

به نام خدا

سرای دانشجو

دانلود برترین جزوات و فیلم های دانشجویی

بامادرارتباط باشید



Website:

www.sarayedaneshjo.com

Email:

info.sarayedaneshjo@gmail.com

دانش اگر در ثریا هم باشد مردانی انر سرزمین پارس بدان دست خواهند یافت. رسول اکرم (ص)

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



دانشگاه بجنورد

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

تبدیلات لاپلاس

محسن کیان

Mohsen Kian

Email: kian@ub.ac.ir & kian@member.ams.org

url: <http://ub.ac.ir/Pages/Public/Teacher.aspx?TeacherID=88>

تبدیلات لاپلاس

یکی از روش‌هایی که برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می‌رود، استفاده از تبدیلات لاپلاس می‌باشد. تبدیلات لاپلاس در بسیاری از شاخه‌های دیگر علوم نیز کاربرد دارند.

۱.۱ تعریف تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۱.۱. یک تبدیل انتگرالی، رابطه‌ای است به صورت

$$F(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

که یک تابع مثل $f(t)$ را به یک تابع دیگر مثل F تبدیل می‌کند. K را هسته این تبدیل می‌نامند. دامنه F مجموعه همه s هایی است که به ازای آن‌ها انتگرال فوق وجود داشته باشد.

تبدیل لاپلاس نیز یک تبدیل انتگرالی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم تابع f روی بازه $[0, \infty)$ تعریف شده باشد. تبدیل لاپلاس f تابعی است مانند F که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

که در آن s متغیر تابع F است. دامنه تابع F مجموعه همه s هایی است که به ازای آن‌ها انتگرال ناسره فوق همگراست. یعنی s هایی که به ازای آن‌ها حد $\int_0^T e^{-sx} f(x) dx$ $\lim_{T \rightarrow \infty}$ وجود دارد. تبدیل لاپلاس تابع f را با نماد $\mathcal{L}[f(x)]$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s).$$

تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی. ابتدا تبدیل لاپلاس تعدادی از توابع مقدماتی را با استفاده

از تعریف تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم. در ادامه با استفاده از خواص تبدیلات لاپلاس، توابع بیشتری را بررسی کرده و جز در مواردی خاص، دیگر از تعریف استفاده نخواهیم کرد.

مثال ۳.۱.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = 1$ را به دست آورید.

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

مثال ۴.۱.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x$ را به دست آورید.

$$\mathcal{L}[x] = \int_0^{\infty} e^{-sx} x dx = -\frac{1}{s} x e^{-sx} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s^2} e^{-sx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}.$$

دقت کنید که در انتگرال فوق از روش جز به جز با $u = x$ و $dv = e^{-sx} dx$ استفاده کرده‌ایم. همچنین با فرض $s > 0$ داریم $-\frac{1}{s} x e^{-sx} \Big|_0^{\infty} = 0$ زیرا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-sx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{sx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{s e^{sx}} = 0.$$

مثال ۵.۱.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x^n$, ($n \in \mathbb{N}$) را به دست آورید.

حل. با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^n] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx \quad (x^n = u, \quad e^{-sx} dx = dv) \\ &= -\frac{1}{s} x^n e^{-sx} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{s} \mathcal{L}[x^{n-1}] \end{aligned}$$

اگر روابط فوق را برای تابع $f(x) = x^{n-1}$ به کار ببریم داریم $\mathcal{L}[x^{n-1}] = \frac{n-1}{s} \mathcal{L}[x^{n-2}]$. با ادامه این روند به دست می‌آوریم $\mathcal{L}[x^{n-2}] = \frac{n-2}{s} \mathcal{L}[x^{n-3}]$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^n] &= \frac{n}{s} \mathcal{L}[x^{n-1}] \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \mathcal{L}[x^{n-2}] \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \mathcal{L}[x^{n-3}] \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \dots \frac{n-(n-1)}{s} \mathcal{L}[x^{n-n}] \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \dots \frac{1}{s} \mathcal{L}[1] \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0). \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{بنابراین}$$

نکته ۶.۱.۱. اگر α یک عدد گویا باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[x^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$$

زیرا

$$\mathcal{L}[x^\alpha] = \int_0^\infty e^{-sx} x^\alpha dx = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}.$$

مثال ۷.۱.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = e^{ax}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{ax}] &= \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x} dx \\ &= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad (s > a). \end{aligned}$$

مثال ۸.۱.۱. تبدیل لاپلاس توابع $f(x) = \sin ax$ و $g(x) = \cos ax$ را به دست آورید.

حل. با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin ax] &= \int_0^\infty e^{-sx} \sin ax dx \quad (\sin ax = u, \quad e^{-sx} dx = dv) \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sx} \sin ax \Big|_0^\infty + \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-sx} \cos ax dx \\ &= \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-sx} \cos ax dx \end{aligned}$$

دقت کنید که $-\frac{1}{s} e^{-sx} \sin ax \Big|_0^\infty = 0$. زیرا تابع سینوس کراندار است و $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} = 0$. در نتیجه $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} \sin ax = 0$. برای حل انتگرال $\int_0^\infty e^{-sx} \cos ax dx$ ، دوباره از جز به جز استفاده می کنیم. با انتخاب $e^{-sx} dx = dv$ و $\cos ax = u$ داریم $du = -a \sin ax dx$ و $v = -\frac{1}{s} e^{-sx}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin ax] &= \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-sx} \cos ax dx \\ &= \frac{a}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-sx} \cos ax \Big|_0^\infty - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-sx} \sin ax dx \right) \\ &= \frac{a}{s} \left(-\left(0 - \frac{1}{s}\right) - \frac{a}{s} \mathcal{L}[\sin ax] \right) \\ &= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \mathcal{L}[\sin ax]. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}[\sin ax] + \frac{a^2}{s^2} \mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^2} \longrightarrow \mathcal{L}[\sin ax] \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right) = \frac{a}{s^2}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{\frac{a}{s^2}}{1 + \frac{a^2}{s^2}} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

