



سیب ترش

بزرگترین مرکز مشاوره ای و آموزشی کشور

نسخه ۲۰

LEVELUP

حسابان ۱



دانلود اپ سیب ترش

سیب ترش در صفحات مجازی



SIIBTORSH



SIBTORSH.OFFICIAL



مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر آموزشی : دکتر احمد رضا ورمزیار

سیب ترش : بزرگ ترین مرکز آنلاین کنکوری

نسخه ۲۰ : سوالات لول آپ

حسابان ۱ : مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

مدیر دپارتمان حسابان : محمدرضا اصغریان

فصل اول : جبر و معادله

درس اول : مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

۱) دودنباله $a_n : 1, 4, 7, 10, \dots$ و $b_n : -5, -1, 3, \dots$ مفروضند، مجموع چند جمله از دنباله جملات مشترک دنباله های a_n و b_n برابر ۶۱۰ است؟

۲) در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۳) از رابطه زیر مقدار x را بیابید.

$$(x + 3) + (x + 5) + (x + 7) + \dots + (x + 23) = 253$$

۴) در یک دنباله حسابی، مجموع ۶ جمله اول ۵۷ و مجموع ۶ جمله دوم ۱۶۵ می باشد؛ مجموع ۲۰ جمله اول را بیابید.

۵) در یک دنباله حسابی اگر $S_m = S_n$ با شرط $m \neq n$ ثابت کنید: $S_{m+n} = 0$

۶) ثابت کنید اگر به قدر نسبت یک دنباله حسابی k واحد اضافه کنیم، به مجموع n جمله اول آن مقدار $\frac{k}{2}(n^2 - n)$ واحد اضافه می شود.

۷) شخصی می خواهد بدهی ۵۷۰۰۰۰ تومانی خود به دوستش را به اقساط پرداخت کند به گونه ای که اولین قسط ۲۰۰۰۰ تومان و پس از آن هر قسط ۵۰۰۰ تومان بیشتر از قسط قبل باشد، آخرین قسط پرداختی این شخص چقدر خواهد بود؟

۸) اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند قدر نسبت دنباله هندسی را به دست آورید.

۹) عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{x^{15} + x^{14} + \dots + x + 1}$$



۱۰ حداقل چند جمله از دنباله $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۵۰۰ باشد؟

۱۱ در یک دنباله هندسی ۲۰ جمله‌ای با قدرنسبت ۲، مجموع جملات ردیف فرد چند برابر مجموع جملات ردیف زوج است؟

۱۲ در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و پنجم برابر ۸۲ و مجموع جملات دوم و ششم برابر ۲۴۶ است. تعیین کنید مجموع چند جمله از این دنباله برابر ۳۲۸۰ است؟

۱۳ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. جملات اول تا سوم این دنباله را بنویسید و سپس با استفاده از فرمول، تعیین کنید چند جمله اول از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۱۴ حاصل $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را به دست آورید.

درس دوم : معادلات درجه دوم

۱۵ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله بوده و $x_2 = kx_1$ آن‌گاه ثابت کنید.

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{a \cdot c}$$

۱۶ حاصل $(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5$ را بیابید.

۱۷ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، بدون یافتن ریشه‌ها، حاصل $\alpha^6 + \beta^6$ را بیابید.

۱۸ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\alpha^5}{(3-\beta)^5} + \frac{\beta^5}{(3-\alpha)^5}$$

۱۹ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{(3\alpha + \frac{1}{\alpha})^2}{(3\beta^2 + 1)^2 + 25\alpha^2}$ را بیابید.

۲۰ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 5x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta - 5}$ را بیابید.

۲۱ به ازای کدام مقدار m مجموع مجذورات دو ریشه‌ی حقیقی معادله $x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟

۲۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{(2\alpha - 1)^2} + \frac{1}{(2\beta - 1)^2}$$



۲۳ اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}$ و $\beta^2 + \frac{1}{\alpha}$ باشد؟

۲۴ صفرهای تابع $f(x) = (x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1$ را بیابید.

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

۲۵ معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{x+5}{x-1} - \frac{6}{x^2+x+1} - \frac{6(x^2+2)}{x^3-1} = x^2+1$$

۲۶ معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$$

۲۷ معادله $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$ را حل کنید.

۲۸ معادله $4x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 24x + 7}$ را حل کنید:

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

۲۹ برد تابع $y = ||x+2| - |x-4||$ را بیابید.

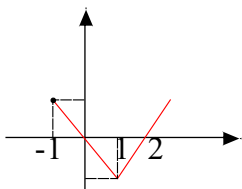
۳۰ عبارت مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$A = \sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}$$

۳۱ خط $y=1$ و نمودار $y = |x^2 - 2|x||$ در چند نقطه تلاقی دارند؟

۳۲ حدود m را طور بیابید که معادله $|x-1| - |x+3| = m+4$ حداقل یک جواب داشته باشد.

۳۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر داده شده است. نمودار $y = f(|x|)$ و $|y| = f(x)$ را رسم کنید.



۳۴ نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x-1| + 2|x| > |3x-1|$$



۳۵ اگر $|x - 1| + |x + 1| > 2|x|$ برقرار باشد حدود x را به دست آورید.

۳۶ معادله زیر را حل کنید.

$$|x^2 + x - 2| + |5 - x| = |x^2 + 2x - 7|$$

۳۷ اعدادی را روی محور $x'ox$ پیدا کنید که فاصله‌ی آنها از عدد ۳ کمتر از فاصله‌ی آنها از عدد -2 نباشد.

۳۸ نامعادله‌ی قدر مطلق $3x < |2x - 1| \leq 4$ را حل کنید.

۳۹ معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x}{x-1} = |x+1|$$

۴۰ نامعادله $|4x + 3| > |x + 4| + |1 - 3x|$ را حل کنید:

۴۱ جمع ریشه‌های معادله $||2 - x| - 3| = 4$ را به دست آورید.

۴۲ معادله $||x| - 2| = 1$ را به روش هندسی حل کنید.

۴۳ نامعادله $\left| \frac{3-2x}{x-4} \right| \geq 1$ را حل کنید.

۴۴ نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$$

۴۵ نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{x^2 - |x|}{|x| + 2} \leq 2$$

۴۶ نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|2x^2 - 3x + 5| > |x^2 + 5x - 2|$$

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

۴۷ نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.



۴۸) نقطه‌ی $A(1, 2)$ رأس مستطیلی است که معادله‌ی دو ضلع آن به صورت $x + 2y + 5 = 0$ و $2x - y + 15 = 0$ می‌باشد؛ مساحت این مستطیل را بیابید.

۴۹) معادله‌ی خط راستی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویه‌ی 45° ساخته و خط به معادله‌ی $2x + y = 2$ را در M و محور طول‌ها را در A و محور عرض‌ها را در B قطع نماید بطوریکه M وسط AB باشد.

۵۰) معادلات اضلاع مثلث ABC به صورت $AC: x + y = 0$ ، $BC: 3x - y = 1$ و $AB: x - 2y + 3 = 0$ است. شیب میانه رأس C را بیابید.

۵۱) نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را بیابید.

۵۲) نقاط $A(1, 1)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(0, -1)$ رئوس مثلث ABC هستند، اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد، مختصات نقطه‌ی H را بیابید.

۵۳) مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, 3)$ را نسبت به خط $2x - 5y = 18$ تعیین کنید.

۵۴) اگر $A(-1, 4)$ و $B(3, 1)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، معادله‌ی قطرهای مربع را بیابید.

۵۵) اگر $A(2, 1)$ یکی از رئوس مربع $ABCD$ و $x + 2y = 3$ معادله‌ی یک قطر آن باشد:
(الف) معادله‌ی قطر دیگر مربع را بیابید.
(ب) مساحت مربع را بیابید.

۵۶) سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ و $C(3, 1)$ می‌باشند.
(الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه‌ی نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.
(ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۵۷) اگر $A(-2, 3)$ ، $B(4, -4)$ و $C(-4, 2)$ سه رأس مثلث ABC باشند:
(الف) معادله‌ی میانه‌ی AM را بیابید. (ب) مساحت مثلث را بیابید.

۵۸) مثلث ABC با رئوس $A(-1, 7)$ ، $B(-6, -2)$ و $C(10, 4)$ مفروض است. فاصله‌ی رأس C از میانه‌ی نظیر رأس A چقدر است؟



۵۹ مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.

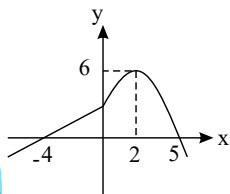
ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

۶۰ معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(1, 2)$ گذشته و فاصله‌ی مبدأ مختصات تا آن خط برابر یک باشد.

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

۶۱ تابع f برای اعداد حقیقی نامنفی یک سهمی مطابق شکل مقابل است و برای اعداد حقیقی منفی خط راستی است که محور x ها را در



نقطه‌ای به طول ۴- قطع می‌کند. الف) ضابطه f را بنویسید.

ب) حاصل $f(5) - 2f(-3)$ را بنویسید.

۶۲ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ باشد حاصل $f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right)$ با شرط $a < -1$ را به دست آورید.

۶۳ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۶۴ نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:

الف) دامنه آن $[-4, 5]$ باشد،

ب) به هر عدد کمتر از صفر، قدر مطلق آن را نسبت دهد،

پ) به هر عدد در بازه $[0, 1]$ ، مربع آن را نسبت دهد،

ت) در سایر نقاط دامنه ثابت باشد و $f(5) = 2$



۶۵ نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:

الف) $f(0) = 2, f(-2) = 5$

ب) تابع در بازه $(-\infty, -2]$ ثابت است،

پ) تابع در بازه $(-2, 0]$ خطی است و موازی خط $y + x = 5$ است.

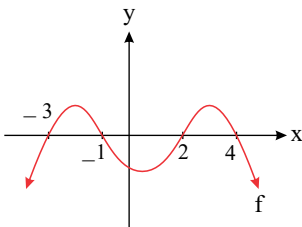
ت) تابع به هر عدد مثبت، جذر آن را نسبت می‌دهد.

درس دوم : انواع توابع

۶۶ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3}{ax^2 + bx + 18}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-3\}$ باشد، a و b را بیابید.

۶۷ برد تابع زیر را بیابید.

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$



۶۸ نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(3-x)f(x)}$ را بیابید.



۶۹ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = \sqrt{|x| - 1}$$

۷۰ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{2 - x}} + \sqrt{3 - \sqrt{x}}$$

۷۱ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{\sqrt{x + |x|}}$$

۷۲ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1}}$$

۷۳ تساوی تابع $f(x) = 0$ و $g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right]$ را بررسی کنید.



۷۴ نمودار تابع $y = [|x|]$ را برای $-2 \leq x < 2$ رسم کنید.

۷۵ نمودار رابطه $[x][y] = -2$ را رسم کنید. ($[]$ ، نماد جزء صحیح است)

۷۶

نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = |x|[-x] - 1 ; -2 < x < 1$$

۷۷

معادله زیر را حل کنید.

$$[x - 1] = \left[\frac{x + 2}{2} \right]$$

۷۸

معادله زیر را حل کنید.

$$[x] - [-x] = 5$$

۷۹

معادله زیر را حل کنید.

$$3[x] - [1 - x] = 8$$

۸۰

معادلات زیر را حل کنید.

$$3[x^2] + 2[x] = 2 + x$$

الف

ب

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] - \left[x - \frac{1}{2} \right] = 5$$

درس سوم : وارون تابع

۸۱ a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ 2x + 3 & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد.

۸۲ اگر تابع یک به یک باشد، حدود m را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5} , & x \geq 4 \\ \frac{1}{2}x + m , & x < 2 \end{cases}$$



۸۳ در مورد وارون پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۸۴ اگر $f(x) = f^{-1}(4) + 2x - 11$ ، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(26)$ را بیابید.

۸۵ تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{5x-2} & x \geq 2 \\ x^3 - 12 & x < 2 \end{cases}$ را در صورت وجود بیابید.

۸۶ تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}$ ، $x < 0$ را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.

۸۷ اگر $f(x) = 4 - \sqrt{x-1}$ ، مجموعه جواب‌های معادله $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ را بیابید.

۸۸ معکوس پذیری تابع زیر را بررسی کنید و تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3}$$

۸۹ معکوس پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان تابع معکوس تابع را بیابید.

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$$

۹۰ اگر $f(x) = 2 - 3x$ و $(f \circ g^{-1})(x) = 5x - 6$ ، ضابطه تابع g را بیابید.

۹۱ ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x - 1$ را بیابید.

۹۲ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن h (بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2$ به دست می‌آید.

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟

۹۳ ابتدا یک به یک بودن تابع f با ضابطه‌ی زیر را بررسی کنید. سپس در صورت وجود تابع معکوس f را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۹۴ اگر $f = \{(1, 5), (-1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ و $g = \{(3, 5), (4, 4), (5, 6), (2, 0)\}$ ، توابع زیر را به دست آورید:



الف

ب

پ

g^{-1}

$\frac{f}{g}$

$f \circ g^{-1}$

درس چهارم : اعمال روی توابع

۹۵ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2 - 1, & x \leq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ 1 + x, & x < 3 \end{cases}$ ، آنگاه تابع $f - g$ را بیابید.

۹۶ اگر $D_f = [2, 5]$ و $D_g = [4, 12]$ آنگاه دامنه‌ی $f\left(\frac{x}{2}\right) + g(2x)$ را بدست آورید.

۹۷ اگر $f(x) = \sqrt{[x] - 1}$ و $g = \{(-2, 0), (5, 3), (0, 7), (2, 8)\}$ باشد در این صورت $\frac{2f - 3g}{g}$ را به دست آورید.

۹۸ اگر $f(x) + 2f(-x) = 2x$ مطلوب است محاسبه‌ی $f(x)$

۹۹ اگر $f(x) = \sqrt{x - 2}$ و $g = \{(0, 4), (3, 2), (5, -9)\}$ مفروض باشند، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را بیابید.

۱۰۰ اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $f \circ g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ باشد مطلوب است تعیین ضابطه‌ی $g(x)$.

۱۰۱ اگر $f = \{(1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 3)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (0, 3), (1, 4)\}$ حاصل $3f \times (f \circ g^{-1})$ را بیابید.

۱۰۲ توابع $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 1 \\ 2x, & x \leq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \geq 2 \\ 3x, & x < 2 \end{cases}$ مفروضند، تابع $f \circ g$ را بیابید.

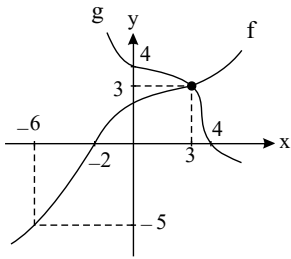
۱۰۳ توابع $f = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 4), (5, 0), (1, -1)\}$ و $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ مفروضند، مطلوب است:

الف) تابع $f - g + 2$ ب) تابع $g \circ f$



۱۰۴ نمودار تابع f و g به صورت مقابل است.

حاصل عبارت زیر را بیابید.



$$\frac{(gof)(-2) + (gog)(4)}{(f^{-1}og)(3) - f^{-1}(-5)}$$

۱۰۵ اگر $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{2}}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{|x|+3}{|x|-1}}$ مفروض باشند، دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف بیابید.

۱۰۶ اگر $fog(x) = 4x^2 - 16x + 27$ و $f(x) = 4x + 3$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ و مقدار $gof(1)$ را به دست آورید.

۱۰۷ اگر $f(x-2) + 2f(2-x) = 2x$ مطلوب است محاسبه $f(x)$

۱۰۸ اگر $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ ضابطه $f(x)$ را به دست آورید.

۱۰۹ فرض کنیم $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = x^2 + 3$

الف دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب ضابطه تابع fog را به دست آورید.

فصل سوم : تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

۱۱۰ اگر $f(x) = 1 - 3^{-x}$ باشد، دامنه‌ی تابع‌های زیر را بیابید.

الف

$$y = \sqrt{f(x)}$$

ب

$$y = \sqrt{xf(x)}$$



۱۱۱) برد تابع $y = \frac{3^x - 1}{3^x + 4}$ را بیابید.

۱۱۲) نمودار تابع $y = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x}$ را رسم کنید.

۱۱۳) برد تابع $f(x) = \frac{3}{5 + 2^x}$ را بیابید.

۱۱۴) نمودارهای دو تابع $f(x) = 2^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ در نقطه‌ای به طول $x = -1$ متقاطع هستند، اگر $f(2) = \frac{1}{8}$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید.

۱۱۵) معادله‌ی زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$3^{-x} = x + 1$$

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

۱۱۶) تابع معکوس تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \log_7\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$$

۱۱۷) نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۱۱۸) دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$ را بیابید.

۱۱۹) تابع معکوس تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 2}$$

درس سوم : ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

۱۲۰) اگر a و b و c اضلاع مثلثی باشند و رابطه‌ی $\log_{c+b}^a + \log_{c-b}^a = 2 \log_{c+b}^a \cdot \log_{c-b}^a$ بین اضلاع مثلث برقرار باشد، ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است.

۱۲۱) اگر $x = \log_a bc$ ، $y = \log_b ac$ و $z = \log_c ab$ باشند، ثابت کنید:

$$x + y + z + 2 = xyz$$



۱۲۲ اگر $\log_{12}^{27} = a$ باشد، $\log_{\frac{1}{6}}$ را بر حسب a بیابید.

۱۲۳ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{1}{\log_7^3} + \frac{1}{\log_{16}^9} - \frac{1}{\log_8^3}$$

۱۲۴ اگر $\frac{\log_{ab}^x}{\log_a^x} = \frac{1}{4}$ ، آنگاه حاصل $\frac{1}{\log_b^a} + \frac{1}{\log_a^b}$ را بیابید.

۱۲۵ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\log_4^{16} \times \log_7(\log_8^{128}) \times \log_{\sqrt{5}}^{49} \times \log_{\sqrt[3]{7}}^{25}$$

۱۲۶ اگر $\log_{\frac{2}{3}}^{27} = m$ ، آنگاه $\log_{\frac{1}{6}}$ را بر حسب m بیابید.

۱۲۷ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^{(2 - \frac{\log x}{2})} = 100$$

۱۲۸ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \times \log_5^x = -1$$

۱۲۹ نیم عمر ماده‌ای ۸ روز است. اگر جرم اولیه این ماده ۲۰۰۰ گرم باشد، پس از چه مدت جرم این ماده به ۱ گرم می‌رسد؟
($\log_2 = 0.3$)

۱۳۰ معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$x^{(2 - \frac{1}{2} \log_7^x)} = 9$$

۱۳۱ دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-1} = 9^{y+1} \\ \log(x+1) - \log y = 1 \end{cases}$$

۱۳۲ نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq -1$$



دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید. ۱۳۳

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^{9-x^2}}$$

معادلات زیر را حل کنید. ۱۳۴

الف

$$\log_2^x \times \log_4^x \times \log_8^x \times \log_{16}^x = \frac{2}{4}$$

ب

$$\frac{1}{1 - 4 \log x} + \frac{4}{2 + \log x} = 3$$

معادلات زیر را حل کنید. ۱۳۵

الف

$$\log_2^x + \log_x^2 = \frac{17}{4}$$

ب

$$25^{\log x} = 5 + 4 \times 5^{\log x}$$

فصل چهارم : مثلثات

درس اول : رادیان

۱۳۶ در مثلث ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ و اندازه C بر حسب درجه $\frac{45}{\pi}$ برابر اندازه B بر حسب رادیان است، اندازه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را بر حسب رادیان بیابید.

درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی زاویه ها

۱۳۷ اگر $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{3 \sin 375^\circ + 2 \sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - 2 \cos 255^\circ}$$



۱۳۸ مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{2 \sin\left(\frac{49\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)}{\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{13\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{19\pi}{10}\right)}$$

۱۳۹ مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\sin 225^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 135^\circ \times \sin 60^\circ}{\tan 210^\circ \times \cot 60^\circ + \cot 240^\circ \times \tan 390^\circ}$$

۱۴۰ درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\tan\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) + \sin(7\pi - x) + 2 \cos\left(x - \frac{11\pi}{2}\right) + \cot(x - 8\pi)}{\cot\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 2 \cos(x - 12\pi) + \tan(x - 7\pi)} = -\tan x$$

۱۴۱ ثابت کنید:

$$\frac{2 \sin\left(\frac{41\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{29\pi}{10}\right) - 2 \sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) \tan\left(\frac{11\pi}{10}\right) + 2 \cos \frac{7\pi}{5} + \sin\left(\frac{19\pi}{10}\right)} = 2$$

۱۴۲ اگر $3a + 2b = 3\pi$ ثابت کنید

$$\tan(a+b) \tan(a-b) = -\cot \frac{a}{2} \tan \frac{5b}{3}$$

۱۴۳ حاصل عبارت $A = \frac{\sin \frac{5\pi}{3} + \cot \frac{11\pi}{6}}{2 \cos \frac{8\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6}}$ را به دست آورید.

درس سوم : توابع مثلثاتی

۱۴۴ یک به یک بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

۱۴۵ برد تابع زیر را بیابید.

$$y = 2 \sin x + \cos x$$

۱۴۶ نمودار تابع $f(x) = 1 - |\cos x|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید و برد آن را بنویسید.

۱۴۷ دامنه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi [x]}$$



۱۴۸ نمودار تابع $f(x) = 1 - |\sin x|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید و برد آن را تعیین کنید.

۱۴۹ برد تابع زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)

$$y = \left[\frac{-\sin x}{2 + \sin x} \right]$$

۱۵۰ برد تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{2 \cos x + 1}$$

۱۵۱ برد تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{2}{3 + \sin x}$$

۱۵۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$|y| = \cos x$$

۱۵۳ دامنه توابع زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ تعیین کنید.

الف

$$f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1}$$

ب

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos x}}$$

۱۵۴ نمودار تابع‌های زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف

$$y = \sin x - \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

ب

$$y = \frac{2 |\cos x|}{\cos x} + \cos x$$

۱۵۵ نمودار توابع زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. ([] جزء صحیح است)



الف

$$y = [\sin x]$$

ب

$$y = [\cos x]$$

۱۵۶ نمودار توابع زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف

$$y = 2|\cos x| - \cos x$$

ب

$$y = \frac{3\cos x}{\cos x} - 1$$

۱۵۷ نمودار توابع زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف

$$y = |\sin x| + \sin x$$

ب

$$y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

درس چهارم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

۱۵۸ اگر x و y دو زاویه حاده و $x + y = \frac{\pi}{4}$ و $\tan x \tan y = \frac{1}{6}$ باشد، تاثیرات این دو زاویه را بیابید.

۱۵۹ اگر $\tan(a - b) = 5$ ، $\tan(a + b) = 9$ ، مقادیر $\tan 2a$ ، $\tan 2b$ را بیابید.

۱۶۰ اگر x و y حاده بوده و داشته باشیم: $\tan(x + y) = -7$ و $\sin y = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ حاصل $\tan x$ را بیابید.

۱۶۱ اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ ، α زاویه‌ای حاده و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه β در ربع سوم باشد، حاصل $\sin(\alpha - \beta)$ را به دست آورید.

۱۶۲ اگر $x + y + z = \pi$ ، آنگاه ثابت کنید.

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



الف

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

ب

$$\cot x \cot y + \cot y \cot z + \cot x \cot z = 1$$

۱۶۳ مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

الف

$$\tan ۲۳^\circ + \tan ۲۲^\circ + \tan ۲۳^\circ \tan ۲۲^\circ$$

ب

$$\tan ۳۹^\circ + \tan ۲۱^\circ + \sqrt{۳} \tan ۳۹^\circ \tan ۲۱^\circ$$

۱۶۴ درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف

$$\sqrt{۳} \cos \alpha + \sin \alpha = ۲ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{۳}\right)$$

ب

$$\sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

۱۶۵ اگر $x + y + z = \frac{\pi}{۲}$ آن‌گاه ثابت کنید.

الف

$$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cot y \cot z$$

ب

$$\tan x \tan y + \tan x \tan z + \tan y \tan z = 1$$

۱۶۶ اگر α زاویه‌ای در بازه‌ی $\left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{۱۲}{۱۳}$ مقدار $\tan \frac{\alpha}{۲}$ را حساب کنید.

۱۶۷ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos ۲a \cos ۲b = 1$$



۱۶۸ درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$4 \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos 3\alpha$$

۱۶۹ مقدار $\cos 67,5^\circ$ را محاسبه کنید.

۱۷۰ درستی تساوی زیر را اثبات کنید.

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

۱۷۱ مقدار عددی عبارت‌های زیر را بیابید.

الف

$$\cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$$

ب

$$\cot \frac{\pi}{12} - \tan \frac{\pi}{12}$$

فصل پنجم : حد و پیوستگی

درس سوم : قضایای حد

۱۷۲ حد زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - 2 \cos 2x}}$$

۱۷۳ دو تابع f, g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ کدام در صفر حد ندارند ولی $f + g$ در صفر حد دارد.

۱۷۴ تابع f را طوری تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 5$

۱۷۵ حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x + \cos x]$$

۱۷۶ حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} ([\sin x] + [\cos x])$$

۱۷۷ حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} [2 \sin x]$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} [2 \cos x]$$

۱۷۸ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x]$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]$$

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم)

۱۷۹ اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 + 8} = 4$ ، مقادیر a و b را بیابید.

۱۸۰ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

۱۸۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + \sqrt{x}} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1}$$

۱۸۲ حد زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$$



۱۸۳ حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

۱۸۴ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

۱۸۵ حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

۱۸۶ حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$$

ب

درس پنجم : پیوستگی

۱۸۷ پیوستگی تابع مقابل را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{\cot \frac{\pi x}{2}} & x < 1 \\ \pi & x = 1 \\ \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}} & x > 1 \end{cases}$$

۱۸۸ پیوستگی تابع مقابل را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} a[\tan x] + x & x < \frac{\pi}{4} \\ [\frac{1}{x}] + a & x = \frac{\pi}{4} \\ b \cos[\frac{x}{2}] & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۱۸۹ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ تعیین کنید.



۱۹۰ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = x[x]$ را با رسم شکل در بازه $(-۲, ۲)$ تعیین کنید.





پاسخنامه تشریحی

۱

$$a_n = 1, 4, 7, 10, \dots \quad d = 3$$

$$b_n = -5, -1, 3, 7, \dots \quad d' = 4$$

دنباله جملات مشترک، دنباله ای حسابی با جمله اول ۷ و قدر نسبت ۱۲ = ۳ × ۴ = ۱۲ است، پس داریم:

$$c_1 = 7, \quad d'' = 12 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2c_1 + (n-1)d) = 610 \Rightarrow \frac{n}{2}(14 + (n-1) \times 12) = 610$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(12n + 2) = 610 \Rightarrow 6n^2 + n - 610 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 \times 6 \times 610 = 14641$$

$$n = \frac{-1 \pm 121}{12} \Rightarrow \begin{cases} n = -\frac{122}{12} \\ n = 10 \end{cases} \quad \text{غیق}$$

۲ جملات فرد دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت $2d$ می باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است، پس:

$$\text{فرد } S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d) = 135 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

جملات زوج نیز دنباله ای حسابی با جمله اول a_2 و قدر نسبت $2d$ می باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است پس:

$$\text{زوج } S = \frac{10}{2}(2a_2 + 9 \times 2d) = 150 \Rightarrow 2(a_1 + d) + 18d = 30 \Rightarrow a_1 + 10d = 15$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ a_1 + 10d = 15 \end{cases} \Rightarrow d = 1,5, \quad a_1 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 150 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 135 \end{cases}$$

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \dots + a_{10} - a_{10} = 150 - 135 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1,5$$

$$S_{10} = 135 + 150 \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow 2a_1 + 19 \times 1,5 = 28,5 \Rightarrow a_1 = 0$$

روش دوم:

$$(x+3) + (x+5) + (x+7) + \dots + (x+23) = 253$$

$$\Rightarrow (x+x+\dots+x) + (3+5+7+\dots+23) = 253$$

$$a_1 = 3, \quad d = 2, \quad a_n = 23 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 23 \Rightarrow 3 + 2(n-1) = 23$$

$$\Rightarrow 2(n-1) = 20 \Rightarrow n = 11 \Rightarrow S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + 10d) = 11(a_1 + 5d)$$

$$\Rightarrow S_{11} = 11(3 + 10) = 11 \times 13 = 143$$

با توجه به اینکه مقدار x ها برابر ۱۱ عدد است، داریم:

$$11x + 143 = 253 \Rightarrow 11x = 110 \Rightarrow x = 10$$

۳

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_6 = \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 6a_1 + 15d = 57 \xrightarrow{\div 3} 2a_1 + 5d = 19$$

مجموع ۶ جمله دوم، خود دنباله ای حسابی با جمله اول a_7 و جمله آخر a_{12} است، پس داریم:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{12} = \frac{6}{2}(a_7 + a_{12}) = 3(a_1 + 6d + a_1 + 11d) = 3(2a_1 + 17d) = 165$$

$$\xrightarrow{\div 3} 2a_1 + 17d = 55 \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 5d = 19 \\ 2a_1 + 17d = 55 \end{cases} \Rightarrow 12d = 36 \Rightarrow d = 3$$

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



$$2a_1 + 5d = 19 \xrightarrow{d=3} 2a_1 + 15 = 19 \Rightarrow a_1 = 2$$

در نتیجه مجموع ۲۰ جمله اول برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(4 + 19 \times 3) = 610.$$

۵

$$\begin{aligned} S_m = S_n &\Rightarrow \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ &\xrightarrow{\times 2} 2ma_1 + (m^2 - m)d = 2na_1 + (n^2 - n)d \Rightarrow 2ma_1 + (m^2 - m)d - 2na_1 - (n^2 - n)d = 0 \\ &\Rightarrow (m-n)2a_1 + d[m^2 - m - n^2 + n] = 0 \Rightarrow (m-n)2a_1 + d[m^2 - n^2 - m + n] = 0 \\ &\Rightarrow (m-n)2a_1 + d[(m-n)(m+n) - (m-n)] = 0 \\ &\Rightarrow (m-n)2a_1 + d(m-n)(m+n-1) = 0 \Rightarrow (m-n)[2a_1 + (m+n-1)d] = 0 \\ m \neq n &\Rightarrow 2a_1 + (m+n-1)d = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$S_{m+n} = \left(\frac{m+n}{2}\right)[2a_1 + (m+n-1)d] \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{m+n}{2}\right) \times 0 = 0.$$

۶

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), S'_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)(d+k)) \\ S'_n - S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d + (n-1)k) - \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) + \frac{n}{2}(n-1)k - \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(n-1)k = \frac{k}{2}(n^2 - n) \end{aligned}$$

۷

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\ \text{دنباله‌ی اقساط} &: 20000, 25000, 30000, \dots, a_1 = 20000, d = 5000 \\ S_n = 570000 &\Rightarrow \frac{n}{2}(40000 + 5000(n-1)) = 570000 \\ \Rightarrow \frac{n}{2}(5000n + 35000) &= 570000 \Rightarrow \frac{n}{2}(5n + 35) = 570 \\ \Rightarrow 5n^2 + 35n - 1140 &= 0 \Rightarrow \Delta = 1225 + 22800 = 24025 \\ n = \frac{-35 \pm 155}{10} &= -19, \text{ غ ق ق } n = 12 \rightarrow \text{جواب} \\ a_{12} = a_1 + 11d &= 20000 + 11 \times 5000 = 75000 \rightarrow \text{آخرین قسط} \end{aligned}$$

۸ فرض کنیم a_n جمله عمومی دنباله‌ی حسابی باشد. بنابر این:

$$\begin{aligned} a_f, a_g, a_{12} \text{ هندسی} &\Rightarrow a_g^2 = a_f \times a_{12} \\ \Rightarrow (a_1 + 5d)^2 &= (a_1 + 3d)(a_1 + 11d) \\ \Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 &= a_1^2 + 14a_1d + 33d^2 \Rightarrow -4a_1d = 8d^2 \Rightarrow a_1 = -2d \\ q = \frac{a_g}{a_f} &= \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 5d}{-2d + 3d} = 3 \end{aligned}$$

یادآوری: اگر a و b و c تشکیل دنباله هندسی بدهند داریم:

$$b^2 = ac$$

۹ صورت و مخرج را در $x-1$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}{(x-1)(x^5+x^4+\dots+x+1)} &= \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{x^6-1} \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{x^6-1} = \frac{(x^4-1)(x^4+1)}{x^6-1} = \frac{x^8-1}{x^6-1} = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{f}, \frac{1}{f}, 1, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{f}, q = f$$

۱۰



$$S_n > 500 \Rightarrow \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} > 500 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(2^n - 1)}{2 - 1} > 500$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 > 1000 \Rightarrow 2^n > 1001 \Rightarrow n \geq 11$$

۱۱) اگر قدرنسبت دنباله هندسی q باشد، جملات زوج دنباله هندسی با جمله اول a_r و قدرنسبت q^r و جملات فرد دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q^r می‌باشند، پس:

$$\frac{S_{\text{جملات فرد}}}{S_{\text{جملات زوج}}} = \frac{\frac{a_1((q^r)^{10} - 1)}{q^{2-1}}}{\frac{a_r((q^r)^{10} - 1)}{q^{2-1}}} = \frac{a_1(q^{20} - 1)}{a_r(q^{20} - 1)} = \frac{a_1}{a_r} = \frac{a_1}{a_1 q} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

۱۲) با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a_1 + a_8 = 12 \Rightarrow a_1 + a_1 q^7 = 12 \Rightarrow a_1(1 + q^7) = 12 \quad (1)$$

$$a_r + a_8 = 246 \Rightarrow a_1 q + a_1 q^8 = 246 \Rightarrow a_1 q(1 + q^7) = 246 \quad (2)$$

با توجه به رابطه (۱) و (۲):

$$\Rightarrow \frac{a_1 q(1 + q^7)}{a_1(1 + q^7)} = \frac{246}{12} \Rightarrow q = 3 \Rightarrow a_1(1 + 3^7) = 12 \Rightarrow a_1 = 1$$

در نتیجه:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} = 3280 \Rightarrow 3^n - 1 = 6560 \Rightarrow 3^n = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 8$$

۱۳)

$$1, 2, 4, \dots \Rightarrow S_n = \frac{1(1 - 2^n)}{1 - 2} = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n = 8$$

۱۴)

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ می‌دانیم:}$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^8$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = x = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_9 = \frac{1(1 - (\sqrt{2})^9)}{1 - \sqrt{2}}$$

$$1 - x + \dots + x^8$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S'_9 = \frac{1(1 - (-\sqrt{2})^9)}{1 + \sqrt{2}}$$

$$S_9 \times S'_9 = \frac{(1 - (\sqrt{2})^9)}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{(1 + (\sqrt{2})^9)}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2^9 - 1 = 511$$

۱۵)

$$x_1 + x_r = -\frac{b}{a}, x_r = kx_1 \Rightarrow x_1 + kx_1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow (1 + k)x_1 = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a(k+1)} \Rightarrow x_r = \frac{-kb}{a(k+1)} \Rightarrow x_1 x_r = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{kb^r}{a^r(k+1)^r} = \frac{c}{a} \Rightarrow akb^r = a^r c(k+1)^r \Rightarrow kb^r = a \cdot c(k+1)^r \Rightarrow \frac{(k+1)^r}{k} = \frac{b^r}{a \cdot c}$$

۱۶) معادله درجه دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش $\alpha = 1 + \sqrt{5}$ و $\beta = 1 - \sqrt{5}$ باشند.

$$P = (1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5}) = 1 - 5 = -4 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

حال باید $S_8 = \alpha^8 + \beta^8$ را بیابیم.

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \xrightarrow{\times \alpha^{n-2}} \alpha^n - 2\alpha^{n-1} - 4\alpha^{n-2} = 0 \\ \beta^2 - 2\beta - 4 = 0 \xrightarrow{\times \beta^{n-2}} \beta^n - 2\beta^{n-1} - 4\beta^{n-2} = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^n + \beta^n - 2(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - 4(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) = 0$$



$$\Rightarrow S_n - 2S_{n-1} - 4S_{n-2} = 0, \quad S_1 = \alpha + \beta = 2, \quad S_2 = \alpha^2 + \beta^2 = S_1^2 - 2P = 2^2 - 2(-4) = 12$$

$$S_n = 2S_{n-1} + 4S_{n-2} \Rightarrow S_3 = 2S_2 + 4S_1 = 2 \times 12 + 4 \times 2 = 24 + 8 = 32$$

$$S_4 = 2S_3 + 4S_2 = 2 \times 32 + 4 \times 12 = 64 + 48 = 112$$

$$S_5 = 2S_4 + 4S_3 = 2 \times 112 + 4 \times 32 = 224 + 128 = 352$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS = 4 - 2 \times (-1) \times 2 = 4 + 4 = 8$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 8^2 \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = 64 \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 + 2P^2 = 64 \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = 64 - 2 = 62$$

$$\Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 + 2(-1)^2 = 64 \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 - 2 = 64 \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = 66$$

$$A = x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - \beta \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases}$$

$$A = \frac{\alpha^3}{(3-\beta)^5} + \frac{\beta^3}{(3-\alpha)^5} = \frac{\alpha^3}{(\alpha)^5} + \frac{\beta^3}{(\beta)^5} = \alpha^{-2} + \beta^{-2} = S^2 - 2P = 9 - 2 \times 1 = 7$$

چون α و β ریشه‌های معادله هستند، در معادله صدق می‌کنند.

$$3x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها: } S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{5}{3}, \quad \text{ضرب ریشه‌ها: } P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

$$3\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 1 = 5\alpha \xrightarrow{\div \alpha} 3\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5 \quad (1)$$

$$3\beta^2 - 5\beta + 1 = 0 \Rightarrow 3\beta^2 + 1 = 5\beta \quad (2)$$

در نتیجه بنابر رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{(3\alpha + \frac{1}{\alpha})^2}{(3\beta^2 + 1)^2 + 25\alpha^2} = \frac{5^2}{(\frac{5}{3})^2 + 25\alpha^2} = \frac{25}{25(\beta^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{S^2 - 2P} = \frac{1}{(\frac{5}{3})^2 - 2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{25}{9} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{25-6}{9}} = \frac{9}{19}$$

$$x^2 - 5x - 3 = 0 \xrightarrow{x=\beta} \beta^2 - 5\beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta(\beta - 5) = 3$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها: } \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\frac{\alpha}{\beta - 5} = \frac{\alpha\beta}{\beta(\beta - 5)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{2}]{\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m}{2}} \frac{m^2}{4} - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 16 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow (m - 6)(m + 2) = 0 \Rightarrow m = -2, 6$$

حال باید m را جایگذاری کنیم تا ببینیم که $\Delta > 0$ می‌شود تا معادله دو ریشه داشته باشد.

$$m = 6 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(5)(2) < 0 \quad \text{غ ق ق}$$

$$m = -2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-3)(2) > 0 \quad \text{ق ق ق}$$

۱۷

۱۸

در نتیجه:

