

$$f'_+(۰) = \lim_{x \rightarrow ۰^+} \frac{x}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}} = \lim_{x \rightarrow ۰^+} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^۲}}} = \frac{1}{\sqrt{۲}}$$

تابع در $x = ۰$ مشتق ناپذیر است.

$$f(x) = \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۶}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{۶}\right)}{x - \frac{\pi}{۶}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۶}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{۶}}{x - \frac{\pi}{۶}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۶}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{x - \frac{\pi}{۶}}$$

$$x - \frac{\pi}{۶} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶} + t, t \rightarrow ۰$$

$$f'\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \lim_{t \rightarrow ۰} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{۶} + t\right) - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t} = \lim_{t \rightarrow ۰} \frac{\cos \frac{\pi}{۶} \cos t - \sin \frac{\pi}{۶} \sin t - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

۳۰

۳۲

۳۳



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{r}}{r} \cos t - \frac{1}{r} \sin t - \frac{\sqrt{r}}{r}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{r}}{r}(1 - \cos t) - \frac{1}{r} \sin t}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{r}}{r} \times r \sin^r\left(\frac{t}{r}\right)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{r} \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{r}\left(\frac{\sin \frac{t}{r}}{\frac{t}{r}} \times \frac{t}{r}\right)}{t} - \frac{1}{r} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{r} \times \frac{1}{r} t^r}{t} - \frac{1}{r} \times 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sqrt{r}}{r} t\right) - \frac{1}{r} = 0 - \frac{1}{r} = -\frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

۳۴

$$f(x) = \sin x, \quad f\left(\frac{\pi}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{r}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{r}\right)}{x - \frac{\pi}{r}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{r}}{x - \frac{\pi}{r}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\sin x - \frac{1}{r}}{x - \frac{\pi}{r}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x - \frac{\pi}{r} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{r} + t, \quad t \rightarrow 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{r}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{r} + t\right) - \frac{1}{r}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{r} \cos t + \cos \frac{\pi}{r} \sin t - \frac{1}{r}}{t}$$

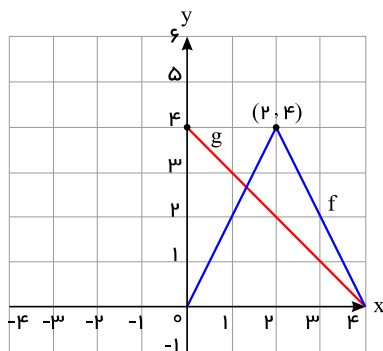
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{r} \cos t - \frac{1}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r} \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{r}(1 - \cos t) + \frac{\sqrt{r}}{r} \sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{r} \times r \sin^r\left(\frac{t}{r}\right) + \frac{\sqrt{r}}{r} \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{\sin \frac{t}{r}}{\frac{t}{r}} \times \frac{t}{r}\right)}{t} + \frac{\sqrt{r}}{r} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{r} t^r}{t} + \frac{\sqrt{r}}{r} \times 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{r} t\right) + \frac{\sqrt{r}}{r} = 0 + \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

۳۵

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطه آنها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(0, 0)$ و $(2, 4)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(2, 4)$ و $(4, 0)$ را بیابیم.



$$(0, 0), (2, 4) \Rightarrow m = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$$

$$(2, 4), (4, 0) \Rightarrow m = \frac{0 - 4}{4 - 2} = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x + 8 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(0, 4)$ و $(4, 0)$ را بیابیم.

$$(0, 4), (4, 0) \Rightarrow m = \frac{0 - 4}{4 - 0} = -1 \Rightarrow y - 0 = -1(x - 4) \Rightarrow y = -x + 4 \Rightarrow g(x) = -x + 4$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$f(1) = 2, \quad 0 < x < 2 \Rightarrow f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$



$$g(1) = 3, g(x) = -x + 4 \Rightarrow g'(x) = -1 \Rightarrow g'(1) = -1$$

$$h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + g'(1) \cdot f(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 6 - 2 = 4$$