نکته ۹.۱.۱. به طور خلاصه، تبدیل لاپلاس چند تابع مقدماتی به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1] &= \frac{1}{s}, \quad (s > 0) & \mathcal{L}[x] &= \frac{1}{s^2}, \quad (s > 0) \\ \mathcal{L}[x^n] &= \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (s > 0) & \mathcal{L}[e^{ax}] &= \frac{1}{s-a}, \quad (s > a) \\ \mathcal{L}[\sin ax] &= \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad (s > 0) & \mathcal{L}[\cos ax] &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad (s > 0) \end{aligned}$$

مثال ۱۰.۱.۱. با استفاده از روابط فوق داریم

$$\mathcal{L}[e^{4x}] = \frac{1}{s-4}, \quad \mathcal{L}[x^5] = \frac{5!}{s^6}, \quad \mathcal{L}[\cos 3x] = \frac{s}{s^2 + 9}, \quad \mathcal{L}[\sin 3x] = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

نکته ۱۱.۱.۱. برای اینکه تابعی مانند f دارای تبدیل لاپلاس باشد، یا اصطلاحاً لاپلاس‌پذیر باشد، شرط‌هایی لازم است که معمولاً در قضیه‌ای به نام وجود تبدیل لاپلاس مطرح می‌شوند. ما در اینجا به ذکر و اثبات این قضیه نمی‌پردازیم. فقط به بیان یک نکته اکتفا می‌کنیم که اگر تابع f لاپلاس‌پذیر باشد و $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ آنگاه $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$. به عبارت دیگر اگر $F(s)$ تابعی باشد که $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ آنگاه نمی‌توان تابعی مانند f یافت بطوری که $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$.

مثال ۱۲.۱.۱. چون $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^2+1}{s^2-4s+9} = 3$ ، بنابراین تابع $F(s) = \frac{3s^2+1}{s^2-4s+9}$ تبدیل لاپلاس هیچ تابعی نمی‌تواند باشد.

۲.۱ تبدیل معکوس لاپلاس

فرض کنید تابع f لاپلاس پذیر باشد و $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. در اینصورت تابع $f(x)$ را تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ می نامیم و می نویسیم $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$. بنابراین متناظر با هر رابطه برای تبدیل لاپلاس، یک رابطه برای تبدیل معکوس لاپلاس داریم.

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) \rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x).$$

به عنوان مثال، با استفاده از تبدیل لاپلاس توابع ذکر شده در بخش قبل، می توان تبدیل معکوس لاپلاس چند تابع را به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} &\implies \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \\ \mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} &\implies \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = x^n \\ \mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^2 + a^2} &\implies \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = \cos ax.\end{aligned}$$

مثال ۱.۲.۱

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^4}\right) = x^3, \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2 + 16}\right) = \sin 4x.$$

اکنون به بیان خواص تبدیلات لاپلاس می پردازیم که به کمک آنها می توانیم تبدیل لاپلاس توابع بیشتری را محاسبه کنیم. چون متناظر با هر رابطه برای تبدیل لاپلاس، یک رابطه برای تبدیل معکوس لاپلاس وجود دارد، ما خواص تبدیلات لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس را در کنار هم ذکر می کنیم.

۳.۱ خواص تبدیلات لاپلاس

۱. **خطی بودن.** تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد. یعنی اگر f و g دو تابع لاپلاس پذیر باشند و c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه باشند، آنگاه داریم

$$\mathcal{L}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathcal{L}[f(x)] + c_2 \mathcal{L}[g(x)].$$

نتیجه. تبدیل معکوس لاپلاس نیز خاصیت خطی دارد. یعنی برای هر دو تابع F و G و ثابت‌های c_1 و c_2 داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(c_1 F(s) + c_2 G(s)) = c_1 \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + c_2 \mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

این خواص را می‌توان مستقیماً از تعریف تبدیل لاپلاس نتیجه گرفت.

مثال ۱.۳.۱.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[6x^4 + 3x^2 + x - 7] &= 6\mathcal{L}[x^4] + 3\mathcal{L}[x^2] + \mathcal{L}[x] - 7\mathcal{L}[1] \\ &= 6\frac{4!}{s^5} + 3\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{s^2} - 7\frac{1}{s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin^2 x] &= \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos 2x}{2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2x] \\ &= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sinh ax] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{ax}] - \mathcal{L}[e^{-ax}]) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) \\ &= 1 + \sin x. \end{aligned}$$

مثال ۲.۳.۱. مطلوب‌ست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s+3}{s^3+s}\right)$.

حل. ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم. داریم

$$\frac{4s+3}{s^3+s} = \frac{4s+3}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1) + (Bs+C)s}{s(s^2+1)}$$

برای محاسبه A و B و C ، در تساوی بالا به جای s عدد قرار می‌دهیم.

$$s = 0 \quad \rightarrow \quad A = 3$$

$$s = 1 \quad \rightarrow \quad 4 + 3 = 2A + B + C = 6 + B + C \quad \rightarrow \quad B + C = 1$$

$$s = -1 \quad \rightarrow \quad -4 + 3 = 2A - (-B + C) \quad \rightarrow \quad B - C = -7$$

از دو معادله اخیر به دست می آوریم $B = -3$ و $C = 4$. بنابراین کسر به صورت زیر تجزیه می شود.

$$\frac{4s+3}{s^3+s} = \frac{3}{s} + \frac{-3s+4}{s^2+1}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s+3}{s^3+s}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3s+4}{s^2+1}\right) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= 3 - 3\cos x + 4\sin x.\end{aligned}$$

۲. قضیه انتقال. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}[e^{ax}f(x)] = F(s-a).$$

زیرا

$$\mathcal{L}[e^{ax}f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} f(x) dx = F(s-a).$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{ax}f(x).$$