۱۹

۲۰

۲۱

۲۲



$$x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow x^2 = 7x - 3 \quad \begin{cases} \alpha^2 = 7\alpha - 3 \\ \beta^2 = 7\beta - 3 \end{cases} \quad S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 7, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\alpha^2 - 4\alpha + 1} + \frac{1}{4\beta^2 - 4\beta + 1} &= \frac{1}{4(7\alpha - 3) - 4\alpha + 1} + \frac{1}{4(7\beta - 3) - 4\beta + 1} \\ &= \frac{1}{24\alpha - 7} + \frac{1}{24\beta - 7} = \frac{24(\alpha + \beta) - 14}{576\alpha\beta - 168(\alpha + \beta) + 49} \\ &= \frac{24 \times 7 - 14}{576 \times 3 - 168 \times 7 + 49} = \frac{154}{1152 - 1176 + 49} = \frac{154}{25} \end{aligned}$$

۲۳

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها} : S = \frac{-b}{a} \alpha + \beta = -1, \quad \text{ضرب ریشه‌ها} : P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\Rightarrow \text{جدید } S' = \alpha^2 + \frac{1}{\beta} + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = S^2 - 2P + \frac{S}{P} = 1 - 2(-3) + \frac{-1}{-3}$$

$$\text{جدید } S' = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\text{جدید } P' = (\alpha^2 + \frac{1}{\beta})(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}) = (\alpha\beta)^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = P^2 + S + \frac{1}{P} = 9 - 1 + \frac{1}{-3}$$

$$\Rightarrow \text{جدید } P' = 8 - \frac{1}{3} = \frac{23}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{23}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 23 = 0$$

۲۴

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1 - 1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 3 - 1 = 0, \quad x^2 + x + 1 = t$$

$$\Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1, \quad t = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

۲۵

$$\frac{x+5}{x-1} - \frac{6}{x^2+x+1} - \frac{6x^2+12}{(x-1)(x^2+x+1)} = x^2+1$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1) \times}{x \neq 1} \rightarrow (x+5)(x^2+x+1) - 6(x-1) - 6x^2-12 = (x^2+1)(x^2-1)$$

$$x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{5x^2} + \cancel{5x} + 5 - \cancel{6x} + 6 - 6x^2 - 12 = (x^2+1)(x^2-1)$$

$$\Rightarrow x^3 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) \Rightarrow (x^2+1)(x^2-1) - (x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(x^2+1-1) = 0 \Rightarrow x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{جواب} \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{غير قابل قبول} \end{cases}$$

۲۶

$$x^2 + x + 1 = t \rightarrow \sqrt{t+3} + \sqrt{t} = \sqrt{2t+7} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} t+3+t+2\sqrt{t^2+3t}+3t=2t+7 \rightarrow \sqrt{t^2+3t}=2 \rightarrow \sqrt{t^2+3t}=2$$

$$t^2+3t-4=0 \rightarrow t=1, \quad t=-4$$



$$t = 1 \xrightarrow{(1)} \sqrt{4} + \sqrt{1} = \sqrt{9} \rightarrow 2 + 1 = 3 \text{ قابل قبول}$$

$$t = -4 \xrightarrow{(1)} \sqrt{-1} + \sqrt{-4} = \sqrt{-1} \text{ غير قابل قبول}$$

$$t = 1 \rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow x = 0, x = -1$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x + \sqrt{x+11} + x - \sqrt{x+11} + 2\sqrt{(x + \sqrt{x+11})(x - \sqrt{x+11})} = 16$$

$$\Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - x - 11} = 16 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 11} = 8 - x$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - x - 11 = 64 - 16x + x^2 \Rightarrow 15x = 75 \Rightarrow x = 5$$

$$x = 5 \Rightarrow \sqrt{5 + \sqrt{16}} + \sqrt{5 - \sqrt{16}} = \sqrt{5+4} + \sqrt{5-4} = 3 + 1 = 4$$

$$4x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 24x + 7} \Rightarrow 4x - x^2 = \sqrt{6(x^2 - 4x) + 7}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt{6t+7} = -t \xrightarrow{\text{توان ۲}} 6t+7 = t^2 \Rightarrow t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (t-7)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \sqrt{-6+7} = -(-1) \Rightarrow 1 = 1 \text{ درست} \Rightarrow t = -1 \text{ جواب} \\ t = 7 \Rightarrow \sqrt{42+7} = -7 \Rightarrow 7 = -7 \text{ غلط} \Rightarrow t = 7 \text{ غلط} \end{cases}$$

$$x^2 - 4x = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$f(x) = |x+2| - |x-4| \text{ نمودار سرسره‌ای}$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -6, x = 4 \Rightarrow f(4) = 6 \Rightarrow -6 \leq f(x) \leq 6$$

$$\Rightarrow y = ||x+2| - |x-4|| = |f(x)| \quad -6 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 6$$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 6 \Rightarrow R = [0, 6] \text{ برد تابع}$$

$$A = \sqrt{x-2+4\sqrt{x-2+4}} - \sqrt{x-2-4\sqrt{x-2+4}}$$

$$A = \sqrt{(\sqrt{x-2+4})^2} - \sqrt{(\sqrt{x-2-4})^2} = \underbrace{|\sqrt{x-2+4}|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|\sqrt{x-2-4}|}_p$$

$$(1) \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 2} \text{ شرط رادیکال}$$

$$A = \sqrt{x-2+4} - |\sqrt{x-2-4}| \Rightarrow \begin{cases} a: p \leq 0 \\ b: p \geq 0 \end{cases}$$

$$a: \sqrt{x-2-4} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 2 \Rightarrow x-2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 6 \xrightarrow{(1)} 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x-2+4} + \sqrt{x-2-4} = 2\sqrt{x-2}$$

$$b: \sqrt{x-2-4} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 6 \xrightarrow{(1)} x \geq 6 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x-2+4} - \sqrt{x-2+4} = 0$$

۲۷

۲۸

با فرض $x^2 - 4x = t$ داریم:

در نتیجه:

۲۹

۳۰

مثل آب خوردن بگیر



$$A = \begin{cases} 2\sqrt{x-2}, & 2 \leq x \leq 6 \\ 4, & x \geq 6 \end{cases}$$

۳۱ می‌دانیم $x^2 = |x|^2$ ، پس داریم:

$$y = |x^2 - 2|x|| = ||x|^2 - 2|x||$$

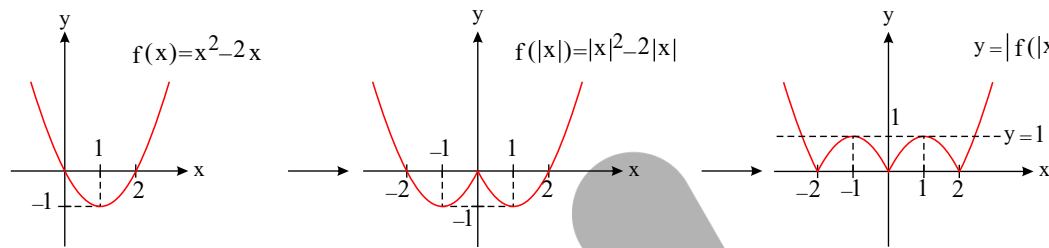
$$y = ||x|^2 - 2|x|| = |f(|x|)|$$

با فرض $f(x) = x^2 - 2x$ داریم، $f(|x|) = |x|^2 - 2|x|$ ، پس:

بنابراین ابتدا $f(x) = x^2 - 2x$ را رسم می‌کنیم.

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \Rightarrow \text{رأس } y = f(1) = 1 - 2 = -1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$



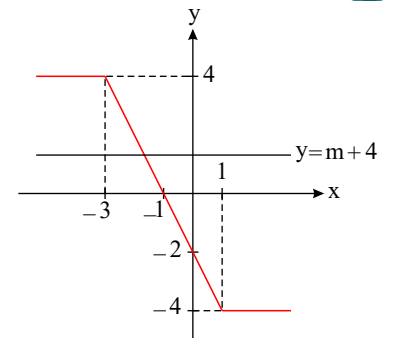
خط $y = 1$ در ۴ نقطه با تابع $y = |x^2 - 2|x||$ تلاقی دارد. در نقاط $x = \pm 1$ بر این تابع مماس است.

۳۲ ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1| - |x + 3|$ را رسم می‌کنیم.

$$x < -3 \Rightarrow y = -x + 1 + x + 3 = 4$$

$$-3 \leq x < 1 \Rightarrow y = -x + 1 - x - 3 = -2x - 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

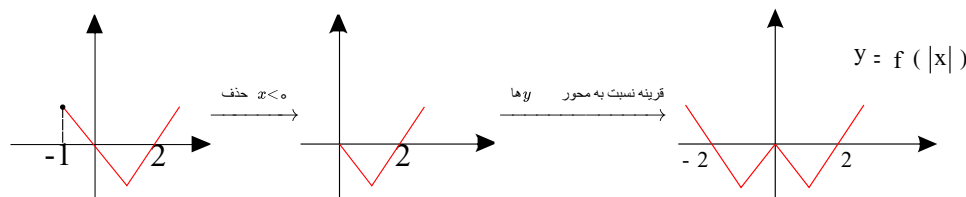
$$x \geq 1 \Rightarrow y = x - 1 - x - 3 = -4$$



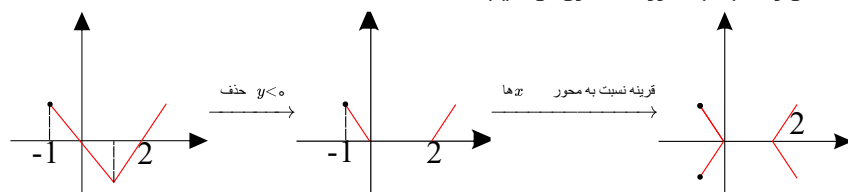
برای این‌که خط افقی $y = m + 4$ نمودار $y = |x - 1| - |x + 3|$ را حداقل در یک نقطه قطع کند، با توجه به شکل باید داشته باشیم.

$$-4 \leq m + 4 \leq 4 \Rightarrow -8 \leq m \leq 0$$

۳۳ برای رسم $y = f(|x|)$ ابتدا $x < 0$ را حذف کرده سپس قسمت باقیمانده آن را نسبت به محور y تقارن می‌دهیم.



برای رسم $|y| = f(x)$ ابتدا $y < 0$ را حذف کرده سپس قسمت باقیمانده آن را نسبت به محور x تقارن می‌دهیم.



نکته: اگر $|a| + |b| > |a + b|$ آنگاه $a \cdot b < 0$

$$|x - 1| + |2x| > |3x - 1|, a = x - 1, b = 2x \Rightarrow a + b = 3x - 1$$



$$\Rightarrow |a| + |b| > |a + b| \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow (x-1)(2x) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & & 0 & & 1 \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow \boxed{0 < x < 1} \text{ جواب}$$

۳۵

$$|2x| < |x-1| + |x+1| \Rightarrow a = x-1, b = x+1 \Rightarrow a+b = 2x$$

$$\Rightarrow |a+b| < |a| + |b| \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0$$

$$x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

نکته: نامساوی $|a+b| < |a| + |b|$ زمانی برقرار است که $ab < 0$ باشد.

۳۶ می‌دانیم $|A| = |-A|$ ، پس $|5-x| = |x-5|$ بنابراین داریم:

$$|x^2 + x - 2| + |x - 5| = |x^2 + 2x - 7|$$

حال با فرض $b = x - 5$ و $a = x^2 + x - 2$ داریم:

$$|a| + |b| = |a+b| \Rightarrow a \cdot b \geq 0 \Rightarrow (x^2 + x - 2)(x - 5) \geq 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -2 & & 1 & & 5 & +\infty \\ \hline (x^2 + x - 2)(x - 5) & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow -2 \leq x \leq 1 \text{ یا } x \geq 5$$

۳۷ اعداد مورد نظر را در نظر بگیریم، فاصله‌ی x تا ۳ بصورت $|x-3|$ و فاصله‌ی x تا ۲ بصورت $|x+2|$ می‌باشد. پس داریم:

$$|x-3| \geq |x+2| \Rightarrow (x-3)^2 \geq (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \geq x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow 9 - 4 \geq 4x + 6x \Rightarrow 5 \geq 10x \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

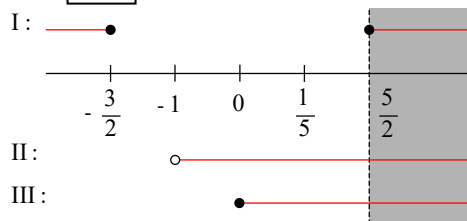
۳۸ ابتدا نامعادله را به شکل نامعادله‌های ساده تفکیک می‌کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$4 \leq |2x-1| < 3x \rightarrow \begin{cases} |2x-1| < 3x \rightarrow \begin{cases} 2x-1 < 3x \\ 2x-1 > -3x \end{cases} \\ \cap \text{ و} \\ |2x-1| \geq 4 \rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 4 \\ 2x-1 \leq -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$(I) \begin{cases} 2x-1 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \\ 2x-1 \leq -4 \Rightarrow 2x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 2x-1 < 3x \Rightarrow x > -1 \\ 2x-1 > -3x \Rightarrow 5x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(III) |x| < a (a \geq 0) \text{ باتوجه به نکته } 3x \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq 0}$$



$$I \cap II \cap III : x \in [\frac{5}{2}, +\infty)$$

$$\frac{x}{x-1} = |x+1|$$

$$x < -1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = -(x+1) \xrightarrow{x(x-1)} -(x+1)(x-1) = x \Rightarrow -(x^2-1) = x$$

۳۹



$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x < -1} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x \geq -1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = x + 1 \xrightarrow{x(x-1)} x^2 - 1 = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \geq 1 \Rightarrow \text{هر دو قابل قبول هستند.}$$

$$|1 - 3x| = |3x - 1| \Rightarrow |3x - 1| + |x + 4| > |4x + 3|$$

$$a + b = 4x + 3$$

$$|a + b| < |a| + |b| \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow (3x - 1)(x + 4) < 0$$

x	$-\infty$	-4	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$(3x - 1)(x + 4)$	$+$	0	$-$	0

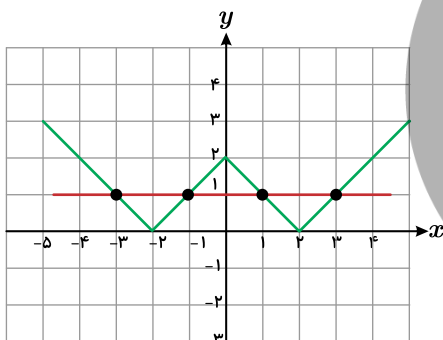
$$\Rightarrow -4 < x < \frac{1}{3}$$

$$||2 - x| - 3| = 4$$

$$\begin{cases} |2 - x| - 3 = 4 \Rightarrow |2 - x| = 7 \Rightarrow 2 - x = \pm 7 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = 7 \Rightarrow x = -5 \\ 2 - x = -7 \Rightarrow x = 9 \end{cases} \\ |2 - x| - 3 = -4 \Rightarrow |2 - x| = -1 \text{ غ قی } \end{cases}$$

$$\text{جمع ریشه‌ها: } 9 - 5 = 4$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -3 \text{ جواب‌های معادله}$$



$$\left| \frac{3 - 2x}{x - 4} \right| \geq 1 \Rightarrow \frac{|3 - 2x|}{|x - 4|} \geq 1 \xrightarrow{\substack{\times |x-4| \\ x \neq 4}} |3 - 2x| \geq |x - 4|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (3 - 2x)^2 \geq (x - 4)^2 \Rightarrow (3 - 2x)^2 - (x - 4)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (3 - 2x - x + 4)(3 - 2x + x - 4) \geq 0 \Rightarrow (-3x + 7)(-x - 1) \geq 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$(-3x + 7)(-x - 1)$	$+$	0	$-$	0

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq \frac{7}{3}$$

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1 \Rightarrow \frac{|x^2 - 5x + 4|}{|x^2 - 4|} \leq 1 \xrightarrow{\substack{\times |x^2-4| \\ x \neq \pm 2}}$$

$$|x^2 - 5x + 4| \leq |x^2 - 4| \Rightarrow (x^2 - 5x + 4)^2 \leq (x^2 - 4)^2$$

۴۰

۴۱

۴۲

۴۳

۴۴



$$\Rightarrow (x^2 - 5x + 4)^2 - (x^2 - 4)^2 \leq 0 \Rightarrow (x^2 - 5x + 4 + x^2 - 4)(x^2 - 5x + 4 - x^2 + 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow (2x^2 - 5x)(-5x + 8) \leq 0 \Rightarrow \text{ریشه } x = 0, \frac{5}{2}, \frac{8}{5}$$

x	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{5}$	
$(2x^2 - 5x)(-5x + 8)$	$+$	0	$-$	$+$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{8}{5} \text{ یا } x \geq \frac{5}{2}$$

طرفین را در عبارت مثبت $|x| + 2$ ضرب می‌کنیم. (۴۵)

$$\frac{x^2 - |x|}{|x| + 2} \leq 2 \xrightarrow{\times |x| + 2} x^2 - |x| \leq 2|x| + 4 \Rightarrow x^2 - 3|x| - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow |x|^2 - 3|x| - 4 \leq 0 \Rightarrow (|x| - 4)(|x| + 1) \leq 0 \Rightarrow |x| - 4 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

همواره مثبت

$$(2x^2 - 3x + 5)^2 > (x^2 + 5x - 2)^2 \Rightarrow (2x^2 - 3x + 5)^2 - (x^2 + 5x - 2)^2 > 0$$

$$\Rightarrow (2x^2 - 3x + 5 - x^2 - 5x + 2)(2x^2 - 3x + 5 + x^2 + 5x - 2) > 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 8x + 7)(3x^2 + 2x + 3) > 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 > 0$$

همواره مثبت $\Delta < 0$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 7) > 0$$

x	1	7
$\oplus$	0	$\oplus$

$$\Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > 7$$

$$y = 2x \Rightarrow M(x, 2x) \Rightarrow OM + MA = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (2x - 4)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{5x^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + [2(x - 2)]^2} = 5$$

$$\Rightarrow |x| \sqrt{5} + \sqrt{(x - 2)^2 + 4(x - 2)^2} = 5 \Rightarrow |x| \sqrt{5} + \sqrt{5(x - 2)^2} = 5$$

$$\Rightarrow |x| \sqrt{5} + |x - 2| \sqrt{5} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}(|x| + |x - 2|) = 5$$

$$\Rightarrow |x| + |x - 2| = \sqrt{5}$$

$$x < 0 \rightarrow -x - x + 2 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow M\left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right)$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow x - x + 2 = \sqrt{5} \rightarrow 2 = \sqrt{5} \text{ غلط}$$

$$x > 2 \rightarrow x + x - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow M\left(\frac{2 + \sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5}\right)$$

نقطه‌ی $A(1, 2)$ در هیچکدام از دو خط $x + 2y + 5 = 0$ و $2x - y + 15 = 0$ صدق نمی‌کند، پس شکل آن به صورت زیر است. (۴۸)

$$a: x + 2y + 5 = 0 \text{ فاصله‌ی } A \text{ تا خط } = \frac{|1 + 4 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$b: 2x - y + 15 = 0 \text{ فاصله‌ی } A \text{ تا خط } =$$

$$= \frac{|2 - 2 + 15|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

$$S = ab = 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 30$$

$$\text{شیب خط } m = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow y = mx + h \Rightarrow y = x + h$$

$$x = 0 \rightarrow y = h \Rightarrow B(0, h), y = 0 \rightarrow x = -h \Rightarrow A(-h, 0)$$

$$M = \frac{A + B}{2} = \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \Rightarrow 2x + y = 2 \Rightarrow 2\left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} = 2$$

$$\Rightarrow -\frac{h}{2} = 2 \rightarrow h = -4 \rightarrow \boxed{y = x - 4}$$

