



تیم مهمات دانشگاه شریف

آموزش رایگان و با کیفیت برای همه



@SHARIF_IE

$y_2 = -t y_1' - \frac{y_1}{y_2} = -t$
 $y = 2e^{5t/2}$
 $y' = 5e^{5t/2}$
 $y_2 \neq t^{-1}$
 $\frac{dy}{dt} = 5$
 $u(e^t + u)$
 $t = \frac{2}{5}$
 $z = e^t$

به نام خدا



آزمون میان ترم درس معادلات دیفرانسیل
 نیم سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴
 مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

$(2u+1)(2u-1) = 4u^2 - 1$
 $(2u)^2 - 3(2u) - 1 = 0$
 $4u^2 - 6u - 1 = 0$
 $3 = 4u - \frac{1}{u}$
 $3u^2 - 4u + 1 = 0$
 $3u = 4u^2 - 1$
 دانشگاه علوم ریاضی

- این آزمون شامل ۶ سوال است. پاسخ سوالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سوال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان مجاز نیست.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

y_1, y_2
 $y_1' y_2 - y_1 y_2' \neq 0$
 $y_1 = e^t$
 $y_2 = 5t + 2$
 $u e^t + u^2 = 0$

۱. فرض کنید $y_1 = e^t$ یک جواب معادله $e^t y' = y^2 + e^t y - e^{2t}$ است. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را به دست آورید: (۱۵ نمره)

$y' = p$
 $\frac{dy}{dt} = p$
 $\frac{y_1}{y_2} \neq \frac{y_1'}{y_2'}$
 $\frac{dy}{dt} = p$
 $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dp}{dt}$
 $\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t^3}$

$(t + 2y + 3) + (3t + 6y - 1) \frac{dy}{dt} = 0$

راهنمایی: از تغییر متغیر مناسب استفاده کنید. (۱۵ نمره)

۳. با فرض $\cos y + 2e^{-t} \cos t \neq 0$ و $y \neq 0$ ، عامل انتگرال‌سازی به صورت $\mu(t, y) = y f(t)$ برای معادله زیر بیابید و سپس آن را حل کنید: (۲۰ نمره)

$y f(t) \left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-t} \sin t \right) + \left(\frac{\cos y + 2e^{-t} \cos t}{y} \right) \frac{dy}{dt} = 0$

۴. با فرض اینکه معادله دیفرانسیل زیر جوابی به صورت $y_1 = t^\alpha$ دارد، ابتدا α را به دست آورید. سپس با استفاده از روش کاهش مرتبه جواب y_2 (مستقل خطی با y_1) را برای این معادله بیابید: (۱۵ نمره)

$ty'' + (2 + 2t)y' + 2y = 0, t > 0$
 $\frac{\partial M}{\partial y} = f \left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-t} \sin t \right) + y f \left(\frac{\cos y + 2e^{-t} \cos t}{y} \right) = \frac{f \sin y}{y} - 2e^{-t} \sin t + f \cos y - \frac{f \sin y}{y}$

$\frac{\partial N}{\partial t} = y f \left(\frac{\cos y + 2e^{-t} \cos t}{y} \right) + y f \left(\frac{2(-e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t)}{y} \right) = f \cos y + 2f e^{-t} \cos t - 2f e^{-t} \sin t$

$y = y' \Rightarrow y = \frac{dy}{dt}$
 $y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = y dy$
 $y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = y dy$

۵. فرض کنید سه تابع $\phi_1(t) = t(1 - 2t)$ ، $\phi_2(t) = 2t(1 - t)$ و $\phi_3(t) = t(e^t - 2t)$ ، سه جواب خصوصی معادله زیر باشند، بطوریکه $P(t)$ ، $Q(t)$ و $R(t)$ توابعی پیوسته روی بازه $[a, b]$ با فرض $a > 0$ هستند:

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = R(t).$$

جواب عمومی معادله زیر را با استفاده از روش تغییر پارامتر به دست آورید: (۲۰ نمره)

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = te^t.$$

۶. الف) فرض کنید $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ دو جواب معادله زیر هستند:

$$\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dy}{dt} \right) + q(t)y = 0,$$

بطوریکه $p(t)$ تابعی ناصفر است. نشان دهید

$$p(t) \left(\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t) \right) = C,$$

بطوریکه C عددی ثابت است. (۱۰ نمره)

ب) فرض کنید توابع $p(t)$ و $q(t)$ روی $(-a, a)$ پیوسته هستند. با استدلال کامل توضیح دهید که آیا $\phi_1(t) = t^5$ و $\phi_2(t) = t^7$ می‌توانند دو جواب معادله

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

روی بازه $(-a, a)$ باشند یا خیر. (۵ نمره)



تیم مهمات دانشگاه شریف

آموزش رایگان و با کیفیت برای همه



@SHARIF_IE