تابع f در $x = 2$ مشتق ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x + 8 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

چون $f'(2)$ موجود نیست بنابراین $h'(2)$ نیز وجود ندارد.

$$f(3) = 2, f'(3) = -2, g(3) = 1, g'(3) = -1$$

$$h'(3) = f'(3) \cdot g(3) + g'(3) \cdot f(3) = -2 \times 1 + (-1) \times 2 = -4$$

(ب)

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

$$k'(1) = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 2}{3^2} = \frac{6 + 2}{9} = \frac{8}{9}$$

چون $f'(2)$ موجود نیست پس $k'(2)$ هم وجود ندارد.

$$k'(3) = \frac{f'(3)g(3) - g'(3)f(3)}{g^2(3)} = \frac{(-2) \times 1 - (-1) \times 2}{1^2} = \frac{-2 + 2}{1} = 0$$

گزینه «۲»

$$4f(a) = 2 \Rightarrow f(a) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, f'(a) = 2$$

$$(f^2(x) + \frac{1}{f(x)})' = 2f(x)f'(x) - \frac{f'(x)}{f^2(x)} \stackrel{x=a}{=} 2f(a)f'(a) - \frac{f'(a)}{f^2(a)} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 - \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 2 - 8 = -6$$

۳۷

$$y + 5x = 8 \Rightarrow y = -5x + 8 \Rightarrow \text{شیب} = -5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \text{شیب خط مماس بر منحنی داده شده} \Rightarrow \frac{1}{5} = \text{شیب خط عمود}$$

$$y = \frac{2x + 3}{1 - x} \Rightarrow y' = \frac{2(1 - x) - (-1)(2x + 3)}{(1 - x)^2} = \frac{2 - 2x + 2x + 3}{(1 - x)^2}$$

$$y' = \frac{5}{(1 - x)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow (1 - x)^2 = 5 \Rightarrow 1 - x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{2(-\sqrt{5}) + 3}{1 - (-\sqrt{5})} = \frac{-2\sqrt{5} + 3}{1 + \sqrt{5}} = -1 \Rightarrow A(-\sqrt{5}, -1)$$

$$x = \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{2 \times \sqrt{5} + 3}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} + 3}{1 - \sqrt{5}} = -3 \Rightarrow B(\sqrt{5}, -3)$$

۳۸

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 2 \xrightarrow{\text{مشتق}} (f \circ g)'(x) = 2x \Rightarrow g'(x) \cdot f'(g(x)) = 2x$$

$$2x^2 \times f'(x^2 + 1) = 2x \xrightarrow{x=-1} 2f'(\circ) = -2 \Rightarrow f'(\circ) = -\frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x + 1) - x^2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x + 2)(x + 1)^2 - 2x(x + 1)(x^2 + 2x)}{(x + 1)^4} = \frac{(x + 1)((2x + 2)(x + 1) - 2x(x + 2))}{(x + 1)^4}$$

۳۹



$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(1) = \frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{2^2} = \frac{2}{2} = 1$$

۴۰

$$f(x) = \sin x |\cos x|, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x |\cos x| - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x |\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t, \quad t \rightarrow 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t |\sin t|}{t}$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos t |\sin t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos t (-\sin t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} -\cos t \times \frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} -\cos t \times 1 = -1$$

$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t |\sin t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t \times \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t \times 1 = 1$$

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ مشتق ناپذیر است.

۴۱

$$f(x) = \begin{cases} [x] \sin|x| & x < 0 \\ x^2(|x| + [x]) & x \geq 0 \end{cases} \quad f(0) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] \sin|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] \sin(-x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-[x] \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -[x] \times 1 = -[0^-] = -(-1) = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(|x| + [x]) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(|x| + [x]) = 0$$

تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

۴۲

$$f(x) = \sqrt{|x+2|}, \quad f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{|x+2|} - 0}{x+2} \times \frac{\sqrt{|x+2|}}{\sqrt{|x+2|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{(x+2)\sqrt{|x+2|}}$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-(x+2)}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

تابع در $x = -2$ مشتق ناپذیر است.

تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۴۳

$$f(x) = 2x^2 - |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x \geq 0 \\ 2x^2 + x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x > 0 \\ 4x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 2 \times 0 + 1 = 1, \quad f'_+(0) = 2 \times 0 - 1 = -1 \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$x = 0$ بحرانی است زیرا مشتق ناپذیر است.

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{بحرانی است} \Rightarrow \text{قابل قبول}$$



بحرانی است $\Rightarrow$ قابل قبول $x = -\frac{1}{4} \Rightarrow f'(x) = 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

تابع سه نقطه بحرانی $x = 0$ ، $x = \frac{1}{4}$ ، $x = -\frac{1}{4}$ دارد.

۴۴

$$f(x) = x^2 + |x + 1| = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x \geq -1 \\ x^2 - x - 1 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > -1 \\ 2x - 1 & x < -1 \end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقطه $x = -1$ به دست آوریم.

$$f'_+(-1) = -1$$

$$f'_-(-1) = -3$$

بنابراین در نقطه $x = -1$ مشتق پذیر نیست از طرفی ریشه f' نقطه $x = -\frac{1}{4}$ و نقاط بحرانی تابع اند با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به سادگی

مینیمم مطلق مشخص می شود.

$$f(-1) = 1 \rightarrow \text{مینیمم مطلق}$$

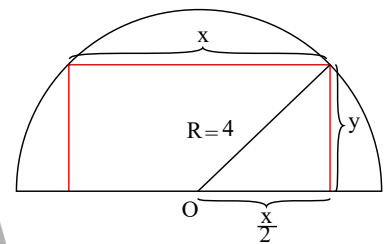
$$f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$f(-2) = 4 + 1 = 5$$

$$f(2) = 4 + 3 = 7 \rightarrow \text{ماکزیمم مطلق}$$

۴۵

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 &= 4^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 16 \\ y^2 &= 16 - \frac{x^2}{4} = \frac{64 - x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \end{aligned}$$



$$S = xy = x \times \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4}$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow 16 - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} \leq 16 \Rightarrow x^2 \leq 64 \Rightarrow -8 \leq x \leq 8 \quad (1)$$

$$x \geq 0 \xrightarrow{(1)} 0 \leq x \leq 8 \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4} \quad \text{دامنه} = [0, 8]$$

$$S'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{128x - 4x^3}{2\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 128x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(32 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm 4\sqrt{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow S(0) = 0, x = 4\sqrt{2} \Rightarrow S(4\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{64 \times 32 - 256 \times 4} = 16$$

$$x = 8 \Rightarrow S(8) = 0, \text{ مقدار ماکزیمم مساحت, } 16$$

به ازای $x = 4\sqrt{2}$ ، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$$x = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64 - 32} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

۴۶

$$f(0) = 0, \text{ حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 3x^2) = 0, \text{ حد راست} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0$$

تابع در $x = 0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x & x < 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2 \\ 2x - 6 & x > 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 0, f'_+(0) = 0 - 6 = -6 \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow x = 0 \text{ مشتق ناپذیر}$$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x = 3$ ، $x = -2$ ، $x = 0$



x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4, \quad x = 3 \Rightarrow f(3) = 9 - 18 = -9$$

نقطه $(-2, 4)$ ماکزیمم نسبی و نقطه $(3, -9)$ مینیمم نسبی است.