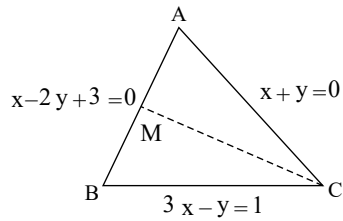
$$2x - y + 15 = 0$$

b	A
a	a

$$x + 2y + 5 = 0$$

(۴۹)

(۵۰)



$$\begin{cases} x+y=0 \Rightarrow y=-x \\ x-2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x-2(-x)= -3 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(-1,1)$$

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} x-2y=-3 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow -5x=-5 \Rightarrow x=1$$

$$x-2y=-3 \Rightarrow 1-2y=-3 \Rightarrow 4=2y \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(1,2)$$

$$\begin{cases} x+y=0 \Rightarrow y=-x \\ 3x-y=1 \end{cases} \Rightarrow 3x-(-x)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow C(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$M(0, \frac{3}{2}) \Rightarrow m_{CM} = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{0 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{-\frac{1}{4}} = -7$$

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

$$m_{BC} = \frac{-1+2}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} \Rightarrow y+1 = -\frac{4}{3}(x-1)$$

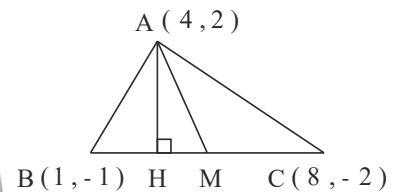
$$\Rightarrow 3y+3 = -4x+4 \Rightarrow x+3y = -\frac{1}{3} \Rightarrow BC \text{ معادله}$$

$$m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = 3 \Rightarrow y-2 = 3(x-\frac{1}{4}) \Rightarrow y-2 = 3x-\frac{3}{4} \Rightarrow 3x-y = \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} x+3y = -\frac{1}{3} \\ 3x-y = \frac{5}{4} \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} x+3y = -\frac{1}{3} \\ 9x-3y = \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow 8x = \frac{14}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{7}{8} - 3y = -\frac{1}{3} - 3(-\frac{7}{8}) = -\frac{1}{3} + \frac{21}{8} \Rightarrow x = \frac{19}{8} \Rightarrow M(\frac{19}{8}, -\frac{1}{8})$$

$$MH = \sqrt{(\frac{19}{8} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{8} + \frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



۵۱

$$m_{BC} = \frac{2-(-1)}{-1-0} = -3, y+1 = -3(x-0)$$

$$\Rightarrow y = -3x-1 \Rightarrow BC \text{ معادله}$$

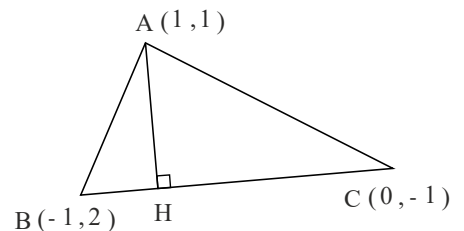
$$m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow y-1 = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow AH \text{ معادله}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = -3x-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = -3x-1 \xrightarrow{\times 3} x+1 = -9x-3$$

$$\Rightarrow 10x = -4 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = -3(-\frac{2}{5})-1 = \frac{6}{5}-1 = \frac{1}{5} \Rightarrow H(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$$



۵۲

۵۳



$$2x - 5y = 18 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{2}{5} \Rightarrow m_{AH} = -\frac{5}{2}$$

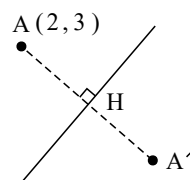
$$AH: y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 6 = -5x + 10$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 16 \xrightarrow{\times 5} 25x + 10y = 80 \\ 2x - 5y = 18 \xrightarrow{\times 2} 4x - 10y = 36 \\ \hline 29x = 116 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$2x - 5y = 18 \rightarrow 8 - 5y = 18 \rightarrow y = -2 \rightarrow H(4, -2)$$

$$H = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A + A' = 2H \rightarrow A' = 2H - A = 2(4, -2) - (2, 3)$$

$$\Rightarrow A' = (8 - 2, -4 - 3) = (6, -7)$$



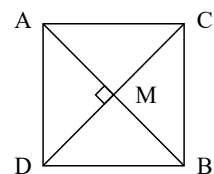
$$M = \frac{A + B}{2} = (1, \frac{5}{2})$$

$$m_{AB} = \frac{1 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-3}{4}, \quad A(-1, 4)$$

$$\Rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 1) \Rightarrow 4y - 16 = -3x - 3 \Rightarrow 3x + 4y = 13 \quad \text{قطر } AB$$

$$m_{AB} \cdot m_{CD} = -1 \Rightarrow m_{CD} = \frac{4}{3}, \quad M(1, \frac{5}{2}) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = \frac{4}{3}(x - 1) \xrightarrow{\times 6} 6y - 15 = 8x - 8$$

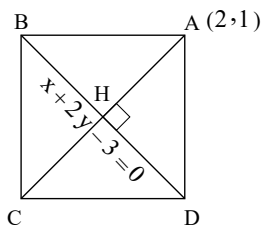
$$\Rightarrow 6y - 8x = 7 \rightarrow CD \text{ قطر}$$



۵۴

$$x + 2y = 3, \quad A(2, 1) \quad 2 + 2 \times 1 = 4 \neq 3 \Rightarrow \text{نادرست.}$$

چون رأس $A(2, 1)$ روی خط $x + 2y - 3 = 0$ صدق نمی‌کند، بنابراین شکل مسئله به صورت مقابل است. (الف)



$$2y = -x + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$BD \text{ شیب قطر} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AC \text{ شیب قطر} = 2, \quad A(2, 1)$$

$$\Rightarrow y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$AH = \frac{|2 + 2 \times 1 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{قطر مربع } d = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{مساحت مربع}$$

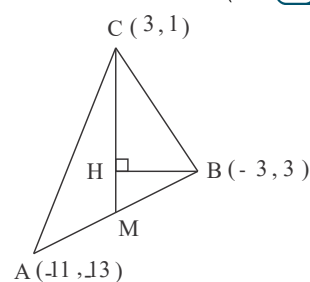
(ب) فاصله A تا قطر BD برابر با نصف قطر مربع است.

در نتیجه:

$$M = \frac{A + B}{2} = (-7, -5)$$

$$m_{CM} = \frac{-5 - 1}{-7 - 3} = \frac{3}{5}$$

$$y - 1 = \frac{3}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y - 5 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 5y - 4 = 0$$



۵۵ (الف)

$$BH = \frac{|3(-3) - 5 \times 3 - 4|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{|-9 - 15 - 4|}{\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{34}}$$

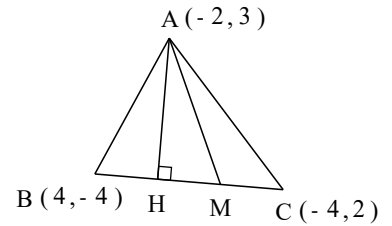


(الف) ۵۷

$$M = \frac{B+C}{2} \rightarrow M = (0, -1)$$

$$m_{AM} = \frac{-1-3}{0+2} = -2$$

$$\Rightarrow y+1 = -2(x-0) \Rightarrow y = -2x-1 \Rightarrow AM \text{ معادله میانه}$$



(ب)

$$m_{BC} = \frac{2-(-4)}{-4-4} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}, \quad C(-4, 2) \Rightarrow y-2 = -\frac{3}{4}(x+4)$$

$$\Rightarrow 4y-8 = -3x-12 \Rightarrow 3x+4y+4=0 \Rightarrow BC \text{ معادله ضلع}$$

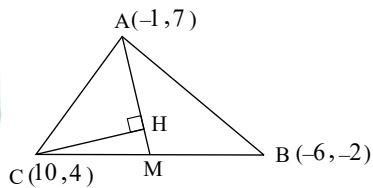
$$AH = \frac{|3(-2)+4 \times 3+4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-6+12+4|}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$BC = \sqrt{(-4-4)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{64+36} = 10 \rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 10 = 10$$

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(۵۸) شکل فرضی زیر را در نظر بگیرید. باید ابتدا معادله میانه AM را یافته و سپس فاصله رأس C از این خط را بیابیم.



$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-6+10}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1 \Rightarrow M(2, 1)$$

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1-7}{2-(-1)} = -2 \Rightarrow y - y_M = m_{AM}(x - x_M) \Rightarrow y - 1 = -2(x - 2) = -2x + 4$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow 2x + y - 5 = 0 : AM \text{ معادله میانه}$$

$$CH = \frac{|2 \times 10 + 4 - 5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{19}{\sqrt{5}} = \frac{19\sqrt{5}}{5}$$

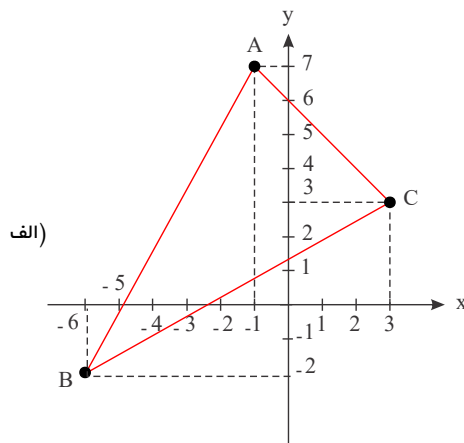
(۵۹)

$$AB = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$$

$$AB = BC \Rightarrow \text{مثلث متساوی الساقین}$$



(الف)

$$BC \text{ وسط } M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad m_{BC} = \frac{3-(-2)}{3-(-6)} = \frac{5}{9}$$

$$m = -\frac{9}{5} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{9}{5}x - \frac{22}{10} \Rightarrow BC \text{ عمود منصف}$$



توان $\rightarrow 4 - 4m + m^2 = m^2 + 1 \Rightarrow 3 = 4m \Rightarrow m = \frac{3}{4}$

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 8 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - 4y + 5 = 0$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

رأس: $x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a$

$$(2, 6) \rightarrow 4a + 2b + c = 6 \rightarrow 4a - 8a + c = 6 \rightarrow -4a + c = 6 \quad (1)$$

$$(5, 0) \rightarrow 25a + 5b + c = 0 \rightarrow 25a - 20a + c = 0 \rightarrow c = -5a \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow -4a - 5a = 6 \rightarrow a = -\frac{6}{9} \rightarrow a = -\frac{2}{3} \rightarrow b = \frac{8}{3}, c = \frac{10}{3}$$

محل برخورد سهمی با محور y ها $\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = c = \frac{10}{3} \end{cases} \rightarrow (0, \frac{10}{3}), (-4, 0)$

$$m = \frac{\frac{10}{3} - 0}{0 - (-4)} = \frac{5}{6} \rightarrow y - 0 = \frac{5}{6}(x + 4) \rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{10}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{10}{3} & x < 0 \\ -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{10}{3} & x \geq 0 \end{cases}$$

ب) $f(5) - 2f(-3) = \frac{-50}{3} + \frac{40}{3} + \frac{10}{3} - 2(-\frac{15}{6} + \frac{10}{3}) = 0 - 2(-\frac{5}{6}) = -\frac{5}{3}$

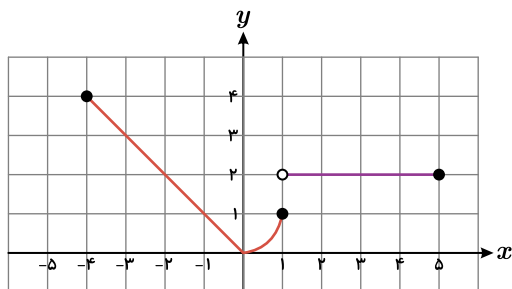
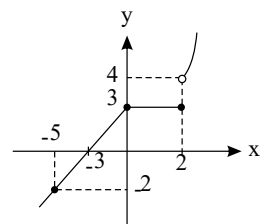
$$f\left(a + \frac{1}{a}\right) = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 4} = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \left|a - \frac{1}{a}\right|$$

$$g\left(a - \frac{1}{a}\right) = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + 4} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{1}{a}\right|$$

$$f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a + \frac{1}{a}\right) = \left|a - \frac{1}{a}\right| + \left|a + \frac{1}{a}\right| \xrightarrow{a < -1} -a + \frac{1}{a} - a - \frac{1}{a} = -2a$$

$$f(-5) = -2 \quad D_f = R \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{-2 - 0}{-5 + 3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 0 = 1(x + 3) \\ y = x + 3 \end{cases}$$



۶۱ ابتدا باید ضابطه سهمی را بیابیم.

۶۲

۶۳

۶۴

۶۵

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



۶۷

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 4}_{\leq 0} = \underbrace{-x^2}_{\leq 0} \Rightarrow y^2 - 4 \leq 0$$

$$y^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2 \xrightarrow{y \geq 0} 0 \leq y \leq 2$$

۶۸

$$g(x) = \sqrt{(3-x)f(x)} \Rightarrow (3-x)f(x) \geq 0$$

با توجه به نمودار f ، تعیین علامت آن به صورت زیر است:

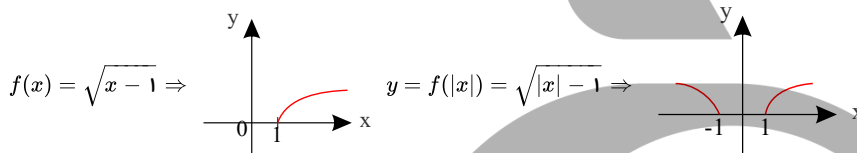
x	$-\infty$	-3	-1	2	3	4	$+\infty$
$f(x)$		-	+	-	+	+	-
$3-x$		+	+	+	+	-	-
$(3-x)f(x)$		-	+	-	+	-	+

$$-3 \leq x \leq -1 \text{ یا } 2 \leq x \leq 3 \text{ یا } x \geq 4$$

$$D_f = [-3, -1] \cup [2, 3] \cup [4, +\infty)$$

۶۹

تذکر: برای رسم نمودار $y = f(x)$ ابتدا $f(x)$ را رسم کرده سپس سمت چپ محور y ها را حذف قرینه سمت راست را در سمت چپ رسم می‌نماییم.



۷۰

$$f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{2-x}} + \sqrt{3 - \sqrt{x}}$$

$$(I) 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \text{ و } (II) x \geq 0$$

$$(III) 4 - \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} \leq 4 \Rightarrow 2-x \leq 16 \Rightarrow x \geq -14$$

$$(IV) 3 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Rightarrow x \leq 9 \quad (I) \cap (II) \cap (III) \cap (IV) \Rightarrow D_f = [0, 2]$$

۷۱

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{x+|x|}}$$

$$(I) x + |x| > 0 \Rightarrow |x| > -x \Rightarrow x > 0 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline x \cdot (x^2-1) \geq 0 & - & + & - \end{array}$$

$$(II) x(x^2-1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \cup x \geq 1$$

$$(I) \cap (II) = [1, +\infty)$$

۷۲

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1}} \rightarrow (I) x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \text{ و } (II) 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$(III) \sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x+1} \Rightarrow 2 \text{ توان } \Rightarrow x+3 \geq 2x+1 \Rightarrow x \leq 2$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow D_f = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۷۳

$$g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right], x^2+1 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} = D_f$$



$$x^t \geq 0 \Rightarrow \frac{t}{1-t} \geq 0 \Rightarrow \frac{t}{1-t} \begin{array}{c} \circ \\ - \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ + \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ - \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ + \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ - \end{array} \Rightarrow 0 \leq t < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^t}{x^t + 1} < 1 \Rightarrow g(x) = \left[\frac{x^t}{x^t + 1} \right] = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) = 0$$

پس دو تابع f و g برابرند.

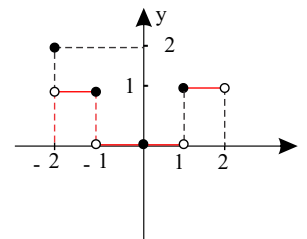
۷۴

$$-2 < x < 2 \Rightarrow 0 \leq |x| < 2$$

$$0 \leq |x| < 1 \Rightarrow y = [|x|] = 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$1 \leq |x| < 2 \Rightarrow y = [|x|] = 1 \Rightarrow -2 < x \leq -1 \text{ یا } 1 \leq x < 2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 2$$



۷۵ می‌دانیم حاصل جزء صحیح عددی صحیح است و از طرفی ضرب دو عدد صحیح زمانی برابر ۲- است که داشته باشیم:

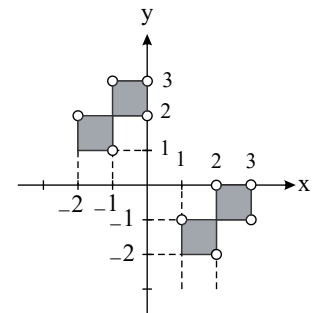
$$[x][y] = -2$$

$$\begin{cases} [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \\ [y] = -2 \Rightarrow -2 \leq y < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \\ [y] = 2 \Rightarrow 2 \leq y < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \\ [y] = -1 \Rightarrow -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1 \\ [y] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2 \end{cases}$$



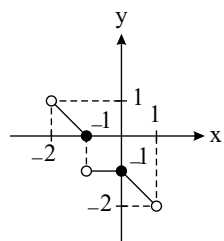
۷۶

$$y = |x|[-x] - 1 ; -2 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 2$$

$$-1 < -x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 , y = x(-1) - 1 = -x - 1 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & \circ & 1 \\ \hline y & -1 & -2 \end{array}$$

$$0 \leq -x < 1 \Rightarrow -1 < x \leq 0 , y = -x \times 0 - 1 = -1$$

$$1 \leq -x < 2 \Rightarrow -2 < x \leq -1 , y = -x \times 1 - 1 = -x - 1 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & -2 & -1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$$



$$[x-1] = \left[\frac{x}{2} + \frac{2}{2} \right] \Rightarrow [x] - 1 = \left[\frac{x}{2} \right] + 1 \Rightarrow [x] - \left[\frac{x}{2} \right] = 2$$

$$[2t] - [t] = 2 \Rightarrow [t] + \left[t + \frac{1}{2} \right] - [t] = 2$$

$$x = 2t \text{ داریم } \frac{x}{2} = t$$

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

۷۷



$$\left[t + \frac{1}{2}\right] = 2 \Rightarrow 2 \leq t + \frac{1}{2} < 3 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < 3$$

$$\Rightarrow 4 \leq x + 1 < 6 \Rightarrow 3 \leq x < 5$$

نکته:

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$$

از این نکته نتیجه می‌گیریم:

۷۸

$$\begin{cases} (1) \text{ if } : x \in \mathbb{Z} \rightarrow [-x] = -[x] \\ (2) \text{ if } : x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [-x] = -[x] - 1 \end{cases}$$

$$(1) \ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - (-x) = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$(2) \ x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] - (-[x] - 1) = 5 \Rightarrow [x] + [x] + 1 = 5$$

$$\Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 2 < x < 3$$

$$\text{نکته: } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \Rightarrow [-x] = -1 - [x]$$

$$3[x] - [1 - x] = 8 \Rightarrow 3[x] - 1 - [-x] = 8 \Rightarrow 3[x] - [-x] = 9$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$1) \text{ حالت } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x - (-x) = 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4} \notin \mathbb{Z} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$2) \text{ حالت } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 3[x] - (-1 - [x]) = 9 \Rightarrow 3[x] + 1 + [x] = 9$$

$$\Rightarrow 4[x] = 8 \Rightarrow [x] = 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} 2 < x < 3$$

۷۹

۸۰

الف

$$3[x^2] + 2[x] - 2 = x \rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

حاصل براکت عددی صحیح است پس، از صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت که چون x برابر جمع و تفریق چند عدد صحیح است، باید عددی صحیح باشد یعنی باید $x \in \mathbb{Z}$ بنابراین x^2 هم عددی صحیح است و داریم:

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^2 \in \mathbb{Z} \rightarrow 3x^2 + 2x - 2 = x \rightarrow 3x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{6} \rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ غ ق } 3, x = -1 \text{ جواب}$$

ب

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - \left[x - \frac{1}{2}\right] = 5 \rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - \left[x + 1 - \frac{1}{2} - 1\right] = 5$$

$$\rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - \left[x + \frac{1}{2} - 1\right] = 5 \rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1 = 5$$

$$\rightarrow [x] = 4 \rightarrow 4 \leq x < 5$$

۸۱

برای یک به یک بودن باید همدی ضابطه‌ها یک به یک باشند و سپس اشتراک بردهای آنها تهی باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \rightarrow x^2 + a \text{ یک به یک} \checkmark \\ 2x + 3 & x < 1 \rightarrow 2x + 3 \text{ یک به یک} \checkmark \end{cases}$$

$$R_1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 + a \geq 1 + a \Rightarrow y \geq 1 + a$$

$$R_2 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x + 3 < 5 \Rightarrow y < 5$$

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow 1 + a \geq 5 \Rightarrow a \geq 4$$

۸۲



هر ضابطه در محدوده خودش یک به یک است. زیرا:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5}, & x \geq 4 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1+5} = \sqrt{x_2+5} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \frac{1}{2}x + m, & x < 4 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + m = \frac{1}{2}x_2 + m \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

حال برد هر ضابطه را می‌یابیم. اشتراک برد ضابطه‌ها باید تهی باشد.

$$x \geq 4 \Rightarrow x + 5 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{x+5} \geq 3 \Rightarrow y_1 \geq 3 \quad (1)$$

$$x < 4 \Rightarrow \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x + m < 2 + m \Rightarrow y_2 < 2 + m \quad (2)$$

برای آن اشتراک (1) و (2) تهی شود، باید داشته باشیم:

$$2 + m \leq 3 \Rightarrow m \leq 1$$

یک به یک بودن را در تکنیک بازه‌هایی که تابع در آن تعریف شده است، بررسی می‌کنیم.

$$x \leq -1 : \quad x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{x \leq -1} x_1 = x_2$$

یک به یک است

$$-1 < x < 1 : \quad x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

یک به یک نیست

$$1 \leq x : \quad 1 + x_1 = 1 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است.