مثال ۳.۳.۱. چون $\mathcal{L}[x^2] = \frac{2!}{s^3}$ ، بنابر قضیه انتقال داریم

$$\mathcal{L}[e^{5x}x^2] = \frac{2!}{(s-5)^3}, \quad \mathcal{L}[e^{-x}x^2] = \frac{2!}{(s+1)^3}.$$

همچنین از آنجائیکه $\mathcal{L}[\cos 2x] = \frac{s}{s^2+4}$ و $\mathcal{L}[\sin 2x] = \frac{2}{s^2+4}$ ، داریم

$$\mathcal{L}[e^{3x}\cos 2x] = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}, \quad \mathcal{L}[e^{3x}\sin 2x] = \frac{2}{(s-3)^2+4}.$$

مثال ۴.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}[e^{-3x}(2\cos 5x - 3\sin 5x)]$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-3x}(2\cos 5x - 3\sin 5x)] &= 2\mathcal{L}[e^{-3x}\cos 5x] - 3\mathcal{L}[e^{-3x}\sin 5x] \\ &= 2\frac{s+3}{(s+3)^2+25} - 3\frac{5}{(s+3)^2+25}.\end{aligned}$$

مثال ۵.۳.۱. چون $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = x$ داریم $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)^2}\right) = xe^{4x}$.

مثال ۶.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+9}{(s+2)^2+16}\right)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+9}{(s+2)^2+16}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(s+2)+5}{(s+2)^2+16}\right) \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+16}\right) + \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s+2)^2+16}\right) \\ &= 2e^{-2x}\cos 4x + \frac{5}{4}e^{-2x}\sin 4x.\end{aligned}$$

مثال ۷.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+8s+20}\right)$.

حل. با مربع کامل کردن مخرج کسر داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+8s+20}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s+4)^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4-5}{(s+4)^2+4}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{(s+4)^2+4}\right) - \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s+4)^2+4}\right) \\ &= e^{-4x}\cos 2x - \frac{5}{4}e^{-4x}\sin 2x.\end{aligned}$$

مثال ۸.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{s+1}}\right)$.

حل. داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{s+1}}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}$$

۳. تبدیل لاپلاس $f(ax)$.

اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ آنگاه $\mathcal{L}[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ زیرا

$$\mathcal{L}[f(ax)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(ax) dx = \int_0^{\infty} e^{-s\frac{t}{a}} f(t) \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}t} f(t) dt = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ آنگاه $\mathcal{L}^{-1}(F(as)) = \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}\right)$.

مثال ۹.۳.۱. اگر $f(x)$ تابعی باشد که $\mathcal{L}[f(x)] = \frac{s+4}{s^2+s-1}$ آنگاه با استفاده از رابطه بالا می‌توان $\mathcal{L}[f(5x)]$ را محاسبه کرد. داریم

$$\mathcal{L}[f(5x)] = \frac{1}{5} \left(\frac{\frac{s}{5} + 4}{\frac{s^2}{5} + \frac{2s}{5} - 1} \right).$$

۴. تبدیل لاپلاس مشتق. هرگاه f' روی هر بازه $[0, x_0]$ قطعه به قطعه پیوسته باشد و f و f' هر دو دارای تبدیل لاپلاس باشند و $f(0)$ وجود داشته باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0).$$

زیرا با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx = e^{-sx} f(x) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}[f(x)]. \end{aligned}$$

نتیجه. اگر f'' نیز در شرایط قضیه فوق صدق کند، داریم

$$\mathcal{L}[f''(x)] = s^2 \mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0).$$

زیرا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(x)] &= s\mathcal{L}[f'(x)] - f'(0) \\ &= s(s\mathcal{L}[f(x)] - f(0)) - f'(0) = s^2 \mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

به طور کلی می‌توان نشان داد

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n \mathcal{L}[f(x)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

مثال ۱۰.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}[xe^x]$.

حل. قرار می‌دهیم $f(x) = xe^x$ داریم $f'(x) = e^x + xe^x$ و $f(0) = 0$. بنابراین

$$\mathcal{L}[f'(x)] = \mathcal{L}[e^x + xe^x] = \mathcal{L}[e^x] + \mathcal{L}[xe^x] = \frac{1}{s-1} + \mathcal{L}[xe^x].$$

از طرفی بنابر قضیه قبل داریم

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0) = s\mathcal{L}[xe^x].$$

$$\mathcal{L}[xe^x] = \frac{1}{(s-1)^2} \text{ داریم و از آنجا داریم } \mathcal{L}[xe^x](s-1) = \frac{1}{s-1} \text{ در نتیجه } \frac{1}{s-1} + \mathcal{L}[xe^x] = s\mathcal{L}[xe^x] \text{ بنابراین}$$

۵. تبدیل لاپلاس تابع اولیه. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}.$$

زیرا اگر قرار دهیم $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ آنگاه $g'(x) = f(x)$ و $g(0) = 0$ بنابراین $\mathcal{L}[g'(x)] = \mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ از طرفی بنابر خاصیت قبل داریم

$$\mathcal{L}[g'(x)] = s\mathcal{L}[g(x)] - g(0) = s\mathcal{L}[g(x)].$$

$$\mathcal{L}[g(x)] = \frac{F(s)}{s} \text{ بنابراین}$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^x f(t)dt.$$

مثال ۱۱.۳.۱. داریم $\mathcal{L}[x^2 e^x] = \frac{2}{(s-1)^3}$ بنابراین

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x t^2 e^t dt\right] = \frac{1}{s} \frac{2}{(s-1)^3} = \frac{2}{s(s-1)^3}.$$

مثال ۱۲.۳.۱. چون $\mathcal{L}[\sin 3x] = \frac{3}{s^2+9}$ پس

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x \sin 3t dt\right] = \frac{1}{s} \frac{3}{s^2+9} = \frac{3}{s(s^2+9)}.$$

مثال ۱۳.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)$.