۴۷

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} \quad \text{نقطه عطف } A(1, 3)$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 3 \Rightarrow a+b = 6$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+a-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2ax-2b)(x^2+1)^2 - 2 \times 2x(x^2+1)(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)((-2ax-2b)(x^2+1) - 4x(-ax^2-2bx+a))}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-2ax-2b)(x^2+1) - 4x(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$\Rightarrow (-2a-2b) \times 2 - 4(-a-2b+a) = 0 \Rightarrow -4a-4b+4a+8b = 0 \Rightarrow -4a+4b = 0$$

$$\Rightarrow -4a+4b = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow a+b = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = b = 3$$

۴۸ تابع f در کل R پیوسته است.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x \times x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x^2+2x)(x^2+1)^2 - 2 \times 2x(x^2+1)(x^2+2x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)((2x^2+2x)(x^2+1) - 4x(x^2+2x^2))}{(x^2+1)^4} = \frac{4x^5+4x^3+2x^2+2x-4x^5-8x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 2x(1-3x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

عطف f'' فقط به صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج عبارتی همواره مثبت است.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x) = \frac{2x-6x^2}{(x^2+1)^3}$		$+$	0	$-$	$+$
		$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$

نقاط $x = 0$ و $x = \pm\sqrt{3}$ نقاط عطف تابع هستند.

۴۹ تابع f روی R پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+12}$$



$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 12) - 2x \times x^2}{(x^2 + 12)^2} = \frac{24x}{(x^2 + 12)^2}$$

$$f''(x) = \frac{24(x^2 + 12)^2 - 2 \times 2x(x^2 + 12) \times 24x}{(x^2 + 12)^4} = \frac{(x^2 + 12)(24x^2 + 24 \times 12 - 48x \times 24x)}{(x^2 + 12)^4}$$

$$f''(x) = \frac{24x^2 + 288 - 96x^2}{(x^2 + 12)^2} = \frac{288 - 72x^2}{(x^2 + 12)^2} = \frac{72(4 - x^2)}{(x^2 + 12)^2}$$

علامت f'' فقط به صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج آن عبارتی همواره مثبت است.

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f''(x) = \frac{72(4-x^2)}{(x^2+12)^2}$		-	+	-
		(	)	(

نقاط $x = \pm 2$ نقاط عطف تابع هستند.

در تابع درجه سوم مرکز تقارن همان نقطه عطف تابع است. (۵۰)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad \text{نقطه عطف } A(1, -1) \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a \quad (2)$$

$$x + 3y = 7 \Rightarrow 3y = -x + 7 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{شیب مماس در عطف} = 3 \Rightarrow f'(1) = 3 \Rightarrow 3a + 2b = 3 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow 3a + 2(-3a) = 3 \Rightarrow 3a - 6a = 3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3$$

$$(1) \Rightarrow -1 + 3 + c = -1 \Rightarrow c = -3$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow -a+b = 0 \Rightarrow a=b$$

طول نقطه تقاطع مجانب‌ها برابر با مجانب قائم و عرض این نقطه برابر با مجانب افقی است. پس داریم:

$$y = 1 \quad \text{مجانب افقی} \quad x = 2 \quad \text{مجانب قائم} \Rightarrow (2, 1) \text{ نقطه تقاطع مجانب‌ها}$$

$$cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c} = 2 \Rightarrow d = -2c$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c$$

$$d = -2c \xrightarrow{c=a} d = -2a$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+a}{ax-2a} = \frac{a(x+1)}{a(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$y = mx + n + \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{(x+2)(mx+n) + x^2 - 1}{x + 2}$$

$$y = \frac{mx^2 + nx + 2mx + 2n + x^2 - 1}{x + 2} = \frac{(m+1)x^2 + (n+2m)x + 2n-1}{x + 2}$$

$$m+1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow y = \frac{(n-2)x + 2n-1}{x + 2}$$

(۵۱)

(۵۲)



$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2, \quad y = \frac{n-2}{1} = n-2$$

$$\text{مرکز تقارن} = (-2, n-2), \quad y = x \Rightarrow n-2 = -2 \Rightarrow n = 0$$