تابع در بازه‌ی دوم یک به یک نمی‌باشد پس در کل وارون‌پذیر نخواهد بود.

۸۴ فرض می‌کنیم $f^{-1}(4) = a$ در این صورت داریم: $f(a) = 4$.

$$f(x) = a + 2x - 11 \xrightarrow{x=a} f(a) = a + 2a - 11 \Rightarrow 4 = 3a - 11 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4) = 5 \Rightarrow f(x) = 5 + 2x - 11 \Rightarrow f(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 = y \Rightarrow x = \frac{y+6}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x+6}{2}$$

در نتیجه:

$$f^{-1}(26) = \frac{26+6}{2} = 16$$

۸۵

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{5x-2}, & x \geq 2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{5x_1-2} = \sqrt[3]{5x_2-2} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ x^2 - 12, & x < 2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 12 = x_2^2 - 12 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow 5x - 2 \geq 8 \Rightarrow \sqrt[3]{5x-2} \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 \quad (1)$$

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 12 < 4 - 12 \Rightarrow y < -8 \quad (2)$$

چون اشتراک (1) و (2) تهی است، پس تابع f یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$y = \sqrt[3]{5x-2} \Rightarrow 5x - 2 = y^3 \Rightarrow x = \frac{1}{5}(y^3 + 2) \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \frac{1}{5}(x^3 + 2)$$

$$y = x^2 - 12 \Rightarrow x^2 = y + 12 \Rightarrow x = \sqrt{y+12} \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \sqrt{x+12}$$

با توجه به اینکه دامنه تابع وارون برابر با برد تابع اصلی است داریم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x^3 + 2), & x \geq 2 \\ \sqrt{x+12}, & x < -8 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}, \quad x < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3} = y \Rightarrow x^2 - 1 = 2x^2 y + 3y$$

$$\Rightarrow x^2(1 - 2y) = 1 + 3y \Rightarrow x^2 = \frac{1 + 3y}{1 - 2y}$$

۸۶



$$x^r > 0 \Rightarrow \frac{1+ry}{1-ry} > 0 \Rightarrow \frac{y}{\frac{1+ry}{1-ry}} \left| \begin{array}{cccc} -\infty & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & +\infty \\ \frac{1+ry}{1-ry} & - & 0 & + \end{array} \right. \Rightarrow -\frac{1}{r} < y < \frac{1}{r}$$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x^r} = \sqrt{\frac{1+ry}{1-ry}} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1+ry}{1-ry}} \xrightarrow{x < 0} -x = \sqrt{\frac{1+ry}{1-ry}}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1+ry}{1-ry}} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1+rx}{1-rx}}, \quad D_{f^{-1}} = R_f = \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right)$$

۸۷

$$f(x) = r - \sqrt{x-1}, \quad x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0 \Rightarrow r - \sqrt{x-1} \leq r \Rightarrow f(x) \leq r \Rightarrow R_f = (-\infty, r]$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in D_f$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \quad x \in R_f$$

با توجه به روابط بالا، تساوی $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ زمانی برقرار است که $x \in D_f \cap R_f$ باشد، پس داریم:

$$D_f \cap R_f = [1, +\infty) \cap (-\infty, r] = [1, r] \Rightarrow \text{جواب} = [1, r]$$

۸۸

$$f(x) = x + r\sqrt{x-r} \Rightarrow (\sqrt{x-r} + 1)^r + r$$

$$f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow (\sqrt{x_1-r} + 1)^r + r = (\sqrt{x_r-r} + 1)^r + r$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1-r} + 1 = \sqrt{x_r-r} + 1 \Rightarrow x_1 = x_r. \text{ یک به یک است.}$$

$$y = (\sqrt{x-r} + 1)^r + r \quad (x \geq r) \Rightarrow y \geq r$$

$$y - r = (\sqrt{x-r} + 1)^r \Rightarrow \sqrt{y-r} = \sqrt{x-r} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-r} - 1 = \sqrt{x-r} \Rightarrow \text{توان} \Rightarrow (\sqrt{y-r} - 1)^r + r = x \xrightarrow{y \rightarrow x} y = (\sqrt{x-r} - 1)^r + r$$

$$\begin{cases} f^{-1} : [r, +\infty) \Rightarrow [r, +\infty) \\ f^{-1}(x) = (\sqrt{x-r} - 1)^r + r \end{cases}$$

۸۹

$$\begin{cases} f : [1, +\infty) \rightarrow R \\ f(x) = x^r - rx + 1 = x^r - rx + 1 + r = (x-1)^r + r \Rightarrow (x-1)^r \geq 0 \Rightarrow (x-1)^r + r \geq r \Rightarrow y \geq r \end{cases}$$

$$f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow (x_1-1)^r + r = (x_r-1)^r + r$$

$$\Rightarrow (x_1-1)^r = (x_r-1)^r \xrightarrow{x \geq 1} |x_1-1| = |x_r-1| \xrightarrow{x \geq 1} x_1-1 = x_r-1 \rightarrow x_1 = x_r$$

پس یک به یک است و تابع معکوس دارد.

$$y = (x-1)^r + r$$

$$y - r = (x-1)^r \Rightarrow \sqrt[r]{y-r} = |x-1|$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x = \sqrt[r]{y-r} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow y} y = \sqrt[r]{x-r} + 1$$



$$\begin{cases} f^{-1}: [4, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-4} + 1 \end{cases}$$

۹۰

$$f(x) = 2 - 3x$$

$$(f \circ g^{-1})(x) = 5x - 6 \Rightarrow f(g^{-1}(x)) = 5x - 6$$

یعنی در تابع f به جای x ، $g^{-1}(x)$ را قرار دهیم، پس داریم:

$$2 - 3g^{-1}(x) = 5x - 6 \Rightarrow -3g^{-1}(x) = 5x - 8 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(8 - 5x)$$

$$y = \frac{1}{3}(8 - 5x) \Rightarrow 3y = 8 - 5x \Rightarrow 5x = 8 - 3y \Rightarrow x = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}y \Rightarrow y = g(x) = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}x$$

۹۱

$$f(x) = -x^2 + 9x^2 - 27x - 1 = -x^2 + 9x^2 - 27x + 27 - 27 - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x^2 - 9x^2 + 27x - 27) - 28 = -(x - 3)^2 - 28$$

$$f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow -(x_1 - 3)^2 - 28 = -(x_r - 3)^2 - 28 \Rightarrow -(x_1 - 3)^2 = -(x_r - 3)^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - 3)^2 = (x_r - 3)^2 \Rightarrow x_1 - 3 = x_r - 3 \Rightarrow x_1 = x_r$$

تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$y = -(x - 3)^2 - 28 \Rightarrow (x - 3)^2 = -y - 28 \Rightarrow x - 3 = \sqrt{-y - 28}$$

$$\Rightarrow x = 3 + \sqrt{-y - 28} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{-x - 28}$$

۹۲

$$\text{الف) } h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2$$

$$h_{\max} = 100 \Rightarrow h = 100 \Rightarrow t = 0$$

$$h_{\min} = 0 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1000}{49} \Rightarrow t = \frac{10\sqrt{10}}{7}$$

$$D_{h(t)}: 0 \leq t \leq \frac{10\sqrt{10}}{7} \Rightarrow D_{h(t)} = \left[0, \frac{10\sqrt{10}}{7}\right]$$

$$R_{h(t)}: 0 \leq h(t) \leq 100 \Rightarrow R_{h(t)} = [0, 100]$$

$$\text{ب) } 100 - \frac{49t_1^2}{10} = 100 - \frac{49t_r^2}{10} \Rightarrow t_1^2 = t_r^2 \xrightarrow{t > 0} t_1 = t_r$$

یعنی امکان ندارد که سنگ در دو زمان در یک مکان قرار داشته باشد.

$$\text{ج) } y = h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2 \Rightarrow \frac{49}{10}t^2 = 100 - y$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{10}{49}(100 - y) \Rightarrow t = \frac{1}{7}\sqrt{10(100 - y)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(h) = \frac{1}{7}\sqrt{10(100 - h)}$$

د) نشان می‌دهد سنگ در چه زمانی به ارتفاع خاص می‌رسد و ارتفاع را به زمان تبدیل می‌کند.

۹۳

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \rightarrow f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow x_1 + 1 = x_r + 1 \Rightarrow x_1 = x_r \\ x^r + 1, & x \geq 0 \rightarrow f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow x_1^r + 1 = x_r^r + 1 \Rightarrow |x_1| = |x_r| \xrightarrow{x \geq 0} x_1 = x_r \end{cases}$$

$$x < 0 \rightarrow x + 1 < 1 \rightarrow y < 1 \rightarrow R_{f_1} = (-\infty, 1)$$

$$x \geq 0 \rightarrow x^r + 1 \geq 1 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow R_{f_r} = [1, +\infty) \rightarrow R_{f_1} \cap R_{f_r} = \emptyset \checkmark \rightarrow \text{تابع یک به یک است}$$



$$y = x + 1 \rightarrow x = y - 1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$x < 0 \rightarrow x + 1 < 1 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 1)$$

$$y = x^2 + 1 \rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow |x| = \sqrt{y - 1} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y - 1} \Rightarrow y = \sqrt{x - 1}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1 \\ \sqrt{x - 1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

تذکر: برای توابع چند ضابطه‌ای تابعی یک به یک است که اولاً هر کدام از ضابطه‌ها به تنهایی در محور خود یک به یک باشند ثانیاً اشتراک برد ضابطه‌ها سهمی باشد.

۹۴

الف

$$g^{-1} = \{(\delta, \gamma), (\epsilon, \epsilon), (\epsilon, \delta), (\circ, \gamma)\}$$

ب

$$\frac{f}{g} = \{(\gamma, \frac{\epsilon}{\delta})\}$$

ب

$$fog^{-1} = \{(\delta, \epsilon), (\circ, \epsilon)\}$$

محدوده‌های دو تابع f و g را به صوت زیر یکسان می‌کنیم.

۹۵

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ 2x & 1 < x < 3 \\ x^2 - 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq 3 \\ 1 + x & 1 < x < 3 \\ 1 + x & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x - (x - 3) & x \geq 3 \\ 2x - (1 + x) & 1 < x < 3 \\ x^2 - 1 - (1 + x) & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq 3 \\ x - 1, & 1 < x < 3 \\ x^2 - x - 2, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$D_f = [\gamma, \delta]$$

$$f(\frac{x}{\gamma}) \Rightarrow \gamma \leq \frac{x}{\gamma} \leq \delta \Rightarrow \epsilon \leq x \leq 1\circ$$

$$D_g = [\epsilon, 1\gamma]$$

$$g(\gamma x) \Rightarrow \epsilon \leq \gamma x \leq 1\gamma \Rightarrow \gamma \leq x \leq \epsilon$$

$$D_{f(\frac{x}{\gamma})} \cap D_{g(\gamma x)} = [\epsilon, \epsilon]$$

$$D_f = [x] \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ و } D_g = \{-\gamma, \delta, \circ, \gamma\}$$

$$D_f \cap D_g - \{x | g(x) = \circ\} = \{\delta, \gamma\}$$

$$\frac{\gamma f - \gamma g}{g} = \left\{ \left(\gamma, \frac{\gamma - \gamma\epsilon}{\gamma} \right) \left(\delta, \frac{\epsilon - \gamma}{\gamma} \right) \right\} = \left\{ \left(\gamma, \frac{-11}{\epsilon} \right) \left(\delta, \frac{-\delta}{\gamma} \right) \right\}$$

$$f(x) + \gamma f(-x) = \gamma x \xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-x) + \gamma f(x) = -\gamma x$$

$$-\gamma \times \begin{cases} f(x) + \gamma f(-x) = \gamma x \\ \gamma f(x) + f(-x) = -\gamma x \end{cases} \Rightarrow -\gamma f(x) = \epsilon x \Rightarrow f(x) = -\gamma x$$

$$D_f : x \geq \gamma, \quad D_g = \{\circ, \gamma, \delta\}$$

۹۶

۹۷

۹۸

۹۹



$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x = 0, 3, 5 \mid g(x) \geq 2\} = \{0, 3\}$$

$$fog(0) = f(g(0)) = f(3) = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1, fog(3) = f(g(3)) = f(2) = 0$$

$$fog = \{(0, \sqrt{1}), (3, 0)\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \geq 3 \mid f(x) = 0, 3, 5\}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow f(x) = 3 \rightarrow \sqrt{x-2} = 3 \rightarrow x = 11$$

$$f(x) = 5 \rightarrow \sqrt{x-2} = 5 \rightarrow x = 27 \rightarrow D_{gof} = \{2, 11, 27\}$$

$$gof(2) = g(f(2)) = g(0) = 3, gof(11) = g(f(11)) = g(3) = 2$$

$$gof(27) = g(f(27)) = g(5) = -9 \rightarrow gof = \{(2, 3), (11, 2), (27, -9)\}$$

۱۰۰

$$f(g(x)) = g^r(x) + 2g(x) = x^r - 2x^r + 2$$

$$g^r(x) + 2g(x) + 1 - 1 = x^r - 2x^r + 2 \Rightarrow (g(x) + 1)^r = x^r - 2x^r + 3$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^r = (x^r - 1)^r + 2 \Rightarrow |g(x) + 1| = \sqrt{(x^r - 1)^r + 2}$$

$$g(x) = \pm \sqrt{(x^r - 1)^r + 2} - 1$$

دو جواب برای $g(x)$ بدست می آید:

۱۰۱

$$f = \{(1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 3)\}, g = \{(2, 1), (3, 2), (0, 3), (1, 4)\}$$

$$\rightarrow g^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 0), (4, 1)\}$$

$$fog^{-1} = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}, 3f = \{(1, 6), (2, 0), (3, 3), (4, 9)\}$$

$$\rightarrow 3f \times fog^{-1} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 18)\}$$

۱۰۲

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

$$x \geq 2 \Rightarrow f(-x+1) = \begin{cases} -x+1+2, & -x+1 > 1 \Rightarrow (x < 0) \cap (x \geq 2) \Rightarrow \emptyset \\ 2(-x+1), & -x+1 \leq 1 \Rightarrow (x \geq 0) \cap (x \geq 2) \Rightarrow x \geq 2 \end{cases}$$

$$x < 2 \Rightarrow f(3x) = \begin{cases} 3x+2, & 3x > 1 \Rightarrow (x > \frac{1}{3}) \cap (x < 2) \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 2 \\ 2(3x), & 3x \leq 1 \Rightarrow (x \leq \frac{1}{3}) \cap (x < 2) \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$(fog)(x) = \begin{cases} -2x+2, & x \geq 2 \\ 3x+2, & \frac{1}{3} < x < 2 \\ 6x, & x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۰۳

$$f = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 4), (5, 0), (1, -1)\}$$

$$D_f = \{-2, -1, 0, 5, 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

$$D_f \cap D_g = \{-1, 0, 1\}, g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 0$$

$$f - g + 2 = \{(-1, 1 - 0 + 2), (0, 4 - 1 + 2), (1, -1 - 0 + 2)\} = \{(-1, 3), (0, 5), (1, 1)\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \{-2, -1, 0, 5, 1\} | f(x) \in [-1, 1]\}$$

$$D_{gof} = \{-1, 5, 1\}$$

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر
ب.