داریم $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-x}$ بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s+1}}{s}\right) = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^x = 1 - e^{-x}.$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s(s+1)}}{s}\right) = \int_0^x (1 - e^{-t}) dt = (t + e^{-t})|_0^x = x + e^{-x} - 1.$$

۶. مشتق تبدیل لاپلاس. هرگاه $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (F(s))$$

زیرا

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} (F(s)) &= \frac{d^n}{ds^n} \left(\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \right) = \int_0^\infty \frac{d^n}{ds^n} (e^{-sx}) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty (-x)^n e^{-sx} f(x) dx \\ &= (-1)^n \int_0^\infty e^{-sx} x^n f(x) dx \\ &= (-1)^n \mathcal{L}[x^n f(x)] \end{aligned}$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(s)) = (-1)^n x^n f(x).$$

مثال ۱۴.۳.۱. می‌دانیم $\mathcal{L}[\sin 2x] = \frac{2}{s^2+4}$. با استفاده از قضیه قبل داریم

$$\mathcal{L}[x \sin 2x] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s^2+4} \right) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}.$$

مثال ۱۵.۳.۱. داریم $\mathcal{L} \left[\int_0^x \sin t dt \right] = \frac{1}{s(s^2+1)}$. بنابراین

$$\mathcal{L} \left[x^2 \int_0^x \sin t dt \right] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s(s^2+1)} \right) = \frac{6s(2s^2+1)}{(s^2+1)^4}.$$

مثال ۱۶.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}(\cot^{-1}(s+1))$.

حل. فرض کنیم $F(s) = \cot^{-1}(s+1)$ و $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ داریم

$$F'(s) = \frac{-1}{(s+1)^2+1} \implies \mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -e^{-x} \sin x.$$

از طرفی بنا بر قضیه مشتق تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -xf(x) \implies f(x) = \frac{1}{x} e^{-x} \sin x$$

مثال ۱۷.۳.۱. تابعی بیابید که تبدیل لاپلاس آن به صورت $\ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)$ باشد.

قرار می‌دهیم $F(s) = \ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)$. می‌خواهیم $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)\right)$ را محاسبه کنیم. داریم

$$F(s) = \ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right) = \ln(s-1) - \ln(s+2) \longrightarrow F'(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^x - e^{-2x}.$$

از طرفی بنا بر قضیه قبل داریم $\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -xf(x)$. در نتیجه $-xf(x) = e^x - e^{-2x}$ و از آنجا داریم

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)\right) = \frac{e^{-2x} - e^x}{x}.$$

۷. انتگرال تبدیل لاپلاس.

اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(u)du. \quad (۱.۱)$$

زیرا

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(u)du &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-ux} f(x) dx \right) du = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-ux} f(x) du \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{x} e^{-ux} f(x) \right]_{u=s}^{u=\infty} dx = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{f(x)}{x} dx = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]. \end{aligned}$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty F(u)du\right) = \frac{f(x)}{x}.$$

مثال ۱۸.۳.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \frac{\cos x - e^{-2x}}{x}$ را بیابید.

حل. داریم

$$\mathcal{L}[\cos x - e^{-2x}] = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s + 2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\cos x - e^{-2}x}{x}\right] &= \int_s^\infty \left(\frac{u}{u^2+1} - \frac{1}{u+2}\right) du \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \ln(u+2)\right]_s^\infty \\ &= \left[\ln \frac{\sqrt{u^2+1}}{|u+2|}\right]_s^\infty \\ &= \ln \frac{|s+2|}{\sqrt{s^2+1}}.\end{aligned}$$

۴.۱ محاسبه انتگرال‌های ناسره به کمک تبدیلات لاپلاس

اگر در رابطه ** قرار دهیم $s=0$ داریم

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^\infty F(u) du.$$

از رابطه فوق می‌توان برای حل برخی انتگرال‌های ناسره استفاده کرد. همچنین از تعریف تبدیل لاپلاس نیز می‌توان برای حل برخی از انتگرال‌های ناسره استفاده کرد.

مثال ۱.۴.۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ب) $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}} \sin x}{x} dx$ ج) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$

حل الف. داریم $\mathcal{L}[\sin x] = \frac{1}{s^2+1}$ بنابراین

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = \tan^{-1}(s)|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

حل ب. می‌دانیم $\mathcal{L}[\sin x] = \frac{1}{s^2+1}$ بنابراین

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1} du = \tan^{-1} u|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s.$$

از طرفی بنابر تعریف تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \int_0^\infty \frac{e^{-sx} \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s.$$

بنابراین با قرار دادن $s = \sqrt{3}$ در تساوی بالا نتیجه می شود

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{3}x} \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}.$$

حل ج. قرار می دهیم $f(x) = e^{-ax} - e^{-bx}$. در نتیجه $F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_0^{\infty} F(u) du = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b} \right) du \\ &= \ln(u+a) - \ln(u+b) \Big|_0^{\infty} = \ln \left(\frac{u+a}{u+b} \right) \Big|_0^{\infty} = \ln \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

مثال ۲.۴.۱. مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_0^{\infty} x^2 \cos x dx$.

