امیرکبیر، پاییز۹۱، میان‌ترم

سوال ۱: معادله زیر را حل کنید:

$$xy(\frac{dy}{dx})^2 - (2x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

سوال ۲: مسیرهای قائم دسته منحنی $(x-c)^2 + y^2 = c^2$ را بیابید.

سوال ۳: معادله زیر را حل کنید:

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^x(\cot x + \tan x).$$

سوال ۴: معادله زیر را با جای‌گزینی $u' = y^{۲}$ به یک معادله خطی مرتبه سوم تبدیل کنید، سپس حل کنید.

$$(y')^{۲} + yy'' = \frac{۶}{(x+۱)^{۲}} y^{۲}.$$

سوال ۵: معادله کلرویی بیابید که $y = x - x^{۳}$ جواب غیر عادی آن باشد.

۲- (۹۶ ,۷ ,۱۹)

معادله زیر را حل کنید.

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(2x^2+y^2)\frac{dy}{dx}+2xy=0$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{(2x^2+y^2)^2-4xy(2xy)}=\sqrt{(2x^2)^2+(y^2)^2+4x^2y^2-8x^2y^2}$$

$$=\sqrt{(2x^2-y^2)^2}=\pm(2x^2-y^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(-(2x^2+y^2)\right)\pm(2x^2-y^2)}{2(xy)}=\frac{2x^2+y^2\pm(2x^2-y^2)}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^2}{2xy}\quad(1)\quad,\qquad\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{2xy}\quad(2)$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow}\quad\frac{dy}{dx}=2\frac{x}{y}\quad\Rightarrow\quad y\,dy=2x\,dx\quad\Rightarrow\quad y^2/2=x^2+C$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\ln|y|=\ln|x|+\ln C$$

$$y=Cx$$

۱- مسیرهای قائم بر دسته منحنی $x^2+(y-c)^2=c^2$ را بیابید.

حل: از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$2x+2y'(y-c)=0 \Rightarrow c=\frac{x}{y'}+y$$

با جایگذاری عبارت $c=\frac{x}{y'}+y$ در معادله $x^2+(y-c)^2=c^2$ داریم:

$$x^2+\left(y-\frac{x}{y'}-y\right)^2=\left(\frac{x}{y'}+y\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2+\frac{x^2}{(y')^2}=\frac{x^2}{(y')^2}+\frac{2xy}{y'}+y^2$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{2xy}{y'}+y^2 \Rightarrow \frac{1}{y'}=\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

حال بجای y'، $-\frac{dx}{dy}$ را می‌گذاریم:

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

معادله بدست آمده همگن است، پس از تغییر متغیر $y=ux$ استفاده می‌کنیم:

$$-(u'x+u)=\frac{x^2-u^2x^2}{2ux^2} \Rightarrow -u'x-u=\frac{1-u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow -u'x=\frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow -\frac{du}{dx}x=\frac{1+u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow \int\frac{2u\,du}{1+u^2}=\int-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(1+u^2)=-\ln x+\ln c_1$$

$$\Rightarrow 1+u^2=\frac{c}{x} \underset{u=\frac{y}{x}}{\Longrightarrow} x^2+y^2=c_1x$$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را با $y^2 = u'$ به یک معادله خطی مرتبه سوم تبدیل کنید سپس حل کنید.

$$y'^2 + yy'' = \frac{6}{(x+1)^2} y^2 \Rightarrow \qquad y^2 = u'$$

$$2yy' = u''$$

$$2y'^2 + 2yy'' = u'''$$

$$2y'^2 + 2yy'' = \frac{12}{(x+1)^2} y^2 \Rightarrow \quad \times (x+1)^3$$

$$u''' = \frac{12}{(x+1)^2} u' \Rightarrow$$

$$(x+1)^3 u''' - 12(x+1)u' = 0 \qquad x+1 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \times \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \times 1$$

$$t^3 u^{(3)} - 12t u' = 0 \to t = e^z$$

معادله اویلر از مرتبه ۳

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) \times \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{1} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\left(D(D-1)(D-2) - 12D\right) u = 0$$

معادله ای با ضرایب ثابت مرتبه ۳ برحسب تابع u و متغیر z

$$r(r-1)(r-2) - 12r = 0$$

$$r(r^2 - 3r + 2 - 12) = 0 \Rightarrow r(r^2 - 3r - 10) = 0 \Rightarrow r(r-5)(r+2) = 0$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 5, \quad r_3 = -2$$

$$y_h = c_1 e^{0z} + c_2 e^{5z} + c_3 e^{-2z} \xrightarrow{z = \ln t}$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^{5\ln t} + c_3 e^{-2\ln t}$$

$$y_h = c_1 + c_2 t^5 + c_3 t^{-2} \xrightarrow{t = x+1}$$

$$y_h = c_1 + c_2 (x+1)^5 + c_3 (x+1)^{-2}$$

تمرینات تحویلی تاریخ : ۹۶/۸/۱۰ ؛ ج سوال ۲ :

$y = x - x^3 \qquad y' = 1 - 3x^2$

$y = xy' + f(y')$

$x - x^3 = x(1 - 3x^2) + f(y')$

$x - x^3 = x - 3x^2 + f(y')$

$2x^3 = f(1 - 3x^2)$

$1 - 3x^2 = t \Rightarrow x^2 = \frac{1-t}{3} \Rightarrow x^3 = \frac{1-t}{3}\sqrt{\frac{1-t}{3}}$

$f(t) = \frac{2}{3}(1-t)\sqrt{\frac{1-t}{3}} \Rightarrow f(y') = \frac{2}{3}(1-y')\sqrt{\frac{1-y'}{3}}$

$y = xy' + \frac{2}{3}(1-y')\sqrt{\frac{1-y'}{3}}$

معادله کلرو

امیرکبیر، بهار۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: معادله زیر را حل کنید و جواب غیرعادی (ویژه) آن را بیابید.

$$2xy' + y'^{3}y^{2} - y = 0.$$

سوال ۲: با یک عامل انتگرال‌ساز مناسب معادله زیر را حل کنید

$$(2xy\ln y)dx + (x^{2} + y^{2}\sqrt{y^{2}+1})dy = 0.$$

سوال ۳: جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورده، همچنین **فقط** فرم جواب خصوصی آن را بنویسید.

$$y^{(4)} + 2y'' + y = x(\cos x + \cosh x).$$

سوال ۴: اگر $y_1(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ یکی از جواب‌های معادله همگن نظیر معادله زیر باشد، با استفاده از تغییر پارامتر آن را حل کنید.

$$x^{4}y'' + 2x^{3}y' - y = 16e^{\frac{3}{x}}.$$

سوال ۵: مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله مقدار مرزی زیر را به دست آورید.

$$y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0.$$

راه‌نمایی: به ازای مقادیری از λ که معادله جواب غیربدیهی (غیر صفر) دارد.

سوال ۱ بهار ۹۲ :

معادله زیر را حل کنید و جواب غیر عادی (ویژه) آن را بیابید.

$$2xy' + y'^3 y^2 - y = 0$$

حل:

$$\Rightarrow x = \frac{y - y'^3 y^2}{2y'} \Rightarrow y' = p \Rightarrow x = \frac{y - p^3 y^2}{2p}$$

$$\Rightarrow dx = \left(\frac{1}{2p} - p^2 y\right) dy + \left(-\frac{y}{2p^2} - p y^2\right) dp$$

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{2p} - p^2 y\right) dy + \left(-\frac{y}{2p^2} - p y^2\right) dp$$

$$\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p} - p^2 y\right) dy + \left(-\frac{y}{2p^2} - p y^2\right) dp = 0$$

$$-\left(\frac{1}{2p} + p^2 y\right) dy - \frac{y}{p}\left(\frac{1}{2p} + p^2 y\right) dp = 0$$

$$\left(\frac{1}{2p} + p^2 y\right)\left(dy + \frac{y}{p} dp\right) = 0$$

$$\frac{1}{2p} + p^2 y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2p^3} \Rightarrow p = -\sqrt[3]{2y}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow \ln y = -\ln p + \ln c \Rightarrow y = \frac{c}{p} \Rightarrow p = \frac{c}{y}$$

با جایگذاری $p = -\sqrt[3]{2y}$ در معادله $x = \frac{y}{2p} - \frac{p^2 y^2}{2}$ ، جواب غیر عادی

با جایگذاری $p = \frac{c}{y}$ در معادله جواب عمومی حاصل می‌شود

$$x = \frac{y}{-2\times\sqrt[3]{2y}} + \frac{\sqrt[3]{2y}^{\,3} \times y^2}{-2\sqrt[3]{2y}} = \frac{y + 2y^3}{-\sqrt[3]{2^4 y}} = \frac{y + 2y^3}{-2y}$$ جواب غیرعادی

$$x = \frac{y}{2\left(\frac{c}{y}\right)} - \frac{\frac{c^2}{y^2}\cdot y^2}{2} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2c} - \frac{c^2}{2}$$ جواب عمومی

تمرینات حل شده در کلاس در تاریخ ۲۴ ,۷ ,۹۶

۱- با یک عامل انتگرال‌ساز مناسب معادلات زیر را حل کنید.

a)
$$\underbrace{(2xy\ln y)}_{M}dx + \underbrace{\left(x^2 + y^2\sqrt{1+y^2}\right)}_{N}dy = 0$$

$$M_y = 2x\ln y + 2x \qquad N_x = 2x$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2x - 2x\ln y - 2x}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y}$$

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$ عامل انتگرال‌ساز

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{y}} \quad 2x\ln y\, dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{1+y^2}\right)dy = 0 \quad \begin{cases} M_y = \frac{2x}{y} \\ N_x = \frac{2x}{y} \end{cases} \checkmark$$

معادله کامل است. به دنبال $\psi(x,y)$ هستیم که $\psi_x = M$ ، $\psi_y = N$

$$\psi_x = 2x\ln y \qquad (1)$$

$$\psi_y = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{1+y^2} \qquad (2)$$

نسبت به y: $$\psi = x^2\ln y + \frac{1}{3}(1+y^2)\sqrt{1+y^2} + g(x)$$

نسبت به x: $$\psi_x = 2x\ln y + 0 + g'(x) \qquad \underline{(1)\ \psi_x = 2x\ln y}$$

$$2x\ln y = 2x\ln y + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$$

$$\psi(x,y) = c$$ صورت جواب عمومی

$$\boxed{x^2\ln y + \frac{1}{3}(1+y^2)\sqrt{1+y^2} = c}$$

جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورده و متعاقباً فرم جواب خصوصی آن را بنویسید.

$$y^{(4)} + 2y'' + y = x(\cos x + \cosh x)$$

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

$$(r^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \pm i$$ با مرتبه تکرار ۲

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = x\cos x$$

$$y_3 = \sin x, \quad y_4 = x\sin x$$

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}xe^{-x} = f_1 + f_2$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$ طبق اصل برهم نهی داریم

$$y_{p_1} = (A + Bx)x^m e^x$$ $m = 0$ لذا ریشه معادله مشخصه نیست $\alpha = 1$

$$y_{p_2} = (A + Bx)x^m e^{-x}$$ $m = 0$ لذا ریشه معادله مشخصه نیست $\alpha = -1$

سؤال ۴ میانترم بهار ۹۲ :

اگر $y_1 = e^{-\frac{1}{x}}$ یکی از جواب‌های معادله همگن نظیر معادله زیر باشد با استفاده از تغییر پارامتر جواب آن را بیابید

$$x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 16 e^{3/x} \qquad y_1 = e^{-\frac{1}{x}}$$

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{1}{x^4} y = \frac{16}{x^4} e^{3/x}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} = e^{-\frac{1}{x}} \int \frac{1}{e^{-\frac{2}{x}}} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{x}} \int e^{\frac{2}{x}} \cdot e^{-2\ln x} dx = e^{-\frac{1}{x}} \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}} dx$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{2} e^{2/x}\right) = -\frac{1}{2} e^{1/x}$$

می‌توان $-\frac{1}{2}$ را در نظر نگرفت چون ضریب آن را در جواب عمومی می‌توان آورد. لذا $y_2 = e^{1/x}$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{x}} & e^{\frac{1}{x}} \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2 f}{w} = \int \frac{-e^{1/x} \times \frac{16}{x^4} e^{3/x}}{-\frac{2}{x^2}} = 8 \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{4}{x}} dx$$

$$v_1 = -2 e^{4/x}$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 f}{w} = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{16}{x^4} e^{3/x}}{-\frac{2}{x^2}} = -8 \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}} dx$$

$$v_2 = 4 e^{2/x} dx$$

$$y_g = c_1 e^{1/x} + c_2 e^{-1/x} + v_1 y_1 + v_2 y_2$$

امیرکبیر، پاییز۹۲، میان‌ترم

سوال ۱: الف) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y' = \frac{x}{x^{2}y + y^{2}}.$$

ب) اگر به ازای $y = 0$ داشته باشیم $x = 0$، آنگاه برای تابع جواب مقدار $\lim_{y\to 0}\frac{x^{2}}{y^{2}}$ را محاسبه کنید.

سوال ۲: مقدار k را طوری بیابید که $y = e^{kx}$ یک جواب معادله زیر باشد.

$$xy'' + (1 + x)y' + y = 0, x > 0$$

سپس جواب معادله را با شرط اولیه $y(1) = -1$ و $y'(1) = 1$ بیابید.

سوال ۳: اگر $w(\frac{1}{x}, y) = 3$، y را بیابید.

سوال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$x^{3}y''' - 3x^{2}y'' + 6xy' - y = x^{3}.$$

سوال ۵: با تغییر متغیر $z = \sin x$ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\cos x + \frac{dy}{dx}\sin x - 2y\cos^{3} x = 2\cos^{3} x.$$

۴- ۹۵/۱۲/۱۱

الف: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x}{x^2y+y^2}$ را حل کنید.