$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = 0, (g \circ f)(\Delta) = g(f(\Delta)) = g(0) = 1$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 0$$

در نتیجه:

$$g \circ f = \{(-1, 0), (\Delta, 1), (1, 0)\}$$

با توجه به نمودار سؤال داریم: ۱۰۴

$$f(-\epsilon) = -\Delta \Rightarrow f^{-1}(-\Delta) = -\epsilon, f(3) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 3$$

$$\frac{(g \circ f)(-2) + (g \circ g)(4)}{(f^{-1} \circ g)(3) - f^{-1}(-\Delta)} = \frac{g(f(-2)) + g(g(4))}{f^{-1}(g(3)) - (-\epsilon)} = \frac{g(0) + g(0)}{f^{-1}(3) + \epsilon} = \frac{4 + 4}{3 + \epsilon} = \frac{8}{9}$$

۱۰۵

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{2}}, x - \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \sqrt{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{|x|+3}{|x|-1}}, \overbrace{\frac{|x|+3}{|x|-1}}^{\text{همواره مثبت}} \geq 0 \Rightarrow |x|-1 > 0 \Rightarrow |x| > 1$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) | g(x) \in \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x < -1 \text{ یا } x > 1 | g(x) \neq \sqrt{2}\} \Rightarrow \sqrt{\frac{|x|+3}{|x|-1}} \neq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|x|+3}{|x|-1} \neq 2$$

$$\Rightarrow 2|x| - 2 \neq |x| + 3 \Rightarrow |x| \neq 5 \Rightarrow x \neq \pm 5$$

در نتیجه:

$$D_{f \circ g} = \{x < -1 \text{ یا } x > 1 | x \neq \pm 5\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) - \{5, -5\}$$

۱۰۶

$$f(g(x)) = 4x^2 - 16x + 27$$

$$f(x) = 4x + 3 \Rightarrow f(g(x)) = 4(g(x)) + 3$$

$$\Rightarrow 4(g(x)) + 3 = 4x^2 - 16x + 27 \Rightarrow 4(g(x)) = 4x^2 - 16x + 24 \Rightarrow g(x) = x^2 - 4x + 6$$

از طرفی داریم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 4f(x) + 6 = (4x + 3)^2 - 4(4x + 3) + 6$$

$$= 16x^2 + 24x + 9 - 16x - 12 + 6 \Rightarrow g \circ f(x) = 16x^2 + 8x + 3 \xrightarrow{x=1} g \circ f(1) = 27$$

۱۰۷

$$f(x-2) + 2f(2-x) = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 2-x} f(2-x) + 2f(x-2) = 2(2-x)$$

$$\begin{cases} f(2-x) + 2f(x-2) = 2-2x \\ -2 \times \begin{cases} f(x-2) + 2f(2-x) = 2x \end{cases} \Rightarrow -2f(2-x) = -4x + 4 - 2x \Rightarrow f(2-x) = 2x - \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$2-x = t \Rightarrow x = 2-t \Rightarrow f(t) = 2(2-t) - \frac{4}{3} = -2t + \frac{4}{3}$$

$$t \rightarrow x : f(x) = -2x + \frac{4}{3}$$

۱۰۸

$$(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \text{ می‌دانیم:}$$



$$f(g(x)) = x^r + \frac{1}{x^r} \xrightarrow{g(x)=x-\frac{1}{x}} f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^r - r$$

$$\xrightarrow{x-\frac{1}{x} \rightarrow t} f(t) = t^r - r \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = x^r - r$$

۱۰۹

الف

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = (-\infty, r] \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | \underbrace{x^r + r}_{*} \in (-\infty, r]\} = [-1, 1]$$

$$*: x^r + r \leq r \rightarrow x^r \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

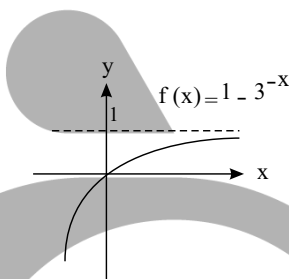
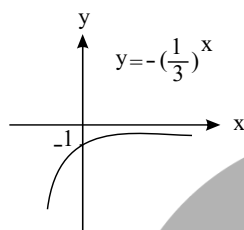
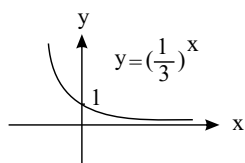
$$f \circ g(x) = \sqrt{r - (x^r + r)} = \sqrt{1 - x^r}$$

۱۱۰

الف

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 1 - 3^{-x}$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = 1 - 3^{-x} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

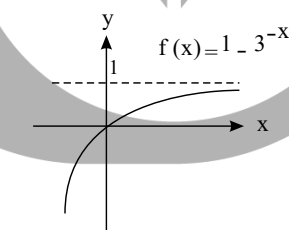
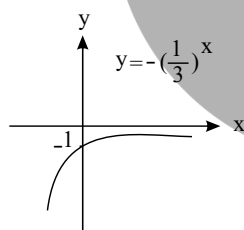
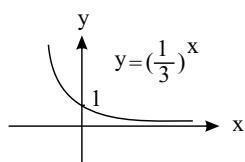


$$y = \sqrt{f(x)} \rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_y = [0, +\infty)$$

ب

ابتدا نمودار تابع $f(x) = 1 - 3^{-x}$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = 1 - 3^{-x} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



$$y = \sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x \leq 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$x \geq 0 \quad \text{یا} \quad x \leq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{دامنه} = \mathbb{R}$$

روش اول: ۱۱۱

$$y = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = \frac{3^x + 1 - 2}{3^x + 1} = 1 - \frac{2}{3^x + 1}$$

$$0 < 3^x < +\infty \Rightarrow 1 < 3^x + 1 < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{3^x + 1} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2} < \frac{-2}{3^x + 1} < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} < 1 - \frac{2}{3^x + 1} < 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} < y < 1$$

روش دوم: با فرض $3^x = t$ داریم:

$$y = \frac{t - 1}{t + 1} \rightarrow t - 1 = yt + 1 \rightarrow t - yt = 2 \rightarrow t(1 - y) = 2 \rightarrow t = \frac{2}{1 - y}$$

مثل آب خوردن بگیر



$$t = \frac{2y+1}{1-y} \Rightarrow 2^t = \frac{2y+1}{1-y} \Rightarrow 2^t > 0 \Rightarrow \frac{2y+1}{1-y} > 0$$

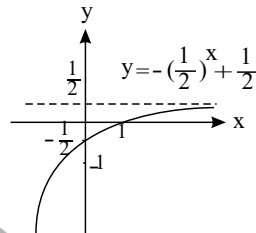
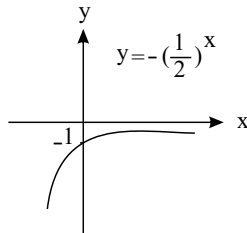
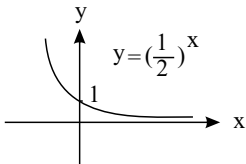
y	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$\frac{2y+1}{1-y}$	-	0	+	-

$$-\frac{1}{4} < y < 1 \Rightarrow \text{برد تابع} = \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$$

۱۱۲

$$y = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x} = \frac{2^{x-1}}{2^x} - \frac{1}{2^x} = 2^{x-1-x} - 2^{-x} = 2^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\Rightarrow y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2}$$



۱۱۳

$$y = \frac{3}{\delta + 2^x} \Rightarrow \delta + 2^x = \frac{3}{y} \Rightarrow 2^x = \frac{3}{y} - \delta \Rightarrow 2^x = \frac{3 - \delta y}{y}$$

y	$-\infty$	0	$\frac{3}{\delta}$	$+\infty$
$\frac{3 - \delta y}{y}$	-	0	+	-

$$\frac{3 - \delta y}{y} > 0 \Rightarrow 0 < y < \frac{3}{\delta}$$

می‌دانیم $2^x > 0$ ، پس داریم:

پس برد تابع بازه $R_f = \left(0, \frac{3}{\delta}\right)$ است.

۱۱۴

$$x = -1 \rightarrow g(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \rightarrow \text{نقطه‌ی برخورد } (-1, 3)$$

$$(-1, 3) \rightarrow f(x) = 2^{a+b} \Rightarrow f(-1) = 3 \rightarrow 2^{-a+b} = 3 = 2^{\log_2 3} \Rightarrow -a + b = \log_2 3$$

$$f(2) = \frac{1}{8} \rightarrow 2^{2a+b} = 2^{-3} \rightarrow 2a + b = -3$$

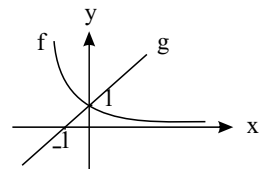
$$\begin{cases} -a + b = \log_2 3 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} a - b = -\log_2 3 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 - \log_2 3 \Rightarrow a = -\frac{3 + \log_2 3}{3}$$

$$b = a + 3 = -\frac{3 + \log_2 3}{3} + 3 = \frac{6 - 3 - \log_2 3}{3} = \frac{3 - \log_2 3}{3} \rightarrow f(x) = 2^{-\frac{3 + \log_2 3}{3}x + \frac{3 - \log_2 3}{3}}$$

$$3^{-x} = x + 1$$

$$f(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$g(x) = x + 1$$



معادله فقط یک ریشه دارد $x = 0$

۱۱۵

$$f(x_1) = f(x_r) \Rightarrow \log_3 \left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 3}\right) = \log_3 \left(\frac{x_r - 1}{x_r + 3}\right) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1 + 3} = \frac{x_r - 1}{x_r + 3}$$

$$\Rightarrow \cancel{x_1 x_r} + 3x_1 - x_r - \cancel{3} = \cancel{x_r x_1} - x_1 + 3x_r - \cancel{3} \Rightarrow 4x_1 = 4x_r$$

$\Rightarrow x_1 = x_r \Rightarrow$ تابع یک به یک است.

$$y = \log_3 \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right) \Rightarrow \frac{x - 1}{x + 3} = 3^y \Rightarrow \frac{x + 3 - 4}{x + 3} = 3^y$$

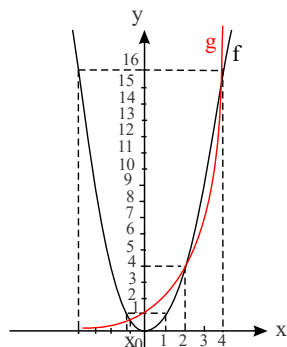
۱۱۶

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



$$\Rightarrow 1 - \frac{4}{x+3} = 2^y \Rightarrow 1 - 2^y = \frac{4}{x+3} \Rightarrow x+3 = \frac{4}{1-2^y}$$

$$x = \frac{4}{1-2^y} - 3 = \frac{4-3+3 \times 2^y}{1-2^y} = \frac{1+3 \times 2^y}{1-2^y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+3 \times 2^x}{1-2^x}$$



نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $x < x_0 \Rightarrow$

نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x_0 < x < 2 \Rightarrow$

نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $2 < x < 4 \Rightarrow$

نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x > 4 \Rightarrow$

شرط لگاریتم: $\frac{x-1}{x+2} > 0 \Rightarrow$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\frac{x-1}{x+2}$	+	o	-	o
ن.ن				+

$\Rightarrow x < -2$ یا $x > 1$ (1)

شرط رادیکال: $\log_{0.3}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \geq 0 \Rightarrow \log_{0.3}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \geq \log_{0.3} 1$

$\Rightarrow \frac{x-1}{x+2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x-1-x-2}{x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-3}{x+2} \leq 0$

با توجه به این که صورت کسر فوق عمودی منفی است. داریم:

$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$ (2)

$(1) \cap (2) : x > 1 \Rightarrow D_f = (1, +\infty)$

الف) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3^{x_1}-1}{3^{x_1}+2} = \frac{3^{x_2}-1}{3^{x_2}+2}$

$\Rightarrow 3^{x_1+x_2} + 2 \times 3^{x_1} - 3^{x_2} - 2 = 3^{x_1+x_2} + 2 \times 3^{x_2} - 3^{x_1} - 2$

$\Rightarrow 3 \times 3^{x_1} = 3 \times 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ تابع یک به یک است.

$y = \frac{3^x-1}{3^x+2} \Rightarrow 3^x-1 = y \times 3^x + 2y \Rightarrow 3^x - y \times 3^x = 2y+1$

$(1-y) \times 3^x = 2y+1 \Rightarrow 3^x = \frac{2y+1}{1-y} \Rightarrow x = \log_3\left(\frac{2y+1}{1-y}\right)$

$y = f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)$

$\log_{c+b}^a + \log_{c-b}^a = 2 \log_{c+b}^a \cdot \log_{c-b}^a$

$\frac{1}{\log_a^{(c+b)}} + \frac{1}{\log_a^{(c-b)}} = 2 \times \frac{1}{\log_a^{(c+b)}} \times \frac{1}{\log_a^{(c-b)}}$

$\frac{\log_a^{(c-b)} + \log_a^{(c+b)}}{\log_a^{(c+b)} \cdot \log_a^{(c-b)}} = \frac{2}{\log_a^{(c+b)} \cdot \log_a^{(c-b)}} \Rightarrow$

$\log_a(c-b) + \log_a(c+b) = 2 \Rightarrow \log_a(c-b)(c+b) = 2$

مثلث قائم الزاویه است. $\log_a(c^2 - b^2) = 2 \Rightarrow c^2 - b^2 = a^2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$

۱۱۷

۱۱۸

۱۱۹

۱۲۰

$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c$, $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$



۱۲۱

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}, \quad \log_k^a + \log_k^b + \log_k^c + \dots = \log_k^{(abc\dots)}$$

$$x = \log_a^{bc} \Rightarrow 1 + x = \log_a^a + \log_a^{bc} \Rightarrow 1 + x = \log_a^{abc}$$

$$y = \log_b^{ac} \Rightarrow 1 + y = \log_b^b + \log_b^{ac} \Rightarrow 1 + y = \log_b^{abc}$$

$$z = \log_c^{ab} \Rightarrow 1 + z = \log_c^c + \log_c^{ab} \Rightarrow 1 + z = \log_c^{abc}$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = \frac{1}{\log_a^{abc}} + \frac{1}{\log_b^{abc}} + \frac{1}{\log_c^{abc}} = \log_{abc}^a + \log_{abc}^b + \log_{abc}^c$$

$$\frac{(1+y)(1+z) + (1+x)(1+z) + (1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)} = \log_{abc}^{abc} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + y + z + yz + 1 + x + z + xz + 1 + x + y + xy = (1+x+y+xy)(1+z)$$

$$\Rightarrow 1 + y + z + yz + 1 + x + z + xz + 1 + x + y + xy = 1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz$$

$$\Rightarrow 1 + y + x + z = xyz$$

۱۲۲

$$\log_{b^m}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \quad \log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \quad \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_{1^r}^r = a \Rightarrow \frac{\log r^r}{\log(r \times r^r)} = a \Rightarrow \frac{r \log r}{\log r + r \log r} = a$$

$$r \log r = a \log r + r a \log r \Rightarrow (r-a) \log r = r a \log r \Rightarrow \log r = \left(\frac{r a}{r-a} \right) \log r$$

$$\log_{r^r}^r = \frac{\log r^r}{\log r \times r} = \frac{r \log r}{\log r + \log r} = \frac{r \log r}{\log r + \left(\frac{r a}{r-a} \right) \log r} = \frac{r \log r}{\left(1 + \frac{r a}{r-a} \right) \log r}$$

$$= \frac{r}{\frac{r-a+ra}{r-a}} = \frac{r(r-a)}{a+r} = \frac{r^2 - ra}{a+r}$$

$$\text{نکته: } \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$A = \frac{1}{\log_r^r} + \frac{1}{\log_{1^r}^r} - \frac{1}{\log_\lambda^r} = \log_r^r + \log_{1^r}^r - \log_\lambda^r$$

$$A = \log_r^r + \log_{r^r}^r - \log_r^r = \log_r^r + \frac{r}{r} \log_r^r - r \log_r^r$$

$$A = \log_r^r + r \log_r^r - r \log_r^r = 0$$

۱۲۳

$$\text{نکته: } \log_b^a = \frac{\log a}{\log b}, \quad \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$\frac{\log_{ab}^x}{\log_a^x} = \frac{1}{r} \Rightarrow \log_a^x = r \log_{ab}^x \Rightarrow \frac{\log x}{\log a} = r \times \frac{\log x}{\log ab}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log a} = \frac{r}{\log ab} \Rightarrow \log ab = r \log a$$

$$\log a + \log b = r \log a \Rightarrow \log b = (r-1) \log a \quad (1)$$

$$\frac{1}{\log_b^a} + \frac{1}{\log_a^b} = \log_a^b + \log_b^a = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b}$$

۱۲۴

در نتیجه بنابر نکته و رابطه (۱) داریم:

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



$$= \frac{3 \log a}{\log a} + \frac{\log a}{3 \log a} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

۱۲۵

نکته: $\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$

$$\log_9^{16} \times \log_r(\log_5^{\Delta^r}) \times \log_{\sqrt[3]{\Delta}}^{r^9} \times \log_{\sqrt[3]{r}}^{\Delta^r} = \frac{\log 16}{\log 9} \times \log_r^r \times \frac{\log r^9}{\log \sqrt[3]{\Delta}} \times \frac{\log \Delta^r}{\log \sqrt[3]{r}}$$

$$= \frac{\log 2^4}{\log 3^2} \times \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log \Delta^r}{\log \Delta^{\frac{1}{3}}} \times \frac{\log \Delta^r}{\log \Delta^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{4 \log 2}{2 \log 3} \times \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{r \log \Delta}{\frac{1}{3} \log \Delta} \times \frac{r \log \Delta}{\frac{1}{3} \log \Delta} = \frac{4}{2} \times 2 \times 6 = 24$$

۱۲۶

نکته: $\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$

$$\log_{r^r}^{r^r} = m \Rightarrow \frac{\log r^r}{\log r^r} = m \Rightarrow \frac{\log r^r}{\log(r \times r^r)} = m \Rightarrow \frac{r \log r}{\log r + r \log r} = m$$

$$\Rightarrow r \log r = m \log r + r m \log r \Rightarrow (r - m) \log r = r m \log r \Rightarrow \log r = \left(\frac{r m}{r - m} \right) \log r \quad (1)$$

در نتیجه:

$$\log_r^{16} = \frac{\log 16}{\log 6} = \frac{\log 2^4}{\log(2 \times 3)} = \frac{4 \log 2}{\log 2 + \log 3} \stackrel{(1)}{=} \frac{4 \log 2}{\log 2 + \left(\frac{r m}{r - m} \right) \log 2}$$

$$= \frac{4}{1 + \frac{r m}{r - m}} = \frac{4}{\frac{r - m + r m}{r - m}} = \frac{4(r - m)}{r + r m}$$

۱۲۷

از طرفین معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم.

$$\log_{\rho m}^n = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log x^{(r - \frac{\log x}{r})} = \log 100 \Rightarrow (r - \frac{1}{r} \log x) \log x = 2$$

با فرض $t = \log x$ داریم:

$$(r - \frac{1}{r} t) t = 2 \Rightarrow r t - \frac{1}{r} t^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{r} t^2 - r t + 2 = 0$$

$$\times r \rightarrow t^2 - r t + 2 = 0 \rightarrow (t - 2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \log x = 2$$

$$\Rightarrow x = 10^2 \rightarrow \boxed{x = 100}$$

۱۲۸

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \log_{\rho m}^n = \frac{n}{m} \log_b^a, \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$\sqrt{\log_x(\Delta x)^{\frac{1}{r}}} = \frac{-1}{\log_x \Delta} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{r} \log_x(\Delta x)} = -\log_x \Delta$$

$$\sqrt{\frac{1}{r} \log_x \Delta + \frac{1}{r} \log_x x} = -\log_x \Delta \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{r} \log_x \Delta + \frac{1}{r}} = -\log_x \Delta$$

$$\log_x \Delta = t \rightarrow \sqrt{\frac{1}{r} t + \frac{1}{r}} = -t \rightarrow \frac{1}{r} t + \frac{1}{r} = t^2$$

$$t + 1 = r t^2 \rightarrow r t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)(r t + 1) = 0 \Rightarrow t = 1, -\frac{1}{r}$$

$$t = 1 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = -1 \rightarrow 1 = -1 \text{ غیر قابل قبول}$$



$$t = -\frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_x 5 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\log_5 x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_5 x = -2 \rightarrow x = 5^{-2} \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{25}}$$

$$(129) \quad 1 = 2 \circ \circ \circ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\lambda}} \Rightarrow \log 1 = \log 2 \circ \circ \circ + \frac{t}{\lambda} \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \log 2 + \log 1 \circ \circ \circ + \frac{t}{\lambda} (-\log 2) \Rightarrow 0 = 0, 3 + 3 + \frac{t}{\lambda} (-0, 3) \Rightarrow t = 88$$

۱۳۰ از طرفین معادله در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$x^{2 - \frac{1}{2} \log_2 x} = 9 \Rightarrow \log_x^{(2 - \frac{1}{2} \log_2 x)} = \log_x^9 = \log_x^x$$

$$\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{2} \log_2 x\right) \log_x^x = \log_x^x = 2$$

با فرض $t = \log_2 x$ داریم:

$$\left(2 - \frac{1}{2} t\right) t = 2 \Rightarrow 2t - \frac{1}{2} t^2 = 2 \xrightarrow{\times 2} 4t - t^2 = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