حل. از آنجائیکه $\mathcal{L}[\cos x] = \frac{s}{s^2+1}$ داریم

$$\mathcal{L}[x^2 \cos x] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3} = F(s).$$

از طرفی می دانیم

$$\mathcal{L}[x^2 \cos x] = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^2 \cos x dx = F(s).$$

$$\int_0^{\infty} x^2 \cos x dx = F(0) = 0 \text{ پس}$$

۵.۱ تابع پله ای واحد

تابع پله ای واحد به صورت زیر تعریف می شود

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

در حالت کلی اگر $c \geq 0$ باشد، داریم

$$u(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c. \end{cases}$$

مثال ۱.۵.۱. تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد را به دست آورید.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(x-c)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x-c) dx = \int_0^c e^{-sx} u(x-c) dx + \int_c^{\infty} e^{-sx} u(x-c) dx \\ &= \int_c^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_c^{\infty} = \frac{e^{-cs}}{s}.\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{L}[u(x-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$ همچنین اگر قرار دهیم $c=0$ داریم

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{1}{s}$$

قضیه ۲.۵.۱. (قضیه دوم انتقال) اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ برای $s > c > 0$ موجود باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}[u(x-c)f(x-c)] = e^{-cs}F(s), \quad (s > c).$$

برهان.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(x-c)f(x-c)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x-c)f(x-c) dx \\ &= \int_0^c e^{-sx} u(x-c)f(x-c) dx + \int_c^{\infty} e^{-sx} u(x-c)f(x-c) dx \\ &= \int_c^{\infty} e^{-sx} f(x-c) dx\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x-c=t$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(x-c)f(x-c)] &= \int_c^{\infty} e^{-sx} f(x-c) dx = \int_0^{\infty} e^{-s(t+c)} f(t) dt \\ &= e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = e^{-cs} F(s).\end{aligned}$$

■

نتیجه ۱. به طور معادل رابطه زیر را داریم

$$\mathcal{L}[u(x-c)f(x)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(x+c)]$$

نتیجه ۲. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-cs}F(s)) = u(x-c)f(x-c).$$

مثال ۳.۵.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = u(x - \pi) \cos x$ را بیابید.

$$\mathcal{L}[u(x - \pi) \cos x] = e^{-\pi s} \mathcal{L}[\cos(x + \pi)] = e^{-\pi s} \mathcal{L}[-\cos x] = -e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 1}.$$

مثال ۴.۵.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s-3}}\right)$.

حل. اگر قرار دهیم $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s-3}}$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s-3}}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{\sqrt{x}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{\pi x}}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s-3}}\right) = u(x-3) \frac{e^{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{\pi(x-3)}}$$

مثال ۵.۵.۱. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = \frac{e^{-\pi s} + 2s}{s^2 + 4s + 5}$ ، تابع f را بیابید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s} + 2s}{s^2 + 4s + 5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2 + 1}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2 + 1}\right).$$

چون $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right) = e^{-2x} \sin x$ پس

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2 + 1}\right) = u(x-\pi) e^{-2(x-\pi)} \sin(x-\pi) = -u(x-\pi) e^{-2(x-\pi)} \sin x.$$

همچنین

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2 + 1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2-2}{(s+2)^2 + 1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right) \\ &= e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s} + 2s}{s^2 + 4s + 5}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2 + 1}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2 + 1}\right) \\ &= -u(x-\pi) e^{-2(x-\pi)} \sin x + 2(e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x). \end{aligned}$$

نکته ۶.۵.۱. به کمک تابع پله‌ای واحد می‌توان تبدیل لاپلاس برخی توابع چند ضابطه‌ای را یافت. هر تابع چند ضابطه‌ای مانند

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0 < x \leq a \\ f_2(x) & a < x \leq b \\ f_3(x) & b < x \end{cases}$$

را می‌توان به کمک تابع پله‌ای واحد با یک ضابطه به صورت زیر نمایش داد.

$$f(x) = f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x))u(x - a) + (f_3(x) - f_2(x))u(x - b)$$

بنابراین می‌توان تبدیل لاپلاس f را به دست آورد.

$$\text{مثال ۷.۵.۱.} \quad f(x) = \begin{cases} \sin 2x & 0 < x \leq \pi \\ 1 & \pi < x \end{cases} \quad \text{تبدیل لاپلاس تابع مقابل را بیابید.}$$

حل. به کمک تابع پله‌ای واحد داریم

$$f(x) = \sin 2x + (1 - \sin 2x)u(x - \pi)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(x)] &= \mathcal{L}[\sin 2x] + \mathcal{L}[(1 - \sin 2x)u(x - \pi)] \\ &= \mathcal{L}[\sin 2x] + \mathcal{L}[u(x - \pi)] - \mathcal{L}[u(x - \pi) \sin 2x] \\ &= \mathcal{L}[\sin 2x] + \mathcal{L}[u(x - \pi)] - \mathcal{L}[u(x - \pi) \sin 2(x - \pi)] \\ &= \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{e^{-\pi s}}{s} - 2 \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

۶.۱ کاربرد تبدیلات لاپلاس

در این بخش به حل معادلات خطی مرتبه دوم به کمک تبدیلات لاپلاس می‌پردازیم. دقت کنید که تبدیلات لاپلاس را برای یافتن جواب خصوصی معادلات به کار می‌بریم. یعنی معادلاتی را به این روش حل می‌کنیم که همراه با شرایط اولیه لازم بیان شده باشند. از این روش برای حل معادلات خطی مرتبه اول نیز می‌توان استفاده کرد.

۷.۱ حل معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت به صورت $y'' + py' + qy = R(x)$ می باشد که در آن p و q اعداد ثابت هستند. اگر معادله اخیر همراه با شرایط اولیه به صورت $y(0) = a$ و $y'(0) = b$ بیان شده باشد، برای حل آن از دو طرف تبدیل لاپلاس می گیریم. سپس با استفاده از روابط

$$\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] - y(0), \quad \mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) \quad (۲.۱)$$

می توان $\mathcal{L}[y] = F(s)$ را محاسبه کرد و در نتیجه جواب معادله به صورت $y = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ به دست می آید.

مثال ۱.۷.۱. معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' + 3y = e^x$ را با شرط $y(0) = y'(0) = 0$ حل کنید.
حل. با لاپلاس گرفتن از دو طرف معادله داریم.

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y'] + 3\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1}$$

با استفاده از رابطه $\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y]$ و $\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y]$ بنابرین با قرار دادن در معادله داریم

$$s^2\mathcal{L}[y] + 4s\mathcal{L}[y] + 3\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} \rightarrow \mathcal{L}[y](s^2 + 4s + 3) = \frac{1}{s-1}$$

و یا $\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)}$ بنابرین

$$\begin{aligned} y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+3}\right) \\ &= \frac{1}{8}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{8}e^{-3x} \end{aligned}$$

مثال ۲.۷.۱. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \sin x; \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

حل. از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم.