ب: [illegible]

ج: [illegible]

[illegible] $\lim \frac{x^2}{y^2}$

$$\underbrace{(x^2y+y^2)}_{N}\,dy - \underbrace{x}_{M}\,dx = 0 \qquad M_y = 0,\ N_x = 2xy$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2xy-0}{-x} = -2y \qquad \mu = e^{-\int 2y\,dy} = e^{-y^2}$$

$$\underbrace{e^{-y^2}(x^2y+y^2)}_{N}\,dy \underbrace{- x e^{-y^2}}_{M}\,dx = 0 \quad \begin{cases} M_y = 2xye^{-y^2} \\ N_x = 2xye^{-y^2} \end{cases}$$ حل

$$\psi_x = -x e^{-y^2} \quad ①$$

$$\psi_y = e^{-y^2}(x^2y+y^2) \quad ②$$

$$\psi = -\frac{x^2}{2}e^{-y^2} + g(y)$$

$$\psi_y = x^2y\,e^{-y^2} + g'(y) \xrightarrow{②} \psi_y = e^{-y^2}(x^2y+y^2)$$

$$e^{-y^2}\cancel{x^2y} + y^2e^{-y^2} = \cancel{x^2ye^{-y^2}} + g'(y)$$

$$g(y) = \int y\cdot y\,e^{-y^2}\,dy \quad \begin{cases} u = y \longrightarrow du = dy \\ ye^{-y^2}dy = dv \rightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-y^2} \end{cases}$$

$$g(y) = uv - \int v\,du = -\frac{1}{2}ye^{-y^2} + \frac{1}{2}\int e^{-y^2}dy$$

$\psi(x,y) = c$ [illegible]

$$\psi(x,y) = \boxed{-\frac{x^2}{2}e^{-y^2} - \frac{1}{2}ye^{-y^2} + \frac{1}{2}\int e^{-y^2}dy = c}$$

$y = e^{kx}$

سوال ۲ پاییز ۹۲ میانترم:

$xy'' + (1+x)y' + y = 0 \Rightarrow$ $\quad y(1) = -1,\ y'(1) = 1$

$k^2 x e^{kx} + (1+x) k e^{kx} + e^{kx} = 0 \Rightarrow$

$e^{kx}\left(k^2 x + (1+x)k + 1\right) = 0 \xrightarrow{k=-1}$

$e^{-x}\left(x - 1 - x + 1\right) \overset{\checkmark}{=} 0 \Rightarrow y = e^{-x}$

برای یافتن y_2 با استفاده از فرمول آبل:

$$y'' + \underbrace{\frac{1+x}{x}}_{p(x)} y' + \frac{1}{x} y = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

$$y_2 = e^{-x} \int \frac{1}{e^{-2x}} e^{-\int(\frac{1}{x}+1)dx} \cdot dx$$

$$y_2 = e^{-x} \int e^{2x} e^{-\ln x} \times e^{-x} dx$$

$$y_2 = e^{-x} \int \frac{e^x}{x} dx$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} \int \frac{e^x}{x}$$ $\quad y(1) = -1,\ y'(1) = 1$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} g(x)$$

$$-1 = y(1) = \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e} g(1)$$

$$1 = y'(1) = -\frac{c_1}{e} - \frac{c_2}{e} g(1) + \frac{c_2}{e} e$$

ج. $\Rightarrow c_2 = 0 \ ,\ c_1 = -e$

پاییز ۹۲ سوال ۳ :

$$w\left(\frac{1}{x}, y\right) = 3 \Rightarrow y = ?$$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & y \\ -\frac{1}{x^2} & y' \end{vmatrix} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 3$$

$$\Rightarrow y' - \frac{1}{x} y = 3x$$

$$\mu = e^{\int -\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x}} \int 3x \times \frac{dx}{x} + \frac{c}{\frac{1}{x}} \Rightarrow y = 3x^2 + cx$$

پاییز ۹۲ سوال ۴

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = x^3$$

$$x = e^u \Rightarrow u = \ln x$$

$$\big(D(D-1)(D-2) - 3D(D-1) + 6D - 6\big) y = e^{3u}$$

$$\big((D-1)(D^2 - 2D - 3D) + 6D - 6\big) y = e^{3u}$$

$$(D^3 - 5D^2 - D^2 + 5D + 6D - 6) y = e^{3u}$$

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6) y = e^{3u}$$

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0 \Rightarrow r = 1, 2, 3$$

$$y_h = c_1 e^u + c_2 e^{2u} + c_3 e^{3u} = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D-1)(D-2)} e^{3u}$$

از اپراتور معکوس

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(3-1)(3-2)} e^{3u} = \frac{1}{2(D-3)} e^{3u}$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^{3u} \frac{1}{(D+3-3)}\{1\} = \frac{1}{2} e^{3u} \underbrace{\frac{1}{D}}_{\text{انتگرال}}\{1\} = \frac{1}{2} u e^{3u}$$

$$y_p = \frac{1}{2} x^3 \ln x \Rightarrow y_g = y_h + y_p$$

سؤال ۵ . بهمن ۹۳

با تغییر متغیر $z=\sin x$ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cos x+\frac{dy}{dx}\sin x-2y\cos^2 x=2\cos^2 x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\xrightarrow{\frac{dz}{dx}=\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-z^2}}\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-z^2}\,\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(\sqrt{1-z^2}\,\frac{dy}{dz}\right)\xrightarrow{\frac{dz}{dx}=\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{dy}{dz}+\sqrt{1-z^2}\,\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-z\frac{dy}{dz}+(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}$$

با جایگذاری مشتقات در معادله داریم:

$$\left(-z\frac{dy}{dz}+(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}\right)+\left(\sqrt{1-z^2}\,\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$-2y(1-z^2)=2(1-z^2)$$

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2y(1-z^2)=2(1-z^2)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}-2y=2\Rightarrow m^2-2=0\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$$

$$y_h=c_1e^{\sqrt{2}z}+c_2e^{-\sqrt{2}z}$$

$$(D^2-2)y_p=2\Rightarrow y_p=\frac{2}{D^2-2}e^{0}=-1$$

$$y=c_1e^{\sqrt{2}z}+c_2e^{-\sqrt{2}z}-1=c_1e^{\sqrt{2}\sin x}+c_2e^{-\sqrt{2}\sin x}-1$$

امیرکبیر، بهار۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل کنید، سپس حل کنید.

$$(2x\cos^2 y)dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0.$$

سوال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$xy(\frac{dy}{dx})^2 - (2x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

سوال ۳: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $yy'' - y'^2 = y^4$ را با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ به دست آورید.

سوال ۴: n را چنان تعیین کنید که تغییر متغیر $y = x^n z$ معادله دیفرانسیل زیر را به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کند.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(x+2)\frac{dy}{dx} + 2(x+1)^2 y = e^{-x}\cos x.$$

سپس جواب عمومی معادله داده شده را بیابید و $\lim_{x\to\infty} y(x)$ را به دست آورید.

سوال ۵: جواب معادله دیفرانسیل زیر که با شرایط اولیه داده شده است را بیابید.

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 12\sin 2x - 4x, y(0) = 2, y'(0) = 5, y''(0) = -4.$$

با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله زیر را به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل کنید و سپس حل کنید.

$$(2x\cos^2 y)\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy = 0$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{\sin 2y}{2\cos^2 y}\,x = -\frac{y}{x\cos^2 y}$$

$$x' - p(y)\,x = q(y)\,x^{-1} \qquad n=-1$$ معادله برنولی

$$u = x^{1-(-1)} = x^2 \Rightarrow u' = 2x\,x'$$

$$\xrightarrow{\div x^{-1}} \quad x^2 x' - p(y)\,x^2 = q(y)$$

$$\frac{1}{2}u' - p(y)\,u = q(y)$$

$$u' - \frac{\sin 2y}{\cos^2 y}\,u = -\frac{2y}{\cos^2 y}$$ معادله خطی مرتبه اول

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\sin 2y}{\cos^2 y}dy} = e^{\ln(\cos^2 y)} = \cos^2 y$$

$$u = \frac{1}{\mu}\int q(y)\,\mu + \frac{c}{\mu}$$

$$x^2 = u = \frac{1}{\cos^2 y}\int -2y\,dy + \frac{c}{\cos^2 y}$$

$$\boxed{x^2 = \frac{1}{\cos^2 y}\left(-y^2 + c\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + y^2 \pm \sqrt{4x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 8x^2y^2}}{2xy}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2x^2 + y^2 \pm 2(x^2 - y^2)}{2xy} = \dfrac{4x^2 - y^2}{2xy} & (1) \\[2ex] \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2x^2 + y^2 - 2x^2 + 2y^2}{2xy} = \dfrac{3y}{2x} & (2) \end{cases}$$

(1) $y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$

$$\Rightarrow v'x + v = \frac{4 - v^2}{2v} \Rightarrow v'x = \frac{4 - 3v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v\,dv}{4 - 3v^2} \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{3}\ln|4 - 3v^2| + \ln c$$

$$\Rightarrow x = \frac{c}{\sqrt{4 - 3\frac{y^2}{x^2}}}$$

(2) $3y\,dy = 2x\,dx \Rightarrow \frac{3}{2}y^2 = x^2 + c$

۳- عبار، ۹۳ میانترم

$$yy'' - y'^2 = y^4 \qquad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

فاقد x

$$y'=p,\quad y''=p\frac{dp}{dy} \Rightarrow y \times p \times \frac{dp}{dy} - p^2 = y^4$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = p^{-1}y^3$$ معادله برنولی

$$z = p^{1+1} = p^2 \Rightarrow dz = 2p\,dp \Rightarrow z' = 2pp'$$

p^{-1}

$$pp' - \frac{1}{y}p^2 = y^3 \Rightarrow \frac{1}{2}z' - \frac{1}{y}z = y^3$$

$$z' - \frac{2}{y}z = 2y^3$$ معادله خطی

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

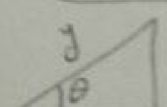
$$z = y^2\int \frac{1}{y^2}\times 2y^3\,dy + cy^2$$

$$y'^2 = y^4 + cy^2 \xrightarrow[y'(0)=0]{y(0)=1} 0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

$$y' = \sqrt{y^4 - y^2} \Rightarrow \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \pm dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \pm\int dx \xrightarrow[dy=\sec\theta\tan\theta]{y=\sec\theta} \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta \times \tan\theta}d\theta = \pm\int dx$$

$$\boxed{\theta = \pm x + c} \Rightarrow \sec^{-1}y = \pm x + c \xrightarrow{y(0)=1}$$



$$\sec\theta = y \Rightarrow \theta = \sec^{-1}y \qquad \sec^{-1}1 = c \Rightarrow c = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{y}$$

جواب صریح $\pm x = \sec^{-1}y \Rightarrow y = \sec x$

تمرینات مکمل فصل سوم

$$y = x^n z$$

$$y' = n x^{n-1} z + x^n z'$$

$$y'' = n(n-1) x^{n-2} z + 2n x^{n-1} z' + x^n z''$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$x^2 y'' + 2x(x+2) y' + 2(x+1)^2 y = e^{-x} \cos x$$

$$n(n-1) x^n z + 2n x^{n+1} z' + x^{n+2} z'' + 2n x^n (x+2) z$$

$$+ 2x^{n+1}(x+2) z' + 2(x+1)^2 x^n z = e^{-x} \cos x$$

$$x^{n+2} z'' + 2x^{n+1}(n+x+2) z' + x^n \left(n(n-1) + 2n(x+2) + 2(x+1)^2\right)$$

$$= e^{-x} \cos x$$

با جایگذاری $n = -2$ خواهیم داشت

$$z'' + 2z' + 2z = e^{-x} \cos x \Rightarrow$$

$$(D^2 + 2D + 2) z = e^{-x} \cos x$$

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

$$z_h = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y_h = \frac{z_h}{x^2} = \frac{e^{-x}}{x^2} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$ جواب عمومی همگن

محاسبه جواب z_p: (جواب خصوصی معادله ناهمگن) از روش اپراتور معکوس

$$z_p = \frac{1}{D^2 + 2D + 2} e^{-x} \cos x = e^{-x} \frac{1}{(D-1)^2 + 2(D-1) + 2} \cos x$$

$$z_p = e^{-x} \frac{1}{D^2 + 1} \cos x$$

ادامه پشت صفحه:

ادامه تمرین ۵ (شکل معمول سوم)

$$z = e^{-x}\frac{1}{D^2+1}e^{ix} = e^{-x}\frac{1}{(D-i)}\left(\frac{1}{D+i}e^{ix}\right) = e^{-x}\frac{1}{D-i}\cdot\frac{1}{2i}e^{ix} = \frac{e^{-x}}{2i}e^{ix}\frac{1}{D+i-i}\{1\}$$

$$z = \frac{x e^{-x}}{(D^2+1)'}\Big|_{D=i} e^{ix} = \frac{x e^{-x}}{2i}(\cos x + i\sin x) \qquad = \frac{e^{-x}}{2i}e^{ix}x$$

$$z = -\frac{i}{2}x e^{-x}\cos x + \frac{x}{2}e^{-x}\sin x = \frac{x e^{-x}}{2i}(\cos x + i\sin x)$$

چون در سمت راست دیفرانسیل $\cos x$ وجود ندارد پس قسمت حقیقی جواب معادله است.

$$\Rightarrow z_p = \frac{x}{2}e^{-x}\sin x \Rightarrow y_p = \frac{z_p}{x^2} = \frac{e^{-x}}{2x}\sin x$$

$$\Rightarrow z_g = z_h + z_p = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

$$\Rightarrow y_g = y_h + y_p = \frac{e^{-x}}{x^2}\left(c_1\cos x + \left(c_2 + \frac{x}{2}\right)\sin x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\cos x + c_2\frac{e^{-x}}{x^2}\sin x + \frac{e^{-x}}{x}\sin x\right)$$

$$= 0$$

سوال ۵ بهار ۹۳ میانترم

جواب معادله دیفرانسیل زیر که به شرایط اولیه داده شده است را بیابید.