۱۳۱

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b^a - \log_b^c$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = (3^2)^{y+1} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2^{2y+2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2y+2$$

$$\Rightarrow x-1 = 4y+4 \Rightarrow x = 4y+5 \quad (1)$$

$$\log(x+1) - \log y = 1 \Rightarrow \log\left(\frac{x+1}{y}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{y} = 10 \xrightarrow{(1)} \frac{4y+5+1}{y} = 10$$

$$\Rightarrow 10y = 4y+6 \rightarrow y = 1 \xrightarrow{(1)} x = 9$$

۱۳۲

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > 1 & a \geq c \\ 0 < b < 1 & a \leq c \end{cases}$$

$$\log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq \log_3 3^{-1} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{3} \geq 0$$

$$\frac{3x+3-x+1}{3(x-1)} \geq 0 \rightarrow \frac{2x+4}{3(x-1)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \leq -2 \text{ یا } x > 1 \quad (1)$$

$$\text{شرط لگاریتم: } \frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow$$

$$x < -1 \text{ یا } x > 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \quad x \leq -2 \text{ یا } x > 1 \Rightarrow \text{جواب} = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\log_1^{9-x^2} \frac{1}{2}}$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < 9 - x^2 \leq 1 \rightarrow 9 - x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 8 \Rightarrow x \geq 2\sqrt{2} \cup x \leq -2\sqrt{2} \quad (I)$$

$$9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \quad (II)$$

$$D_f : (I) \cap (II) = (-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3)$$

$$D_g : \begin{cases} a > 1 \rightarrow f \geq 1 \\ 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f \leq 1 \end{cases} \text{ در تابع } g(x) = \sqrt{\log_a^f} \text{ داریم:} \quad (133)$$

x	-2	1
	⊕	⊖
	⊗	⊗

x	-1	1
	⊕	⊖
	⊗	⊗

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

۱۳۴

الف



$$\log_{b^m}^a = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log_r^x \times \log_{r^2}^x \times \log_{r^3}^x \times \log_{r^4}^x = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_r^x \times \frac{1}{2} \log_r^x \times \frac{1}{3} \log_r^x \times \frac{1}{4} \log_r^x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} (\log_r^x)^4 = \frac{2}{3} \Rightarrow (\log_r^x)^4 = \frac{2}{3} \times 24 = 16 = 2^4$$

$$\log_r^x = \pm 2 \begin{cases} \log_r^x = 2 \rightarrow x = 2^2 = 4 \text{ جواب} \\ \log_r^x = -2 \rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \text{ جواب} \end{cases}$$

$$\log_{b^m}^a = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log x = t \rightarrow \frac{1}{1-4t} + \frac{4}{2+t} = 3 \Rightarrow \frac{2+t+4-16t}{(1-4t)(2+t)} = 3$$

$$3(2+t-4t-4t^2) = 6-16t \Rightarrow 6+3t-12t-12t^2 = 6-16t$$

$$12t^2 + 9t = 0 \Rightarrow t = 0, t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log x = 0 \rightarrow \boxed{x=1} \text{ جواب}, \log x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{10}}} \text{ جواب}$$

$$(\delta^2)^{\log x} = \delta + 4 \times \delta^{\log x} \Rightarrow (\delta^{\log x})^2 - 4 \times \delta^{\log x} - \delta = 0$$

$$t^2 - 4t - \delta = 0 \rightarrow (t - \delta)(t + 1) = 0 \rightarrow t = -1, t = \delta$$

$$t = -1 \rightarrow \delta^{\log x} = -1 \text{ غ ق ق ق}, t = \delta \rightarrow \delta^{\log x} = \delta \rightarrow \log x = 1 \rightarrow \boxed{x=10} \text{ جواب}$$

$$\log_r^x + \frac{1}{\log_r^x} = \frac{17}{4} \Rightarrow \log_r^x = a \rightarrow a + \frac{1}{a} = \frac{17}{4} \xrightarrow{\times 4a}$$

$$4a^2 + 4 = 17a \rightarrow 4a^2 - 17a + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 289 - 64 = 225$$

$$a = \frac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, a = 4 \Rightarrow \log_r^x = \frac{1}{4} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \text{ جواب}$$

$$\log_r^x = 4 \rightarrow x = 2^4 = 16 \text{ جواب}$$

$$C^\circ = \frac{45}{\pi} \times B_{rad} \quad \frac{C^\circ}{180} = \frac{C_{rad}}{\pi} \Rightarrow C^\circ = \frac{180 C_{rad}}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{180 C}{\pi} = \frac{45 B}{\pi} \Rightarrow 180 C = 45 B \Rightarrow 4C = B, B + C = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 4C + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{10} \rightarrow B = 4C = 4 \times \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

$$A = \frac{3 \sin(36^\circ + 90^\circ - 75^\circ) + 2 \sin(180^\circ - 75^\circ)}{\cos(90^\circ + 75^\circ) - 2 \cos(180^\circ + 75^\circ)}$$

$$= \frac{3 \cos 75^\circ + 2 \sin 75^\circ}{-\sin 75^\circ + 2 \cos 75^\circ} = \frac{\frac{3 \cos 75^\circ}{\cos 75^\circ} + \frac{2 \sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}}{-\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} + \frac{2 \cos 75^\circ}{\cos 75^\circ}}$$

$$= \frac{3 + 2 \tan 75^\circ}{-\tan 75^\circ + 2} = \frac{3 + 2(2 + \sqrt{3})}{-2 - \sqrt{3} + 2} = \frac{7 + 2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$$

ب

۱۳۵

الف

با فرض $\delta^{\log x} = t$ داریم:

ب

۱۳۶

۱۳۷

۱۳۸



$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3} \sin(\Delta\pi - \frac{\pi}{10}) - \sin(\pi + \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta}) + \sin(\sqrt{3}\pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta}) - \sqrt{3} \cos(\pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta})}{\cos(\pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta}) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}\pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta}) - \sin(\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{10})} \\ &= \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta} - \sin \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta} + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta}}{-\cos \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta} - \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}\pi}{\Delta} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{10}) + \sqrt{3} \cos(\frac{\sqrt{3}\pi}{10})}{-\sqrt{3} \cos(\frac{\sqrt{3}\pi}{10}) + \sin(\frac{\pi}{10})} \\ &= \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10} + \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{10})}{-\sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{10}) + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}}{-\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}}{-\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

۱۳۹

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(1\Delta^\circ + \sqrt{3}\Delta^\circ) \cos \sqrt{3}^\circ + \cos(1\Delta^\circ - \sqrt{3}\Delta^\circ) \sin \sqrt{3}^\circ}{\tan(1\Delta^\circ + \sqrt{3}^\circ) \cot \sqrt{3}^\circ + \cot(1\Delta^\circ + \sqrt{3}^\circ) \tan(\sqrt{3}^\circ + \sqrt{3}^\circ)} \\ &= \frac{-\sin \sqrt{3}^\circ \cos \sqrt{3}^\circ - \cos \sqrt{3}^\circ \sin \sqrt{3}^\circ}{\tan \sqrt{3}^\circ \cot \sqrt{3}^\circ + \cot \sqrt{3}^\circ \tan \sqrt{3}^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

۱۴۰

$$\begin{aligned} & \frac{\tan(\sqrt{3}\pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + x) + \sin(\pi - x) + \sqrt{3} \cos(\Delta\pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - x) - \cot(\Delta\pi - x)}{-\cot(\sqrt{3}\pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - x) + \sin(\sqrt{3}\pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + x) + \sqrt{3} \cos(1\sqrt{3}\pi - x) - \tan(\sqrt{3}\pi - x)} \\ &= \frac{\tan(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + x) + \sin x - \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - x) - \cot(-x)}{-\cot(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - x) - \sin(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + x) + \sqrt{3} \cos(-x) - \tan(-x)} \\ &= \frac{-\cot x + \sin x - \sqrt{3} \sin x + \cot x}{-\tan x - \cos x + \sqrt{3} \cos x + \tan x} = \frac{-\sqrt{3} \sin x}{\sqrt{3} \cos x} = -\tan x \end{aligned}$$

۱۴۱

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}\pi + \frac{\pi}{10}) - \sin \frac{\pi}{10} + \sin(\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{10}) - \sqrt{3} \sin(\pi + \frac{\pi}{10})}{\cos \frac{\pi}{10} \tan(\pi + \frac{\pi}{10}) + \sqrt{3} \cos(\frac{\sqrt{3}\pi}{10}) + \sin(\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{10})} \\ &= \frac{\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{10}) - \sin(\frac{\pi}{10}) + \sin(\frac{\pi}{10}) + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10} \tan \frac{\pi}{10} + \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{10}) - \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10} \times \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10}} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}}{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{10}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

۱۴۲

$$\sqrt{3}a + \sqrt{3}b = \sqrt{3}\pi \Rightarrow \sqrt{3}a - \sqrt{3}b + \Delta b = \sqrt{3}\pi \Rightarrow \sqrt{3}(a - b) = \sqrt{3}\pi - \Delta b$$

$$\Rightarrow a - b = \pi - \frac{\Delta b}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(a - b) = \tan(\pi - \frac{\Delta b}{\sqrt{3}}) = -\tan \frac{\Delta b}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}a + \sqrt{3}b = \sqrt{3}\pi \Rightarrow \sqrt{3}a + \sqrt{3}b + a = \sqrt{3}\pi \Rightarrow \sqrt{3}a + \sqrt{3}b = \sqrt{3}\pi - a$$

$$a + b = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(a + b) = \tan(\frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}})$$

$$\Rightarrow \tan(a + b) = \tan(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}}) = \cot \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\tan(a + b) \cdot \tan(a - b) = \cot \frac{a}{\sqrt{3}} \times (-\tan \frac{\Delta b}{\sqrt{3}}) = -\cot \frac{a}{\sqrt{3}} \tan \frac{\Delta b}{\sqrt{3}}$$

۱۴۳

$$A = \frac{\sin \frac{\Delta\pi}{\sqrt{3}} + \cot \frac{11\pi}{6}}{\sqrt{3} \cos \frac{\Delta\pi}{\sqrt{3}} + \sin \frac{\Delta\pi}{6}} = \frac{\sin(\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{\sqrt{3}}) + \cot(\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{\sqrt{3}}) + \sin(\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{-\sin \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \cot \frac{\pi}{6}}{-\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{-1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

۱۴۴

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$x = \sqrt{3}\pi \rightarrow y = 1$$



این تابع یک به یک نیست زیرا برای دو x متفاوت یک y بدست می‌آید.

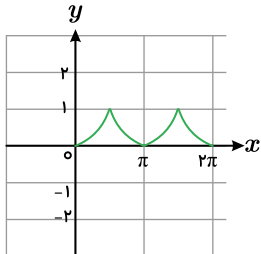
۱۴۵

$$y = 2 \sin x + \cos x$$

نکته: $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

$$-\sqrt{4+1} \leq 2 \sin x + \cos x \leq \sqrt{4+1} \rightarrow -\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$$

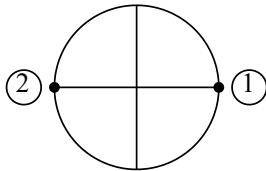
۱۴۶



$[0, 1]$ برد

۱۴۷

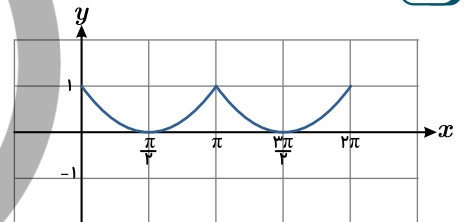
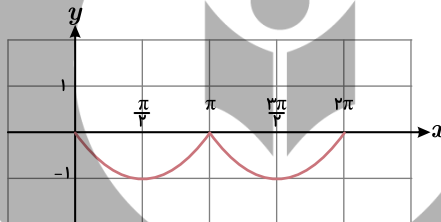
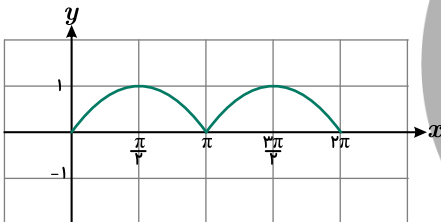
حاصل $[x]$ عددی صحیح است پس $\pi[x]$ برابر با مضارب صحیح π است و از روی دایره مثلثاتی مضارب صحیح π روی نقاط (1) یا (-1) قرار دارند و در این دو نقطه مقدار سینوس صفر است. یعنی به ازای هر x حقیقی $\sin \pi[x]$ برابر صفر است و داریم:



$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin \pi[x] = 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi[x]} = \sqrt{-0} = \sqrt{0} = 0$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۱۴۸



۱۴۹

$$\frac{-\sin x}{2 + \sin x} = t \Rightarrow 2t + t \sin x = -\sin x \Rightarrow (1+t) \sin x = -2t$$

$$\sin x = \frac{-2t}{1+t} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow |\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{-2t}{1+t} \right| \leq 1$$

$$\xrightarrow{t \neq -1} |2t| \leq |1+t| \Rightarrow (2t)^2 \leq (t+1)^2 \Rightarrow (2t)^2 - (t+1)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (2t + t + 1)(2t - t - 1) \leq 0 \Rightarrow (3t + 1)(t - 1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{3} \leq t \leq 1 \Rightarrow t = [t] = -1, 0, 1$$

برد تابع $R = \{-1, 0, 1\}$

۱۵۰

$$y = \frac{\cos x - 1}{2 \cos x + 1} \Rightarrow \cos x - 1 = 2y \cos x + y$$

$$\Rightarrow (1 - 2y) \cos x = y + 1 \Rightarrow \cos x = \frac{y+1}{1-2y}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow |\cos x| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{y+1}{1-2y} \right| \leq 1 \xrightarrow{y \neq \frac{1}{2}} |y+1| \leq |1-2y|$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 \leq 1 - 4y + 4y^2 \Rightarrow 3y^2 - 6y \geq 0 \Rightarrow 3y(y - 2) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 2 \\ + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow y \leq 0 \quad \text{یا} \quad y \geq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$



$$y = \frac{2}{3 + \sin x} \Rightarrow 3 + \sin x = \frac{2}{y} \rightarrow \sin x = \frac{2}{y} - 3$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2}{y} - 3 \leq 1$$

$$\frac{2}{y} - 3 \geq -1 \Rightarrow \frac{2 - 2y}{y} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} y & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline & & - & + & \\ & & \text{عبارت} \geq 0 & & \end{array} \Rightarrow 0 < y \leq 1 \quad (1)$$

$$\frac{2}{y} - 3 \leq 1 \Rightarrow \frac{2 - 4y}{y} \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} y & -\infty & 0 & \frac{1}{2} & +\infty \\ \hline & & - & + & \\ & & \text{عبارت} \leq 0 & & \end{array} \Rightarrow y < 0 \text{ یا } y \geq \frac{1}{2} \quad (2)$$

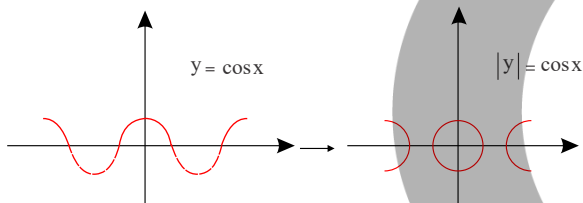
$$(1) \cap (2) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \Rightarrow R_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 &\rightarrow 2 \leq \sin x + 3 \leq 4 \rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sin x + 3} \geq \frac{1}{4} \rightarrow 1 \geq \frac{2}{\sin x + 3} \geq \frac{1}{2} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{\sin x + 3} \leq 1 \rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \rightarrow R_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{aligned}$$

۱۵۲ برای رسم نمودار تابع $|y| = f(x)$ ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و آن قسمت از نمودار که پایین محور x ها است را حذف می‌کنیم و سپس قرینه‌ی قسمت باقی‌مانده را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

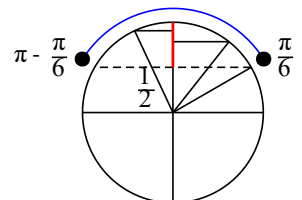
$$|y| = \cos x$$



$$f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1} \Rightarrow 2 \sin x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$$

از روی دایرهٔ مثلثاتی باید کمان‌هایی را بیابیم که سینوس آن‌ها بزرگ‌تر مساوی $\frac{1}{2}$ باشد.

$$\sin \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

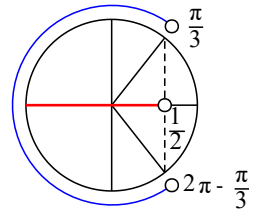


$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos x}} \quad 1 - 2 \cos x > 0 \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2}$$

از روی دایره مثلثاتی باید کمان‌هایی را بیابیم که کوسینوس آن‌ها کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد.