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = 3 \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

اما داریم $\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y]$ و $\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - 3$ با جایگذاری در معادله بالا به دست می‌آید

$$s^2\mathcal{L}[y] + 3 + 2s\mathcal{L}[y] + 5\mathcal{L}[y] = \frac{3}{(s+1)^2 + 1}$$

و یا

$$\mathcal{L}[y](s^2 + 2s + 5) = \frac{3}{(s+1)^2 + 1} - 3 = \frac{3(s+1)^2 + 6}{(s+1)^2 + 1}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y] = \frac{3(s+1)^2 + 6}{((s+1)^2 + 1)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3(s+1)^2 + 6}{((s+1)^2 + 1)((s+1)^2 + 4)}$$

در نتیجه $y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+1)^2 + 6}{((s+1)^2 + 1)((s+1)^2 + 4)}\right)$ برای محاسبه این تبدیل لاپلاس معکوس، قرار می‌دهیم $t = (s+1)^2$. در نتیجه داریم

$$\frac{3(s+1)^2 + 6}{((s+1)^2 + 1)((s+1)^2 + 4)} = \frac{3t + 6}{(t+1)(t+4)}$$

اکنون می‌توان کسر فوق را براحتی تجزیه کرد. داریم

$$\frac{3t+6}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4} = \frac{A(t+4) + B(t+1)}{(t+1)(t+4)} \Rightarrow 3t+6 = A(t+4) + B(t+1)$$

$$t = -1 \rightarrow 3 = 3A \rightarrow A = 1$$

$$t = -4 \rightarrow -6 = -3B \rightarrow B = 2$$

در نتیجه

$$\frac{3t+6}{(t+1)(t+4)} = \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t+4} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+1)^2 + 6}{((s+1)^2 + 1)((s+1)^2 + 4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right) = e^{-x} \sin x + e^{-x} \sin 2x. \end{aligned}$$

مثال ۳.۲.۱. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}$ را که در شرایط $y(0) = -3$ و $y'(0) = 0$ صدق می‌کند را به دست آورید.

حل. با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله داریم $\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{4}{(s-2)}$ اما داریم $\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] + 3s - 3$ و $\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] + 3$ بنابراین $s^2\mathcal{L}[y] + 3s - 3s\mathcal{L}[y] - 9 + 2\mathcal{L}[y] = \frac{4}{(s-2)}$

$$\mathcal{L}[y] (s^2 - 3s + 2) = \frac{4}{(s-2)} - 3s + 9$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{4}{(s-2)(s^2 - 3s + 2)} + \frac{-3s + 9}{s^2 - 3s + 2} = \frac{-3s^2 + 15s - 14}{(s-1)(s-2)^2}$$

با تجزیه کسر سمت راست به دست می‌آوریم

$$\frac{-3s^2 + 15s - 14}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{4}{(s-2)^2} - \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-3s^2 + 15s - 14}{(s-1)(s-2)^2} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{4}{(s-2)^2} - \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2} \right) = 4xe^{2x} - 2e^x - e^{2x}.$$

۸.۱ حل معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر

هدف از این بخش، حل معادلات خطی مرتبه دوم به صورت $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ می‌باشد که همراه با شرایط اولیه بیان شده‌اند. برای حل معادله فوق از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم. قرار می‌دهیم $\mathcal{L}[y] = A$ بنابراین با استفاده از خواص تبدیلات لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] - y(0) = sA - y(0).$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) = s^2A - sy(0) - y'(0).$$

همچنین با استفاده از رابطه $\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}[f(x)])$ ، می‌توان تبدیل لاپلاس هر یک از عبارات داخل معادله را بر حسب A نوشت. به عنوان مثال

$$\mathcal{L}[xy'] = -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}[y']) = -\frac{d}{ds} (sA - y(0)) = -(A + s \frac{dA}{ds})$$

مثال ۱.۸.۱. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$xy'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

حل. از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\mathcal{L}[xy'' + xy' + 2y] = 0$$

$$\mathcal{L}[xy''] + \mathcal{L}[xy'] + 2\mathcal{L}[y] = 0$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{L}[y] = A$. داریم

$$\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] - y(0) = s\mathcal{L}[y] = sA$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}[y] = s^2A$$

$$\mathcal{L}[xy''] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y'']) = -\frac{d}{ds}(s^2A) = -(2sA + s^2\frac{dA}{ds})$$

$$\mathcal{L}[xy'] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y']) = -\frac{d}{ds}(sA) = -(A + s\frac{dA}{ds})$$

با قرار دادن در معادله به دست می‌آوریم

$$-(2sA + s^2\frac{dA}{ds}) - (A + s\frac{dA}{ds}) + 2A = 0$$

در نتیجه

$$-(s^2 + s)\frac{dA}{ds} - (2s - 1)A = 0 \implies \frac{\frac{dA}{ds}}{A} = \frac{1 - 2s}{s^2 + s}$$

که یک معادله تفکیک پذیر بر حسب A می‌باشد. با انتگرال گیری از دو طرف داریم

$$\ln |A| = \int \left(\frac{1 - 2s}{s^2 + s} \right) ds = \int \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{s+1} \right) ds = \ln s - 3 \ln(s+1) = \ln \left(\frac{s}{(s+1)^3} \right)$$

بنابراین $A = \frac{s}{(s+1)^3}$ و از آنجا داریم

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s+1)^3} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s+1-1}{(s+1)^3} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s+1)^2} \right) - \frac{1}{1} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s+1)^3} \right) \\ &= xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}. \end{aligned}$$

مثال ۲.۸.۱. جوابی از معادله دیفرانسیل $xy'' + (2x + 3)y' + (x + 3)y = 3e^{-x}$ را با شرط اولیه $y(0) = 0$ بیابید.