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 12\sin 2x - 4x$$

$$y(0) = 2,\quad y'(0) = 5,\quad y''(0) = -4$$

$$(D^3 - 2D^2 + D - 2)y = 12\sin 2x - 4x = f_1 + f_2 \qquad y_p = y_{p_1}$$

... مربع عوض می‌کنیم

$$y_{p_1} = \frac{12}{D\cdot D^2 - 2D^2 + D - 2}\sin 2x \Rightarrow$$

$$y_{p_1} = \frac{12}{-4D + 8 + D - 2}\sin 2x \Rightarrow y_p = \frac{12}{-3D + 6}\sin 2x$$

$$y_{p_1} = 12\,\frac{-3D - 6}{9D^2 - 36}\sin 2x \Rightarrow y_p = 12\,\frac{-3D - 6}{-36 - 36}\sin 2x$$

$$y_{p_1} = \frac{12}{24}(D + 2)\sin 2x = \frac{1}{2\text{[illegible]}}(2\cos 2x + 2\sin 2x)$$

برای محاسبه y_{p_2} از روش ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = -4x$$

$$(r^3 - 2r^2 + r - 2) = 0 \Rightarrow r^2(r - 2) + (r - 2) = 0 \Rightarrow (r - 2)($$

$$\{2, \pm i\}$$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x$$

$$y_{p_2} = Ax + B \Rightarrow y_p' = A,\quad y_p'' = 0,\quad y_p''' = 0$$

$$0 - 0 + A - 2Ax - 2B = -4x \Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A =$$

$$A - 2B = 0 \Rightarrow 2 - 2B = 0 \Rightarrow B = 1$$

$$y_{p_2} = 2x + 1 \qquad \Rightarrow y_p = \frac{1}{12}(\cos 2x + \sin 2x) + 2x$$

$$y_g = y_h + y_p$$

امیرکبیر، پاییز۹۳، میان‌ترم

سوال ۱: اگر جواب معادله دیفرانسیل $x^{2}y^{2}y'+xy^{3}=2$ به صورت $y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{f(x)}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

سوال ۲: α و β را طوری بیابید که $x^{\alpha}y^{\beta}$ فاکتور انتگرال معادله زیر باشد، سپس آن را حل کنید.

$$x^{2}y^{3}+x(1+y^{2})y'=0.$$

سوال ۳: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و نشان دهید که جواب خصوصی معادله غیرهمگن به صورت $\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{x}f(s)\sinh\lambda(x-s)ds$ است.

$$y''-\lambda^{2}y=f(x).$$

سوال ۴: معادله زیر را حل کنید:

$$y^{(4)}-y=3te^{t}+4\cos t+8\sin t.$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$2y^{2}y''+2yy'^{2}=1.$$

1/ ۱) اگر جواب معادله‌ی دیفرانسیل $x^2y^2y'+xy^3=2$ به صورت $y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{f(x)}$ باشد، $f(x)$ را بیابید. (۱۲ نمره)

روش اول:

$x^2y^2y'+xy^3=2 \Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=y^{-2}\times\frac{2}{x^2} \Rightarrow$ معادله‌ی برنولی از مرتبه‌ی (-2)

$u=y^{1-(-2)} \Rightarrow u=y^3 \Rightarrow u'=3y'y^2$ (۴)

$u'+\frac{3}{x}u=\frac{6}{x^2} \Rightarrow$ خطی مرتبه‌ی اول

$y'+\frac{1}{x}y=\frac{2}{x^2}y^{-2} \Rightarrow \underbrace{3y^2y'}_{u'}+\frac{3}{x}\underbrace{y^3}_{u}=\frac{6}{x^2}$ (۲)

$u=e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left[\int\frac{6}{x^2}e^{\int\frac{3}{x}dx}dx+C\right]=e^{-3\ln x}\left[\int\frac{6}{x^2}e^{3\ln x}dx+C\right]$

$\Rightarrow u=\frac{1}{x^3}\left[\int\frac{6x^3}{x^2}dx+C\right]=\frac{1}{x^3}\left[\int 6x\,dx+C\right]=\frac{1}{x^3}\left[3x^2+C\right]$

$\Rightarrow u=\frac{3}{x}+\frac{C}{x^3} \Rightarrow y^3=\frac{3}{x}+\frac{C}{x^3} \Rightarrow y^3x^3=3x^2+C$ (*) (۵)

(۳)

$y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow \sqrt[3]{f(x)}=yx \Rightarrow f(x)=y^3x^3 \xrightarrow{(*)} f(x)=3x^2+C$

روش دوم:

(۲)

$y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow \sqrt[3]{f(x)}=yx \Rightarrow f(x)=y^3x^3 \Rightarrow f'(x)=3y'y^2x^3+3y^3x^2$ (۳)

(۳)

$\Rightarrow f'(x)=3x(\underbrace{x^2y^2y'+xy^3}_{=2\ \text{با توجه به صورت سوال}}) \Rightarrow f'(x)=3x(2)=6x \Rightarrow f(x)=\int 6x\,dx$ (۲)

$\Rightarrow f(x)=3x^2+C$ (۲)

(۲) α و β را طوری پیدا کنید که $x^{\alpha}y^{\beta}$ فاکتور انتگرال معادله‌ی زیر باشد، سپس آن را حل کنید. (۱۲ نمره)

$$x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$$

$F = x^{\alpha}y^{\beta} \Longrightarrow Fx^2y^3 + Fx(1+y^2)y' = 0$: (معادله‌ی کامل)

$$\Longrightarrow x^{\alpha+2}y^{\beta+3} + x^{\alpha+1}(1+y^2)y^{\beta}y' = 0 \Longrightarrow \underbrace{x^{\alpha+2}y^{\beta+3}}_{M}dx + (\underbrace{x^{\alpha+1}y^{\beta} + x^{\alpha+1}y^{\beta+2}}_{N})dy = 0 \quad (*)$$ (۲)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow (\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} = (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$ (۲)

تساوی فوق، باید به ازای هر x و y برقرار باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\alpha+1=0 \Longrightarrow \alpha=-1 \quad , \quad \beta+3=0 \Longrightarrow \beta=-3$$ (۲)

$$\xrightarrow[\alpha=-1,\ \beta=-3]{\text{جایگذاری در } (*)} \underbrace{x}_{M}dx + (\underbrace{y^{-3}+y^{-1}}_{N})dy = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = x \Longrightarrow u = \int x\,dx + q(y) \Longrightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + q(y) \quad (**)$$ (۲)

$$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + q'(y) \Longrightarrow N = q'(y) \Longrightarrow y^{-3} + y^{-1} = q'(y) \Longrightarrow \int (y^{-3}+y^{-1})dy = q(y)$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}y^{-2} + \ln y = q(y) \xrightarrow{(**)} u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2y^2} + \ln y \Longrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2y^2} + \ln y = C'$$ (۲)

$$\Longrightarrow x^2 - \frac{1}{y^2} + \ln y^2 = \underbrace{2C'}_{C} \Longrightarrow x^2 - \frac{1}{y^2} + \ln y^2 = C$$ (۲)

3

(۳) معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید و نشان دهید که جواب خصوصی معادله‌ی غیرهمگن آن به صورت $y=\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(s)\sinh\lambda(x-s)\,ds$ است. (۱۷ نمره)

$$y''-\lambda^2 y=f(x)$$

ابتدا y_h را به دست می‌آوریم:

$$y''-\lambda^2 y=0 \xrightarrow{\text{معادله‌ی مفسر}} t^2-\lambda^2=0 \Rightarrow t^2=\lambda^2 \Rightarrow t=\pm\lambda$$

$$\Rightarrow y_h=c_1\underbrace{\cosh\lambda x}_{y_1}+c_2\underbrace{\sinh\lambda x}_{y_2} \quad ۵$$

از آن جا که ضابطه‌ی $f(x)$ مشخص نیست، برای به دست آوردن y_p، از روش تغییر پارامترها کمک می‌گیریم.

$$y_1=\cosh\lambda x\ ,\ y_2=\sinh x \Rightarrow W=\begin{vmatrix}\cosh\lambda x & \sinh\lambda x\\ \lambda\sinh\lambda x & \lambda\cosh\lambda x\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow W=\lambda\underbrace{(\cosh^2\lambda x-\sinh^2\lambda x)}_{1} \Rightarrow W=\lambda \quad ۳$$

$$y_p=-y_1\int\frac{y_2 f(x)}{W}dx+y_2\int\frac{y_1 f(x)}{W}dx \quad ۲$$

$$\Rightarrow y_p=-\cosh\lambda x\int\frac{\sinh\lambda x\, f(x)}{\lambda}dx+\sinh\lambda x\int\frac{\cosh\lambda x\, f(x)}{\lambda}dx$$

$$\Rightarrow y_p=-\frac{\cosh\lambda x}{\lambda}\int_0^x f(s)\sinh\lambda s\,ds+\frac{\sinh\lambda x}{\lambda}\int_0^x f(s)\cosh\lambda s\,ds \quad ۴$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(s)\underbrace{[\sinh\lambda x\cosh\lambda s-\cosh\lambda x\sinh\lambda s]}_{\sinh\lambda(x-s)}ds$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(s)\sinh\lambda(x-s)\,ds \quad ۳$$

$\frac{4}{}$

④ معادله‌ی زیر را حل کنید. (۱۷ نمره)

$$y^{(4)}-y=3te^{t}+4\cos t+8\sin t$$

ابتدا y_h را به دست می‌آوریم:

$$y^{(4)}-y=0 \xrightarrow{\text{معادله‌ی مفسر}} \lambda^4-1=0 \Rightarrow \lambda^4=1 \Rightarrow \lambda^2=\pm 1$$

$$\begin{cases} \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1 \\ \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda=\pm i \end{cases} \Rightarrow y_h=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$ ⑤

برای به دست آوردن y_p، از روش ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم.

$$f(t)=\underbrace{3te^{t}}_{f_1(t)}+\underbrace{4\cos t+8\sin t}_{f_2(t)}$$

بنابراین $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$ می‌باشد. داریم:

y_{p_1}:

$$y_{p_1}=te^{t}(At+B)=(At^2+Bt)e^{t}$$

$$y'_{p_1}=(At^2+(2A+B)t+B)e^{t}$$

$$y''_{p_1}=(At^2+(4A+B)t+(2A+2B))e^{t}$$

$$y^{(3)}_{p_1}=(At^2+(6A+B)t+(6A+3B))e^{t}$$

$$y^{(4)}_{p_1}=(At^2+(8A+B)t+(12A+4B))e^{t}$$

$$y^{(4)}_{p_1}-y_{p_1}=f_1(t) \Rightarrow (8At+10A+4B)e^{t}=3te^{t}$$

$$\Rightarrow 8At+10A+4B=3t \Rightarrow \begin{cases} 8A=3 \Rightarrow A=\frac{3}{8} \\ 10A+4B=0 \Rightarrow B=-\frac{5}{2}A \Rightarrow B=-\frac{15}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{p_1}=(\frac{3}{8}t^2-\frac{15}{16}t)e^{t}$$ ④

ادامه‌ی پاسخ ۴

5

y_{p_2}:

$$y_{p_2} = t(C\cos t + D\sin t) = Ct\cos t + Dt\sin t$$

$$y'_{p_2} = (C+Dt)\cos t + (D-Ct)\sin t$$

$$y''_{p_2} = (2D-Ct)\cos t - (Dt+2C)\sin t$$

$$y^{(3)}_{p_2} = -(3C+Dt)\cos t + (Ct-3D)\sin t$$

$$y^{(4)}_{p_2} = (Ct-4D)\cos t + (Dt+4C)\sin t$$

$$y^{(4)}_{p_2} - y_{p_2} = f_2(t) \Longrightarrow -4D\cos t + 4C\sin t = 4\cos t + 8\sin t$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -4D = 4 \Rightarrow D = -1 \\ 4C = 8 \Rightarrow C = 2 \end{cases} \Longrightarrow y_{p_2} = 2t\cos t - t\sin t$$

$$\Longrightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{15}{16}t\right)e^t + 2t\cos t - t\sin t$$ ۴

$$\Longrightarrow y = y_h + y_p = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t + t\left(\left(\frac{3}{8}t - \frac{15}{16}\right)e^t + 2\cos t - \sin t\right)$$ ۲

توجه داشته باشید که از روش اپراتور معکوس نیز می‌توان برای به دست آوردن y_p استفاده کرد.

6

۵) جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل زیر را بیابید. (۱۲ نمره)

$$2y^2y'' + 2yy'^2 = 1$$

معادله فاقد x است یعنی به صورت $F(y, y', y'') = 0$ می‌باشد. بنابراین فرض می‌کنیم $y' = p$ می‌باشد. داریم:

$$y' = p \Rightarrow y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{dy} = y'\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2y^2 p\frac{dp}{dy} + 2yp^2 = 1 \Rightarrow \frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = p^{-1} \times \frac{1}{2y^2} \Rightarrow$$ معادله‌ی برنولی از مرتبه‌ی (-1)

$$\Rightarrow u = p^{1-(-1)} = p^2 \Rightarrow \frac{du}{dp} = 2p\frac{dp}{dy} \quad (2)$$

$$\frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = p^{-1} \times \frac{1}{2y^2} \Rightarrow \underbrace{2p\frac{dp}{dy}}_{\frac{du}{dy}} + \frac{2}{y}\underbrace{p^2}_{u} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{2}{y}u = \frac{1}{y^2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow u = e^{-\int \frac{2}{y}dy}\left[\int \frac{1}{y^2} e^{\int \frac{2}{y}dy} dy + C\right] = e^{-2\ln y}\left[\int \frac{1}{y^2} e^{2\ln y} dy + C\right]$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{y^2}\left[\int \frac{1}{y^2} \times y^2 dy + C\right] = \frac{1}{y^2}\left[\int dy + C_1\right] = \frac{1}{y^2}\left[y + C_1\right]$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{y} + \frac{C_1}{y^2} \Rightarrow p^2 = \frac{1}{y} + \frac{C_1}{y^2} \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{1}{y} + \frac{C_1}{y^2}} \quad (3)$$

$$\Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y} + \frac{C_1}{y^2}} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y + C_1}}dy = \pm dx \Rightarrow \int \frac{y}{\sqrt{y + C_1}}dy = \pm\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(y + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1(y + C_1)^{\frac{1}{2}} + C_2 = \pm x$$

$$\Rightarrow x = \pm\left(\frac{2}{3}(y + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1(y + C_1)^{\frac{1}{2}}\right) + C_2 \quad (3)$$

امیرکبیر، بهار ۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: معادله $y' = \dfrac{x + yy'}{x^2 y}$ را حل کنید.

سوال ۲: فاکتور (عامل) انتگرال‌ساز معادله زیر را یافته و سپس آن را حل کنید.

$$x(1 - y)dx + (y + x^2)dy = 0, \mu(x, y) = \mu(x^2 + y^2).$$

سوال ۳: جواب خصوصی معادله $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = e^{2y}$ را چنان تعیین کنید که جواب معادله در مبدا مختصات بر محور xها مماس باشد.