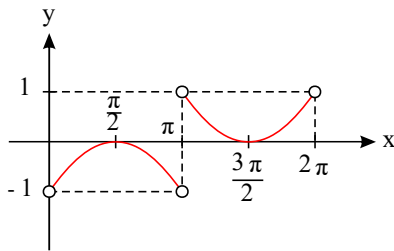
$$\cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x < 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$



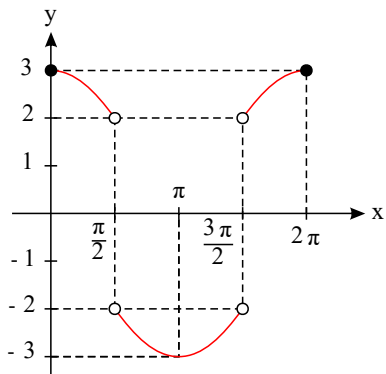
۱۵۴

الف

$$y = \sin x - \frac{|\sin x|}{\sin x} = \begin{cases} \sin x - \frac{\sin x}{\sin x} = \sin x - 1, & \sin x > 0 \rightarrow 0 < x < \pi \\ \sin x - \frac{-\sin x}{\sin x} = \sin x + 1, & \sin x < 0 \rightarrow \pi < x < 2\pi \end{cases}$$



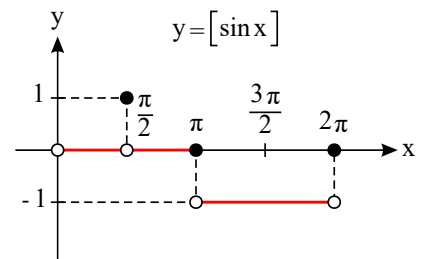
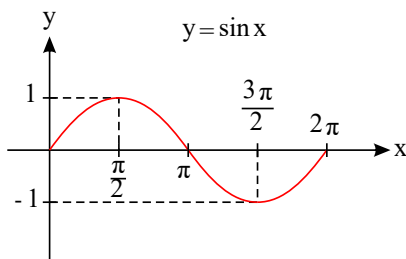
$$y = \frac{2|\cos x|}{\cos x} + \cos x = \begin{cases} \frac{2\cos x}{\cos x} + \cos x = \cos x + 2, & \cos x > 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ \frac{-2\cos x}{\cos x} + \cos x = \cos x - 2, & \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



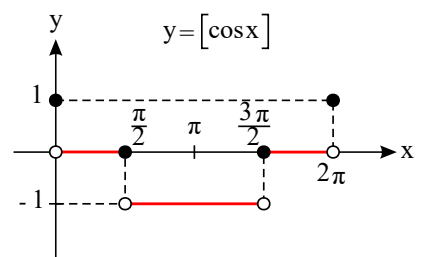
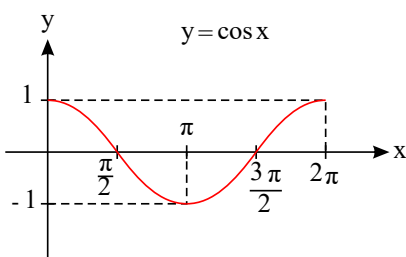
۱۵۵

الف

باید ابتدا $y = \sin x$ را رسم کرد و سپس قسمتهایی از نمودار که بین خطوط افقی $y = K$ و $y = K + 1$ قرار دارد را روی خط $y = K$ تصویر نمود. ($K \in \mathbb{Z}$)



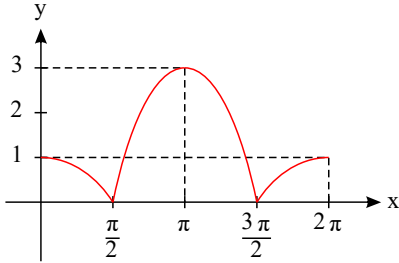
ابتدا $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس قسمتهایی از نمودار که بین خطوط افقی $y = K$ و $y = K + 1$ قرار دارد را روی خط $y = K$ تصویر می‌کنیم. ($K \in \mathbb{Z}$)



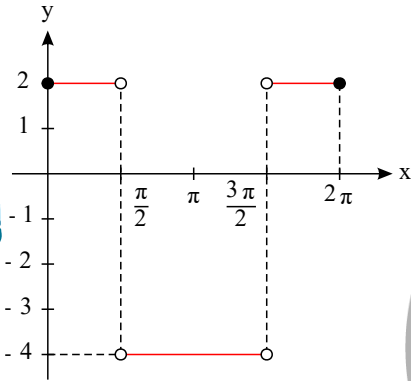
مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



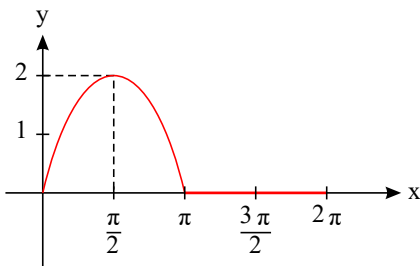
$$y = 2|\cos x| - \cos x = \begin{cases} 2\cos x - \cos x = \cos x, & \cos x \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ -2\cos x - \cos x = -3\cos x, & \cos x < 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



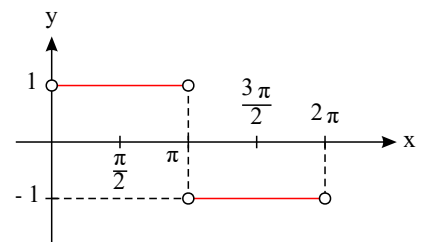
$$y = \frac{|3\cos x|}{\cos x} - 1 = \begin{cases} \frac{3\cos x}{\cos x} - 1 = 3 - 1 = 2, & \cos x > 0 \rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ \frac{-3\cos x}{\cos x} - 1 = -3 - 1 = -4, & \cos x < 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



$$y = |\sin x| + \sin x = \begin{cases} \sin x + \sin x = 2\sin x & \sin x \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x + \sin x = 0 & \sin x < 0 \rightarrow \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



$$y = \frac{|\sin x|}{\sin x} = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin x} = 1, & \sin x > 0 \rightarrow 0 < x < \pi \\ \frac{-\sin x}{\sin x} = -1, & \sin x < 0 \rightarrow \pi < x < 2\pi \end{cases}$$





$$\tan x \tan y = \frac{1}{6}, \quad x + y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(x + y) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = 1 \Rightarrow \tan x + \tan y = 1 - \tan x \tan y = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\tan x + \tan y = \frac{5}{6} \Rightarrow \tan y = \frac{5}{6} - \tan x, \quad \tan x \tan y = \frac{1}{6} \Rightarrow \tan x \left(\frac{5}{6} - \tan x \right) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} \tan x - \tan^2 x = \frac{1}{6} \Rightarrow \tan^2 x - \frac{5}{6} \tan x + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow 6 \tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{5 \pm 1}{12} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{3}$$

$$\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan y = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan y = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$$

۱۵۹

$$\tan 2a = \tan((a+b) + (a-b)) = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 - \tan(a+b)\tan(a-b)} = \frac{9+5}{1-9 \times 5} \Rightarrow \tan 2a = \frac{14}{-44} = -\frac{7}{22}$$

$$\tan 2b = \tan((a+b) - (a-b)) = \frac{\tan(a+b) - \tan(a-b)}{1 + \tan(a+b)\tan(a-b)} = \frac{9-5}{1+9 \times 5} \Rightarrow \tan 2b = \frac{4}{46} = \frac{2}{23}$$

۱۶۰

$$\sin y = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = 3, \quad \tan(x+y) = -7 \Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = -7$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + 3}{1 - 3 \tan x} = -7 \Rightarrow \tan x + 3 = -7 + 21 \tan x \Rightarrow 10 = 20 \tan x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

۱۶۱

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده}} \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{12}{13} \xrightarrow{\beta \text{ در ربع سوم}} \sin \beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{-48 + 15}{65} = -\frac{33}{65}$$

۱۶۲

الف

$$x + y = \pi - z \Rightarrow \tan(x + y) = \tan(\pi - z)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = -\tan z \Rightarrow \tan x + \tan y = -\tan z + \tan x \tan y \tan z$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

ب

$$x + y = \pi - z \Rightarrow \cot(x + y) = \cot(\pi - z) \Rightarrow \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = -\cot z$$

$$\Rightarrow \cot x \cot y - 1 = -\cot x \cot z - \cot z \cot y \Rightarrow \cot x \cot y + \cot x \cot z + \cot z \cot y = 1$$

۱۶۳

الف

$$23^\circ + 22^\circ = 45^\circ \Rightarrow \tan(23^\circ + 22^\circ) = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 23^\circ + \tan 22^\circ}{1 - \tan 23^\circ \times \tan 22^\circ} = 1 \Rightarrow \tan 23^\circ + \tan 22^\circ = 1 - \tan 23^\circ \times \tan 22^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 23^\circ + \tan 22^\circ + \tan 23^\circ \tan 22^\circ = 1$$

$$39^\circ + 21^\circ = 60^\circ \Rightarrow \tan(39^\circ + 21^\circ) = \tan 60^\circ$$

ب

مثل آب خوردن بگیر



$$\Rightarrow \frac{\tan 39^\circ + \tan 21^\circ}{1 - \tan 39^\circ \times \tan 21^\circ} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 39^\circ + \tan 21^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 39^\circ \times \tan 21^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 39^\circ + \tan 21^\circ + \sqrt{3} \tan 39^\circ \tan 21^\circ = \sqrt{3}$$

الف) $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha = \tan \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos \alpha + \sin \alpha$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)}{\frac{1}{2}} = 2 \sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$$

$$(\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$

$$= \sin^r a \cos^r b - \cos^r a \sin^r b = \sin^r a (1 - \sin^r b) - (1 - \sin^r a) \sin^r b$$

$$\sin^r a - \sin^r a \sin^r b - \sin^r b + \sin^r a \sin^r b = \sin^r a - \sin^r b$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow \cot(x + y) = \cot(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \tan z = \frac{1}{\cot z} \Rightarrow \cot x + \cot y = \cot x \cot y \cot z - \cot z$$

$$\Rightarrow \cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cot y \cot z$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow \tan(x + y) = \tan(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \cot z = \frac{1}{\tan z} \Rightarrow \tan x \tan z + \tan y \tan z = 1 - \tan x \tan y$$

$$\tan x \tan y + \tan x \tan z + \tan y \tan z = 1$$

$$\sin \alpha = -\frac{12}{13} \quad \alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = ?$$

$$\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$$

در ربع دوم قرار دارد $\frac{\alpha}{2}$ با توجه به دایره مثلثاتی $\tan \frac{\alpha}{2}$ از ۱- کمتر است.

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{-12}{13} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow -6 - 6 \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 13 \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$6 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 13 \tan \frac{\alpha}{2} + 6 = 0$$

$$\Delta = 169 - 144 = 25$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-13 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \text{ ق ق} \\ -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$(\cos a \cos b - \sin a \sin b)^r + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)^r - \cos^r a \cos^r b =$$

$$\cos^r a \cos^r b + \sin^r a \sin^r b - 2 \cos a \cos b \sin a \sin b + \cos^r a \cos^r b + \sin^r a \sin^r b$$

$$+ 2 \cos a \cos b \sin a \sin b - \cos^r a \cos^r b$$

۱۶۴

الف

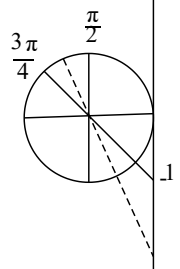
ب

۱۶۵

الف

ب

۱۶۶



۱۶۷



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \cos^2 a \cos^2 b + \sqrt{2} \sin^2 a \sin^2 b - (\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^2 b - \sin^2 b) \\
 &= \sqrt{2} \cos^2 a \cos^2 b + \sqrt{2} \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 a \sin^2 b + \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b \\
 &= \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + \cos^2 a \sin^2 b + \sin^2 a \cos^2 b \\
 &= \cos^2 a (\cos^2 b + \sin^2 b) + \sin^2 a (\sin^2 b + \cos^2 b) = \cos^2 a + \sin^2 a = 1
 \end{aligned}$$

۱۶۸

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{2} \cos \alpha \left(\cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) \left(\cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) \\
 &= \sqrt{2} \cos \alpha \left(\cos^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin^2 \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin^2 \alpha \right) \\
 &= \cos^2 \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\
 &= \cos^2 \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2} \cos^3 \alpha = \sqrt{2} \cos^3 \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha = \cos^2 \alpha
 \end{aligned}$$

۱۶۹

$$\begin{aligned}
 \cos 22.5^\circ &= \cos(45^\circ - 22.5^\circ) = \sin 22.5^\circ \\
 \alpha &= 22.5^\circ \Rightarrow 2\alpha = 45^\circ, \quad \sin 22.5^\circ = x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22.5^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2x^2 \\
 \Rightarrow 2x^2 &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \rightarrow x^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}
 \end{aligned}$$

۱۷۰

$$\begin{aligned}
 \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\
 &= (\sqrt{2} \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - (\sqrt{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha \\
 &= (\sqrt{2} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{2} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha) \\
 &= \sqrt{2} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{2} (1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha \\
 &= \sqrt{2} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2} \cos^3 \alpha = \sqrt{2} \cos^3 \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha
 \end{aligned}$$

۱۷۱

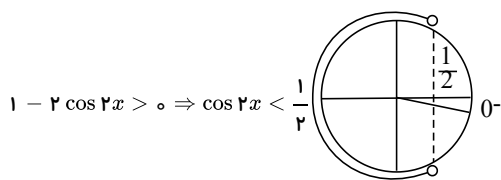
الف

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ}{\sin 2^\circ} &= \frac{\frac{1}{2} \sin 4^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ}{\sin 2^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 8^\circ \cos 8^\circ}{\sin 2^\circ} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 16^\circ}{\sin 2^\circ} = \frac{\sin(16^\circ - 2^\circ)}{8 \sin 2^\circ} = \frac{\sin 14^\circ}{8 \sin 2^\circ} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

ب

$$\frac{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}} = \frac{\cos 2(\frac{\pi}{12})}{\frac{1}{2} \sin 2(\frac{\pi}{12})} = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \sqrt{3}$$

۱۷۲



$$1 - \sqrt{2} \cos 2x > 0 \Rightarrow \cos 2x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با توجه به دایره مثلثاتی تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است یعنی زمانی که $x \rightarrow 0^-$ داخل رادیکال منفی می‌شود و حد موجود نیست.

۱۷۳

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \\
 g(x) &= \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \\
 (f+g)(x) &= \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = 0 \quad (x \neq 0)
 \end{aligned}$$

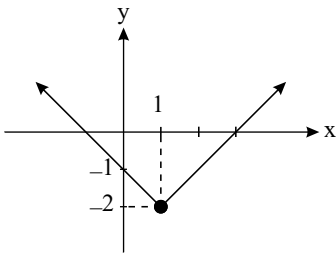
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= -1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 & \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= +1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) &= 0
 \end{aligned}$$

۱۷۴ با استفاده از قضایای حد داریم:



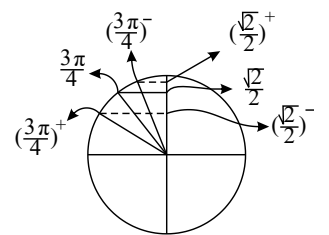
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} = \frac{f(1) - 1}{f(1) + 1} = \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 1 = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$$

$f(x)$ را باید تابعی در نظر بگیریم که در $x = 1$ حد -2 داشته باشد، یکی از آن توابع می‌تواند به صورت فوق باشد.



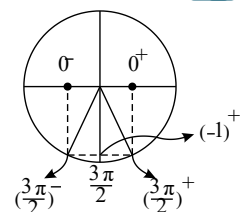
با استفاده از فرمول $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ داریم:

$$\begin{aligned} L^- &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} - \varepsilon)] \\ &= [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4})^-] = [\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon)] = [1 + \sqrt{2}\varepsilon] = 1 \end{aligned}$$



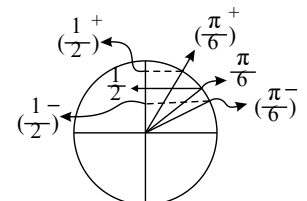
$$\begin{aligned} L^+ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} [\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2} + \varepsilon + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} + \varepsilon)] \\ &= [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4})^+] = [\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon)] = [1 - \sqrt{2}\varepsilon] = 0. \text{ حد ندارد.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^- &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} ([\sin x] + [\cos x]) = [(-1)^+] + [0^-] = -1 - 1 = -2 \\ L^+ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} ([\sin x] + [\cos x]) = [(-1)^+] + [0^+] = -1 + 0 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} ([\sin x] + [\cos x]) &= \text{حد ندارد.} \end{aligned}$$



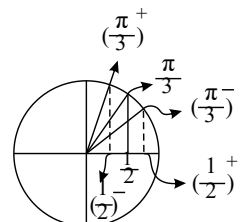
$$L^- = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [2 \sin x] = [2(\frac{1}{2} - \varepsilon)] = [1 - 2\varepsilon] = 0.$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} [2 \sin x] = [2(\frac{1}{2} + \varepsilon)] = [1 + 2\varepsilon] = 1. \text{ حد ندارد.}$$



$$L^- = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [2 \cos x] = [2(\frac{1}{2} + \varepsilon)] = [1 + 2\varepsilon] = 1$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} [2 \cos x] = [2(\frac{1}{2} - \varepsilon)] = [1 - 2\varepsilon] = 0. \text{ حد ندارد.}$$

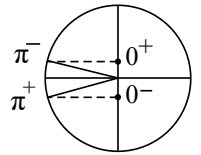


مثل آب خوردن ۲۰ بگیر

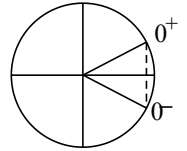


$\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x] = [\circ^+] = \circ$. حد ندارد

$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x] = [\circ^-] = -1 \Rightarrow$



ب



$\lim_{x \rightarrow \circ} [\cos x] = [1^-] = [1 - \varepsilon] = \circ \Rightarrow$

از آنجائیکه $x \rightarrow -2$ مخرج کسر را صفر می‌کند پس باید صورت کسر هم صفر شود تا مبهم صفر صفرم تولید شود بنابراین داریم:

$$x^2 + ax + b = \circ \xrightarrow{x=-2} 4 - 2a + b = \circ \Rightarrow b = 2a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2a - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4 + ax + 2a}{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2) + a(x+2)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2+a)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2+a}{x^2-2x+4} = \frac{-4+a}{12} = 4 \Rightarrow -4+a = 48 \Rightarrow \boxed{a=52}$$

$$b = 2a - 4 = 2 \times 52 - 4 = 104 - 4 = 100 \Rightarrow \boxed{b=100}$$

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1 - 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{1+1-1}{-1-1} = \frac{-1}{2}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + 2x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)}{x^2 + x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 3}{x+2} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + \sqrt{x}} - 2}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{3x + \sqrt{x}} + 2}{\sqrt{3x + \sqrt{x}} + 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + \sqrt{x} - 4)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{3x + \sqrt{x}} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(3x + \sqrt{x} - 4)}{4(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 4)}{4(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(3\sqrt{x} + 4)}{4(\sqrt{x} + 1)} = \frac{3 \times 7}{4 \times 2} = \frac{21}{8}$$

$$\sqrt[5]{x} = t \Rightarrow x = t^5, x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^5 \sqrt{t^5} - 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^5 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{(t-1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = \frac{\circ}{\circ} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{2 \cos \frac{x}{2} \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{2 \times 1 \times 1}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{\circ}$$

حد ندارد.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos 2x}{x^2 (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x) + 1 - \cos 2x}{x^2 (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 x}{x^2 (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \times (\frac{x}{2})^2 + 2x^2}{x^2 (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 2x^2}{x^2 (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2 (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \frac{3}{4}$$

۱۸۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(2x - \pi)}{2x - \pi} = 2$$

۱۸۵

روش اول

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

روش دوم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

۱۸۶

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(2x - \pi)}{2x - \pi} = 2$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x} = \frac{1}{2}$$

۱۸۷

می‌دانیم: $\sin u \sim u$, $\tan u \sim u$ as $u \rightarrow 0$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{\frac{\pi}{2}(1 - x)} = \frac{2}{\pi}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2})(1 + \sqrt{x})}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\pi}{2}(1 - x)(1 + \sqrt{x})}{1 - x} = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$$

تابع در $x = 1$ ناپیوسته است. فقط پیوستگی راست دارد. $f(1) = \pi = L^+ \neq L^-$

۱۸۸

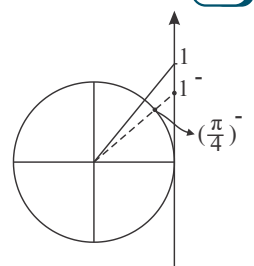
$$L^- = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} a[\tan x] + x = a[1^-] + \frac{\pi}{2} = a \times 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} b \cos \left[\frac{x}{\lambda} \right] = b \cos \left[\left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^+ \right] = b \cos 0 = b \times 1 = b$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{1}{\pi} \right] + a = \left[\frac{1}{\pi} \right] + a = 1 + a$$

$$\left[b = \frac{\pi}{2} \right], 1 + a = \frac{\pi}{2} \rightarrow \left[a = \frac{\pi}{2} - 1 \right]$$

$$f(x) = [2x] \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$$



۱۸۹

مثل آب خوردن ۲۰ بگیر



اعداد صحیح: $2x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow x = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = [-2] = -2, L^+ = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} [2x] = [2(-1 + \varepsilon)] = [-2 + 2\varepsilon] = -2$$

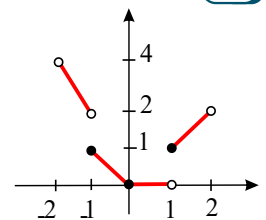
تابع در $x = -1$ پیوستگی راست دارد.

$$x = 2 \rightarrow f(2) = [4] = 4, L^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} [2x] = [2(2 - \varepsilon)] = [4 - 2\varepsilon] = 3$$

تابع در $x = 2$ پیوستگی چپ ندارد.

نقاط ناپیوستگی $x: -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$

$$\begin{aligned} y &= x[x], \quad x \in (-2, 2) \\ -2 < x < -1 &\Rightarrow y = -2x \quad A \left| \begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right. \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow y = -x \quad A \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow y = 0 \quad A \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow y = x \end{aligned}$$



تابع در دو نقطه از این فاصله ناپیوستگی دارد. نقاط $x = -1, 1$

۱۹۰