حل.

$$\mathcal{L}[xy'' + (2x + 3)y' + (x + 3)y] = \mathcal{L}[3e^{-x}]$$

$$\mathcal{L}[xy''] + 2\mathcal{L}[xy'] + 3\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[xy] + 3\mathcal{L}[y] = \frac{3}{s+1}$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{L}[y] = A$ بنابراین

$$\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] - y(0) = s\mathcal{L}[y] = sA$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}[y] - y'(0) = s^2A - y'(0)$$

$$\mathcal{L}[xy''] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y'']) = -\frac{d}{ds}(s^2A - y'(0)) = -(2sA + s^2\frac{dA}{ds})$$

$$\mathcal{L}[xy'] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y']) = -\frac{d}{ds}(sA) = -(A + s\frac{dA}{ds})$$

$$\mathcal{L}[xy] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y]) = -\frac{dA}{ds}$$

با جایگذاری در معادله داریم

$$-(2sA + s^2\frac{dA}{ds}) - 2(A + s\frac{dA}{ds}) + 3sA - \frac{dA}{ds} + 3A = \frac{3}{s+1}$$

بنابراین

$$-(s+1)^2\frac{dA}{ds} + (s+1)A = \frac{3}{s+1} \implies \frac{dA}{ds} - \frac{1}{s+1}A = -\frac{3}{(s+1)^3}$$

معادله فوق، یک معادله خطی مرتبه اول بر حسب A می‌باشد. بنابراین

$$A = e^{-\int P(s)ds} \left(\int Q(s)e^{\int P(s)ds} ds \right) = e^{\int \frac{1}{s+1} ds} \left(-3 \int \frac{1}{(s+1)^3} e^{-\int \frac{1}{s+1} ds} ds \right)$$

$$= (s+1) \left(-3 \int \frac{1}{(s+1)^4} ds \right) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از $y = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s+1)^2} \right) = xe^{-x}$

۹.۱ کانولوشن (پیچش)

تعریف ۱.۹.۱. برای هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ، کانولوشن f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{Con}(f, g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

دقت کنید که کانولوشن دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ، خود تابعی دیگر است. کانولوشن دو تابع f و g را با نماد $(f * g)$ نیز نمایش می‌دهند و آنرا تلفیق f و g نیز می‌نامند.

مثال ۲.۹.۱. اگر $f(x) = e^{2x}$ و $g(x) = x$ و $h(x) = \sin 3x$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x e^{2t}(x-t)dt = \int_0^x xe^{2t}dt - \int_0^x te^{2t}dt \\&= \left. \frac{1}{2}xe^{2t} \right|_0^x - \left(\left. \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} \right|_0^x \right) = \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \right) - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4} \right) \\&= \frac{1}{4}(e^{2x} - 2x - 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(h * f)(x) &= \int_0^x h(t)f(x-t)dt = \int_0^x (\sin 3t)e^{2(x-t)}dt = \int_0^x (\sin 3t)e^{2x}e^{-2t}dt \\&= e^{2x} \int_0^x (\sin 3t)e^{-2t}dt = e^{2x} \left[\frac{e^{-2t}}{13}(-2 \sin 3t - 3 \cos 3t) \right]_0^x \\&= e^{2x} \left(\frac{e^{-2x}}{13}(-2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + \frac{3}{13} \right) \\&= \frac{1}{13} (3e^{2x} - 2 \sin 3x - 3 \cos 3x)\end{aligned}$$

نکته ۳.۹.۱. کانولوشن دو تابع f و g دارای خواص زیر است.

- (۱) خاصیت جابجایی $f * g = g * f$
- (۲) خاصیت شرکت‌پذیری $f * (g * h) = (f * g) * h$
- (۳) خاصیت توزیع‌پذیری نسبت به جمع $f * (g + h) = f * g + f * h$
- (۴) $f * 0 = 0 * f = 0$

خواص بالا به راحتی از تعریف کانولوشن دو تابع نتیجه می‌شوند. در اینجا خاصیت جابجایی که برای ما مهم‌تر می‌باشد را ثابت می‌کنیم. داریم $(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$. اگر در انتگرال فوق از تغییر متغیر $x-t = u$ استفاده کنیم داریم $dt = -du$ و در نتیجه

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = - \int_x^0 f(x-u)g(u)du = \int_0^x f(x-u)g(u)du = (g * f)(x)$$

اکنون فرض کنیم f و g دو تابع لاپلاس‌پذیر باشند. در اینصورت به دنبال تابعی مانند h هستیم به طوری که $\mathcal{L}[h(x)] = \mathcal{L}[f(x)]\mathcal{L}[g(x)]$. به عبارت دیگر اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ و $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$ ، آنگاه به دنبال یافتن $\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))$ هستیم.

قضیه ۴.۹.۱. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ و $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$ آنگاه $\mathcal{L}[(f * g)(x)] = F(s) \cdot G(s)$ به عبارت دیگر اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ و $\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(x)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(x)$$

برهان.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f * g)(x)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (f * g)(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\int_0^x f(t)g(x-t) dt \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^x e^{-sx} f(t)g(x-t) dt dx\end{aligned}$$

با توجه به شکل ناحیه انتگرال گیری در انتگرال دوگانه بالا، می توان ترتیب انتگرال گیری را تغییر داد. داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f * g)(x)] &= \int_0^{\infty} \int_0^x e^{-sx} f(t)g(x-t) dt dx = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} e^{-sx} f(t)g(x-t) dx dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \int_t^{\infty} e^{-sx} g(x-t) dx dt\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x - t = u$ در انتگرال داخلی داریم

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(t) \int_t^{\infty} e^{-sx} g(x-t) dx dt &= \int_0^{\infty} f(t) \int_0^{\infty} e^{-s(u+t)} g(u) du dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du = F(s)G(s).\end{aligned}$$