سوال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y'' - 2y' + y = x\cos x + e^x \ln x.$$

سوال ۵: فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب متفاوت خاص معادله زیر باشند.

$$y'' + y' - 2y = \sin(e^{\cos x} + \cosh(x^3 - x + \sqrt{2})),$$

$$y_1(0) = 4 + y_2(0), y_1'(0) = 1 + y_2'(0),$$

اگر $y_1(x) = y_2(x) + f(x)$، $f(x)$ را بیابید.

پاسخنامه میانترم بهار ۹۴

۱- معادله $y' = \frac{x+yy'}{x^2y}$ را حل کنید.

$$x^2yy' = x+yy' \Rightarrow yy' = \frac{x}{x^2-1}$$

$$y\,dy = \frac{x}{x^2-1}\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

۲- فاکتور (عامل) انتگرال ساز معادله زیر را یافته و سپس آن را حل کنید.

$$x(1-y)\,dx + (y+x^2)\,dy = 0 \qquad M_y = -x \,,\; N_x = 2x$$

$$\mu(x,y) = \mu(x^2+y^2) \qquad u = x^2+y^2 \qquad \mu = \mu(u)$$

$$\mu_x = \mu' \times u_x = \mu' \times 2x$$

$$\mu_y = \mu' \times u_y = \mu' \times 2y$$

معادله دیفرانسیل $M\,dx + N\,dy = 0$

معادله کامل $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$

$$M_y = N_x \Rightarrow \mu_y M + M_y \mu = \mu_x N + N_x \mu$$

$$2y\mu' M + M_y \mu = 2x\mu' N + N_x \mu$$

$$\mu'(2yM - 2xN) = \mu(N_x - M_y)$$

$$\mu' = \frac{N_x - M_y}{2yM - 2xN} = \text{تابعی از } u$$

$$\mu = e^{\int \frac{N_x - M_y}{2yM - 2xN}du}$$

$$g(u) = \frac{N_x - M_y}{2yM - 2xN}$$

$$g(u) = \frac{2x + x}{2y(x(1-y)) - 2x(y+x^2)}$$

$$g(u) = \frac{+3x}{\cancel{2xy} - 2xy^2 - \cancel{2xy} - 2x^3}$$

$$g(u) = \frac{+3x}{-2x(y^2+x^2)} = -\frac{3}{2u}$$

$$\mu = e^{\int -\frac{3}{2u}du} = e^{-\frac{3}{2}\ln u} = u^{-3/2} = \frac{1}{u^{3/2}}$$

$$x(1-y)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dx + (y+x^2)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dy = 0 \Rightarrow \text{معادله کامل}$$

$$\boxed{\frac{3}{2}(1-y)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = C}$$ جواب عمومی معادله

$$y'' = e^{2y} \Longrightarrow y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow p\frac{dp}{dy} = e^{2y} \Longrightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2}e^{2y} + c$$

$$\begin{matrix} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{matrix} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (y')^2 = e^{2y} - 1 \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}} = \pm dx$$

$$\Rightarrow u = e^y \Rightarrow \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \pm(x+k)$$

$$\Rightarrow \sec^{-1} e^y = \pm(x+k)$$

$$\Rightarrow y = \ln\sec(x+k)$$

$$y(0) = 0 \Longrightarrow k = 0 \Rightarrow y = \ln\sec x$$

۴- بهار ۹۴ میانترم

$$y''_p - 2y'_p + y_p = x\cos x + e^x \ln x$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_h = (C_1 + C_2 x)e^x = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$y''_p - 2y'_p + y_p = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\Rightarrow y''_1 - 2y'_1 + y_1 = x\cos x \Rightarrow (D^2 - 2D + 1)\, y_1 = x\cos x$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{D^2 - 2D + 1}(x\cos x)$$

$$\Rightarrow y_1 = x\frac{1}{D^2 - 2D + 1}\cos x - \frac{2(D-1)}{(D-1)^4}\cos x$$

$$\Rightarrow y_1 = x\frac{1}{-2D}\cos x - \frac{2}{D^3 - 3D^2 + 3D - 1}\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}x\sin x - \frac{2}{-D + 3 + 3D - 1}\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}x\sin x - \frac{2}{2D + 2}\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}x\sin x - \frac{D-1}{D^2 - 1}\cos x = -\frac{1}{2}x\sin x - \frac{D-1}{-2}\text{co}$$

$$= \frac{-1}{2}(x\sin x + \sin x + \cos x)$$

$$y_2'' - 2y_2' + y_2 = e^x \ln x \Rightarrow v_1(x) = e^x, \quad v_2(x) = xe^x$$

$$\Rightarrow W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \qquad y_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\Rightarrow u_1 = \int -\frac{v_2\, g(x)}{W}\, dx = \int \frac{-xe^x e^x \ln x}{e^{2x}}\, dx$$

$$= -\int x \ln x\, dx$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$$

$$u_2 = \int \frac{v_1\, g(x)}{W}\, dx = \int \frac{e^x e^x \ln x}{e^{2x}}\, dx = \int \ln x\, dx$$

$$= x\ln x - x$$

$$\Rightarrow y_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2 = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x\right)e^x + (x\ln x - x)\, xe^x$$

$$\Rightarrow y_p = y_1 + y_2 \qquad \Rightarrow \quad y = y_h + y_p$$

سؤال ۵ : فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب متفاوت خاص معادله زیر باشند.

$$y'' + y' - 2y = \sin\left(e^{\cos x} + \cosh(x^3 - x + \sqrt{2})\right)$$

$$y_1(0) = 4 + y_2(0) \quad , \quad y_1'(0) = 1 + y_2'(0)$$

اگر $y_1(x) = y_2(x) + f(x)$ ، $f(x)$ را بیابید.

حل :

$$y_1'' + y_1' - 2y_1 = g(x)$$

$$y_2'' + y_2' - 2y_2 = g(x)$$

$$(y_1'' - y_2'') + (y_1' - y_2') - 2(y_1 - y_2) = g(x) - g(x) = 0$$

$$(y_1 - y_2)'' + (y_1 - y_2)' - 2(y_1 - y_2) = 0$$

یعنی $f(x) = y_1 - y_2$ جواب معادله همگن است. یعنی

$$f(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow \cancel{\ldots}$$

$$(r+2)(r-1) = 0 \Rightarrow r = -2 , r = 1 \Rightarrow y_1 = e^{-2x} , y_2 = e^{x}$$

$$f(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} \qquad y_1(0) - y_2(0) = 4 = f(0)$$

$$f'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} \qquad y_1'(0) - y_2'(0) = 1 = f'(0)$$

$$-\begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$-3c_1 = -3 \Rightarrow c_1 = 1 , c_2 = 3$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2x} + 3e^{x}}$$

محمد

امیرکبیر، پاییز۹۴، میان‌ترم

سوال ۱: با استفاده از تغییر متغیر $y = z^{\alpha}$ معادله زیر را حل کنید:

$$(x - ۲y^{۳})dx + ۳y^{۲}(۲x - y^{۳})dy = ۰.$$

سوال ۲: معادله زیر را به یک معادله خطی تبدیل نموده و سپس آن را حل کنید.

$$(۱ + y^{۲})dx - (\sqrt{۱ + y^{۲}}\cos y - xy)dy = ۰.$$

سوال ۳: مسیرهای قائم دسته منحنی‌های زیر را بیابید.

$$r^{-۱} = \sin^{۲}\theta + c.$$

سوال ۴: معادله مرتبه دوم زیر را حل کنید:

$$y''\cos y + y'^{۲}\sin y - y' = ۰, y(-۱) = \frac{\pi}{۶}, y'(-۱) = ۲.$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله ناهمگن زیر را به دست آورید.

$$۲x^{۲}y'' + ۳xy' - y = \frac{۱}{x}.$$

۱-

$$z^{\alpha}=y \quad , \quad \alpha z^{\alpha-1}dz=dy$$

$$(x-2z^{3\alpha})dx+3z^{2\alpha}(2x-z^{3\alpha})(\alpha z^{\alpha-1}dz)=0$$

برای همگن بودن ضرایب dx , dz باید همگن از درجه یکسان باشند

$$3\alpha=1 \longrightarrow \alpha=\frac{1}{3} \quad , \quad y=z^{1/3}$$ ۵

$$(x-2z)dx+3z^{2/3}(2x-z)\left(\frac{1}{3}z^{-2/3}dz\right)=0$$

$$(x-2z)dx+(2x-z)dz=0$$

$$z=ux \quad , \quad dz=x\,du+u\,dx \longleftarrow$$ تغییر متغیر ۴

$$(x-2ux)dx+(2x-ux)(x\,du+u\,dx)=0$$

$$\frac{2-u}{1-u^2}du+\frac{dx}{x}=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}+\frac{3}{2}\int\frac{du}{1+u}+\int\frac{dx}{x}=0$$

$$\rightarrow \ln(1-u)^{1/2}(1+u)^{3/2}+\ln x+\ln c=0$$ ۴

$$\rightarrow cx\sqrt{(1-u)(1+u)^3}=1 \xrightarrow{u=\frac{z}{x}} cx\sqrt{\left(1-\frac{z}{x}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)^3}=1$$

$$\rightarrow cx\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt[3]{y}}{x}\right)\left(1+\frac{\sqrt[3]{y}}{x}\right)^3}=1$$ ۳

۲-

$$(1+y^2)\,dx - \left(\sqrt{1+y^2}\,\cos y - xy\right)dy = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}\,x = \frac{\cos y \cdot \sqrt{1+y^2}}{1+y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}\,x = \frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$$ خطی مرتبه اول ۷

$$\mu = e^{\int \frac{+y}{1+y^2}dy} = e^{+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)} = (1+y^2)^{+\frac{1}{2}} = \sqrt{1+y^2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\int \sqrt{1+y^2}\cdot\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy + c\right]$$ ۵

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\int \cos y\,dy + c\right] = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[\sin y + c\right]$$ ۳

-۳

$$r^{-1} = \sin^2\theta + c$$

مشتق نسبت به θ $\longrightarrow$ $-r^{-2}\dfrac{dr}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ 2

به جای $\dfrac{dr}{d\theta}$ عبارت $-r^{2}\dfrac{d\theta}{dr}$ قرار می‌دهیم

$$-r^{2}\cdot\left(-r^{2}\frac{d\theta}{dr}\right) = \sin 2\theta$$ 2

$$\frac{d\theta}{dr} = \sin 2\theta \longrightarrow \int dr = \int \frac{d\theta}{\sin 2\theta}$$ 3

$$r + c = \int \csc 2\theta \, d\theta$$

$$r + c = \frac{1}{2}\ln\left|\csc 2\theta - \cot 2\theta\right|$$ 3

-۴

$y' = p \quad , \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} p \cdot \frac{dp}{dy} \cdot \cos y + p^2 \sin y - p = 0$

$p \left(\frac{dp}{dy} \cos y + p \sin y - 1 \right) = 0$

$\Rightarrow p = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y = c$

۴

$\frac{dp}{dy} \cdot \cos y + p \sin y - 1 = 0$

$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos y} \frac{dp}{dy} + \tan y \cdot p = \frac{1}{\cos y}$

۳

خطی مرتبه اول برحسب y و p است

$\mu(y) = e^{\int \tan y \, dy} = e^{-\ln \cos y} = \frac{1}{\cos y}$

$p = \cos y \left[\int \frac{1}{\cos^2 y} dy + c \right] = \cos y \left[\int \sec^2 y \, dy + c \right]$

$p = \cos y \left[\tan y + c \right] = \sin y + c \cdot \cos y$

$y(-1) = \frac{\pi}{6} \quad , y'(-1) = 2 \longrightarrow \sin \frac{\pi}{6} + c \cos \frac{\pi}{6} = 2 \longrightarrow c = \sqrt{3}$

۳

ادامه سوال ۴

$$P = \sin y + \sqrt{3}\cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin y + \sqrt{3}\cos y \rightarrow \frac{dy}{\sin y + \sqrt{3}\cos y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\sin y + \sqrt{3}\cos y} = \int dx \rightarrow \int \frac{dy}{(\tan y + \sqrt{3})\cos y} = x + C$$

فرمول مثلثاتی $\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{\cos y\,(\tan y + \tan\frac{\pi}{3})} = x + C$$

$$\int \frac{dy}{\cos y\left(\dfrac{\sin(y+\frac{\pi}{3})}{\cos y \cdot \cos\frac{\pi}{3}}\right)} = x + C \rightarrow \int \frac{\cos \pi/3}{\sin(y+\frac{\pi}{3})}\,dy = x + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\int \csc(y+\tfrac{\pi}{3})\,dy = x + C \rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\csc(y+\tfrac{\pi}{3}) - \cot(y+\tfrac{\pi}{3})\right| = x + C$$

۳

$$y(-1) = \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\csc(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{\pi}{3}) - \cot(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{\pi}{3})\right| = -1 + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\ln(1) = -1 + C \rightarrow C = 1$$

۲

$2x^2y''+3xy'-y=\frac{1}{x}$ — ۵

$\xrightarrow{x=e^{z}}\ y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}e^{-z}$ ۲

$r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0 \longrightarrow r_1=-1\ ,\ r_2=\frac{1}{2}$

$y_h=c_1x^{-1}+c_1x^{\frac{1}{2}}$ ۴

$y_p=Aze^{-z}\ ,\ y_p'=-Aze^{-z}+Ae^{-z}$ ۴

$y_p''=-Ae^{-z}+Aze^{-z}-Ae^{-z}=Aze^{-z}-2Ae^{-z}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}}\ \cancel{Aze^{-z}}-2Ae^{-z}+\frac{1}{2}(\cancel{-Aze^{-z}}+Ae^{-z})-\frac{1}{2}(\cancel{Aze^{-z}})=\frac{1}{2}e^{-z}$

$\longrightarrow -2Ae^{-z}+\frac{1}{2}Ae^{-z}=\frac{1}{2}e^{-z}$

$\longrightarrow -4Ae^{-z}+Ae^{-z}=e^{-z}$

$\longrightarrow -3A=1 \longrightarrow A=-\frac{1}{3}$

$\longrightarrow y_p=(-\frac{1}{3})\ln x\cdot\frac{1}{x}$ ۳

$y=y_h+y_p=\frac{c_1}{x}+c_2\sqrt{x}-\frac{\ln x}{3x}$ ۲

۵ – معادله کوشی - اویلر است (روش اپراتور معکوس)

$$x^2 y'' + \frac{3}{2} y' - y = \frac{1}{2x}$$

$$x = e^z \rightarrow y'' + \frac{1}{2} y' - y = \frac{1}{2x}$$ ۴

معادله مشخصه $\rightarrow r^2 + \frac{1}{2} r - 1 = 0 \rightarrow r_1 = \frac{1}{2} , r_2 = -1$

$$y_h = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}$$ ۴

$$(2D^2 + D - 1) y = e^{-z}$$

$$y_p = \frac{1}{2D^2 + D - 1} e^{-z}$$ ۳

$$y_p = \frac{z}{4D + 1} e^{-z} \Rightarrow y_p = -\frac{z}{3} e^{-z} = -\frac{\ln x}{3x}$$ ۴

امیرکبیر، بهار۹۵ ، میان‌ترم

سوال ۱: الف) نشان دهید اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$ همگن و کامل بوده و درجه همگنی آن برابر با ۱− نباشد، جواب عمومی آن $xM + yN = c$ خواهد بود.
ب) معادله زیر را حل کنید:

$$x(x^۲ + ۳y^۲)dx + y(y^۲ + ۳x^۲)dy = ۰.$$

راه‌نمایی: اگر تابع $f(x,y)$ همگن از درجه n باشد، $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$.

سوال ۲: پوشِ مسیرهای قائم (متعامد) جواب معادله زیر را بیابید.

$$yy'^۲ + xy' = ۱.$$

سوال ۳: معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + ۴y = g(x), y(۰) = ۱, y'(۰) = ۲,$$

که در آن

$$g(x) = \begin{cases} \sin x : ۰ \leq x \leq \dfrac{\pi}{۲} \\ ۰ : x > \dfrac{\pi}{۲} \end{cases}.$$

سوال ۴: از میان دسته جواب‌های زیر، با ذکر دلیل بررسی کنید کدام یک می‌توانند جواب معادله با ضرایب ثابت $y''' + ay'' + by' + cy = ۰$ باشند. برای جواب‌های ممکن مقادیر

a، b و c را بیابید.

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x+c_4}$$

$$y = c_1 \sin x + c_2 e^{x} \cos x + c_3 \tan x$$

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos x + c_3 \sin x \cos x$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = \ln(x^3) + 3.$$

۱- الف)

لم: اگر u_x و u_y همگن از درجه n باشند آنگاه u همگن از درجه‌ی n+1 است زیرا:

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy$$

$$du(\lambda x,\lambda y) = \underbrace{\lambda^{n} u_x}_{\text{همگن از درجه } n}(\lambda dx) + \lambda^{n} u_y(\lambda dy) = \lambda^{n+1} du(x,y)$$

$$\Longrightarrow \boxed{u(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{n+1} u(x,y)}$$

توجه: کسانی که به اثبات این موضوع اشاره نکردند نمره‌ای از دست نمی‌دهند ولی اگر u را همگن از درجه n در نظر بگیرند 3 نمره کسر می‌شود.

معادله $Mdx + Ndy = 0$ کامل است بنابراین تابعی مانند u وجود دارد به طوری که

$$du = Mdx + Ndy \Longrightarrow \begin{matrix} u_x = M \\ u_y = N \end{matrix}$$

از طرفی معادله همگن است بنابراین M و N همگن از درجه یکسان هستند مانند n پس طبق لم u همگن از درجه n+1 است و از اویلر داریم:

$$(n+1)u = xu_x + yu_y \Longrightarrow (n+1)u = xM + yN$$

$$n \neq -1 \Longrightarrow u = \frac{xM + yN}{n+1}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$u = \frac{xM + yN}{n+1} = c' \Longrightarrow \boxed{xM + yN = c}$$

ب) شرایط قسمت الف را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 6y \longrightarrow \text{معادله کامل است}$$

$$\begin{matrix} M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{3} M(x,y) \\ N(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{3} N(x,y) \end{matrix} \longrightarrow \text{معادله همگن از درجه ۳ است}$$

شرایط قسمت الف برقرار است پس جواب عمومی عبارت است از:

$$xM(x,y) + yN(x,y) = c$$

۲- در معادله به جای y' عبارت $-\frac{1}{y'}$ جایگزین می‌شود، در این صورت داریم:

$y - xy' = y'^2$ ۴

$\to y = xy' + y'^2$ معادله‌ی کلرو $\to y = Cx + C^2$ ۵

حال نسبت به C مشتق می‌گیریم $\to \begin{cases} x + 2C = 0 \\ y = Cx + C^2 \end{cases} \overset{C = -\frac{x}{2}}{\Longrightarrow} \to y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}$ ۵

۳- جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = \begin{cases} y_h + y_p, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ y_h, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ ۲

معادله مشخصه: $t^2 + 4 = 0 \longrightarrow t = \pm 2i \longrightarrow y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ۲

فرض می‌کنیم $y_1 = \cos 2x$ ، $y_2 = \sin 2x$ حال از روش تغییر پارامتر y_p را محاسبه می‌کنیم:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\cos^2 2x = 2$$ ۲

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot \sin x}{2} dx + y_2 \int \frac{y_1 \cdot \sin x}{2} dx$$ ۲

$$y_p = -\cos 2x \int \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{2} dx + \sin 2x \int \frac{(2\cos^2 x - 1)\sin x}{2} dx$$

$$y_p = -\cos 2x \left(\frac{\sin^3 x}{3}\right) + \sin 2x \left(-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos x}{2}\right)$$ ۴

$y(0) = 1 \longrightarrow y(0) = y_h(0) + y_p(0) = 1 \longrightarrow C_1 = 1$

$y'(0) = 2 \longrightarrow y'(0) = y_h'(0) + y_p'(0) = 2 \longrightarrow 2C_2 + \left(-\frac{2}{3} + 1\right) = 2 \longrightarrow C_2 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}$ ۲

۱- معادله‌ی کلی عبارت است از: $t^3+at^2+bt+c=0$

تابع $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x+c_4}$ جواب معادله‌ی فوق می‌باشد زیرا اگر تعریف کنیم

$$c_3e^{c_4}=c_5 \rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_5e^{3x}$$

به این صورت ۱، ۲، ۳ ریشه‌های معادله‌ی کلی خواهند بود بنابراین

$$t=1 \rightarrow 1+a+b+c=0$$
$$t=2 \rightarrow 8+4a+2b+c=0$$
$$t=3 \rightarrow 27+9a+3b+c=0$$
$$\rightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+2b+c=-8 \\ 9a+3b+c=-27 \end{cases}$$

با حل دستگاه داریم:

$$a=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \\ -27 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=-6 \quad , \quad b=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ 9 & -27 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=11 \quad , \quad c=-6$$

تابع $y=c_1\sin x+c_2e^x\cos x+c_3\tan x$ به دلیل وجود عبارت $\tan x$ نمی‌تواند جواب معادله باشد و از طرفی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی این تابع باید $\pm i$ و $1\pm i$ باشد که در این صورت معادله‌ی کلی باید دارای ۴ جواب باشد که این غیر ممکن است زیرا معادله‌ی کلی از درجه‌ی ۳ است.

تابع $y=c_1\sin 2x+c_2\cos x+c_3\sin x\cos x$ نیز به صورت $y=c_1\sin 2x+\frac{c_3}{2}\sin 2x+c_2\cos x$ قابل نمایش است یعنی $y=(c_1+\frac{c_3}{2})\sin 2x+c_2\cos x$ که اگر $c_4=c_1+\frac{c_3}{2}$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت: $y=c_4\sin 2x+c_2\cos x$ یعنی معادله‌ی کلی دارای ریشه‌های به صورت $\pm 2i$ و $\pm i$ است که این هم مانند گزینه‌ی قبل غیر ممکن است زیرا معادله‌ی کلی از درجه‌ی ۳ است.

۵ معادله کوشی - اویلر است پس از تغییر متغیر $x = e^{z}$ استفاده می‌شود:

$$x^{n} y^{(n)} = D(D-1)\cdots(D-n+1)$$

$$D(D-1)(D-2)y - 3D(D-1)y + 6Dy - 6y = 3z+3$$

$$(D^{3} - 6D^{2} + 11D - 6)y = 3z+3$$

معادله مشخصه

$$t^{3} - 6t^{2} + 11t - 6 = 0$$

$$\longrightarrow (t-1)(t-2)(t-3) = 0$$

$$y = y_h + y_p \quad , \quad y_h = C_1 e^{z} + C_2 e^{2z} + C_3 e^{3z} = C_1 x + C_2 x^{2} + C_3 x^{3}$$

برای یافتن y_p از اپراتور معکوس استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{f(D)}(3z+3)$$

صفرشدنی $f(D)$ نیست پس ۱ را بر $f(D)$ تقسیم می‌کنیم:

$$1 \;\big|\; -6 + 11D - 6D^{2} + D^{3}$$

$$-\frac{1}{6} - \frac{11}{36}D$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{6} - \frac{11}{36}D\,(3z+3) = -\frac{(z+1)}{2} - \frac{11}{12}$$

$$z = \ln x \Longrightarrow \boxed{-\frac{(\ln x + 1)}{2} - \frac{11}{2}}$$

امیرکبیر، پاییز۹۵، میان‌ترم

سوال ۱: الف) با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله زیر را حل کنید.

$$(x^3 \tan^2 y - 1) \tan y dx - x \sec^2 y dy = 0.$$

ب) حد جواب معادله دیفرانسیل فوق را وقتی $x \to 0$ بیابید.

سوال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$x^2 y' = 3(x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x} + xy.$$

سوال ۳: ابتدا جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله دیفرانسیل زیر را بیابید و سپس فقط فرم جواب خصوصی آن را بنویسید.

$$D^2(D^2+1)^3(D^2+D-2)y = x + x^2 \sin x + x^2 \sin x + x^2 e^{-2x} \cos x + x \cos x + x^3 e^{-2x} + 10.$$

سوال ۴: جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' + 4y = \begin{cases} \sin x & : 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & : x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

سوال ۵: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

الف) با استفاده از تغییر متغیر $z = z(x)$ نشان دهید که می‌توان معادله فوق را به معادله‌ای با ضریب ثابت تبدیل کرد، به شرط این که $\dfrac{Q' + ۲PQ}{Q^{\frac{۳}{۲}}}$ مقداری ثابت باشد و در این صورت داریم $z = \int \sqrt{Q}dx$.

ب) با استفاده از (الف) معادله دیفرانسیل زیر را به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کنید و سپس معادله به دست آمده را حل نمایید.

$$xy'' - y' + ۴x^۳y = ۰.$$

1

مرحله اول : خطی سازی معادله

با توجه به اینکه $(\tan y)' = \sec^2 y\, y'$ فرض می‌کنیم $u = \tan y$

$x^3u^3 - u - xu' = 0 \Rightarrow$ $n = 3$ معادله برنولی از مرتبه

3

بنابراین طرفین را در u^{-3} ضرب می‌کنیم و تغییر متغیر $v = u^{-2}$ را در نظر می‌گیریم.

$$x^3 - u^{-2} - xu^{-3}u' = 0 \xrightarrow[v' = -2u^{-3}u']{v = u^{-2}} x^3 - v + \frac{x}{2}v' = 0 \Rightarrow$$

معادله خطی برحسب v 3

و یا

با فرض $v = \tan^{-2} y$ داریم $v' = -2\tan^{-3} y \sec^2 y\, y'$ بنابراین کافی است

معادله را به فرم زیر درک کنیم.

$$x^3\tan^3 y - \tan y - x\sec^2 y\, y' = 0 \xrightarrow{x\tan^{-3} y} x^3 - \underbrace{\tan^{-2} y}_{v} - x\underbrace{\tan^{-3} y \sec^2 y\, y'}_{-\frac{v'}{2}} = 0$$

$$x^3 - v + \frac{x}{2}v' = 0$$

6

مرحله دوم : حل معادله خطی

$$v' - \frac{2}{x}v = -2x^2$$

$$F = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$v = \frac{1}{F}\left(\int Fq\,dx + c\right) \Rightarrow v = -2x^3 + cx^2$$

4

مرحله‌ی سوم : بازنویسی متغیر v برحسب y

$$v = u^{-2} = \frac{1}{\tan^2 y} = -2x^3 + cx^2 \quad (2) \quad \underset{x \to 0}{\Rightarrow} \tan y \to \infty \Rightarrow y = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

2

2. معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم

$$y' = 3\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{y}{x} \xrightarrow{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$ معادله همگن (4) $\Rightarrow$ تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu' \quad (2)$$

$$u + xu' = 3(1+u^2)\tan^{-1}u + u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = 3(1+u^2)\tan^{-1}u$$ جدایی پذیر (4)

$$\frac{du}{(1+u^2)\tan^{-1}u} = 3\frac{dx}{x} \overset{\int}{\Rightarrow} \ln \tan^{-1}u = 3\ln x + \ln c \quad (2)$$

$$\tan^{-1}u = cx^3 \Rightarrow u = \tan cx^3 \Rightarrow y = x\tan cx^3 \quad (2)$$

3

مرحله اول : تعیین جواب عمومی معادله همگن نظیر

$$D^2=0 \Rightarrow e^{0x},\ xe^{0x} \Rightarrow y_{h_1}=c_1+c_2x \quad 0.5$$

$$(D^2+1)^3=0 \xrightarrow{D=\pm i} \begin{matrix}\cos x\ \{1, x, x^2\}\\ \sin x\ \{1, x, x^2\}\end{matrix}$$

$$y_{h_3}=\cos x\,(c_3+c_4x+c_5x^2)+\sin x\,(c_6+c_7x+c_8x^2) \quad 1.5$$

$$(D^2+D-2)=0 \xrightarrow{(D+2)(D-1)=0} e^{-2x},\ e^{x} \Rightarrow y_{h_4}=c_9e^{-2x}+c_{10}e^{x} \quad 0.5$$

$$y_h=y_{h_1}+y_{h_2}+y_{h_3}+y_{h_4}$$ جواب عمومی همگن نظیر $\quad 0.25$

مرحله دوم : تعیین فرم جواب خصوصی با استفاده از روش ضرایب نامعین

طرف دوم معادله را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم و برای هر یک فرم جواب خصوصی می‌نویسیم

$$R_1(x)=x+10 \xrightarrow{D^*=0} y_{p_1}=x^2(a_{11}+a_{12}x) \quad 1$$

$$R_2(x)=x^2\sin x+x\cos x \xrightarrow{D^*=\pm i} y_{p_2}=x^3\left[\sin x\,(a_{21}+a_{22}x+a_{23}x^2)+\cos x\,(a_{24}+a_{25}x+a_{26}x^2)\right] \quad 3$$

$$R_3(x)=x^2e^{-2x}\cos x \xrightarrow{D^*=-2\pm i} y_{p_3}=e^{-2x}\left[\sin x\,(a_{31}+a_{32}x+a_{33}x^2)+\cos x\,(a_{34}+a_{35}x+a_{36}x^2)\right] \quad 3$$

$$R_4(x)=x^3e^{-2x} \xrightarrow{D^*=-2} y_{p_4}=x^1\cdot e^{-2x}(a_{41}+a_{42}x+a_{43}x^2+a_{44}x^3) \quad 2$$

$$0.25 \quad y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}$$

$$y=y_p+y_h$$

تعداد		
10	0.25	هر ثابت C_i با ضریب درست
18	0.5	هر ثابت a_{ij} با ضریب درست
1	0.25	$y_h=\sum y_{hi}$
1	0.25	$y_p=\sum y_{pi}$

4

مرحله اول: حل معادله در محدوده $0<x<\frac{\pi}{2}$

$$y''+4y=\sin x \qquad y(0)=1\,,\; y'(0)=2$$

$$y_h:\quad D^2+4=0 \xrightarrow{D=\pm 2i} y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$ 2

$$y_p=\frac{1}{D^2+4}(\sin x)=\frac{1}{-1+4}(\sin x)=\frac{1}{3}\sin x$$ 2

روش های دیگر برای محاسبه ی y_p نیز قابل قبول است.