■

مثال ۵.۹.۱. تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \int_0^x t \sin(x-t) dt$ ب) $g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} t^5 dt$

حل الف. با استفاده از قضیه فوق داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^x t \sin(x-t) dt\right] &= \mathcal{L}[(x) * (\sin x)] = \mathcal{L}[x] \cdot \mathcal{L}[\sin x] \\ &= \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}.\end{aligned}$$

حل ب.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^x \int_0^x e^{-t} t^5 dt\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^x e^{x-t} t^5 dt\right] = \mathcal{L}[e^x * x^5] \\ &= \mathcal{L}[e^x] \cdot \mathcal{L}[x^5] = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{5!}{s^6} = \frac{5!}{s^6(s-1)}.\end{aligned}$$

مثال ۶.۹.۱. مطلوب است محاسبه

الف) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)$ ب) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)$ حل الف. قرار می دهیم

$$\begin{aligned}F(s) = \frac{1}{s^2} &\implies f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = x \\ G(s) = \frac{1}{s^2+4} &\implies g(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \frac{1}{2} \sin 2x.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t) \sin 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \left(x \int_0^x \sin 2t dt - \int_0^x t \sin 2t dt \right) \\ &= \left[-\frac{1}{2} x \cos 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^x \\ &= \frac{1}{4} (2x - \sin 2x).\end{aligned}$$

حل ب. روش اول: استفاده از کانولوشن. اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned}F(s) = \frac{1}{s^2+1} &\implies f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sin x \\ G(s) = \frac{s}{s^2+1} &\implies g(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \cos x.\end{aligned}$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(x) = \int_0^x \cos t \sin(x-t) dt \\ &= \int_0^x \cos t (\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt = \sin x \int_0^x \cos^2 t dt - \cos x \int_0^x \cos t \sin t dt \\ &= \frac{\sin x}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^x - \cos x \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^x \\ &= \frac{\sin x}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) - \cos x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} x \sin x.\end{aligned}$$

روش دوم. قرار می دهیم $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. بنابراین $F'(s) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$. همچنین $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sin x$ از طرفی با استفاده از فرمول مشتق تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -xf(x) = -x \sin x.$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = \frac{1}{2}x \sin x.$$

۱۰.۱ معادلات دیفرانسیل انتگرالی

به ازای توابع معلوم $f(x)$ و $g(x)$ و تابع مجهول $y(x)$ و ثابت معین k ، هر معادله به فرم

$$f(x) = y(x) + k \int_0^x g(x-t)y(t)dt$$

را یک معادله انتگرالی گوئیم.

روش حل. هدف یافتن تابع مجهول $y(x)$ می باشد. برای حل معادله انتگرالی مانند معادله بالا، از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم. داریم

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[y(x)] + k\mathcal{L}\left[\int_0^x g(x-t)y(t)dt\right]$$

بنابر قضیه کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[y(x)] + k\mathcal{L}[g(x)]\mathcal{L}[y(x)] \implies \mathcal{L}[y(x)] = \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{1+k\mathcal{L}[g(x)]} = \frac{F(s)}{1+kG(s)}$$

بنابراین جواب معادله به صورت $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{1+kG(s)}\right)$ به دست می آید.

مثال ۱۰.۱۰.۱. معادله انتگرالی مقابل را حل کنید. $3 \sin 2x = y(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt$
حل. اگر از دو طرف تبدیل لاپلاس بگیریم داریم

$$3\mathcal{L}[\sin 2x] = \mathcal{L}[y(x)] + \mathcal{L}[x]\mathcal{L}[y(x)] \implies \frac{6}{s^2+4} = \mathcal{L}[y(x)] + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[y(x)]$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y(x)] = \frac{\frac{6}{s^2+4}}{1 + \frac{1}{s^2}} = \frac{6s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} \Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{6s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} \right)$$

اگر قرار دهیم $F(s) = \frac{6s}{s^2+1}$ و $G(s) = \frac{s}{s^2+4}$ ، آنگاه $f(x) = 6 \cos x$ و $g(x) = \cos 2x$. در نتیجه

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(x) = 6 \int_0^x \cos t \cos 2(x-t) dt \\ &= 6 \left(\int_0^x \cos t \cos 2x \cos 2t dt - \int_0^x \cos t \sin 2x \sin 2t dt \right) \\ &= \left(\cos 2x (4 \sin 3x - 6 \sin x) + 4 \sin 2x (\cos^3 x - 1) \right). \end{aligned}$$

مثال ۲.۱۰.۱. معادله انتگرالی مقابل را حل کنید. $3e^x \sin 3x - y(x) = 3 \int_0^x e^{x-t}(x-t)y(t) dt$
حل. با اعمال تبدیل لاپلاس به دو طرف معادله به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 3\mathcal{L}[e^x \sin 3x] - \mathcal{L}[y(x)] &= 3\mathcal{L} \left[\int_0^x e^{x-t}(x-t)y(t) dt \right] = 3\mathcal{L}[xe^x] \mathcal{L}[y] \\ \Rightarrow \frac{9}{(s-1)^2+9} - \mathcal{L}[y(x)] &= \frac{3}{(s-1)^2} \mathcal{L}[y(x)] \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y(x)] = \frac{\frac{9}{(s-1)^2+9}}{1 + \frac{3}{(s-1)^2}} = \frac{9(s-1)^2}{((s-1)^2+9)((s-1)^2+3)}$$

قرار می‌دهیم $u = (s-1)^2$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{9(s-1)^2}{((s-1)^2+9)((s-1)^2+3)} &= \frac{9u}{(u+3)(u+9)} = \frac{\frac{9}{2}}{u+9} - \frac{\frac{9}{2}}{u+3} \\ &= \frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+9} - \frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+3} \end{aligned}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+9} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+3} \right) \\ &= \frac{3}{2} e^x \sin 3x - \frac{3\sqrt{3}}{2} e^x \sin \sqrt{3}x \end{aligned}$$