1 $$y=y_h+y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ 2c_2+\frac{1}{3}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=\frac{5}{6} \end{cases}$$ 1

$$y=\cos 2x+\frac{5}{6}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

مرحله دوم: به دست آوردن شرایط در $x=\frac{\pi}{2}$ و حل معادله برای $\frac{\pi}{2}<x$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}\,,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{5}{3}$$ 2

$$y''+4y=0 \Rightarrow y_h=c_1'\cos 2x+c_2'\sin 2x$$ 1

$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3} \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_1'=-\frac{2}{3} \\ -2c_2'=-\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'=\frac{2}{3} \\ c_2'=\frac{5}{6} \end{cases}$$ 1

$$y=\begin{cases} \cos 2x+\frac{5}{6}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3}\cos 2x+\frac{5}{6}\sin 2x & \frac{\pi}{2}<x \end{cases}$$ 2

(5) تغییر متغیر $z = z(x)$ را در نظر می‌گیریم. $\left(y(x) \to y(z) \right)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = z'\dot{y} \qquad \left(\dot{y} = \frac{dy}{dz}\right)$$ (2)

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(z'\dot{y}) = z''\dot{y} + z'\frac{d}{dx}(\dot{y}) = z''\dot{y} + z'^2\ddot{y}$$ (2)

$$z'^2\ddot{y} + (z'' + Pz')\dot{y} + Qy = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \underbrace{\frac{z'' + Pz'}{z'^2}}_{A}\dot{y} + \underbrace{\frac{Q}{z'^2}}_{B}y = 0$$ (1)

برای اینکه معادله فوق با ضرایب ثابت باشد باید A, B اعداد حقیقی بدست آیند. با فرض $B=1$ داریم

$$z'^2 = Q \Rightarrow z' = \sqrt{Q} \Rightarrow \boxed{z = \int \sqrt{Q}\,dx}$$ (2)

به ازای $z(x)$ ~~...~~ فوق مقدار A را بدست می‌آوریم

$$z' = \sqrt{Q} \Rightarrow z'' = \frac{Q'}{2\sqrt{Q}}$$

فرض سوال یک عدد ثابت

$$A = \frac{z'' + Pz'}{z'^2} = \frac{\frac{Q'}{2\sqrt{Q}} + P\sqrt{Q}}{Q} = \frac{Q' + 2PQ}{2Q^{3/2}} = \frac{1}{2}C$$ (2)

بنابراین با توجه به شرط مسئله A نیز ثابت است و معادله به ضرایب ثابت تبدیل شده است. (1)

$$\ddot{y} + \frac{c}{2}\dot{y} + y = 0$$

ب) ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم.

$$y'' - \frac{1}{x}y' + 4x^2y = 0 \Rightarrow P = -\frac{1}{x},\ Q = 4x^2 \Rightarrow z = \int\sqrt{4x^2}\,dx = x^2$$ (1)

$$c = \frac{Q' + 2PQ}{Q^{3/2}} = \frac{8x + 2(-\frac{1}{x})(4x^2)}{8x^3} = 0$$ (2)

طبق الف

$$\ddot{y} + \frac{c}{2}\dot{y} + y = 0 \Rightarrow \ddot{y} + y = 0 \xrightarrow{D = \pm i} y = C_1\sin z + C_2\cos z$$ (2) (1)

$$y = C_1\sin(x^2) + C_2\cos(x^2)$$ (2)

شماره: ۱

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل

چهارشنبه ۹۶/۰۱/۳۰
مدت ۱۲۰ دقیقه

۱) نشان دهید که $y_1 = \frac{-1}{x}$ یک جواب معادله زیر است سپس آن را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$1 + xy + x^3y^2 - x^3y' = 0$$

۲) جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید. (۱۵ نمره)

$$x^2{y'}^2 + y^2 - 2xyy' - e^{-2y'} = 0$$

۳) معادله زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$y'' + y = secx$$

۴) با استفاده از تغییر متغیر $y^2 = u$ معادله زیر را به معادله کوشی تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$(xy' - y)^2 + x^2yy'' = \frac{1}{2}x^2$$

۵) دستگاه زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 + 4y_2 = e^x \\ y_2'' - y_1 - 3y_2 = -x \end{cases}$$

موفق باشید.

۱.

$$y_1' = \frac{1}{x^2}$$

$$1 + x(-\frac{1}{x}) + x^3(-\frac{1}{x})^2 - x^3(\frac{1}{x^2}) = 0$$

معادله ریکارتی که با استفاده از تغییر متغیر $y = \frac{1}{u} - \frac{1}{x}$ به معادله خطی تبدیل می شود.

$$1 + x(\frac{1}{u} - \frac{1}{x}) + x^3(\frac{1}{u} - \frac{1}{x})^2 - x^3(-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x^2}) = 0$$

$$x^3 u' + (x - 2x^2)u = -x^3$$

$$u' + (\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x})u = -1$$

$$u = e^{-\int(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x})dx}(c + \int -e^{\int(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x})dx} dx)$$

$$u = x^2 + cx^2 e^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{x^2 + cx^2 e^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x}$$

۲.

معادله داده شده را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(xy' - y)^2 - e^{-2y'} = 0$$

$$(xy' - y - e^{-y'})(xy' - y + e^{-y'}) = 0$$

$$xy' - y - e^{-y'} \Rightarrow y = xy' - e^{-y'} \Rightarrow y = cx - e^{-c}$$

$$xy' - y + e^{-y'} \Rightarrow y = xy' + e^{-y'} \Rightarrow y = cx + e^{-c}$$

$$(y - cx + e^{-c})(y - cx - e^{-c}) = 0$$

۳.

$$y'' + y = 0$$
$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 - i$$
$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
$$y_p = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

$$\begin{cases} u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x = 0 \\ u_1'(x)(-\sin x) + u_2'(x)(\cos x) = \sec x \end{cases}$$

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\tan x \Rightarrow u_1(x) = \int -\tan x dx = \ln \sin x$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = 1 \Rightarrow u_2(x) = x$$

$$y_p = (\ln \sin x) \cos x + (x) \sin x$$
$$y = y_h + y_p$$

۴.

$$u' = 2yy' \Rightarrow u'' = 2y'^2 + 2yy''$$
$$x^2 y'^2 + y^2 - 2xyy' + x^2 yy'' = \frac{1}{2} x^2$$
$$x^2 (y'^2 + yy'') - 2xyy' + y^2 = \frac{1}{2} x^2$$
$$x^2 u'' - 2xu' + 2u = x^2$$
$$x = e^z$$
$$\frac{d^2 u}{dz^2} - 3 \frac{du}{dz} + 2u = e^{2z}$$
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$
$$u_h = c_1 e^z + c_2 e^{2z} = c_1 x + c_2 x^2$$
$$u_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{2z} = \frac{1}{(D-1)(D-2)} e^{2z} = z e^{2z} = x^2 \ln x$$

راه حل دیگر: می توان یک جواب معادله را حدس زد $u = x$ و از طریق روش کاهش مرتبه به این جواب رسید $u = xt(x)$.

۵.

$$\begin{cases}(D^2+2)y_1+4y_2=e^x\\ -y_1+(D^2-3)y_2=-x\end{cases}$$

$$y_1=\frac{\begin{vmatrix}e^x & 4\\ -x & (D^2-3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(D^2+2) & 4\\ -1 & (D^2-3)\end{vmatrix}}\Rightarrow (D^6-D^2-2)=4x-2e^x \qquad (*)$$

$$y_1=y_h+y_p=c_1e^{\sqrt{2x}}+c_2e^{-\sqrt{2x}}+c_3\cos x+c_4\sin x+e^x-2x$$

$$y_2=-\frac{1}{4}y_1''-\frac{1}{2}y_1'+\frac{1}{4}e^x$$

$$y_2=-c_1e^{\sqrt{2x}}-c_2e^{-\sqrt{2x}}-\frac{c_3}{4}\cos x+\frac{c_4}{4}\sin x-\frac{1}{2}e^x+x$$

توضیح: اگر y_2 را از روش کرامر بدست آوردند، چون تعداد ثابت ها چهار تا باید باشد پس باید جوابهای بدست آمده را در یکی از معادلات دستگاه قرار دهند تا وابستگی ثابت ها مشخص شود.

راه حل دیگر: به روش حذفی هم می توان این مسئله را حل کرد. از اولین معادله دستگاه y_2 را بدست آورده و با مشتق گزفتن از آن مقادیر بدست آمده را در دومین معادله دستگاه قرار داده تا به (*) برسیم.

$M_y - N_x = -\ln y - 1 - 1 - \ln y = -2(1+\ln y)$ $\quad \frac{-2(1+\ln y)}{x(1+\ln y)} = -\frac{2}{x}$

$e^{+\int \frac{2}{x}} = \frac{1}{x^2}$

شماره: ۳۳۹

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل

چهارشنبه ۹۶/۸/۲۴

مدت ۱۱۰ دقیقه

---

۱) فاکتور انتگرالی برای معادله زیر به دست آورده و سپس حل کنید. (۱۶ نمره)

$$xy' + xy'\ln y = x\sin x + y\ln y$$

$dy(x + x\ln y) - (x\sin x + y\ln y)\,dx = 0$

$M = -(x\sin x + y\ln y)$ $\quad M_y = -(\ln y + 1)$

$N = x + x\ln y$ $\quad N_x = 1 + \ln y$

---

۲) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۱۶ نمره)

$y' = \sin x\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{\cos x}\right)$

$$yy'\cos x = \sin x(\cos x - y^2)$$

$y y' + \frac{1}{\cos x} y^2 = \sin x$

$u = y^2$

---

۳) جواب عمومی معادل زیر را بیابید.

$x + 1 = e^z$

جواب خصوصی را فقط از روش عملگر معکوس به دست آورید. (۱۶نمره)

$$(x+1)^3y''' + (x+1)^2y'' - 2(x+1)y' + 2y = x^2 + 1$$

$D(D-1)(D-2)y + (D(D-1))y - 2Dy + 2y = x^2 + 1$ $\quad (D-1)[D^2 - 2D + D - 2]y = x^2+1$

$-2(D-1)y$

$D(D-1)(D-2)y + (D(D-1))$

---

۴) با استفاده از تغییر متغیر $u = xy$ معادله زیر را حل کنید. (۱۶ نمره)

$u' = y + xy'$

$u'' = y' + y' + xy''$

$$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = xe^x$$

$xy'' + 2y' - 2xy' \quad u'' - 2y + 2y - 2xy' + (x-2)y = xe^x$

$u'' - 2(u' - y) + (xy - 2y) = xe^x$

$u'' - 2u' + \cancel{2y} + xy - \cancel{2y} = xe^x$

$u'' - 2u' + x\frac{u}{x} = xe^x$

$u'' - 2u' + u = xe^x$

---

۵) دستگاه زیر را حل کنید. (۱۶ نمره)

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 4x - y = \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = \cos x \end{cases}$$

$(2D - 4)x + (D-1)y = \sin t$

$(D+3)x + 1 = \cos t - 1$

موفق باشید

$\begin{vmatrix} \sin t & D-1 \\ \cos t - 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad -(D-1)(\cos t - 1)$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخ‌نامه آزمون میانترم معادلات دیفرانسیل آبان ۹۶

پاسخ سوال ۱

$$x(1+\ln y)dy-(x\sin x+y\ln y)dx=0$$

$$M=-(x\sin x+y\ln y) \qquad N=x(1+\ln y)$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-(\ln y+1)-(1+\ln y)}{x(1+\ln y)}=\frac{-2}{x}$$

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$ (۳ نمره)

با ضرب $\frac{1}{x^2}$ در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x}(1+\ln y)dy-\frac{1}{x^2}(x\sin x+y\ln y)dx=0$$

$$f=\int Ndy+\varphi(x)=\int\frac{1}{x}(1+\ln y)dy+\varphi(x)$$

$$f=\frac{1}{x}(y\ln y)+\varphi(x)$$ (۶ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}(y\ln y)+\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}(x\sin x+y\ln y)$$

$$\Rightarrow\varphi'(x)=\frac{-1}{x}\sin x \qquad \Rightarrow\varphi(x)=-\int\frac{1}{x}\sin xdx+c_1$$

$$f=\frac{y}{x}\ln y-\int\frac{1}{x}\sin xdx=c$$ (۷ نمره)

پاسخ سوال ۲

$$yy'\cos x=(\cos x-y^2)\sin x$$

$$y'=\frac{\sin x}{\cos x}(\cos x-y^2)$$

$$y'+y\tan x=y^{-1}\sin x$$

مادله‌ی برنولی می‌باشد.(۳ نمره)

$$u=y^2\Rightarrow u'=2yy'$$

$$u'+2(\tan x)u=2\sin x$$ (۳ نمره)

$$u=e^{-\int 2\tan xdx}(c+\int 2\sin xe^{\int 2\tan xdx}dx)$$

$$u=\cos^2x(c+\int 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx)$$ (۶ نمره)

$$u=y^2=\cos^2x(c-\frac{2}{\cos x}) \qquad \Rightarrow \qquad y^2=-2\cos x+c\cos^2x$$ (۴ نمره)

پاسخ سوال ۳

معادله داده شده کوشی اویلر است که با استفاده از تغییر متغیر $x+1=e^t$ به دست می‌آوریم.(۲ نمره)

$[D(D-1)(D-2)+D(D-1)-2D+2]y(t)=(e^t-1)^2+1$

$[D^3-3D^2+2D+D^2-D-2D+2]\,y(t)=e^{2t}-2e^t+2$ (۳ نمره)

$r^3-3r^2+2r+r^2-3r+2=0 \quad \Rightarrow \quad r^3-2r^2-r+2=0$

$r_1=-1 \quad , \quad r_2=1 \quad , \quad r_3=2$

$y_h=c_1e^{-t}+c_2e^t+c_3e^{2t}=c_1(x+1)^{-1}+c_2(x+1)+c_3(x+1)^2$ (۴ نمره)

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{1}{D^3-2D^2-D+2}(e^{2t}-2e^t+2) \\ &= t\frac{1}{3D^2-4D-1}(e^{2t})-2t\frac{1}{3D^2-4D-1}(e^t)+1 \\ &= \frac{t}{3}e^{2t}+te^t+1 \end{aligned}$$

(۵ نمره)

$\Rightarrow y=y_h+y_p$

$y=c_1(x+1)^{-1}+c_2(x+1)+c_3(x+1)^2+\frac{1}{3}(x+1)^2\ln(x+1)+(x+1)\ln(x+1)+1$ (۲ نمره)

پاسخ سوال ۴

$u'=y+xy' \quad \Rightarrow \quad u''=2y'+xy''$

حال در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$u''-2y+2y+2(-u'+y)+u-2y=xe^x$

$u''-2u'+u=xe^x$

$u''-2u'+u=0 \quad \Rightarrow \quad r^2-2r+1=0 \quad \Rightarrow \quad u_h(x)=(c_1+c_2x)e^x$ (۷ نمره)

$u_p(x)=\frac{1}{(D-1)^2}xe^x=x\frac{1}{(D-1)^2}e^x-\frac{2(D-1)}{(D-1)^4}e^x$

$u_p(x)=\frac{x^3}{2!}e^x-\frac{2x^3e^x}{3!}=\frac{x^3e^x}{6}$ (۷ نمره)

$xy=u_h+u_p=(c_1+c_2x)e^x+\frac{x^3e^x}{6}$ (۲ نمره)

پاسخ سوال ۵

$$\begin{cases} (2D-4)x+(D-1)y=\sin t \\ (D+3)x+y=\cos t \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \sin t & D-1 \\ \cos t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D-4 & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\sin t - (D-1)\cos t}{(2D-4)-(D-1)(D+3)} = \frac{\cos t - 2\sin t}{D^2+1}$$

$\Rightarrow \quad (D^2+1)x = \cos t - 2\sin t \qquad (I)$ (۴ نمره)

$(D^2+1)x = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = i \quad , \quad r_2 = -i$

$x_h = c_1\cos t + c_2 \sin t \qquad , \qquad x_p = t(A\cos t + B\sin t)$

با دو بار مشتق گرفتن از x_p و قرار دادن در I به دست می‌آوریم:

$-2A\sin t + 2B\cos t = \cos t - 2\sin t \quad \Rightarrow \quad A = 1 \quad , \quad B = \frac{1}{2}$

$x = x_h + x_p = c_1\cos t + c_2\sin t + t\cos t + \frac{1}{2}t\sin t$ (۶ نمره)

از دومین معادله دستگاه داریم:

$$y = \cos t - (D+3)(c_1\cos t + c_2\sin t + t\cos t + \tfrac{1}{2}t\sin t)$$

و از این رابطه y به دست می‌آید.(۶ نمره)

تذکر: اگر y را از روش کرامر به دست آوردید باید x و y را در یکی از معادلات دستگاه قرار دهید تا وضعیت ثابت‌ها مشخص گردد.

به نام خدا

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل

« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

نام و نام‌خانوادگی: پنج‌شنبه: ۹۷/۰۱/۳۰

شماره دانشجویی: مدت: ۱۲۰ دقیقه

۱- معادله زیر را حل کنید. (۱۴ نمره)

$$\left(xy\cos(x)+y\sin(x)+xe^{2y}\right)+\left(x\sin(x)+x^2e^{2y}-3\ln(y)\right)y'=0$$

۲- جواب عمومی معادله زیر را به‌دست آورید. (۱۴ نمره)

$$\left(2\cos(x)\right)y'=2\cos^2(x)-\sin^2(x)+y^2, \qquad y_1(x)=\sin(x)$$

[redacted]

۳- با استفاده از تغییر متغیر $y=\frac{1}{\sqrt{x}}u(x)$ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۱۶ نمره)

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=0$$

۴- الف) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم با ضرایب ثابت به فرم

$$y^{(4)}+a_3y^{(3)}+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

بیابید که توابع e^t ، te^t ، $e^{-t}\cos(2t)$ و $e^{-t}\sin(2t)$ در آن صدق کنند. (۹ نمره)

[redacted]

ب) با ضرایب به‌دست آمده در قسمت قبل، معادله ناهمگن زیر را حل کنید. (۹ نمره)

$$y^{(4)}+a_3y^{(3)}+a_2y''+a_1y'+a_0y=e^t$$

۵- تابع $y(t)$ را از دستگاه زیر به‌دست آورید. (۱۸ نمره)

$$\begin{cases} x'-y'=2x-2y+\sin(t) \\ x''+2y'+x=0 \end{cases}$$

موفق باشید

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخ‌نامه آزمون میانترم معادلات دیفرانسیل ۳۰ فروردین ۹۷

پاسخ سوال ۱ - معادله را به فرم زیر بازنویسی می کنیم:

$$(xy\cos x + y\sin x + xe^{2y})dx + (x\sin x + x^2e^{2y} - 3lny)dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\cos x + \sin x + 2xe^{2y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \sin x + x\cos x + 2xe^{2y}$$

معادله کامل است:(۳ نمره)

$$f(x,y) = \int Mdx + h(y) = \int (xy\cos x + y\sin x + xe^{2y})dx + h(y)$$

$$f(x,y) = xy\sin x + y\cos x - y\cos x + \frac{x^2}{2}e^{2y} + h(y) = xy\sin x + \frac{x^2}{2}e^{2y} + h(y)$$ (۵ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

$$x\sin x + x^2e^{2y} + h'(y) = x\sin x + x^2e^{2y} - 3lny$$

$$h(y) = -3\int lnydy = -3ylny + 3y$$ (۴ نمره)

$$xy\sin x + \frac{x^2}{2}e^{2y} - 3ylny + 3y = c$$ (۲ نمره)

پاسخ سوال ۲

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

$$y' = \cos x - \frac{u'}{u^2}$$ (۲ نمره)

$$2\cos x(\cos x - \frac{u'}{u^2}) = 2\cos^2 - \sin^2 x + (\sin x + \frac{1}{u})^2$$

$$-2\frac{u'}{u^2}\cos x = \frac{2}{u}\sin x + \frac{1}{u^2}$$

$$u' + \tan xu = \frac{-1}{2\cos x}$$ (۶ نمره)

$$\mu = e^{\int \tan xdx} = \sec x$$

$$u = \frac{1}{\sec x}\int \frac{-1}{2\cos x}\sec xdx + c] = \frac{-1}{2}\sin x + c\cos x$$ (۴ نمره)

$$y = \sin x + \frac{1}{\frac{-1}{2}\sin x + c\cos x}$$ (۲ نمره)

پاسخ سوال ۳

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} u$$

$$y' = \frac{-1}{2} x^{\frac{-3}{2}} u + x^{\frac{-1}{2}} u'$$

$$y'' = \frac{3}{4} x^{\frac{-5}{2}} u - x^{\frac{-3}{2}} u' + x^{\frac{-1}{2}} u''$$ (۳ نمره)

با جایگذاری در معادله داریم:

$$x^{\frac{-1}{2}} (u'' + u) = 0$$ (۷ نمره)

$$u'' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i$$ (۲ نمره)

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$ (۴ نمره)

پاسخ سوال ۴

الف)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1 + 2i \quad \lambda_4 = -1 - 2i$$ (۲ نمره)

$$(D-1)^2 (D+1-2i)(D+1+2i) y = (D^2 - 2D + 1)(D^2 + 2D + 5) y = 0$$ (۳ نمره)

$$(D^4 + 2D^2 - 8D + 5) y = 0$$

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} - 8y' + 5y = 0$$ (۲ نمره)

$$a_0 = 5, a_1 = -8, a_2 = 2, a_3 = 0$$ (۲ نمره)

ب)

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2 (D^2 + 2D + 5)} e^t$$ (۱ نمره)

$$= \frac{t^2}{2!} . \frac{1}{8} e^t = \frac{t^2}{16} e^t$$ (۴ نمره)

$$y_h = (c_1 + c_2 t) e^t + e^{-t} (c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t)$$ (۲ نمره)

$$y = y_h + y_p = \frac{t^2}{16} e^t + (c_1 + c_2 t) e^t + e^{-t} (c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t)$$ (۲ نمره)

پاسخ سوال ۵

$$\begin{cases} (D-2)x + (2-D)y = sint \\ (D^2+1)x + 2Dy = 0 \end{cases}$$

(۳ نمره)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-2 & \sin t \\ D^2+1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & 2-D \\ D^2+1 & 2D \end{vmatrix}} = 0$$

$$(D-2)(D^2 + 2D + 1) = 0$$ (۹ نمره)

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$y = c_1 e^{2t} + e^{-t} (c_2 + c_3 t)$$ (۶ نمره)

آزمون میان‌ترم معادلات دیفرانسیل
« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »
(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

چهارشنبه: ۹۷/۰۸/۲۳
مدت: ۱۲۰ دقیقه

نام و نام‌خانوادگی:
شماره دانشجویی:

۱- α و β را به‌گونه‌ای بیابید که $\mu(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرال ساز معادله زیر باشد و سپس معادله را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$$

۲- معادلات مرتبه اول زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$(x\ln(x))y'+y=\left(1+\frac{2}{x}\right)\ln(x)$$

$$y(\ln(x)-\ln(y))dx=[x(\ln(x)-\ln(y))-y]dy$$

۳- جواب عمومی معادله زیر را به‌دست آورید. (۱۵ نمره)

$$y''+(y')^2=2e^{-y}$$

۴- α را به‌گونه‌ای بیابید که جواب معادله زیر وقتی $x\to+\infty$ به صفر میل کند. (۱۰ نمره)

$$x^2y''+\alpha xy'+\frac{5}{2}y=0$$

۵- معادله زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y^{(3)}-2y''+y'+1=x^3+2\sinh(2x)$$

موفق

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخنامه آزمون میان ترم معادلات دیفرانسیل ۲۳ آبان ۹۷

پاسخ سوال ۱ -

$$(x^{\alpha}y^{\beta})[x^2y^3+(xy^2+x)y']=0 \Rightarrow \underbrace{(x^{\alpha+2}y^{\beta+3})}_{M}dx+\underbrace{(x^{\alpha+1}y^{\beta+2}+x^{\alpha+1}y^{\beta})}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=(\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=(\alpha+1)(x^{\alpha}y^{\beta+2}+x^{\alpha}y^{\beta})$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases}\beta+3=0\\ \alpha+1=0\end{cases} \Rightarrow \beta=-3, \qquad \alpha=-1$$

۵ نمره

$$xdx+(y^{-1}+y^{-3})dy=0 \longleftarrow$$ جداشدنی

$$f(x,y)=\int Mdx+h(y)=\int xdx+h(y)=\frac{x^2}{2}+h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N \Rightarrow h'(y)=y^{-1}+y^{-3} \Rightarrow h(y)=lny-\frac{1}{2}y^{-2}+c$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2}{2}+lny-\frac{1}{2}y^{-2}+c$$

۱۰ نمره

-□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

پاسخ سوال ۲-الف

$$(xlnx)y'+y=(1+\frac{2}{x})lnx \quad \xrightarrow{\div xlnx} \quad y'+\frac{1}{xlnx}y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$$ (۲ نمره)خطی مرتبه اول

$$\mu(x)=e^{\int\frac{dx}{xlnx}}=e^{\int\frac{du}{u}}=e^{lnu}=e^{ln(lnx)}=lnx$$

$$y=\frac{1}{lnx}[\int lnx(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})dx+c]$$

۳ نمره

□. $$\int\frac{lnx}{x}dx=\int zdz=\frac{z^2}{2}=\frac{(lnx)^2}{2}$$

□□. $$2\int\frac{lnx}{x^2}dx=2\int e^{-t}tdt=2(-te^{-t}-e^{-t})=-2(\frac{lnx}{x}-\frac{1}{x})$$

$$y=\frac{1}{lnx}(\frac{(lnx)^2}{2}-2\frac{lnx}{x}-\frac{2}{x}+c)$$

$$\Longrightarrow y=\frac{lnx}{2}-\frac{2}{x}-\frac{2x}{lnx}+\frac{c}{lnx}$$

۵ نمره

ب) معادله همگن است.

$$y(lnx-lny)dx-(x(lnx-lny)-y)dy$$
$$y=ux, dy=udx+xdu$$

۲ نمره

$$ux(lnx-ln(ux))dx=(x(lnx-ln(ux))-ux)(udx+xdu)$$
$$u(lnx-lnu-lnx)dx=(lnx-lnu-lnx-u)(udx+xdu)$$
$$ulnudx=-ulnudx-u^2dx-(lnu+u)xdu$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{lnu+u}{u^2}du=0$$

که معادله ای جدا شدنی است (۴ نمره)

$$lnx+lnu-\frac{lnu}{u}-u=c$$

(۳ نمره)

$$lnx+ln\frac{y}{x}-\frac{ln\frac{y}{x}}{y}x-\frac{y}{x}=c$$

(۱ نمره)

پاسخ سوال ۳

$y''+(y')^2=2e^{-y}$

معادله فاقد x است(۱ نمره)

$y'=p \quad y''=p.\frac{dp}{dy}$

$p.\frac{dp}{dy}+p^2=2e^{-y}$

$pp''+p^2=2e^{-y}$

معادله برنولی است(۴ نمره).

$u=p^2 \qquad , \qquad u^\circ=2pp^\circ \qquad u^\circ=\frac{du}{dy} \quad ,p^\circ=\frac{dp}{dy}$

$u^\circ+2u=4e^{-y}$

$\mu(y)=e^{2\int dy}=e^{2y}, \quad u=e^{-2y}[\int 4e^y dy+c_1]$

$u=e^{-2y}[4e^y+c_1] \quad \longrightarrow \quad p=\pm\sqrt{e^{-2y}[4e^y+c_1]}$ ۵ نمره

$y'=\frac{dy}{dx}=e^{-y}\sqrt{[4e^y+c_1]} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{e^{-y}\sqrt{[4e^y+c_1]}}=dx \quad \longrightarrow \quad \frac{dye^y}{\sqrt{[4e^y+c_1]}}=dx$

$z=4e^y+c_1 \qquad dz=4e^y dy$

۵ نمره $\frac{1}{2}\sqrt{[4e^y+c_1]}=x+c$

پاسخ سوال ۴

$x^2y''+\alpha xy'+\frac{5}{2}y \qquad x=e^z \quad , \quad z=lnx$

$y^{\circ\circ}+(\alpha-1)y^{\circ}+\dfrac{5}{2}$

$t^2+(\alpha-1)t+\dfrac{5}{2}$ ۱ نمره

$\Delta=(\alpha-1)^2-10$

$\Delta<0 \Longrightarrow y_h=x^{\eta}(c_1sin\beta lnx+c_2cos\beta lnx)\to\eta<0$

$\Delta=0 \Longrightarrow y_h=(c_0+c_1lnx)x^t\to t<0$

$\Delta>0 \Longrightarrow y_h=c_1x^{t_1}+c_2x^{t_2}\to t_1,t_2<0$

$\Delta<0:t=\dfrac{1-\alpha\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\eta\pm i\beta\to\eta=\dfrac{1-\alpha}{2}<0\to\alpha>1\to\alpha\in(1,\sqrt{10}+1)$

$\Delta=0\to\alpha^2-2\alpha-9=0\to\alpha=\pm\sqrt{10}+1\to t=\dfrac{1-\alpha\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\dfrac{1-\alpha}{2}<0\to\alpha>1\to\alpha=\sqrt{10}+1$

$\Delta>0:\alpha^2-2\alpha-9>0\to\alpha\in(-\propto,-\sqrt{10}+1)\cup(\sqrt{10}+1,\propto)$ ۳ نمره

$1)t=\dfrac{1-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}\to\dfrac{1-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}<0\to1-\alpha<-\sqrt{\Delta}$

$2)t=\dfrac{1-\alpha-\sqrt{\Delta}}{2}\to\dfrac{1-\alpha-\sqrt{\Delta}}{2}<0\to1-\alpha<\sqrt{\Delta}$

$1-\alpha<-\sqrt{(\alpha-1)^2-10}\to(1-\alpha)^2>(\alpha-1)^2-10\to0>-10$

$\alpha\in(-\propto,-\sqrt{10}+1)\cup(\sqrt{10}+1,\propto)$

$if\alpha\in(-\propto,-\sqrt{10}+1)\to1-\alpha+\sqrt{\Delta}>0$

در این حالت ریشه منفی ندارد. (۱ نمره)

$if\alpha\in(\sqrt{10}+1,\propto)\to1-\alpha-\sqrt{\Delta}<0$

پس ریشه حتما منفی است.(۱ نمره)

$1-\alpha+\sqrt{\Delta}=1-\alpha+\sqrt{(\alpha-1)^2-10}=1-\alpha+\sqrt{\alpha^2-2\alpha-9}$

ثابت میکنیم به ازای هر

$\alpha\in(1+\sqrt{10},\propto)$

داریم

$1-\alpha+\sqrt{\Delta}<0$

یعنی

$\sqrt{\Delta}<\alpha-1$

میدانیم

$(\alpha-1)^2 > (\alpha-1)^2 - 10 \to |\alpha-1| > \sqrt{(\alpha-1)^2-10}$
$(\alpha \in (1+\sqrt{10}, \propto) \to |\alpha-1| < \alpha-1)$
$\alpha - 1 > \sqrt{\Delta}$

۳ نمره
در نهایت اجتماع سه حالت بررسی شده بازه ی مورد نظر است.

$$\alpha \in (1, 1+\sqrt{10}) \quad , \quad \alpha = 1+\sqrt{10} \quad , \quad \in (1+\sqrt{10}, \propto) \Longrightarrow \alpha \in (1, \propto)$$

۱ نمره
پاسخ سوال پنج

$t^3 - 2t^2 + t = 0$
$t(t^2-2t+1) = 0 \to t(t-1)^2 = 0 \to t = 0, t = 1$

$y_h = c_0 + (c_1 + c_2 x)e^x$

(۴ نمره)

$g_1(x) = x^3 - 1 \to y_{p_1} = x^\lambda(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3), \lambda = 1$

$y'_{p_1} = b_0 + 2b_1 x + 3b_2 x^2 + 4b_3 x^3$
$y''_{p_1} = 2b_1 + 6b_2 x + 12b_3 x^2$
$y'''_{p_1} = 6b_2 + 24b_3 x$

$6b_2 + 24b_3 x - 4b_1 - 12b_2 x - 24b_3 x^2 + b_0 + 2b_1 x + 3b_2 x^2 + 4b_3 x^3 = x^3 - 1$
$b_3 = \frac{1}{4}, b_2 = 2, b_1 = 9, b_0 = 23$ (۲)

(۸ نمره)

$g(x) = 2 = 2.\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = e^{2x} - e^{-2x}$

$g_2(x) = e^{2x}, y_{p_2} = b_4 e^{2x}, g_3(x) = e^{-2x}, y_{p_3} = b_5 e^{-2x}$
$b_4 = \frac{1}{4}, b_5 = \frac{1}{2}$

(۵نمره)

$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = c_0 + c_1 e^x + c_2 x e^x + x(23 + 9x + 2x^2 + \frac{1}{4}x^3) + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} =$
$c_0 + c_1 e^x + c_2 x e^x + x(23 + 9x + 2x^2 + \frac{1}{4}x^3) + \cosh 2x$

(۳ نمره)

آزمون میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

نام و نام‌خانوادگی: **چهارشنبه: ۹۸/۰۱/۲۸**

شماره دانشجویی: **مدت: ۱۲۰ دقیقه**

۱- با استفاده از تغییر متغیر $u = x + y$ معادله زیر را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$y' + x(x+y) = x^3(x+y)^3 - 1$$

۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۱۵ نمره)

$$y(x^3e^{xy} - y)dx + x(x^3e^{xy} + y)dy = 0$$

۳- الف) معادله دیفرانسیلی بیابید که تنها دارای دو جواب مستقل خطی به فرم زیر باشد. (۶ نمره)

$$y_1(x) = x^3\sin(\ln(x)), \quad y_2(x) = x^3\cos(\ln(x))$$

ب) جواب عمومی معادله حاصل از قسمت (الف) را با تابع سمت راست $r(x) = x$ بدست آورید. (۹ نمره)

۴- با استفاده از تغییر متغیرهای $x = e^t$ و $y = u(t)e^t$ معادله زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$x^3y'' = (y - xy')^2$$

۵- الف) معادله زیر را با فرض این که xe^{2x} یکی از جوابهای آن باشد حل کنید. (۸ نمره)

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} - 5y'' + 36y' - 36y = 0$$

ب) تنها فرم جواب خصوصی معادله قسمت (الف) را با تابع سمت راست $r(x) = x^2 + e^{2x} - 2x\sinh(3x)$ بنویسید. (نیازی به محاسبه ضرایب در فرم جواب خصوصی نمی باشد.) (۷ نمره)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخ آزمون میان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۲۸ اردیبهشت ۹۸

پاسخ سوال ۱ـ

$$u' = 1 + y'$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$u' - 1 + xu = x^3u^3 - 1$$

$u' + xu = x^3u^3$ معادله برنولی است

$$v = u^{-2} \quad \Rightarrow \quad v' = -2u^{-3}u'$$

با تقسیم معادله بر u^3 داریم:

$$\begin{aligned}
&u^{-3}u' + xu^{-2} = x^3 \\
&-\frac{v'}{2} + xv = x^3 \\
\Rightarrow & v' - 2xv = -2x^3 \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int -2xdx} = e^{-x^2} \\
\Rightarrow & v = e^{x^2}\left[\int e^{-x^2} \times -2x^{-3}dx + c\right] \\
\Rightarrow & v = e^{x^2}\left[x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c\right] = x^2 + 1 + ce^{x^2} \\
\Rightarrow & u^2 = \frac{1}{x^2 + 1 + ce^{x^2}} \quad \Rightarrow \quad x + y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}} \\
\Rightarrow & y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}} - x
\end{aligned}$$

پاسخ سوال ۲ـ

$$(x^3ye^{xy} - y^2)dx + (x^4e^{xy} + xy)dy) = 0$$

$$M_y = x^3e^{xy} + x^4ye^{xy} - 2y$$

$$N_x = 4x^3e^{xy} + x^4ye^{xy} + y$$

$$\frac{M_Y - N_x}{N} = \frac{x^3e^{xy} + x^4ye^{xy} - 2y - (4x^3e^{xy} + x^4ye^{xy} + y)}{x^4e^{xy} + xy}$$
$$= \frac{-3x^3e^{xy} - 3y}{x^4e^{xy} + xy} = \frac{-3(x^3e^{xy} + y)}{x(x^2e^{xy} + y)} = -\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = x^{-3}$$

با ضرب x^{-3} در معادله، معادله کامل می‌شود و داریم:

$$(ye^{xy} - x^{-3}y^2)dx + (xe^{xy} + x^{-2}y)dy = 0$$

$$\int (ye^{xy} - x^{-3}y^2)dx = e^{xy} + \frac{x^{-2}y^2}{2}$$
$$\int (xe^{xy} + x^{-2}y)dy = e^{xy} + \frac{x^{-2}y^2}{2} \qquad \Rightarrow e^{xy} + \frac{x^{-2}y^2}{2} = c$$

پاسخ سوال ۳ـ الف) قرار می‌دهیم $\ln x = t$ ($x = e^t$). داریم:

$$y_1 = e^{3t}\sin t, \quad y_2 = e^{3t}\cos t$$

پس معادله شاخص دارای ریشه مختلط $3 \pm i$ است یعنی معادله شاخص به‌فرم زیر است

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

پس معادله همگن به‌فرم $y'' - 6y' + 10y = 0$ است. در نتیجه

$$x^2y'' - 5xy' + 10y = 0$$

ب)

$$y_h = c_1x^3\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$$
$$y'' - 6y' + 10y = e^t$$
$$y_p = Ae^t \Rightarrow y' = Ae^t \Rightarrow y'' = Ae^t$$
$$Ae^t - 6Ae^t + 10Ae^t = e^t \Rightarrow 5Ae^t = e^t \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{5}e^t = \frac{1}{5}x$$
$$\Rightarrow y = y_h + y_p = y_h = c_1x^3\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) + \frac{1}{5}x$$

پاسخ سوال ۴ـ

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^tdt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}e^{-t})e^{-t} = -e^{-2t}\frac{dy}{dt} + e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}$$

از طرفی

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}e^t + ue^t$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt}e^t + ue^t$$

با جایگذاری در رابطه فوق و معادله خواهیم داشت:

$$u'' + u' = (u')^2 \quad \longrightarrow u' = p, \quad u'' = p\frac{dp}{du}$$
$$\Rightarrow p\frac{dp}{du} + p = p^2 \Rightarrow p\frac{dp}{du} + p - p^2 = 0 \Rightarrow p(\frac{dp}{du} + 1 - p) = 0$$
$$1) p = 0 \Rightarrow u' = 0 \Rightarrow u = c \Rightarrow y = ce^t = cx$$
$$2) \frac{dp}{du} = p - 1 \Rightarrow \frac{dp}{p-1} = du \Rightarrow \ln(p-1) = du$$
$$\Rightarrow ln(p-1) = u + c \Rightarrow u' = e^{u+c} + 1 \Rightarrow \frac{du}{e^{u+c}+1} = dt$$
$$\Rightarrow \frac{(e^{u+c} + 1 - e^{u+c})du}{e^{u+c}+1} = dt \Rightarrow u - \ln(e^{u+c} + 1) = t + k$$
$$\Rightarrow \frac{y}{x} - \ln(e^{\frac{y}{x}+c} + 1) = \ln x + k$$

پاسخ سوال ۵ــ الف) چون یک جواب معادله $y = xe^{2x}$ بوده، نتیجه می‌شود که $\lambda = 2$ ریشه دوبار تکراری معادله شاخص است که دوبار تکرار شده است یعنی یک عامل $(\lambda - 2)^2$ در معادله شاخص داریم. در نتیجه معادله شاخص به‌فرم زیر است.

$$(\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 9) = 0$$

پس $\lambda = \pm 3$ جواب‌های دیگر معادله شاخص هستند.

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-3x}$$

ب)

$$r_1(x) = x^2 \to y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C$$
$$r_2(x) = e^{2x} \to y_{p_2} = Dx^2e^{2x}$$
$$r_3(x) = -xe^{3x} \to y_{p_3} = x(Ex + F)e^{3x}$$
$$r_4(x) = -xe^{-3x} \to y_{p_4} = x(Gx + H)e^{-3x}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_{p_4}$$
$$= Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^{2x} + x(Ex + F)e^{3x} + x(Gx + H)e^{-3x}$$